Aegridade analüüs

Raul Kangro

Tartu, 2016 sügis

Sisukord

Sissejuhatus

Nii firmade kui ka tavainimeste elus mängivad suurt rolli ajas toimuvad ning teatud juhuslikkuse komponenti sisaldavad sündmused, mille efekt on sageli väljendatav erinevatele ajahetkedele vastavate numbrite jadadena ehk aegridadena. Näitena võib tuua sissetulekud ja väljaminekud, toodete läbimüügi maht, päevaste ja kuiste sademete hulk jms. Sellistes valdkondades juhuslikkus toob kaasa riske, mille haldamiseks on väga tähtis osata juhuslikkuse iseloomu kindlaks teha, mineviku andmete põhjal võimalikult täpseid prognoose leida ning mõningatel juhtudel ka ebasoovitavate tendentside ilmnemisel õigeaegselt sekkuda. Kõike seda võimaldab aegridade teooria.

Ajalooliselt on praktikute poolt kasutusele võetud mitmeid **meetodeid** aegridadega seotud ülesannete (nt. trendi leidmine, tulevikuväärtuste prognoosimine jms) lahendamiseks. Meetodi all mõistame siin kursuses arvutuseeskirja, mille rakendamine peaks andma soovitud tulemuse. Meetodid tuginevad enamasti nn tervel mõistusel ja intuitsioonil ning neid võib rakendada suvalisele ajas järjestatud andmete kogumile, kuid lahtiseks jääb küsimus tulemuste tegelikkusele vastavuse ja usaldusväärsuse osas.

Selleks, et olla (piisavalt) kindel selles, et arvutatud tulemused kajastavad reaalsust ning on kasutatavad ka tuleviku prognoosimisel, tuleb lähtuda aegrea matemaatilistest **mudelitest**. Mudel on matemaatiline kirjeldus selle kohta, kuidas juhuslikkus mõjutab aegreale vastavate andmete tekkimist. Mudelist lähtuvalt on võimalik kontrollida selle sobivust konkreetse aegrea kirjeldamiseks ning tuletada teoreetiliselt põhjendatud arvutuseeskirjad vaadeldavale mudelile vastava aegrea erinevate komponentide leidmiseks ning tuleviku prognoosimiseks koos konkreetsete usalduspiiridega leitavate hinnangute jaoks. Aegridade teooria seisneb mudelite kirjeldamises ja nendele vastavate arvutuseeskirjade ning veahinnangute tuletamises.

Teooria rakendamine koosneb mitmetest etappidest, milleks on

1. Sobiva matemaatilise mudeli valik. Nagu me kursuse jooksul näeme, on võimalike mudelite hulk väga lai ning äärmiselt tähtis on leida võimalikult lihtne mudel, mis võimaldaks tegelikkust adekvaatselt kirjeldada.

2. Leitud mudeli kalibreerimine (ehk sobitamine) olemasolevate andmetega ning saadud konkreetse mudeli kirjeldusvõime kontroll. Kui selgub, et kirjeldusvõime on liiga madal, siis tuleb minna tagasi mudeli valiku juurde.

3. Kalibreeritud mudeli kasutamine tuleviku ennustamiseks, ennustuste veapiiride kindlakstegemine, vajadusel sobivate juhtimismehhanismide valik soovitud

tulemusest tekkinud kõrvalekallete vähendamiseks.

Kõiki neid küsimusi (välja arvatud juhtimismehhanismide valik) vaadeldakse käesoleva kursuse raames. Samas tuleb silmas pidada, et tegemist on sissejuhatava kursusega aegridade teooriast ning küllalt palju olulisi mudeleid ning tehnilisi vahendeid jääb selle kursuse raames käsitlemata. Aegridade teooria aktuaalsusest annab aga tunnistust näiteks see fakt, et 2003. aasta Nobeli majanduspreemia anti välja just aegridade teooria alaste tööde põhjal (R.F. Engle)

Peatükk 1

Tähistused ja mõisted. Aegridade intuitiivne käsitlemine

Mitteformaalselt on aegrida mingi ajas muutuva ja juhuslikest teguritest sõltuva suuruse erinevatele järjestatud ajavahemikele vastavate väärtuste kogum. Selleks võib olla näiteks teatud ajavahemike tagant mõõdetud konkreetse inimese kaal, aktsiahind, firma aastane kasum, kindlustusfirmale laekuvate kahjunõuete kogusumma päevade kaupa vms. Kui mõõtmised toimuvad pidevalt, siis on tegemist pideva ajaga aegreaga, vastasel korral öeldakse, et aegrida on diskreetse ajaga. Käesolevas kursuses käsitleme ainult selliseid diskreetse ajaga aegridasid, kus väärtused vastavad võrdsete ajavahemike tagant tehtud mõõtmistele. Olgu selle ajavahemiku pikkus h, seega eeldame, et huvipakkuva suuruse Z väärtusi mõõdetakse ajamomentidel $\tau_i = \tau_0 + i\,h$, kus $i \in \mathbb{N}$ või $i \in \mathbb{Z}$. Selleks, et hoida tähistusi võimalikult lihtsana ning olla kooskõlas aegridade alase kirjanduse tavadega, tähistame ajamomendile τ_t vastavat juhuslikku suurust Z kujul Z_t ning selle teadaolevat väärtust kujul z_t, kus t on täisarvuline (või naturaalarvuline) indeks. Erinevalt paljudest muudest statistilistest andmestikest ei saa aegridade puhul üldjuhul eeldada, et rea moodustaksid mingi konkreetse jaotusega juhusiku suuruse sõltumatud vaatlused. Sageli ei saa eeldada, et erinevatele ajamomentidele vastavad väärtused oleksid sama jaotusega, näiteks võib aja muutudes hajuvus või keskmine muutuda. Isegi kui sama jaotuse eeldus on põhjendatud, ei ole vaatlused reeglina sõltumatud (näiteks järgmine väärtus võib oluliselt olla mõjutatud hetkeväärtusest). Seetõttu tuleb statistiliste mõistete (dispersioon, korrelatsioon jms) ja vahendite (nt regressioonanalüüs) rakendamisel aegridadele olla äärmiselt ettevaatlik. Näiteks on üsna absurdne rääkida mingi konkreetse aktsia hinna dispersioonist, kasutades selle aegrea põhjal arvutatud vastavat suurust (mõelge järele, miks see nii on!).

1.1 Aegrea komponendid

Aegreaga kirjeldatud juhusliku suuruse muutumisel ajas võib olla mitmeid erinevaid põhjuseid:

- Ümbritseva (majandus)keskkonna, firma juhtimiskultuuri vms tegurite pika-ajaline mõju. Muude mõjutegurite puudumisel peaks see avalduma rea väärtuste kindlasuunalistes muutustes (kasvamises või kahanemises), mida nimetatakse **trendiks**.

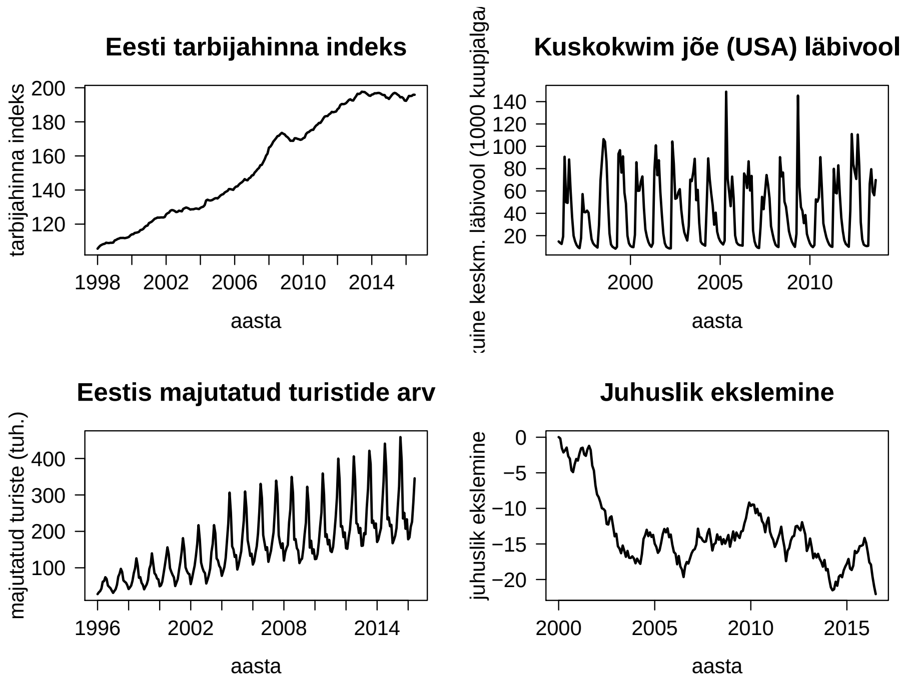
- Kellaajast, nädalapäevast, kalendrikuust vms sõltuvad kindla perioodiga muutused. Kui perioodiks on aasta, siis nimetatakse selliseid muutusi **sesoonseteks muutusteks**.
- Jooksva aasta kalendrist sõltuvad muutused. Osade vaadeldavate suuruste väärtused sõltuvad näiteks töö- või kalendripäevade arvust kuus või kvartalis.
- Ebaregulaarsed, lühikeste ajavahemike järel toimuvad muutused.

Majandusest rääkides eristatakse sageli veel pikaajalist kindla suunaga muutumist ning nn majandustsüklist sõltuvaid ebaregulaarse pikkusega küllaltki pikaajalisi tõuse ja langusi, kuid andmete põhjal on neid muutumise tüüpe praktiliselt võimatu eristada. Aegrea osadeks jaotamisel nimetatakse seetõttu sageli suhteliselt aeglaselt toimuvat muutumist trend-tsükliks (inglise keeles *trend-cycle*).

Oluline on aga mõista, et eelnevalt toodud kirjeldused trendi ja sesoonse (perioodilise) komponendi kohta ei ole matemaatilised definitsioonid ning erinevad inimesed võivad neid mõsta erinevalt. Sageli mõeldakse trendi all konkreetsemalt ühtlast (lineaarset) kasvamist/kahanemist või vastava sirge tõusu; samuti võidakse selle all mõelda nii üldist, kogu aegrida kirjeldavat muutust kui ka lokaalset, lühemaajalist muutumise suunda, mille suurus ja suund võib ajas muutuda. Konkreetse tähenduse omandavad need mõisted alles siis, kui on matemaatiliselt kirjeldatud, kuidas aegrida nendest osadest kokku pandud on ning kuidas need ajas muutuda võivad.

Vaatlema näidetena kahte kuude kaupa defineeritud Eesti Statistikaameti veebilehelt `www.stat.ee` 2016a augusti lõpus allalaaditud aegrida (tarbijahinna indeksit ning majutatud turistide arvu), Kuskokwim jõe (Alaska, USA) vooluandmeid (veebilehelt `waterdata.usgs.gov`) ning R tarkvara abil genereeritud juhusliku ekslemist (igal sammul liideti eelnevale väärtusele standardse normaaljaoutsega juhusliku suuruse väärtus). Graafikud on kujutatud joonisel 1.1.

Joonise põhjal paistab, et tarbijahinna indeksil on selgelt kasvav trend ning silmaga nähtavaid sesoonseid muutuseid ei paista. Samas aga majutatud turistide arvu aegreal paistab olema nii kasvav trend kui ka selge sesoonne komponent.Jõevoolu andmestik on näide ilma trendita reast, millel on täheldatav teatav perioodilisus. Juhusliku ekslemise rida on aga heaks näiteks sellest, et lihtsalt vaatluse põhjal on väga raske teha korrektseid järeldusi aegrea komponentide kohta. Nimelt on selge, et juhuslikul ekslemisel ei ole mingit vähegi püsivat muutumise suunda ning tuleviku ennustamisel ei oma senine kasvamine mitte mingisugust rolli. Kui trend peaks väljendama rea tulevikukäitumist juhuslike häirituste puudumisel, siis ei ole juhuslikul ekslemisel mingit trendi. Keskmine väärtus on aga ajas selgelt kahanenud, seetõttu öeldakse sellist graafikut vaadates sageli ikkagi, et tegemist on trendiga reaga. Mõnedes artiklites/käsitlustes nimetatakse sellist kasvamist, mis ei oma infot tuleviku kohta, stohhastiliseks trendiks. Igal juhul on selge, et trendi mõiste on ilma täiendavate täpsustusteta väga ebamäärane.



Joonis 1.1: Nelja aegrea graafikud

Käesoleval kursusel vaatleme põhiliselt aegridade stohhastilisi mudeleid, mille korral ei ole eelmainitud komponente vaja eraldi välja tuua. Samas on aga ka komponentidel põhinevad lähenemised laialt levinud ning seetõttu tutvume kõigepealt mõningate lihtsate ideedega, mida on võimalik kasutada etteantud rea osadeks lahutamiseks ning ka nendele osadele põhinevaks prognoosimiseks.

1.1.1 Trendi leidmise meetodid

Trendi puhul eristatakse nn globaalset, ajas muutumatu iseloomuga trendi ja lokaalset trendi, mis võib ajas pikkamööda muutuda.

Globaalse trendi eraldamine

Mõnikord on otstarbekas eeldada, et vaadeldava juhusliku suuruse pikaajalist käitumist ajas iseloomustab mingi küllalt lihtsal kujul olev funktsioon (lineaarne, ruutfunktsioon, trigonomeetriline funktsioon, eksponentfunktsioon), mille ümber toimub võnkumine ebaregulaarsete häirituste ning perioodilise mõjutegurite tõttu. Vaatleme lihtsuse mõttes ainult juhtu, kus perioodilist komponenti ei ole; sel juhul tehakse sageli oletus, et aegrea andmed on kujul

$$z_t = f(\beta, t) + v_t,$$

kus f on mingi teadaolev parameetritest $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)'$ sõltuv funktsioon ning v_t on juhuslik kõrvalekalle. Pärast kuju fikseerimist tuleb valida sobiv moodus tundmatute parameetrite määramiseks. See moodus peaks rahuldama mitmeid tingimusi:

1. Parameetrite leidmise moodus peaks vastama mingile ülesande sisu arvestavale moodusele trendikõvera poolt tehtavate prognooside vigade arvestamiseks
2. Kui andmed vastavad otsitud kujul kõverale (st müra ei ole), siis meetodi abil leitud kõver peaks õige (st leitud parameetrite korral peaks siis trendikõver langema andmetega kokku)
3. Parameetrite leidmise moodus ei tohi olla arvutislikult liiga töömahukas

Tähtis on teada, et mõistlikke ja laialtkasutatavaid prognoosivigade mõõdikuid on mitu. Sageli kasutatavaks mõõdikuks on vigade ruutude summa (SSE, sum of squared errors) või siis sellega samaväärne keskmine ruutviga (MSE, mean squared error). Vastavaks meetodiks parameetrite β leidmiseks on vähimruutude meetod, mille korral leitakse β avaldise

$$SSE = \sum_t (f(\beta, t) - z_t)^2,$$

minimiseerimise teel. Summeerimine toimub siinjuures üle kõikide teadaolevate andmete. Üheks alternatiivseks headuse mõõdikuks on keskmine absoluutviga (MAD, mean absolute deviation, või MAE, mean absoulute error)

$$MAD = \sum_t |(f(\beta, t) - z_t)|$$

ning võimalikke kasutatavaid mõõdikuid on veelgi (keskmine absoluutne protsentuaalne viga jne). Milline mõõdikutest iseloomustab trendikõvera headust prognoosimiseks kõige paremini, sõltub konkreetsest ülesandest ja andmete iseloomust. Siin kursuses piirdume aga SSE kasutamisega.

Tihti loetakse heaks suvalist funktsiooni f, mille korral saavutatakse vaadeldava mõõdiku piisavalt väike väärtus ning kasutatakse seda funktsiooni (trendi) tuleviku ennustamiseks. Selline lähenemine on aga sageli põhjendamatu, sest eriti aegridade puhul ei pruugi mineviku andmetega hästi sobiv funktsioon tuleviku ennustamiseks üldse sobida. Selleks, et veendunud olla vaadeldava meetodi sobivuses konkreetse andmestiku jaoks, tuleb lähtuda aegrea mudelist, mille korral vastav meetod annab mõistliku tulemuse. Selliseks mudeliks on

$$Z_t = f(\beta, t) + A_t,$$

kus A_t on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused (tegelikult piisab ka mittekorreleeritusest ja konstantsest dispersioonist). Juhul, kui funktsioon f sõltub kordajatest β lineaarselt, nimetatakse sellist lähenemist statistikas ka lineaarseks regressiooniks; mittelineaarse sõltuvuse korral on tegemist mittelineaarse regressiooniga. Seega võime lugeda tulemusi usaldatavateks siis, kui pärast parameetrite leidmist järgi jäävad vead võib lugeda sõltumatute juhuslike suuruste väärtustele vastavaks; aegridade puhul juhtub seda harva.

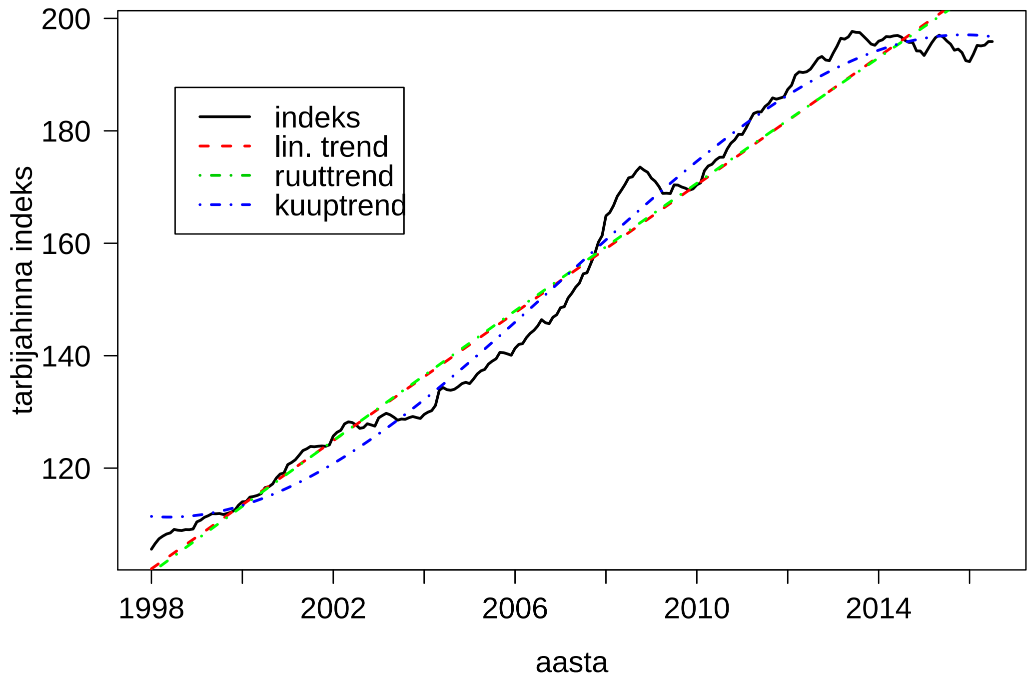
Vaatleme näitena lineaarse, ruut- ja kuupfunktsiooni sobitamist eelnevalt vaadeldud tarbijahinna indeksi andmetele. Näiteks lineaarse trendi sobitamise korral on funktsiooni f kujuks

$$f(\beta, t) = \beta_1 + \beta_2 t$$

ning vähimruutude meetodil saame parimaks lineaarseks lähendiks

$$f(\hat{\beta}, t) = 101,6 + 0,47\,t,$$

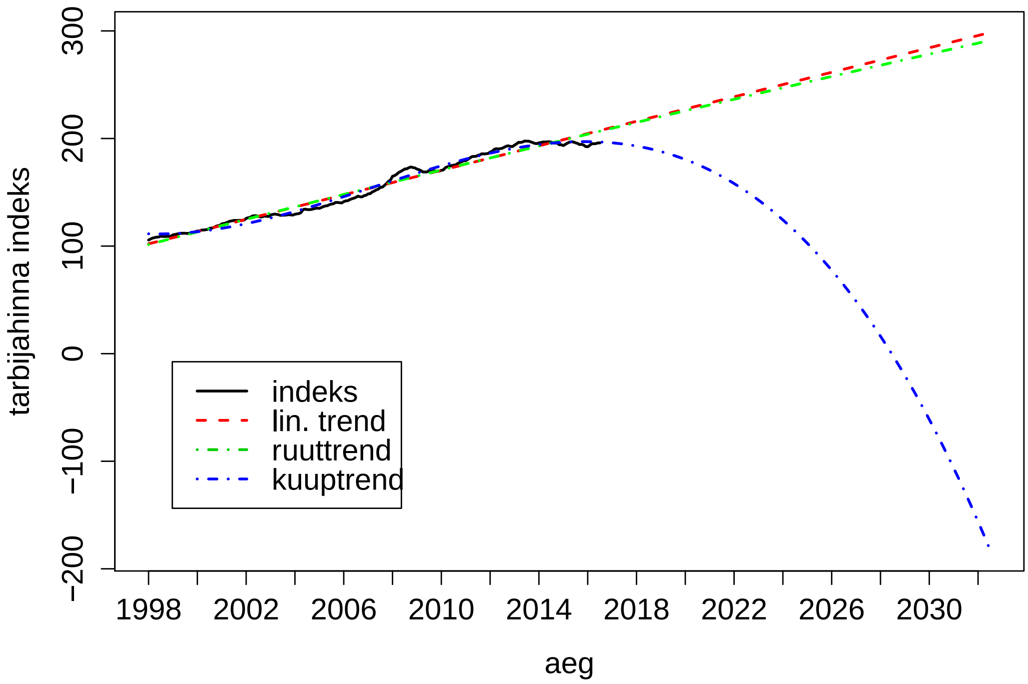
kus t on väljendatud kuudes alates 1998-nda aasta algusest (st 1998 jaanuar vastab väärtusele $t = 1$). Joonisel 1.2 näeme tarbijahinna indeksi väärtuseid koos lineaar-



Joonis 1.2: Tarbijahinna indeksi globaalse trendi hinnangud

sele, ruut -ja kuuptrendile vastavate kõveratega. Kasutades nende kõverate sobitamiseks mingit statistikatarkvara, võib kogenematul statistika rakendajal jääda mulje, et nad kõik on väga head tarbijahinna indeksi käitumise kirjeldamiseks (determinatsioonikordajad on vägagi lähedased ühele). Samas on aga selge, et üldine majanduskeskkond on muutuv ning seetõttu on globaalse trendi olemasolu vägagi kaheldav; konkreetselt ei rahulda vaadeldud juhtudel andmed regressioonanalüüsi eelduseid (jääkide sõltumatus!) ja seetõttu tarkvara poolt väljastatud head sobivusnäitajad ei oma mõtet. Ka kaine mõistus peaks manitsema ettevaatusele: globaalse trendi eeldamine võib pikemas perspektiivis tähendada küllalt omapäraste tulemuste aktsepteerimist.

Lisades eelmisele graafikule trendikõverate poolt ennustatavad käitumised järgmiseks 16ks aastaks (vt. joonis 1.3), ennustavad lineaarne ning ruuttrend tarbijahinna indeksi kasvu, kuuptrendi uskumine aga tähendab, et 16 aasta pärast saab iga poeskäija lisaks kaubale ka ostmise vaevatasuks kopsaka rahasumma. Kokkuvõtteks: globaalse trendi olemasolu eeldus on praktilises andmeanalüüsis väga harva õigustatud



Joonis 1.3: Tarbijahinna indeksi globaalsete trendide tulevikuprognoosid

ning lihtsa regressiooni abil sobitatud trendikõverate kasutamisel tuleviku ennustamiseks tuleb olla väga ettevaatlik. Konkreetseid meetodeid selle kindlakstegemiseks, et vaadeldud trendimudelid ei sobi käesoleval juhul tuleviku ennustamiseks, vaatleme hilisemates alapunktides.

Lokaalse trendi eraldamine

Kuna globaalse trendi olemasolu on väga harva põhjendatav, siis mõistetakse trendikõvera all enamasti aegrea suhteliselt aeglaselt muutuvat, "siledat" osa. Kahjuks ei ole aga olemas üldiselt aktsepteeritavat lokaalse trendi definitsiooni, mistõttu ei ole tegemist matemaatilise mõistega ning seetõttu on trendist rääkides vaja alati täpsustada, mida konkreetsel juhul selle all mõistetakse.

Järgnevalt eeldame, et andmed on kujul

$$z_t = T_t + I_t,$$

kus T_t vastab trendile ja I_t kirjeldab müra ehk ebaregulaarseid häiritusi. Loomulik eeldus sellise esituse puhul on see, et häiritused toimuvad nulli ümber, st vähegi pikema vaatlusperioodi korral peaks keskmine üle vastavate väärtuste olema nullilähedane. Seega peaks olema võimalik keskmistamise teel aegreast müra eemaldada, seda protsessi nimetatakse *silumiseks* või *filtreerimiseks*. Väga sageli seisneb silumine uue aegrea tekitamises nn libiseva keskmise leidmise abil.

Definitsioon 1 *Rea (z_t) teisendust kujul*

$$T_t = \sum_{i=-q}^{r} w_i z_{t-i}, \tag{1.1}$$

kus $q, r \in \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{+\infty\}$, $w_i \geq 0 \forall i \in \mathbb{Z} : -q \leq i \leq r$ ja $\sum_{i=-q}^{r} w_i = 1$, nimetatakse **libiseva keskmise** *leidmiseks. Kui libiseva keskmise korral $q = r$ ja $w_{-i} = w_i$, $i \leq q$, nimetatakse sellist teisendust* **sümmeetriliseks libisevaks keskmiseks**. *Kui libiseva keskmise avaldises on kõik kaalud w_i võrdsed, on tegemist* **lihtsa libiseva keskmisega**.

Mõningad näited:

- Lihtne ühepoolne libisev keskmine LLK(q):

$$T_t = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} z_t.$$

- Lihtne sümmeetriline libisev keskmine LSLK(q):

$$T_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^{q} z_{t-i}.$$

  Sobib ka juhul, kui andmetes on paarituarvulise perioodiga $2q+1$ perioodiline komponent.

- Paarisarvulise perioodiga perioodilise komponendi olemasolu korral kasutatav lihtsa sümmeetrilise keskmistamise modifikatsioon:

$$T_t = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2}(z_{-q} + z_q) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} z_{t-i} \right), \tag{1.2}$$

  kus perioodi pikkuseks on $2q$.

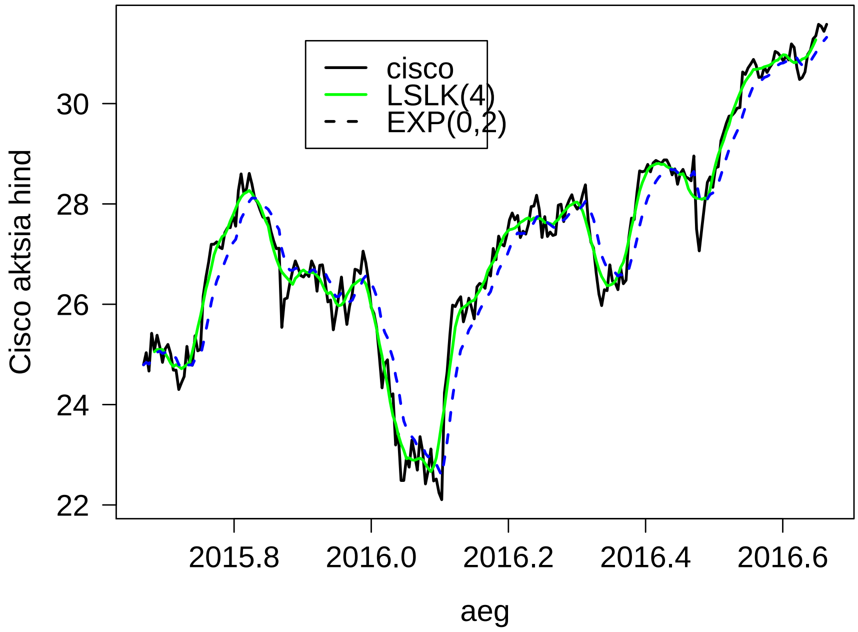
- Eksponentsiaalne silumine:

$$T_t = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i z_{t-i},$$

  kus $\alpha \in (0,\, 1)$ on mingi positiivne number. Praktilistes arvutustes kasutatakse eksponentsilumise omadust

$$T_t = \alpha z_t + (1-\alpha) T_{t-1},$$

  mis võimaldab lihtsalt siluda lõplikku aegrida. Kui α läheneb ühele, siis silumist praktiliselt ei toimu ning mida väiksem on α, seda tugevam on silumine.



Joonis 1.4: Lihtsa sümmeetrilise 9-tööpäevase libiseva keskmise ning eksponentsiaalse silumise ($\alpha = 0,2$) abil teisendatud Cisco aktsia hind

Joonisel 1.4 on toodud näited Cisco aktsia hinna silumisel saadud kõveratest.

Harjutus 1 *Näidata, et eksponentsiaalse silumise korral kehtib võrdus*

$$T_t = \alpha z_t + (1-\alpha)T_{t-1}, \ t \in \mathbb{Z}.$$

Igasugune silumine peaks vähendama müra (eriti kuna müra kohta eeldame, et see on keskmiselt null). Samuti võib argumenteerida, et perioodilise komponendi puudumisel peaks silutud rida olema lähedane trendile, kuna müra on vähenenud ja aeglaselt muutuva trendi korral on selle väärtuste keskmine (vähemalt juhul, kui keskmist arvutatakse üle suhteliselt lühikese perioodi) lähedane tema hetkeväärtusele. Ideaalne oleks aga juht, kus vähemalt lihtsamate trendide korral saaksime müra puudumisel trendikõvera täpselt leida. Osutub, et see on võimalik.

Harjutus 2 *Näidata, et kui aegrea väärtused on antud lineaarse funktsiooni $f(t) = a+bt$ poolt (st $z_t = f(t)$), siis lõpliku arvu nullist erinevate kaaludega sümmeetrilise libiseva keskmise kasutamisel kehtib $T_t = f(t)$.*

Harjutus 3 *Näidata, et ei ole olemas sellist libisevat keskmise leidmise valemit, mille kasutamisel langeks iga ruutfunktsiooni $f(t) = a + bt + ct^2$ puhul rea $z_t = f(t)$, $t \in \mathbb{Z}$ keskmistamisel saadav rida T_t, $t \in \mathbb{Z}$ kokku esialgse reaga, st $T_t = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{Z}$.*

Sümmeetrilist keskmistamist ei ole aga alati võimalik rakendada. Näiteks aegrea lõpuosas puuduvad meil vajalikud tulevikuväärtused ning seetõttu on tuleviku prognoosimisel võimalik kasutada ainult ühepoolseid keskmisi, näiteks eksponentsiaalset keskmistamist. Sel juhul aga ei pruugi keskmistamisel leitud trendikõver isegi müra puudumisel langeda kokku õige trendiga.

Harjutus 4 *Olgu aegrea väärtused antud lineaarse funktsiooni $f(t) = a + b\,t$ poolt (st $z_t = f(t)$). Näidata, et sel juhul eksponentsiaalsel keskmistamisel saadav funktsioon on samuti lineaarne, leida selle kordajad. (Näpunäide: tekkiva lõpmatu summa leidmisel on võimalik kasutada geomeetrilise jaotusega juhusliku suuruse keskväärtuse valemit)*

Mittelineaarsete trendikõverate olemasolul ei anna ka sümmeetriline keskmistamine täpset tulemust, kuid on küllalt lihtne näidata, et juhul, kui andmeid on mõõdetud väikese intervalliga (ehk, ekvivalentselt, kui trendikõver muutub piisavalt aeglaselt), on sümmeetrilise keskmistamise tulemus müra puudumisel vähemalt piisavalt väikese ajaintervalli korral väga lähedane tegelikule trendikõverale. Järgneva ülesande lahendamisel on aga võimalik saada teada, kuidas ühepoolse lihtsa libiseva keskmise kasutamise korral valida optimaalselt silumisakna laiust (ehk parameetri q väärtust).

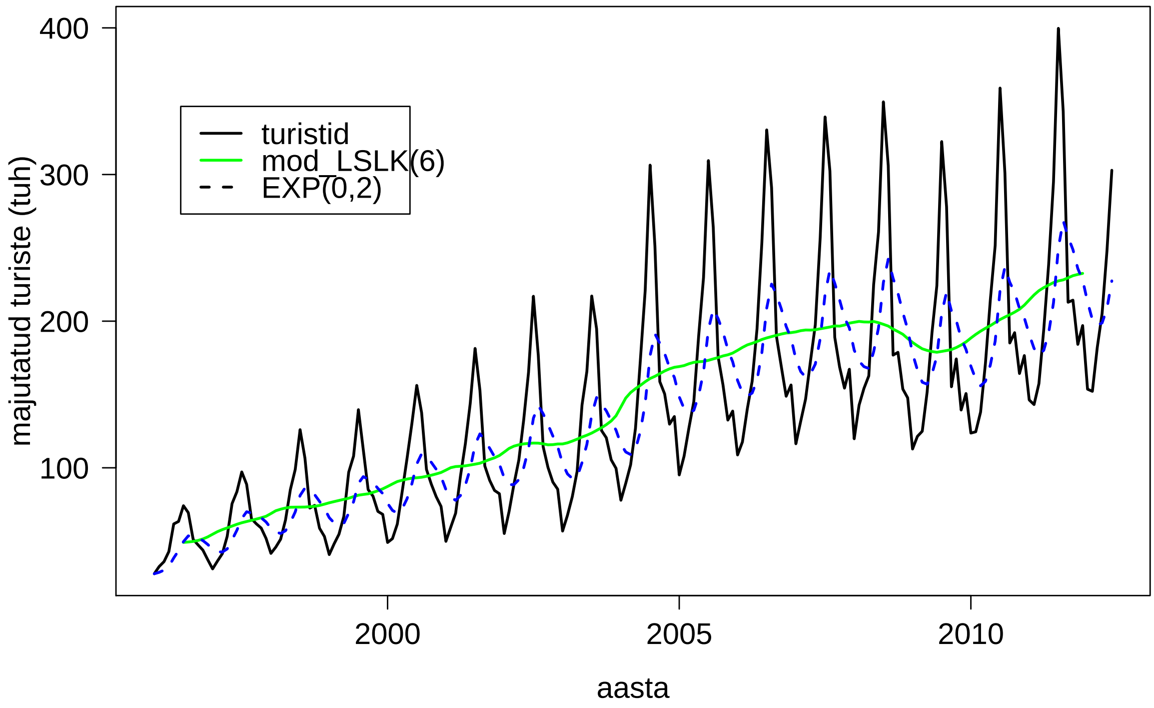
Harjutus 5 *(*) (lisapunktide saamiseks esitamise tähtaeg 22.09.2016) Vaatleme protsessi $Z_t = f(\tau_t) + A_t$, kus $\tau_t = t\,h$, $t \in \mathbb{Z}$ ja h on fikseeritud ajaintervall ning A_t on sõltumatud sama jaotusega ning lõpliku dispersiooniga σ_A^2 juhuslikud suurused. Olgu teada, et $|f'(\tau)| \le c\ \forall \tau \in R$ mingi konstandi c korral ning kehtigu $EA_t = 0$. Leida optimaalne (st kõigi lineaarsete funktsioonide f korral täpne) hinnang suuruste c, q, σ_A kaudu keskmisele ruutveale $E[(Y_t - f(\tau_t))^2]$ kus Y_t on lihtsa libiseva keskmise LLK(q) abil leitud protsess*

$$Y_t = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^{q} Z_{t-i}.$$

Lähtuvalt leitud hinnangust, leida keskmist ruutviga minimiseeriv q väärtus.

Kui perioodilist komponenti sisaldava (sesoonse) rea trendi soovitakse silumise teel eraldada, siis peab silmas pidama, et keskmistamisel on sel juhul kaks eesmärki - juhuslike häirituste eemaldamine ning perioodiliste muutuste eemaldamine. Selleks on võimalik kasutada perioodi pikkusega kooskõlas oleva silumisaknaga keskmistamist, kuna üle terve perioodi summeerimisel peaks perioodiliste muutuste summa null olema. Näitena vaatleme majutatud turistide arvu lihtsat silumist. Kuna periood on antud juhul paarisarvuline (12 kuud), siis kasutame valemit 1.2. Tulemus on toodud joonisel 1.5. Nagu näha, eemaldab antud juhul lihtne keskmistamine aegreast perioodilised võnkumised ning tulemust võime lugeda trendikõveraks samal ajal, kui eksponentsiaalse keskmistamise korral jäävad silutud aegritta perioodilised muutused alles. Näitame ka matemaatiliselt, et perioodilist komponenti sisaldava rea silumine eelmainitud tüüpi keskmistamise korral aitab küllalt hästi trendi eraldada. Selleks näitame, et kui andmed on kujul

$$z_t = a + b\,t + g(t),$$



Joonis 1.5: Paarisarvulisele perioodile vastava lihtsa sümmeetrilise keskmistamise modifikatsiooni abil silutud majutatud turistide arv ajas

kus g on perioodiga $2q$ funktsioon (st $g(t+2q) = g(t)\ \forall t$), siis valemiga (1.2) saadud silutud rida langeb kokku trendiga. Selleks, et lahutus trendiks ja perioodiliseks osaks oleks üheselt määratud, nõuame täiendavalt, et $\sum_{i=1}^{2q} g(t-i) = 0\ \forall t$. Seega on meie eesmärgiks näidata, et $y_t = a + b\,t$. Arvutame:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{2}(z_{-q} + z_q) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} z_{t-i}\right) \\
&= \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{2}(a + b\,(t+q) + g(t+q)) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} (a + b\,(t-i) + g(t-i))\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}(a + b\,(t-q) + g(t-q))\right) \\
&= \frac{1}{2q}\left(\frac{a+b\,t}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} (a + b\,t) + \frac{a+b\,t}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2q}\left(\frac{b\,q}{2} - \sum_{i=-q+1}^{q-1} (b\,i) - \frac{b\,q}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2q}\left(\frac{g(t+q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2}\right) \\
&= a + b\,t + 0 + \quad \frac{1}{2q}\left(\frac{g(t+q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Nüüd kasutame g perioodilisust:

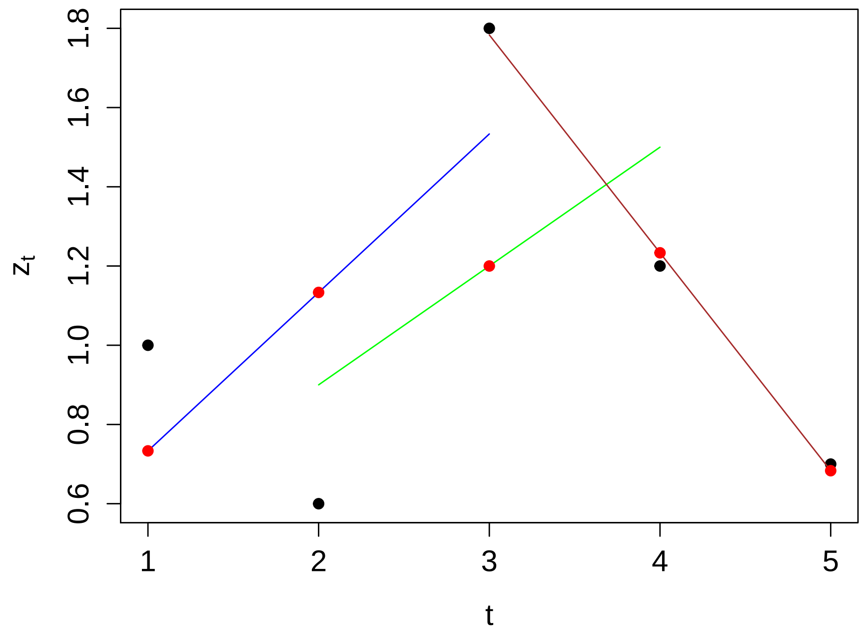
$$
\begin{aligned}
&\frac{g(t+q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2} \\
&\qquad = \frac{g(t-q)}{2} + \sum_{i=-q+1}^{0} g(t-i-2\,q) + \sum_{i=1}^{q-1} g(t-i) + \frac{g(t-q)}{2} \\
&\qquad = \sum_{i=q+1}^{2\,q} g(t-i) + \sum_{i=1}^{q-1} g(t-i) + g(t-q) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{2\,q} g(t-i) = 0.
\end{aligned}
$$

Sellega oleme näidanud, et $y_t = a + b\,t$.

Üheks küllaltki populaarseks meetodiks aegridade silumisel on ka nn *loess* või *lowess* (inglise keeles *locally weighted scatterplot smoothing*) meetod, mis silutud kõvera väärtuse leidmiseks mingis punktis sobitab kaalutud vähimruutude meetodil madala astme polünoomi läbi antud punktile lähedastele ajamomentidele vastavate aegrea väärtuste ning arvutades silutud kõvera väärtuse selle polünoomi abil. Idee tutvustamiseks vaatleme juhtu, kus meil on antud aegrida

$$z = (1, 0.6, 1.8, 1.2, 0.7).$$

Kõige lihtsamal kujul lokaalse regressiooni puhul tuleb otsustada polünoomi aste ning kasutatavate naabrite arv. Vaatleme lineaarset polünoomi (ehk sirget) ning



Joonis 1.6: Lokaalse regressiooni abil aegrea silumine

kasutame silutud rea leidmisel kolme lähimat väärtust (st jooksvale ajahetkele vastavat väärtust ja veel kahele lähimale ajahetkele vastavaid vaatluseid). Silumise protsess on kujutatud joonisel 1.6, kus esialgse aegrea väärtused on kujutatud mustade punktidena. Silutud rea esimese väärtuse leidmiseks leiame vähimruutude meetodil sirge, mis lähendab esimest kolme vaatlust võimalikult hästi (joonisel sinine sirge). Selle sirge väärtus ajal $t = 1$ ongi silutud rea esimeseks väärtuseks (joonisel punane punkt). Silutud rea teise väärtuse leidmine toimub sama sirge abil, kuna kasutusele tulevad samad z väärtused. Kolmanda punkti leidmisel tuleb sobitada sirge läbi teise, kolmanda ja neljanda z väärtuse (joonisel roheline) ning viimased kaks väärtust leitakse läbi viimase kolme z väärtuse sobitatud sirge abil (joonisel pruun).

Praktilisel kasutamisel antakse polünoomi sobitamisel igale kasutatavale z väärtusele veel kaal sõltuvalt selle kaugusest arvutatavast väärtusest. Täpsemalt võib nende meetodite kohta lugeda näiteks Wikipedia artiklist [3].

1.1.2 Dekompositsioonimeetodid. Sesoonne kohandamine.

Aegridade käitumisest arusaamine ja nende tõlgendamine on majanduses väga suure tähtsusega, seetõttu on loodud mitmeid meetodeid ja töövahendeid, mis võimaldavad neid osadeks lahutada. Ennem mõningate enim tunnustatud vahendite tutvustamist aga selgitame kasutatavaid mõisteid.

Aegrea osadeks lahutamisel tuleb kõigepealt otsustada, mismoodi need osad tervikus sisalduvad. Valdavalt vaadeldakse kahte juhtu: **aditiivne dekompositsioon**, mille korral eeldatakse, et vaadeldav juhuslik suurus avaldub kujul

$$Z_t = T_t + S_t + I_t,$$

kus T on trend (või trend-tsükkel), S on perioodiline (sesoonne) komponent ja I on ebaregulaarne (juhuslik) komponent ehk müra; ning **multiplikatiivne dekompositsioon**, mille korral eeldatakse käitumist

$$Z_t = T_t S_t I_t.$$

Niinimetatud klassikalise dekompositsiooni korral eeldatakse mõlemal juhul, et T sisaldab kogu informatsiooni keskmise taseme kohta ning S ja I kirjeldavad kõikumist keskmise ümber, st aditiivse lahutuse korral on S ja I keskmiselt nullid ning multiplikatiivsel juhul väljendavad nad suhet keskmisse väärtusesse (st on ise keskmiselt võrdsed ühega). Multiplikatiivset juhtu on võimalik taandada aditiivsele juhule esialgse aegrea logaritmimise teel. Loomulikult on võimalikud ka vahepealsed variandid, kus esineb nii liitmist kui ka korrutamist.

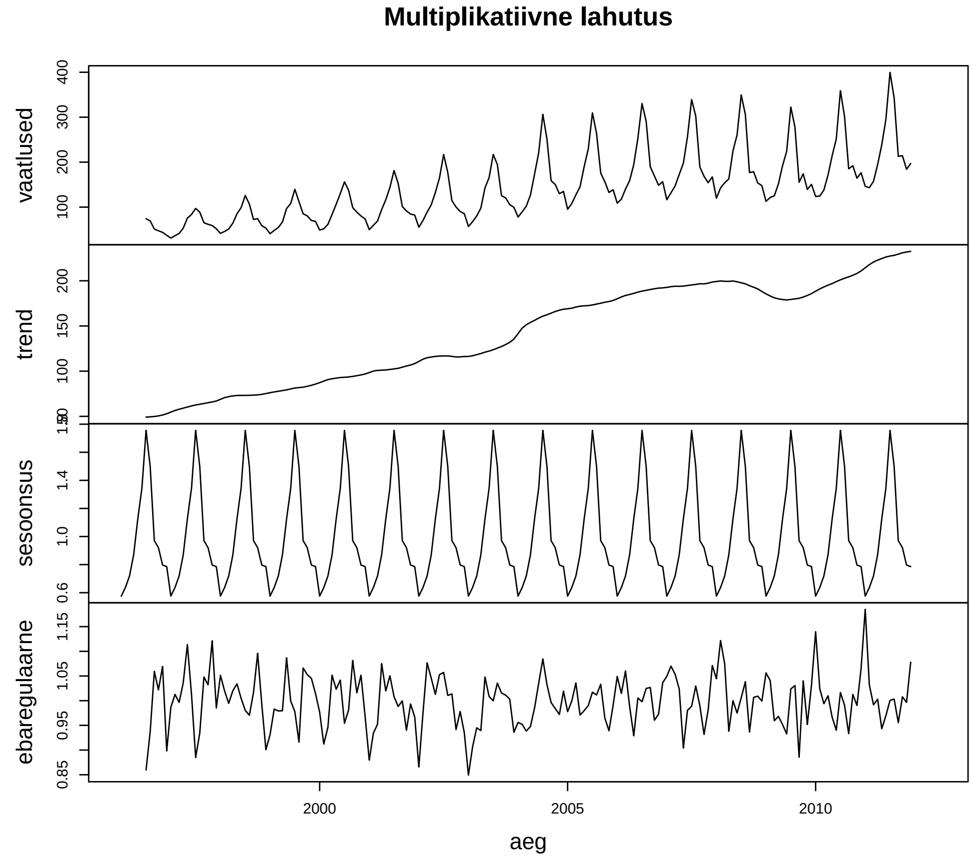
Sageli pakub suurt huvi eriti sesoonse komponendi eemaldamine, mida nimetatakse *sesoonseks kohandamiseks* (*seasonal adjustment*). Sesoonne kohandamine võimaldab paremini võrrelda aegrea järjestikuseid väärtuseid (näiteks uurida, kas majandus on tõusuteel, kui teise kvartali tulemus on parem esimese kvartali tulemusest).

Aegrea nn. klassikaline osadeks lahutamine toimub nii:

- kõigepealt leitakse trend sobiva sümmeetrilise libiseva keskmise abil,
- seejärel eemaldatakse reast trend (lahutades aditiivse rea korral ja jagades multiplikatiivse rea puhul),
- seejärel leitakse perioodiline komponent perioodile vastavaid alamridasid keskmistades,
- leitud perioodiline komponent normeeritakse nii, et aditiivse rea puhul oleks summa üle perioodi null ja multiplikatiivse rea korral oleks keskmine üle perioodi 1,
- Viimasena eraldatakse ebaregulaarne komponent esialgsest reast trendi ja perioodilise osa eemaldamise teel.

Majutatud turistide andmestiku korral saadud tulemused on kujutatud joonisel 1.7 Võimalik on vaadeldud protsessi ka itereerida, et trendi ja sesoonsust paremini eraldada, nimelt võib pärast esimest sesoonse osa leidmist omakorda selle esialgsest reast eemaldada ja seejärel leida uuesti trend (võib-olla teistsuguse libiseva keskmise kasutamisega kui varem), seejärel jällegi eemaldada esialgsest reast trend ja leida uuesti sesoonsus jne.

Eelnev nn klassikaline lahutus omab mitmeid puuduseid: ei ole selge, kas ja millisel määral saab leitud osasid tuleviku prognoosimisel kasutada ning samuti on

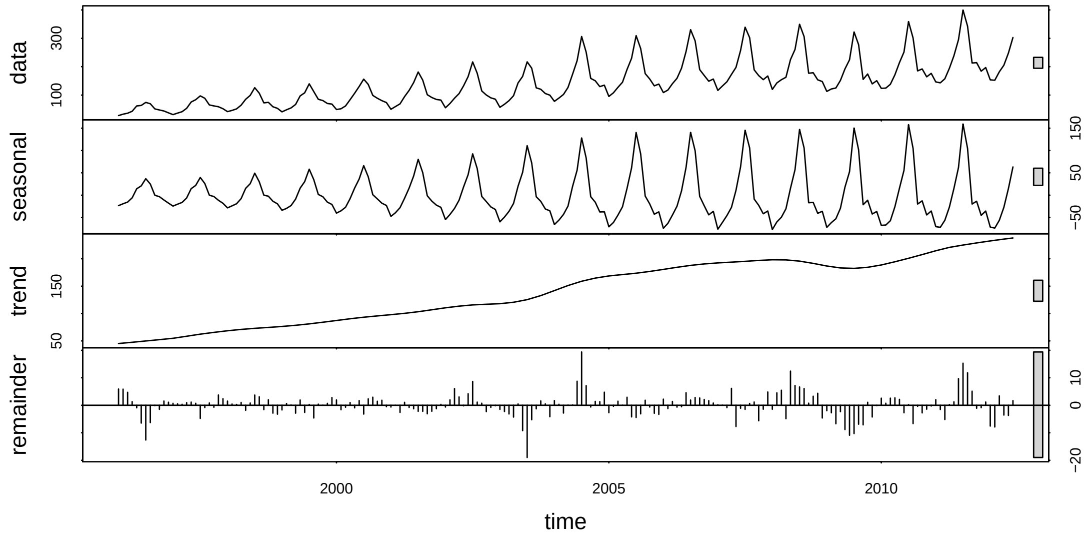


Joonis 1.7: Turistide rea osadeks lahutus multiplikatiivse esituse eeldusel

eeldatud, et sesoonsuse iseloom ajas ei muutu. Seetõttu on välja töötatud mitmesuguseid täiendavate võimalustega osadeks jaotamise vahendeid, kuid lisavõimaluste olemasolu muudab veelgi olulisemaks arusaama, et aegrea osade mõisted ei ole matemaatiliselt defineeritud ning nendest rääkides tuleb alati kokku leppida selles, mida konkreetselt silmas peetakse.

Mainime tuntud meetoditest kahte. Esiteks, STL (*Seasonal-Trend decomposition based on LOESS*) võimaldab jaotada aegrida aditiivseteks komponentideks, on kasutatav ka puuduvate väärtuste korral ning on realiseeritud näiteks tarkvarapaketis R. Teiseks, Ameerika Ühendriikide statistikaameti (*U. S. Census Bureau*) poolt kasutatavad dekompositsiooni ja sesoonse kohandamise meetodid on realiseeritud nende poolt hallatavas ning tasuta allalaaditavas tarkvarapaketis X-13ARIMA-SEATS, mis võimaldab aegreast kõrvaldada erindeid, võtta arvesse töö- ja puhkepäevade efekte, jaotada aegrida nii aditiivseteks kui ka multiplikatiivseteks osadeks ning arvutada ka mitmesugustel meetoditel põhinevaid prognoose ja sooritada diagnostilisi teste. Varasemale versioonile X-12-ARIMA vastav protseduur on olemas ka tarkvarapaketis SAS; tasuta versioonid mitmesuguste operatsioonisüsteemide jaoks on saadaval internetis aadressil [5].

Näitena aegrea osadeks jaotamisel saadavatest tulemustest on joonisel 1.8. STL ka-



Joonis 1.8: STL meetodil saadud majutatud turistide aegrea komponendid

sutamise korral saab valida mitmesuguseid parameetreid trendi ja perioodilise osa leidmise konkretiseerimiseks. Näiteks joonisel toodud juhul on lubatud perioodilisel komponendil ajas küllalt kiiresti muutuda ning seetõttu on tulemus oluliselt erinev sellest, mille saaksime muutumatut perioodilist komponenti eeldades.

Käesoleva kursuse põhirõhk on siiski tuleviku prognoosimisel, mistõttu me rohkem aegrea osadeks jaotamise küsimustel ei peatu.

Peatükk 2

Keskmistamisel põhinevad prognoosimeetodid. Prognoosimudeli headuse mõõdikud

2.1 Silumisel põhinevad lihtsamad prognoosivõtted perioodilist komponenti mittesisaldavate ridade jaoks

Olgu meil antud teatud kogus aegrea väärtusi $z_t,\ t = 1, 2, \ldots, T$. Sageli pakub huvi tulevikuväärtuste võimalikult täpne ennustamine, kusjuures on selge, et me saame selleks kasutada ainult teadaolevaid väärtuseid. Tähistame kujul $\hat{z}_{t_1|t}$ prognoosi aja t_1 jaoks, mis on saadud, kasutades teadaolevaid väärtuseid ajani kuni ajani t ning kui $t_1 = t + 1$, siis kasutame prognoosi jaoks lihtsustatud tähist $\hat{z}_{t_1}$.

2.1.1 Ilma trendita aegrea prognoosimine

Kui aegrea väärtused tunduvad käituvat täiesti juhuslikult või kui trendist põhjustatud muutlikuse osa on väga väike, siis on tuleviku jaoks küllaltki mõistlikuks ennustuseks eelnevate vaatluste keskmine (kuna sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste korral on parimaks ennustuseks keskväärtus). Kui on alust arvata, et vaatlused on täiesti juhuslikud (st vastavad sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste väärtustele), siis võib kasutada kõigi teadaolevate vaatluste keskmist:

$$\hat{z}_{t+p|t} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} z_i.$$

Harjutus 6 *Hinnata juhul, kui Z_t on sõltumatud, sama jaotusega ning dispersiooniga σ^2 juhuslikud suurused, tõenäosust, et eelneva valemiga ennustatud tulemus erineb keskväärtuse EZ_{t+1} tegelikust väärtusest rohkem kui ε, st leida hinnang tõenäosusele*

$$P(|EZ_{t+1} - \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} Z_i| \geq \varepsilon).$$

Kui aga keskmine on ajas siiski muutuv, kuid muutumise on küllalt aeglane ja püsivat trendi ei ole mõistlik eeldada, on parem kasutada selliseid keskmise valemeid, mis kasutavad ainult hiljutisi väärtuseid ja/või annavad kõige värskematele vaatlustele suurema kaalu, näiteks lihtsat libisevat keskmist

$$\hat{z}_{t+p|t} = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} z_{t-i}$$

või siis eksponentsiaalset keskmistamist

$$\hat{z}_{t+p|t} = \hat{z}_{t+1} = \alpha z_t + (1-\alpha)\hat{z}_t,$$

kusjuures tavaliselt võetakse sellisel juhul $\hat{z}_1 = z_1$

2.1.2 Trendiga aegrea prognoosimine. Holti meetod

Trendiga aegridade korral on vägagi loomulik nõuda, et prognoosimudel annaks täpse ennustuse vähemalt sellistel juhtudel, kui aegrida vastab täpselt lineaarsele funktsioonile. Libiseva keskmise kasutamisel tekib aga prognoosiviga: kui $z_t = a + b\,t$, siis libiseva keskmisega arvutatud prognoosi korral saame (arvestades, et kaalud summeeruvad üheks)

$$\begin{aligned}\hat{z}_{t+1} = y_t = \sum_{i=0}^{q-1} w_i z_{t-i} &= \sum_{i=0}^{q-1} w_i (a + b\,t - b\,i) \\ &= a + b\,t - b \sum_{i=0}^{q-1} w_i\, i,\end{aligned}$$

mis $b \neq 0,\ w_0 \neq 1$ korral on alati erinev õigest väärtusest $z_{t+1} = a + b(t+1)$. Seega minevikuandmete keskmine ei ole trendiga aegrea puhul heaks tulevikuväärtuse prognoosiks.

Üheks küllalt populaarseks meetodiks trendiga aegridade prognoosimiseks on **Holti meetod**, mis tugineb eksponentsiaalsel keskmistamisel. Holti meetodi korral prognoosid vastavad lineaarsele funktsioonile:

$$\hat{z}_{t+p|t} = a_t + b_t\,p,$$

kus a_t arvustamisel kasutatakse z_t väärtust ning eelnevate andmete põhjal tehtud prognoosi:

$$a_t = \alpha\, z_t + (1-\alpha)\hat{z}_t = \alpha\, z_t + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

ning b_t arvutamisel kasutatakse selle eelmise väärtuse ning a muutuse keskmist:

$$b_t = \beta\,(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1}.$$

Meetodi kasutamiseks tuleb valida või andmete põhjal hinnata väärtused a_1, b_1, α, β. Sageli valitakse $a_1 = z_1,\ b_1 = 0$ või siis kasutada nendeks teatud arvu esimeste z väärtuste jaoks leitud lineaarse regressioonikõvera vastavaid väärtusi. Parameetrite

α ja β valikul võib kasutada näiteks mingi prognoosivea mõõdiku minimiseerimist, näiteks võib minimiseerida nende parameetrite järgi ennustusvigade ruutude summat

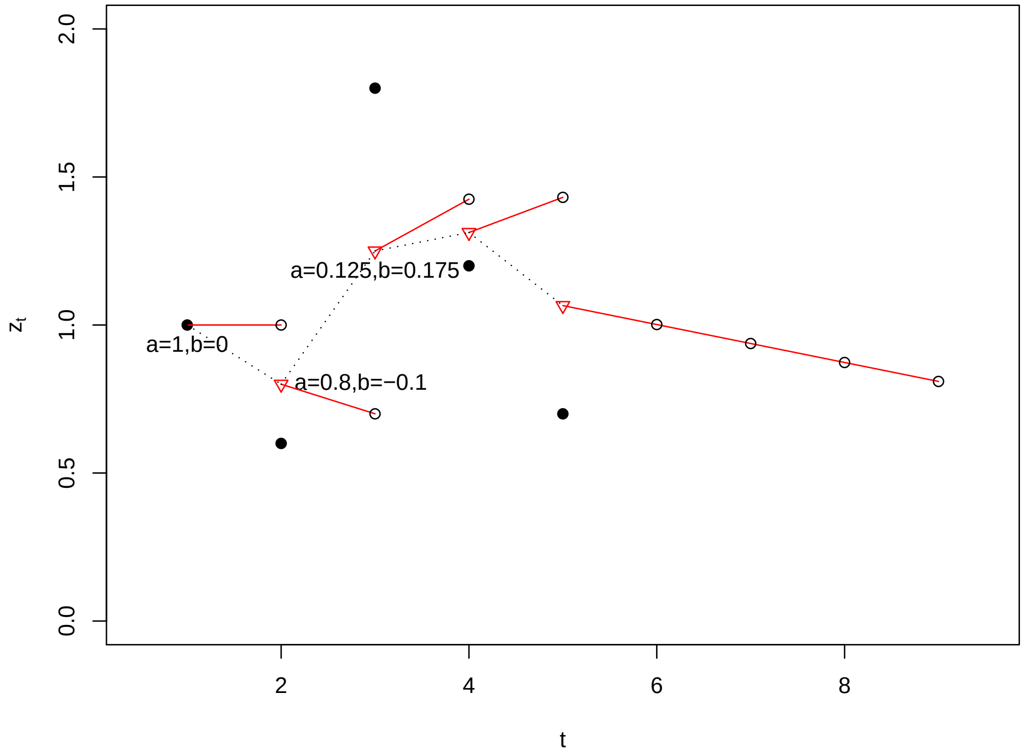
$$\sum_{t=2}^{n} (\hat{z}_t - z_t)^2.$$

Harjutus 7 *Näidata, et Holti meetod on sobivalt valitud a_1 ja b_1 korral täpne (st $\hat{z}_t = z_t \ \forall t > 1$ juhul, kui aegrida z_t, $t \geq 1$ vastab lineaarsele funktsioonile.*

Meetodi töötamisega tutvumiseks vaatleme varasemast tuttavat näidet, kus aegrea väärtusteks on

$$z = (1, 0.6, 1.8, 1.2, 0.7).$$

Vaatleme prognoosimise protsessi juhul $\alpha = \beta = 0.5$ ning valime algväärtusteks



Joonis 2.1: Holti meetodiga prognoosimine

$a_1 = 1, b_1 = 0$. Olgu meie eesmärgiks prognoosida Holti meetodiga järgmised 4 väärtust z_6, z_7, z_8, z_9. Selleks peame leidma a_5 ja b_5, milleks tuleb alustada valitud a_1 ja b_1 väärtustest ning liikuda mööda aegrida kuni ajani $t = 5$, arvutades iga ajamomendi jaoks vastavad taseme a ja tõusu b väärtused. Protsessi on graafiliselt kujutatud joonisel 2.1. Kõigepealt lähtume ajale $t = 1$ vastavast trendijoonest (sirge punktist $(1, a)$ tõusuga b), millele vastavaks prognoosiks $\hat{z}_2$ on 1 (joonisel kujutatud ringikesena). Ajale $t = 2$ vastava taseme väärtuse leiame nüüd prognoosi ja tegeliku väärtuse keskmisena (kuna $\alpha = 0.5$, siis leiame aritmeetilise keskmise), mis on joonisel kujutatud kolmnurgaga. Uue trendi leidmiseks võtame keskmise kaaluga β prognoosi leidmisel kasutatud tõusust (praegu 0) ja taseme a väärtuste muudust; leitud uus tõusukordaja b_2 vastab sirgele, mis läheb eelmise trendijoone ja punktiirina kujutatud a väärtusi ühendava sirge vahelt. Pärast a_2 ja b_2 arvutamist kordame varasemat protseduuri: leiame prognoosi $\hat{z}_3$ vastavalt trendijoonele, seejärel a_3 väärtuse prognoosi ja tegeliku väärtuse keskmisena ning lõpuks uue tõusukordaja b_3 jne. Ajamomendiks $t = 5$ oleme leidnud

$$a_5 = 1.065625, \ b_5 = -0.0640625$$

ning seega huvipakkuvad prognoosid leiame vastavalt sirgele, mis läbib punkti $(5, a_5)$ tõusuga b_5.

2.2 Holt-Wintersi meetod sesoonse aegrea prognoosimiseks

Järgnevalt eeldame, et aegreal on perioodiline komponent perioodiga s. Holt-Wintersi meetodil on kaks versiooni sõltuvalt sellest, kas me eeldame, et perioodiline komponent on korrutatud trendiga (multiplikatiivne mudel) või liidetud trendile (aditiivne mudel). Mõlemal juhul hinnatakse ennustamiseks jooksvat taset a, trendikõvera tõusu b ning sesoonset (perioodilist) komponenti S ning lisaks algväärtustele tuleb valida kolm silumistegurit α, β ja γ.

2.2.1 Multiplikatiivne Holt-Wintersi meetod

Ennustusvalemiks on sel juhul

$$\hat{z}_{t+p|t} = (a_t + p\, b_t) S_{t+p-s}, \ p = 1, \ldots, s,$$

kus

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha \frac{z_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta) b_{t-1}, \\ S_t &= \gamma \frac{z_t}{a_t} + (1-\gamma) S_{t-s}. \end{aligned}$$

Meetodi kasutamiseks alates ajamomendist $t = s+1$ tuleb ette anda $a_s, b_s, S_1, \ldots, S_s$ ning määrata sobivad kordajad α, β, γ. Kui kasutada erinevates tarkvarapakettides realiseeritud Holt-Wintersi meetodit samade andmete ja automaatse parameetrivaliku korral, siis võivad prognoosivead vähemalt alguses olla küllaltki erinevad, kuna etteantavate parameetrite automaatne valik on realiseeritud neis erinevalt.

2.2.2 Aditiivne Holt-Wintersi meetod

Ennustusvalemiks on sel juhul

$$\hat{z}_{t+p|t} = (a_t + p\,b_t) + S_{t+p-s}, \; p = 1, \ldots, s,$$

kus

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha(z_t - S_{t-s}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}, \\ S_t &= \gamma(z_t - a_t) + (1-\gamma)S_{t-s}. \end{aligned}$$

2.3 Prognoosimudeli headuse mõõdikud

Selleks, et võrrelda konkreetse andmestiku korral omavahel erinevaid prognoosimeetodeid, arvutatakse sageli mingit tüüpi keskmist prognoosiviga ühesammuliste prognooside jaoks. Mõned tuntumatest on

- Keskmine absoluutne viga (*mean absolute deviation*):

$$MAD = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |z_i - \hat{z}_i|$$

- Keskmine ruut viga (*mean square error*):

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (z_i - \hat{z}_i)^2$$

- Ruutkeskmine viga:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (z_i - \hat{z}_i)^2} = \sqrt{MSE}$$

- Keskmine suhteline viga (*mean absolute presentage error*):

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i - \hat{z}_i|}{z_i}$$

- Akaike informatsioonikriteerium AIC (kasutatav tõenäosuslikel mudelitel baseeruvate prognoosimeetodite korral). Tähtis on see, et võrreldavad mudelid on sama andmestiku jaoks, st ennem sobitamist ja tõepära leidmist ei tohi andmeid kaduma minna (nt juhul, kui üks mudel sobitatakse otse andmetele, teine aga andmestiku muutudele).

$$AIC = 2k - 2\,\mathrm{ll}(z_1, ..., z_n),$$

kus $\mathrm{ll}(z_1, \ldots, z_n)$ on aegreas olevaet andmete logaritmiline tõepära vaadeldava mudeli korral.

Vaadeldud näitajad annavad aimu sellest, kui hästi vaadeldav aegrida mingi meetodi korral prognoositav võib olla. Samas tuleb aga enamiku mõõdikute korral suhtuda arvutatud näidikutesse ettevaatusega, seda eriti juhul, kui meetodis kasutatavad parameetrid on leitud sama andmestiku põhjal, mille korral näidikuid arvutatakse (parameetrite valikuga võib saavutada hea kooskõla selleks kasutatava andmestikuga, kuid see kooskõla ei pruugi edasi kanduda uute andmete peale, nn. ülesobitamise efekt). Samuti tuleb uurida ennustusvigade juhuslikkust, sest kui ennustusvead ei ole omavahel sõltumatud, siis ei ole mingit garantiid, et mineviku põhjal arvutatud näitajad tuleviku kohta midagi ütlevad ning kindlasti on sel juhul võimalik prognoose avastatud sõltuvust kasutades parandada. Teisalt, kui prognoosivead on sõltumatud nullkeskmisega juhuslikud suurused, siis mudel on vähemalt ruutkeskmise vea suhtes parim võimalik. Kahjuks ei ole sõltumatust lõpliku aegrea baasil võimalik kindlaks teha, kuid see-eest on mitmeid teste, mis võimaldavad sõltuvust kindlaks teha. Nii et praktikas ennustusmeetodi valikul tuleb alati kontrollida, kas prognoosijäägid võivad vastata sõltumatute juhuslike suuruste väärtustele (st rakendada mingit testi, kus nullhüpoteesiks on vaatluste sõltumatus). Kui tuleb välja, et ei või (st test annab väga madala p-väärtuse), siis on (vähemalt teoreetiliselt) kindlasti võimalik leida parem prognoosimeetod. Aegridade analüüsimisel on üheks tähtsamaks sõltuvuse tüübiks ajaline sõltuvus, mille kindlakstegemisest tuleb juttu järgnevas peatükis.

Peatükk 3

Statsionaarsed aegread

3.1 Statsionaarsuse mõiste. Autokorrelatsioonifunktsioon

Selleks, et teadaolevate aegrea väärtuste põhjal saaks tulevikku ennustada ja ka prognoosivigu arvutada, peab tegema mingid eeldused, mis garanteerivad tulevikukäitumise ja tulevikus tekkivate juhuslikke häiritusi iseloomustava info sisalduvuse mineviku andmetes. Üheks aegridade teoorias sageli kasutatavaks eelduseks on nn statsionaarsuse nõue, mille korral on erinevatele ajamomentidele vastavad vaadeldava protsessi väärtused mingi konkreetse jaotusega juhusliku suuruse väärtusteks. Definitsiooni sõnastamiseks on vaja teada järgnevat mõistet.

Definitsioon 2 *Juhusliku vektori $(X_1, \ldots, X_m)$ järguga k momentideks nimetatakse suuruseid*

$$\mathbf{m}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} = E(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_m^{\alpha_m}),$$

kus $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, m$ on mittenegatiivsed täisarvud ning $\sum_{i=1}^m \alpha_i = k$.

Näiteks vektoril (X_1, X_2, X_3) on kuus erinevat teist järku momenti, milleks on

$$\mathbf{m}_{2,0,0} = E(X_1^2),\ \mathbf{m}_{0,2,0} = E(X_2^2),\ \mathbf{m}_{0,0,2} = E(X_3^2),$$
$$\mathbf{m}_{1,1,0} = E(X_1 X_2),\ \mathbf{m}_{1,0,1} = E(X_1 X_3),\ \mathbf{m}_{0,1,1} = E(X_2 X_3).$$

Definitsioon 3 *Juhuslikku protsessi $(Z_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ nimetatakse (tugevalt) statsionaarseks, kui iga positiivse täisarvu m ning iga täisarvu q korral on juhuslikud vektorid $(Z_1, \ldots, Z_m)$ ning $(Z_{1+q}, \ldots, Z_{m+q})$ sama jaotusega. Kui iga positiivse täisarvu m ning iga täisarvu q korral on $(Z_1, \ldots, Z_m)$ ning $(Z_{1+q}, \ldots, Z_{m+q})$ kõik kuni k järku momendid võrdsed, siis nimetatakse protsessi Z_t k-järku nõrgalt statsionaarseks.*

Harjutus 8 *(*, tähtaeg 06.10.2016) Näidata, et tugevalt statsionaarse rea korral on iga täisarvude komplekti $t_1 < \cdots < t_m$ ja iga täisarvu q korral on juhuslikud vektorid $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_m})$ ning $(Z_{t_1+q}, \ldots, Z_{t_m+q})$ sama jaotusega ning et nõrgalt k-järku statsionaarse rea korral on iga täisarvude komplekti $t_1 < \cdots < t_m$ ja iga täisarvu q korral juhuslike vektorite $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_m})$ ning $(Z_{t_1+q}, \ldots, Z_{t_m+q})$ kõik kuni k järku momendid võrdsed.*

Kui statsionaarse protsessi korral on $E(Z_t^k)$ lõplik, siis on see ka nõrgalt k-järku statsionaarne.

Statsionaarse protsessi näiteks on protsess, mis koosneb sõltumatutest sama jaotusega juhuslikest suurustest.

Kui protsess ei ole vähemalt nõrgalt statsionaarne, siis vastava rea abil tehtavad tavapärased statistilised arvutused (keskmine, standardhälve) ei ole kuidagi seotud vastavate mõistete teoreetilise sisuga. Näiteks kui meil on 100 vaatlust, kuid need vastavad erinevate keskväärtustega juhuslike suuruste väärtustele, ei ole selge, mida vaatlustulemuste keskmine iseloomustab.

Olgu meil tegemist teist järku nõrgalt statsionaarse protsessiga, siis juhul $m = 1$ järeldub definitsioonist, et

$$E(Z_t) = \mu,\ DZ_t = \sigma^2\ \forall t$$

mingite konstantide μ ja σ korral. Samuti järeldub, et suuruste Z_t ja Z_{t+p} kovariatsioon ja korrelatsioon (täpsemalt autokorrelatsioon ja autokorrelatsioon, kuna tegemist on sama protsessi eri ajamomentidele vastavate juhuslike suuruste kovariatsiooni ja korrelatsiooniga) sõltub ainult ajamomentide vahest p.

Definitsioon 4 *Olgu $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ teist järku nõrgalt statsionaarne protsess. Siis funktsiooni*

$$\gamma(p) = \operatorname{cov}(Z_t, Z_{t+p}),\ p \in \mathbb{Z},$$

nimetatakse protsessi Z autokovariatsioonifunktsiooniks ning funktsiooni

$$\rho(p) = \operatorname{cor}(Z_t, Z_{t+p}) = \frac{\gamma(p)}{\sigma^2},\ p \in \mathbb{Z}$$

nimetatakse vastavalt protsessi Z autokorrelatsioonifunktsiooniks.

Harjutus 9 *Näidata, et teist järku nõrgalt statsionaarse protsessi $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ korral* $\operatorname{cov}(Z_t, Z_{t+p})$ *on sama iga ajamomendi t korral.*

Harjutus 10 *Näidata, et sõltumatute sama jaotusega, tsentreeritud ja lõpliku dispersiooniga juhuslike suuruste ε_t abil defineeritud protsess*

$$Z_1 = \varepsilon_1;\ Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t,\ t > 1$$

ei ole statsionaarne.

Harjutus 11 *Koosnegu protsess $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sõltumatutest sama jaotusega juhuslikest suurustest. Näidata definitsiooni abil, et see protsess on statsionaarne. (Soovitus: definitsioonis vaadeldavate vektorite jaotuste võrdumiseks näidata jaotusfunktsioonide võrdust).*

Harjutus 12 *Olgu X juhuslik suurus jaotusfunktsiooniga F_X. Vaatleme protsessi $Z_t = X,\ t \in \mathbb{Z}$. Näidata, et suvalise ajamomentide $t_1, t_2, \ldots, t_m$ korral on avaldub vektori $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_m})$ jaotusfunktsioon kujul*

$$F_{Z_{t_1},\ldots,Z_{t_m}}(z_1, \ldots, z_m) = F_X(\min(z_1, \ldots, z_m)).$$

Tõestada seda tulemust kasutades, et vaadelav protsess Z on statsionaarne.

Eelnevalt vaadeldud omadused on seotud erinevatele ajamomentidele vastavate juhuslike suuruste käitumisega. Samas praktikas näeme me ainult huvipakkuva protsessi ühte realisatsiooni, st igale ajamomendile vastava juhusliku suuruse kohta teame ainult ühte väärtust. Seega tekib küsimus, et milliseid protsessi omadusi me saame kindlaks teha ainult ühe trajektoori põhjal. Protsesse, mille mingit omadust on võimalik kindlaks teha ainult ühe trajektoori põhjal, nimetatakse **ergoodilisteks** selle omaduse suhtes. Näiteks kui (nõrgalt) statsionaarse protsessi korral keskväärtus $\mu = EZ_t, t \in \mathbf{Z}$ on leitav vaatluste aritmeetilise keskmisena vaatluste arvu lähenemisel lõpmatusele, siis sellist protsessi nimetatakse ergoodilisteks keskväärtuse suhtes.

Harjutus 13 *Olgu X Bernoulli jaotusega juhuslik suurus (st võimalike väärtustega 0 ja 1), mille korral* $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. *Näidata, et see protsess ei ole ergoodiline keskväärtuse suhtes.*

Kui meil on teada statsionaarsele protsessile vastavad aegrea väärtused ajamomentidel $t = 1, 2, \ldots, N$, siis arvutatakse empiiriliste autokovariatsiooni ja autokorrelatsioonifunktsiooni väärtused tavaliselt valemitega

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t, \\
c_p &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-p}(z_t - \bar{\mu})(z_{t+p} - \bar{\mu}),\ p = 0, 1, \ldots, N-1, \\
r_p &= \frac{c_p}{c_0}.
\end{aligned}$$

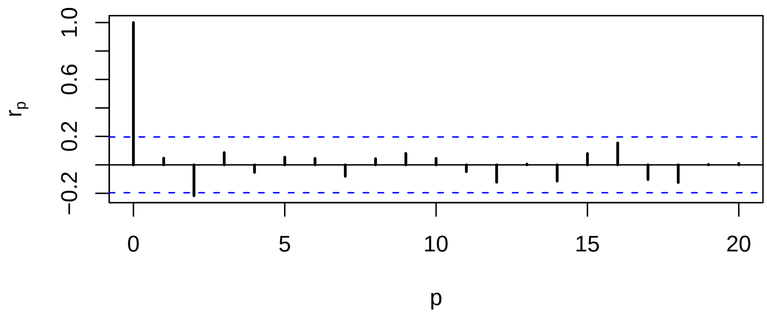
Harjutus 14 *(*, lisapunktide saamiseks esitada 13.10.2016) Näidata, et kui statsionaarse protsessi korral kehtib* $\lim_{p\to\infty} |\gamma(p)| = 0$, *siis*

$$P(|\bar{\mu} - \mu| \geq \varepsilon) \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

iga $\varepsilon > 0$ *korral.*

Tähtis on aru saada, et empiirilisi autokorrelatsioone ja autokovariatsioone saame me arvutada suvaliste andmeridade põhjal, kuid mittestatsionaarse rea korral ei iseloomusta saadavad numbrid mingite konkreetsete juhslike suuruste korrelatsioone ja kovariatsioone, seega nende mõistlik tõlgendamine on väga raske. Kui meil on tegemist sõltumatutest sama jaotusega juhuslikest suurustest koosneva protsessiga, siis kõik teoreetilised korrelatsioonid $\rho(p)$, $p > 0$ on võrdsed nulliga, kuid protsessile vastava lõpliku pikkusega aegrea põhjal arvutatud hinnangud r_p, $p > 0$ on üldiselt nullist erinevad. Seetõttu on väga oluline teada mingeid kriteeriume, mille põhjal otsustada konkreetse aegrea empiirilise autokorrelatsioonifunktsiooni abil, kas aegrida võib vastata täiesti juhuslikule protsessile. Selleks tutvume kahe tulemusega.

Esiteks, on teada (vt [6]), et sõltumatutele sama jaotusega juhuslikele suurustele vastava aegrea korral on suurused r_p, $p > 0$ asümptootiliselt (vaatluste arvu N kasvades) normaaljaotusega, kusjuures keskväärtus on suurte N väärtuste korral ligikaudu $-\frac{1}{N}$ ja standardhälve $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Seega piisavalt suure N korral peaks iga konkreetse $p > 0$ korral jääma tõenäosusega 0.95 vahemikku $[-\frac{1}{N} - \frac{2}{\sqrt{N}}, -\frac{1}{N} + \frac{2}{\sqrt{N}}]$. Tavaliselt statistikatarkvaras on empiirilise autokorrelatsioonifunktsiooni graafilisel esitamisel vastavad piirid ka joonisel välja toodud.



Joonis 3.1: Saja sõltumatu normaaljaotusega juhusliku suuruse väärtuste põhjal arvutatud autokorrelatsioonid

Eelnev tulemus kehtib iga üksiku autokorrelatsioonikordaja suhtes. Samas arvutatakse neid kordajaid tavaliselt mitu ning näiteks 20 kordaja arvutamisel on loomulik, et keskmiselt ühe kordaja väärtus satub väljapoole 95% veapiire. Näiteks joonisel 3.1 on kujutatud sõltumatute juhuslike suuruste väärtuste rea põhjal arvutatud autokorrelatsioonikordajad ning nendest r_2 väärtus on väljaspool 95% veapiire. Seetõttu oleks hea teada, kas terve väljaarvutatud autokorrelatsioonikordajate komplekt võib vastata sõltumatutele juhuslikele suurustele. Selleks sobib näiteks Ljung-Box test, mis põhineb suurusel

$$Q = N(N+2)\sum_{p=1}^{m} \frac{r_p^2}{N-p},$$

kus m näitab, kui mitmest esinevast autokorrelatsioonist koosnevat rühma testitakse. On teada, et see statistik on asümptootiliselt m vabadusastmega χ^2 jaotusega ning selle põhjal saab hinnata tõenäosust, et vaadeldavad kordajad vastavad sõltumatutele juhuslikele suurustele.

3.2 Periodogramm ja spekter

Kui me vaatleme aegrida väärtustega $z_1, \dots, z_N$, siis see kujutab endast vektorit N-mõõtmelises ruumis, tähistame seda vektorit kujul $\mathbf{z}$. Lineaaralgebrast on teada, et iga selline vektor on esitatav üheselt N lineaarselt sõltumatu vektori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineaarkombinatsioonina kujul

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{v}_i,$$

kus $c_i,\ i=1,\dots,N$ on reaalarvulised kordajad. Kui vektorid $\mathbf{v}_i,\ i=1,\dots,N$ on hästi valitud, siis võivad leitud kordajad anda meile olulist informatsiooni vaadeldava rea omaduste kohta.

Signaaliteoorias on tavaks esitada signaale erinevate sagedustega siinuste ja koosinuste (nn harmoonikute) summana. Eeldame järgnevalt lihtsuse mõttes, et vaatluste arv N on paaris, siis me saame aegrea väärtused z_t esitada kujul

$$z_t = a_0 + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \left(a_i \cos(\frac{2\pi it}{N}) + b_i \sin(\frac{2\pi it}{N}) \right),$$

kus kordajad on arvutatud järgmiselt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t,\\
a_i &= \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t \cos(\frac{2\pi it}{N}),\ b_i = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t \sin(\frac{2\pi it}{N}),\ i=1,\dots,\frac{N}{2}-1,\\
a_{N/2} &= \frac{1}{N}\sum (-1)^t z_t,\ b_{N/2} = 0.
\end{aligned}$$

Periodogrammi väärtusteks on sel juhul

$$I(i/N) = \frac{N}{2}(a_i^2 + b_i^2),\ i=1,\dots,\frac{N}{2}-1,\ I(\frac{1}{2}) = Na_{N/2}.$$

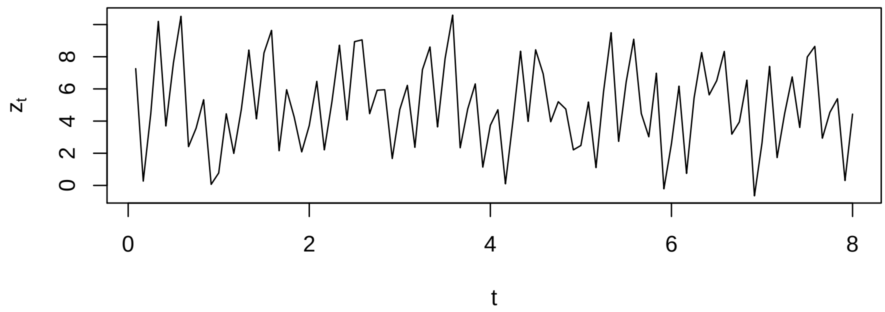
Kui a_i ja b_i definitsioonis asendada suurus $\frac{i}{N}$ arvuga $f,\ 0 < f \le \frac{1}{2}$, siis aegrea **spektriks** nimetatakse suurust

$$I(f) = \frac{N}{2}(a_f^2 + b_f^2).$$

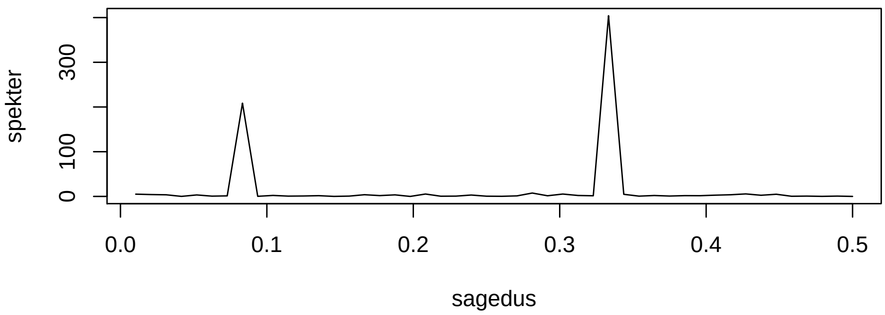
Spektri suur väärtus mingi f korral näitab, et andmestikus on oluliselt esindatud perioodiline komponent parioodiga $\frac{1}{f}$. Samas, kui andmed vastavad sõltumatutele juhuslikele suurustele, siis on tegemist nn valge müraga ning spektris peaks kõik sagedused olema üsna võrdselt esitatud. Nende omaduste baasil on loodud mitmeid teste perioodilise komponendi olemasolu kindlakstegemiseks ning samuti juhuslikkuse kindlakstegemiseks. Vaatleme näitena joonisel 3.2 toodud aegrida. Visuaalselt on selle käitumise kohta raske midagi öelda. Leides aga periodogrammi väärtused ning kujutades neid graafiliselt, saame joonisel 3.3 kujutatud graafiku. Siit paistab, et andmetes on olulisel määral esindatud kaks sagedust (üks alla 0.1 ja teine umbes 0.33). Kui uurida andmeid täpsemalt, siis vastavad sagedused on $\frac{1}{12}$ ja $\frac{1}{3}$. Kui tegemist on näiteks igakuiste andmetega, siis see vastab aastasele perioodile ja kvartaalsele (kolmekuulisele) perioodile. Tegelikkuses oli aga vastav aegrida genereeritud kujul

$$z_t = 5 + 3\sin(\frac{2\pi t}{3}) - 2\cos(\frac{2\pi t}{12}) + a_t,$$

kus a_t vastasid standardse normaaljaotusega juhuslike suuruste väärtustele. Seega võib öelda, et spektri uurimisega oli võimalik tuvastada andmetes peituva signaali omadusi.



Joonis 3.2: Aegrida spektri kasutamise näite jaoks



Joonis 3.3: Näiteaegrea spekter

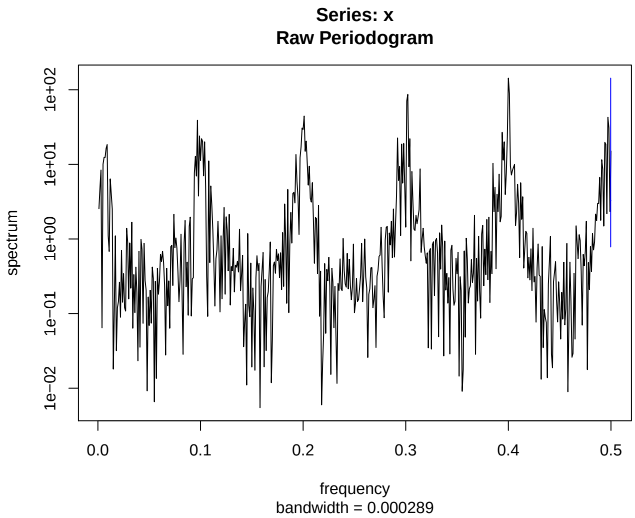
Samuti võib saada kasulikku infot ka juhul, kui deterministlikku signaali reas ei esine, kuid on olemas tugev sõltuvus mingi ajalise nihke tagustest minevikuväärtustest. Vaatleme näiteks järgnevat R tarkvara abil arvutatud periodogrammi.

Siit on näha, et vastavas reas on kõige tugevamalt esitatud perioodiga 10 (sagedus 0.1), perioodiga 5 ja veel kahe väiksema perioodiga võnkumised. Osutub, et mingi nihkega minevikuandmetest sõltumine tekitab sageli ka täiendavaid perioodilisi võnkeid, mille perioodiks on nihkele vastava perioodi jagatis mingi täisarvuga. Vaadeldud periodogramm vastas tegelikult mudeli

$$Z_t = 0.8Z_{t-10} + A_t$$

abil genereeritud andmetele, nii et sisuline sõltuvus on perioodiga 10 ja väiksema perioodiga võnkumised on juhuslikult tekkinud.

Kasulikke rakendusi on spektraalanalüüsil palju ja tegelikult on kogu info, mis on aegrea autokorrelatsioonides, olemas ka tema spektris. Käesolevas kursuses me aga spektri ja periodogrammi kasutamist aegrea mudelite sobivuse kindlakstegemiseks


Series: x
Raw Periodogram
spectrum
1e+02
1e+01
1e+00
1e−01
1e−02
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
frequency
bandwidth = 0.000289

ei kasuta.

Peatükk 4

Lineaarsed mudelid ühemõõtmelise aegrea jaoks

Käesolevas peatükis vaatleme selliseid aegrea mudeleid, kus aegrea hetkeväärtus avaldub lineaarse kombinatsioonina selle minevikuväärtustest ning juhusliku häirituse hetkeväärtusest ja minevikuväärtustest. Selliseid mudeleid nimetatakse lineaarseteks mudeliteks. Kuna lõpliku hulga andmete põhjal on võimalik leida ainult lõplik arv mudeli parameetreid, siis pakuvad erilist huvi sellised protsessid, mis on kirjeldatavad lõpliku arvu parameetrite abil.

4.1 Üldine lineaarne protsess, selle esitused, statsionaarsus ja pööratavus

On küllalt loomulik, et enamiku huvipakkuvate juhuslike protsesside korral hetkeväärtus sõltuv väga vähe selle protsessi kauge mineviku väärtustest ning seega võib öelda, et hetkeväärtus on sisuliselt määratud ainult juhuslikest häiritustest, mis minevikus on toimunud. Matemaatiliselt on kõige lihtsam uurida selliseid protsesse, kus sõltuvus häiritustest on lineaarne. Anname sellele kirjeldusele matemaatiliselt korrektse definitsiooni.

Definitsioon 5 *Üldiseks lineaarseks protsessiks nimetatakse protsesse, mis on esitatavad kujul*

$$Z_t = \mu + A_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i A_{t-i}, \tag{4.1}$$

kus ψ_i on mingid tingimust

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

rahuldavad reaalarvud, μ on reaalarv ning $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ on vähemalt teist järku statsionaarne tsentreeritud ning mittekorreleeritud väärtustega protsess.

Edaspidises on sageli kasulik vaadelda tsentreeritud protsesse. Kui $Z_t,\ t \in \mathbb{Z}$ on vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarne ning $EZ_t = \mu\ \forall t$, siis $\tilde{Z}$ tähistab vastavat tsentreeritud protsessi:

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu.$$

Saab näidata (vt [7], Teoreem 7.6.1), et toodud tingimus kaalude ψ kohta garanteerib, et definitsioonis toodud lõpmatu summa defineerib korrektselt mingi juhusliku suuruse.

Eelnevat definitsiooni motiveerib järgmine tulemus, mida nimetatakse Woldi lahutuseks.

Teoreem 6 *(Woldi lahutus, vt. [7]) Iga statsionaarne protsess Z_t on esitatav kujul*

$$Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi_{t-i} + \eta_t,$$

kus ξ_t on mittekorreleeritud protsess, suurused a_i rahuldavad tingimust

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$$

ning η_t on deterministlik protsess, st η tulevikuväärtused on teadaoleva ajaloo põhjal täpselt ennustatavad.

Nii et üldised lineaarsed protsessid on sellised statsionaarsed protsessid, mille Woldi lahtutuses on suurused ξ_t sõltumatud (või vähemalt teist järku statsionaarsed) ja mille deterministlik osa on konstantne. Käesolevas peatükis eeldame, et protsess $(A_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ on nõrgalt teist järku statsionaarne protsess keskväärtusega 0 ja standardhälbega σ_A. Selleks, et toodud lõpmatu summa defineeriks korrektselt juhusliku suuruse, peavad kordajad ψ_i rahuldama mingeid tingimusi. Täpsemalt, selleks piisab (vt [7], Teoreem 7.6.1), kui kehtib

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

Harjutus 15 *Näidata, et üldine lineaarne protsess Z_t on nõrgalt teist järku statsionaarne protsess.*

Aegridade mudelite esitamisel ja uurimisel on kasulik tuua sisse mõned tähistused. Esiteks, defineerime nihkeoperaatori

$$BZ_t = Z_{t-1}\ \forall t.$$

Tehniline märkus. *Matemaatiliselt korrektne protseduur on järgmine: vaatleme protsesside ruumi $(Z_t)_{t\in\mathbf{Z}}$ normiga $\|(Z_t)_{t\in\mathbf{Z}}\| = \sup_{t\in\mathbf{Z}} \sqrt{EZ_t^2}$. Operaator B teisendab siis ühe selle ruumi elemendi (protsessi) teiseks (kusjuures tegelikult oleks õige kirjutada $(BZ)_t = Z_{t-1}$, st B teisendab protsessi Z uueks protsessiks, mille t-s element on esialgse protsessi väärtus kohal $t-1$) ning $\|B\| = 1$.*

Paneme tähele, et $B^j Z_t = Z_{t-j}$. Seega üldine lineaarne protsess on esitatav kujul

$$\tilde{Z}_t = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i B^i) A_t.$$

Edaspidises on meil kasulik defineerida funktsioonid operaatorist B.

Definitsioon 7 *Olgu f mingi reaalarvuliste väärtustega reaalmuutuja funktsioon, mis on esitatav punkti 0 ümbruses koonduva astmereana, st*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \ |x| \leq \delta$$

mingi $\delta > 0$ korral. Olgu M mingi pidev lineaarne operaator mingil Banachi ruumil Y. Siis $f(M)$ tähistab (formaalselt) operaatorit

$$f(M) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i M^i.$$

Lihtne on näidata, et kui $\|M\| \leq \delta$, siis eelnevalt toodud formaalne definitsioon omab mõtet, st see summa koondub mingiks ruumil Y tegutsevaks pidevaks lineaarseks operaatoriks.

Näide 8 *Kuna iga x korral kehtib võrdus*

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

siis operaator e^B on defineeritud võrdusega

$$e^B A_t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A_{t-i}.$$

Harjutus 16 *Olgu funktsioon f defineeritud valemiga $f(x) = \frac{x}{1+\frac{x^2}{4}}$. Leida $f(B)A_t$ esitus lõpmatu summana. (Soovitus: kasutage teadmist, et $\frac{1}{1-q} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i$, kui $|q| < 1$ selleks et leida $\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}$ astmerida ning korrutage see x-ga)*

Defineerime funktsiooni

$$\psi(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i x^i,$$

siis eelneva definitsiooni kohaselt võime üldise lineaarse protsessi kirjutada kujul

$$\tilde{Z}_t = \psi(B) A_t.$$

Siin tekib huvitav küsimus: millal me saame protsessi Z väärtusi teades teha kindlaks, millised häiritused A süsteemi on saabunud. Näiteks protsessi

$$Z_t = A_t - \frac{1}{2} A_{t-1}$$

korral on see võimalik: kasutades võrdust $A_{t-1} = Z_{t-1} + \frac{1}{2} A_{t-2}$ saame

$$A_t = Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1} + \frac{1}{4} A_{t-2}.$$

Asendades nüüd A_{t-2} võrdusest $A_{t-2} = Z_{t-2} + \frac{1}{2}A_{t-3}$, seejärel asendades sarnaselt A_{t-3} jne, saame

$$A_t = Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1} + \frac{1}{4}Z_{t-2} + \ldots = Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} Z_{t-i}.$$

Seega, teades protsessi Z väärtuseid kuni ajamomendini t, saame nende abil leida ka ajale t vastava häirituse A_t.

Kuna tegemist on olulise omadusega, sõnastame selle definitsiooni.

Definitsioon 9 *Üldist lineaarset protsessi* (4.1) *nimetatakse* pööratavaks*, kui selle protsessi saab esitada autoregressiivsel kujul*

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t.$$

Osutub, et pööratavuse jaoks saab anda üsna lihtsa piisava tingimuse.

Lemma 10 *Eeldame, et $\psi(x)$ astmerida koondub piirkonnas $|x| \leq 1+\varepsilon$ mingi $\varepsilon > 0$ korral. Kui funktsioon $\pi(x) = \frac{1}{\psi(x)}$ on esitatav astmereana, mis samuti koondub piirkonnas $|x| \leq 1 + \varepsilon_1$ mingi $\varepsilon_1 > 0$ korral, siis on üldine lineaarne protsess* (4.1) *pööratav ning kehtib võrdus*

$$\pi(B)\tilde{Z}_t = A_t,$$

kus $\tilde{Z}_t$ on protsess (4.1) .

Olgu funktsiooni $\pi(x)$ astmereaks

$$\pi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i,$$

siis pööratav üldine lineaarne protsess on esitatav ka kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t.$$

Näide 11 *Vaatleme protsessi*

$$Z_t = A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Sel juhul geomeetrilise rea summa valemi kohaselt

$$\pi(x) = \frac{1}{1-\theta_1 x} = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^i x^i, \;\; |x| < \frac{1}{|\theta_1|}.$$

Kui $|\theta| >= 1|$, siis eelneva lemma eeldused ei ole täidetud ning on võimalik tõestada, et vaadeldav protsess ei ole pööratav. Juhul $|\theta_1| < 1$ aga on eeldused täidetud ning seega kehtib võrdus

$$Z_t = -\sum_{i=1}^{\infty} \theta_1^i Z_{t-i} + A_t.$$

Järelikult võib meil ühe ja sama protsessi jaoks olla mitu erinevat esitust. Pealegi, kui näiteks $\theta_1 = -0.2$, siis kahanevad suure nihkega Z väärtuste kordajad väga kiiresti nulli ning seetõttu on lõplike andmemahtude juures praktika seisukohalt peaaegu võimatu teha kindlaks, kas andmed vastavad mudelile

$$Z_t = A_t + 0.2A_{t-1}$$

või hoopis mudelile

$$Z_t = 0.2Z_{t-1} - 0.04Z_{t-2} + A_t.$$

Sellises situatsioonis eelistame tulevikus kindlasti esimest mudelit, sest selle sobitamisel andmetega tuleb leida ainult üks tundmatu parameeter (θ_1) teise mudeli kahe parameetri asemel.

Edasises läheb meil vaja teadmisi sellest, kuidas leida polünoomi $p(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m} c_i x^i$ korral funktsiooni $q(x) = \frac{1}{p(x)}$ esitust astmereana. Siin tuleb abiks nn osamurdudeks lahutamine. Kõige lihtsamal juhul, kui võrrandil $p(x) = 0$ on m erinevat (kas reaalset või kompleksarvulist) lahendit $x_1, x_2, \ldots, x_m$, siis leiame kordajad $\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n$ nii, et kehtib võrdus

$$\frac{1}{p(x)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{1 - \frac{x}{x_i}} \ \forall x \notin \{x_1, \ldots, x_m\}$$

ning arendame iga liikme eraldi astmeritta.

Näide 12 *Olgu $p(x) = 1 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2$, siis nullkohtadeks on $x_1 = -3, x_2 = 2$ ning kehtib võrdus $p(x) = (1 - \frac{x}{2})(1 + \frac{x}{3})$. Korrutades võrduse*

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{x}{3}} + \frac{\alpha_2}{1 - \frac{x}{2}}$$

mõlemaid pooli polünoomiga p, saame

$$1 = \alpha_1(1 - \frac{x}{2}) + \alpha_2(1 + \frac{x}{3}). \tag{4.2}$$

Kuna eelnev võrdus peab kehtima iga x korral, võime kordajate α_1 ja α_2 leidmiseks saada võrrandisüsteemi mitmel moel. Üheks võimaluseks on organiseerida parem pool x astmete järgi (mis praegusel juhul tähendab esitamist vabaliikme ja x-ga liikme summana) ning võrdsustada vabaliige 1-ga ning x astmete kordajad kõik nullidega. Seda lähenemist kasutades saame

$$1 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (-\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3})x,$$

kust saame sobivad α_1, α_2 väärtused leida võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ -\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} = 0 \end{cases}$$

lahendamisel. Teiseks võimaluseks on võrrand (4.2) kirjutada välja kahe erineva x väärtuse korral ning lahendada nii saadud süsteem. Kõige kavalam on väljakirjutamiseks valida p nullkohad x_1 ja x_2, mis annab väga lihtsa süsteemi:

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1(1 - \frac{2}{2}) + \alpha_2(1 + \frac{2}{3}), \\ 1 = \alpha_1(1 - \frac{-3}{2}) + \alpha_2(1 + \frac{-3}{3}), \end{cases}$$

kust saame $\alpha_1 = \frac{2}{5}$, $\alpha_2 = \frac{3}{5}$. Kuna geomeetrilise rea summa valemi kohaselt

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{3}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{3^i},$$
$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x)^i}{2^i},$$

siis oleme kokkuvõttes saanud võrduse

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{6} - \frac{x^2}{6}} = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{2}{5}\frac{(-1)^i}{3^i} + \frac{3}{5}\frac{1}{2^i})x^i.$$

Harjutus 17 *Leida protsessi*

$$Z_t = A_t - \frac{1}{4}A_{t-1} - \frac{1}{8}A_{t-2}$$

esitus autoregressiivsel kujul

Sageli aga ei ole vaja leida autoregressiivse esituse kõiki kordajaid, vaid ainult mingi lõplik arv kordajaid. Siis on võimalik kasutada järgnevat ideed. Olgu $p(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$, kus $c_0 \neq 0$, mingi polünoom. Otsime $q(x) = \frac{1}{p(x)}$ esitust kujul

$$q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i.$$

Siis aga peab kehtima võrdus

$$1 = p(x) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i.$$

Seega peab parema poole funktsioone korrutades vabaliikmeks tulema 1 ning kõikide ülejäänud x astmete kordajateks nullid. Parema poole vabaliikmeks tuleb $c_0\alpha_0$, kust leiame $\alpha_0 = \frac{1}{c_0}$. Parema poole x^1 liikme kordajaks saame $c_0\alpha_1 + c_1\alpha_0$, kust saame avaldada α_1. Seejärel saame x^2 kordaja nulliga võrdsustamisel leida α_2 jne.

Näide 13 *Leiame eelnevas harjutuses toodud protsessi autoregressiivse esituse kordaja π_i, π_2, π_3. Kuna $\psi(x) = 1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8}$ ja me otsime $\frac{1}{\psi(x)}$ esitust kujul*

$$\frac{1}{\psi(x)} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i,$$

siis peab kehtima võrdus

$$1 = (1 - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8})(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i)$$
$$= 1 + (-\pi_1 - \frac{1}{4})x + (-\pi_2 + \frac{\pi_1}{4} - \frac{1}{8})x^2 + (-\pi_3 + \frac{\pi_2}{4} + \frac{1}{8}\pi_1)x^3 + \ldots.$$

Seega

$$-\pi_1 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \pi_1 = -\frac{1}{4},$$
$$-\pi_2 + \frac{\pi_1}{4} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\pi_1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{16},$$
$$-\pi_3 + \frac{\pi_2}{4} + \frac{1}{8}\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_3 = \frac{\pi_2}{4} + \frac{1}{8}\pi_1 = -\frac{5}{64}.$$

Harjutus 18 *Leida protsessi $Z_t = A_t - 0.3A_{t-2} - 0.1A_{t-3}$ autoregressiivse esituse kordaja π_3.*

Sarnased ideed on rakendatavad ka vastupidise küsimuse uurimisel: kui nõrgalt teist järku statsionaarse protsessi $Z_t,\ t \in \mathbb{Z}$ korral kehtib seos

$$\pi(B)Z_t = A_t,$$

siis tingimusel, et $\psi(x) = \frac{1}{\pi(x)}$ on esitatav astmereana, mis koondub piirkonnas $|x| \leq 1 + \varepsilon$ mingi $\varepsilon > 0$ korral, saab protsessi Z esitada üldise lineaarse protsessina kujul

$$Z_t = \psi(B)A_t.$$

4.1.1 Osaautokorrelatsioonid

Lisaks autokorrelatsioonidele on etteantud aegreale sobiva mudeli valikul suureks abiks osaautokorrelatsioonid. Defineerime selle mõiste. Selleks aga on eelnevalt vaja veel ühte mõistet.

Definitsioon 14 *Olgu X ning $Y_1, \ldots, Y_k$ mingid lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused. Suuruse X projektsiooniks suurustega $Y_1, \ldots, Y_k$ määratud alamruumile nimetatakse suurust kujul*

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} c_i Y_i,$$

mille korral $E((X - \bar{X})^2)$ on minimaalne. Operaatorit $P : X \to \bar{X}$ nimetatakse vähimruutude projektoriks suurustega $Y_1, \ldots, Y_k$ määratud alamruumile.

Märkus 15 *Vähimruutude projektorit nimetatakse statistikas sageli ka parima lineaarse prognoosi operaatoriks (*best linear predictor*)*

Eelnev definitsioon tugineb teadmisele, et selline projektsioon on ühene. Neile, kes on tuttavad funktsionaalanalüüsi põhitulemustega, võib meelde tuletada, et Hilberti ruumides (milleks on ka lõpliku dispersiooniga juhuslike suuruste ruum, kus normiks on juhusliku suuruse ruudu keskväärtus) kehtib üldisem tulemus, et projektsioon igale kinnisele kumerale hulgale on üheselt määratud. Samas ei ole selles ka kuigi raske ise veenduda.

Harjutus 19 *Näidata, et kui X, W_1 ja W_2 on lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused, mille korral kehtivad tingimused*

$$E[(X - W_1)^2] = E[(X - W_2)^2], \; E[(W_1 - W_2)^2] > 0,$$

siis

$$E[(X - \frac{W_1 + W_2}{2})^2] < E[(X - W_1)^2].$$

Tõestada selle omaduse abil, et eelnevad definitsioonis kirjeldatud projektsioon on ühene (sest tingimusest $E[(W_1 - W_2)^2] = 0$ järeldub, et $W_1 = W_k$ peaaegu kindlasti, st tõenäosusega 1).

Tõestuse skeem. (Järgnevad sammud tuleks detailselt läbi kirjutada ja põhjendada) Esimesest tingimusest saame

$$E[(X - W_1)^2 - (X - W_2)^2] = 0.$$

Siit saab ruutude vahe valemit $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ kasutades ning võrduse mõlemaid pooli kahega jagades võrduse

$$E[(X - \frac{W_1 + W_2}{2})(W_2 - W_1)] = 0.$$

Edasi kirjutada

$$E[(X - W_1)^2] = E[((X - \frac{W_1 + W_2}{2}) + \frac{W_2 - W_1}{2})^2].$$

Kasutades nüüd ruudu valemit $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ juhul $a = X - \frac{W_1+W_2}{2}$ ja $b = \frac{W_2-W_1}{2}$ ning eelnevalt tõestatud võrdust keskmise liikme jaoks, saamegi vajaliku tulemuse. □

Juhuslike suuruste kontekstis vastab eelnevalt defineeritud projektor juhusliku suuruse X parima suuruste $Y_1, \ldots, Y_k$ lineaarkombinatsiooni kujul avalduva prognoosi leidmisele.

Lemma 16 *Eeldame, et $X, Y_1, \ldots, Y_k$ on lõpliku dispersiooniga ning keskväärtusega 0 juhuslikud suurused ja $\bar{X}$ on suuruse X vähimruutude projektsioon suurustega $Y_1, \ldots, Y_k$ määratud ruumile. Siis $E(\bar{X}) = 0$ ning $\mathrm{cov}(X - \bar{X}, Y_i) = 0 \; \forall i$.*

Tõestus. Harjutus lugejale. (Vihje: defineerida funktsioon $f(t) = E[(X - \bar{X} - tY_i)^2]$; veenduda, et see saavutab minimaalse väärtuse kohal $t = 0$ ja mõelda, mis järeldub ekstreemimi tarvilikust tingimusest)□

Paneme tähele, et eelneva lemma põhjal saab suuruse X projektsiooni leida kordajate $c_i,\ i = 1, \ldots, k$ leidmise teel võrrandisüsteemist

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{cov}(Y_i, X),\ i = 1, \ldots, k.$$

Juhul, kui sellel süsteemil on mitu lahendit, siis võib võtta suvalise nendest, kuna saab näidata, et $\bar{X} = \sum_{i=1}^{k} c_i Y_i$ on sel juhul kõikide lahendite korral sama.

Näide 17 *Olgu X, Y_1ja Y_2 sellised tsentreeritud juhuslikud suurused, mis rahulavad tingimusi* $\mathrm{cov}(X, Y_1) = 1,\ \mathrm{cov}(X, Y_2) = 2,\ \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = -1$ *ja* $D(Y_1) = D(Y_2) = 4$. *Leida X vähimruutude projektsioon suurustega Y_1 ja Y_2 määratud alamruumile. Vastavalt lemmale 16 tuleb selleks lahendada võrrandisüsteem*

$$c_1 \cdot 4 + c_2 \cdot (-1) = 1,$$
$$c_1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 4 = 2.$$

Siit saame $c_1 = \frac{2}{5},\ c_2 = \frac{3}{5}$ ning seega on X projektsiooniks $\bar{X} = \frac{2}{5}Y_1 + \frac{3}{5}Y_2$.

Definitsioon 18 *Juhuslike suuruste X_1 ja X_2 osakorrelatsiooniks pärast suuruste $Y_1, \ldots, Y_k$ mõju eemaldamist nimetatakse suuruste $X_1 - PX_1$ ja $X_2 - PX_2$ vahelist korrelatsiooni, kus P on vähimruutude projektor suurustega $Y_1, \ldots, Y_k$ määratud alamruumile.*

Tuletame meelde, et statsionaarse protsessi Z korral tähistab $\tilde{Z}$ vastavat tsentreeritud protsessi, st $\tilde{Z}_t = Z_t - EZ_t = Z_t - \mu$.

Definitsioon 19 *Teist järku nõrgalt statsionaarse protsessi Z k-ndat järku osaautokorrelatsioonikordajaks nimetatakse suuruste $\tilde{Z}_t$ ja $\tilde{Z}_{t-k}$ osakorrelatsiooni pärast suuruste $\tilde{Z}_{t-1}, \ldots, \tilde{Z}_{t-(k-1)}$ mõju eemaldamist.*

Definitsioonis järeldub, et protsessi Z esimest järku osaautokorrelatsioon on võrdne suurusega $\rho(1)$.

Harjutus 20 *Leida otse definitsioonist lahtudes teist järku nõrgalt statsionaarse protsessi teist järku osakorrelatsiooni avaldis autokorrelatsioonide kaudu.*

Osaautokorrelatsioonikordaja definitsioonist lähtuvalt on võimalik näidata, et k-ndat järku osaautokorrelatsioonikordaja ϕ_{kk} on teadaolevate autokorrelatsioonide põhjal leitav Yule-Walkeri võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
\phi_{k1} + \rho(1)\phi_{k2} + \ldots + \rho(k-1)\phi_{kk} &= \rho(1),\\
\rho(1)\phi_{k1} + \phi_{k2} + \ldots + \rho(k-2)\phi_{kk} &= \rho(2),\\
&\ldots\\
\rho(k-1)\phi_{k1} + \rho(k-2)\phi_{k2} + \ldots + \phi_{kk} &= \rho(k),
\end{aligned}$$

lahendamise teel.

Harjutus 21 *(*, lisapunktide saamiseks esitada 03.11.2016) Näidata osaautokorrelatsiooni definitsioonist lähtudes, et k-ndat järku osaautokorrelatsioon on avaldub suurusena ϕ_{kk} Yule-Walker võrrandites.*

4.1.2 Lõpliku arvu parameetritega määratud lineaarsete protsesside klassid

Praktiliseks kasutamiseks on väga oluline, et aegrea mudelis oleks lõplik (ja võimalikult väike) arv parameetreid, mida andmete põhjal on vaja hinnata. Seetõttu pakuvad erilist huvi järgmised protsesside klassid.

Definitsioon 20 *Eeldame, et protsess A_t, $t \in \mathbb{Z}$ on tsentreeritud, mittekorreleeritud ja teist järku nõrgalt statsionaarne ning et protsess Z_t, $t \in \mathbb{Z}$ omab konstantsest keskväärtust μ. Kasutame tähistust $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$. Lõpliku arvu kordajatega lineaarsete protsesside klassid on järgmised:*

- *Järguga p autoregressiivseteks protsessideks ehk AR(p) protsessideks nimetatakse teist järku nõrgalt statsionaarseid protsesse kujul*

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t.$$

- *Järku q liikuva keskmisega protsessideks ehk MA(q) protsessideks nimetatakse protsesse kujul*

$$\tilde{Z}_t = A_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i A_{t-i}.$$

- *ARMA(p,q) protsessideks nimetatakse teist järku nõrgalt statsionaarseid protsesse kujul*

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i A_{t-i}.$$

Käesolevas kursuses vaatleme selliseid AR(p) and ARMA(p,q) protsesse, mille korral kehtivad tingimused $\mathrm{cov}(Z_i, A_j) = 0 \ forall j > i$. Selliseid pretsesse nimetatakse sageli ka põhjuslikeks (*causal*). Kui ei ole öeldud teisiti, siis edasised tulemused kehtivad põhjuslike protsesside joaks.
Kui defineerida funktsioonid

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i, \ \theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i,$$

siis on AR(p) protsess on esitatav kujul

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = A_t,$$

MA(q) protsess on esitatav kujul

$$\tilde{Z}_t = \theta(B)A_t$$

ning ARMA(p,q) protsess on esitatav kujul

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = \theta(B)A_t.$$

Edaspidi uurime nende protsesside omadusi lähemalt.

4.1.3 Teisendamine erinevate kujude vahel

Eelnevalt oleme vaadelnud üldise lineaarse protsessi esitamist autoregressiivsel kujul ning teame, et see on võimalik, kui $\pi(x) = \frac{1}{psi(x)}$ on esitatav astmereana, mis koondub piirkonnas $|x| < 1 + \varepsilon$ mingi $\varepsilon > 0$ korral. Nagu mainitud, tähendab see sisuliselt, et operaatoril $\psi(B)$ on sel juhul olemas pöördoperaator $\pi(B)$, mida võrduse $\tilde{Z}_t = \psi(B)A_t$ mõlemale poole rakendades saame $\pi(B)\tilde{Z}_t = A_t$. Lisaks sai mainitud, et polünoomi $\psi(x)$ puhul on $\frac{1}{psi(x)}$ astmerea koonduvusraadius seotud $\psi(x) = 0$ lahenditega kompleksarvude hulgas, st vastav astmerida koondub piirkonnas $|x| < min_j|x_j|$, kus x_j tähistab polünoomi ψ nullkohti.

Selle väite kehtivuses võib veenduda mitmel moel. Üheks võimaluseks on kasutada kompleksmuutuja funktsioonide teooriat: Cauchy valemi kohaselt kehtib

$$\pi(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi|=r} \frac{\pi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ |z| < r,$$

kus r on suvaline arv, mille korral kõik ϕ nullkohad jäävad väljapoole komplekstasandi ringi raadiusega r, ilma argumendita π on tuntud matemaatiline konstant $3.14\ldots$ ning integreerimine toimub üle komplestasandi ringi raadiusega r. Siit valemist järeldub (kuidas ?), et $|\pi^k(0)| \leq \text{const.}\, k! r^{-k}$, mistõttu vastav Taylori rida koondub ringis raadiusega r. Teiseks võimaluseks on esitada π nullkohtade abil määratud osamurdude summana:

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(1 - x_i^{-1}x)^j},$$

kus $x_1, \ldots, x_k$ on polünoomi ψ nullkohad (komplekstasandil) ning $m_1, \ldots, m_k$ on nende nullkohtade kordsused. Kuna

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 - x_i^{-1}x)^j} &= \frac{x_i^{j-1}}{(j-1)!} \frac{d}{dx^{j-1}} \left(\frac{1}{1 - x_i^{-1}x} \right) \\
&= \frac{x_i^{j-1}}{(j-1)!} \frac{d}{dx^{j-1}} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} x_i^{-\ell} x^{\ell} \right) = \sum_{\ell=j-1}^{\infty} \frac{\ell!}{(j-1)!(\ell-j+1)!} x_i^{-\ell+j-1} x^{\ell-j+1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+j-1)!}{(j-1)!\ell!} x_i^{-\ell} x^{\ell},
\end{aligned}$$

siis kõikidele osamurdudele vastavad astmeread koonduvad $|x| < min_j|x_j|$ korral (vt näiteks D'Alemberti tunnust arvridade koondumise kohta) ning seega ka $\pi(x)$ astmerida (kui koonduvate astmeridade summa) koondub piirkonnas $|x| < min_j|x_j|$.

Seega kui polünoomi $\psi(x)$ nullkohad on kõik mooduli poolest ühest suuremad, on leidub operaatoril $\psi(B)$ pöördoperaator.

Sama tulemus lubab aga teha ka teistsuguseid teisendusi, näiteks esitada AR(p) protsessi üldise lineaarse protsessi kujul ning ARMA(p,q) protsessi kas autoregressiivsel või üldise lineaarse protsessi kujul. Võtame vastavad tulemused kokku:

- Kui AR(p) protsessi $\phi(B)\tilde{Z}_t = A_t$ korral on polünoomi $\phi(x)$ nullkohad kompleksarvude hulgas kõik mooduli poolest suuremad kui 1, siis saab protsessi viia üldise lineaarse protsessi kujule, esitades $\psi(x) = \frac{1}{\phi(x)}$ astmereana $1 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \ldots$, saadud kujuks on $\tilde{Z}_t = \psi(B)A_t$.
- Kui MA(q) protsessi $\tilde{Z}_t = \theta(B)A_t$ korral on polünoomi $\theta(x)$ nullkohad kõik mooduli poolest suuremad kui 1, siis saab seda protsessi esitada autoregressiivsel kujul $\pi(B)\tilde{Z}_t = A_t$, kus $\pi(x) = 1 - \pi_1 x + \pi_2 x^2 - \ldots$ on funktsiooni $\frac{1}{\theta(x)}$ esitus astmereana.
- Kui ARMA(p,q) protsessi $\phi(B)\tilde{Z}_t = \theta(B)A_t$ korral on polünoomi $\phi(x)$ nullkohad kõik mooduli poolest ühes suuremad, siis on see protsess esitatav üldise lineaarse protsessina kujul $\tilde{Z}_t = \psi(B)A_t$, kus $\psi(x) = 1 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \ldots$ on funktsiooni $\frac{\theta(x)}{\phi(x)}$ esitus astmereana. Kui polünoomi $theta(x)$ nullkohad on kõik mooduli poolest ühest suuremad, siis on see protsess esituv autoregressiivsel kujul $\pi(B)\tilde{Z}_t = A_t$, kus $\pi(x) = 1 - \pi_1 x + \pi_2 x^2 - \ldots$ on funktsiooni $\frac{\phi(x)}{\theta(x)}$ esitus astmereana.

Harjutus 22 *Leida protsessi*

$$\tilde{Z}_t = 1.2\tilde{Z}_{t-1} - 0.35\tilde{Z}_{t-2} + A_t$$

esitus üldise lineaarse protsessi kujul (st, leida suurused ψ_i, $i = 1, 2, \ldots$). Kontrollimiseks leida esimesed neli kordajat ka alternatiivsel teel (korrutise $\phi(x)\psi(x)$ muutuja x astmete abil saadud seoseid kasutades).

4.2 Autoregressiivsed protsessid

Uurime lähemalt protsessi

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t,\ t \in \mathbb{Z} \tag{4.3}$$

omadusi. Nagu näeme, on selle protsessi käitumine seotud polünoomi

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i$$

nullkohtadega.

4.2.1 Autokorrelatsioonifunktsioon ja statsionaarsus

Oletame kõigepealt, et protsess $\tilde{Z}$ on statsionaarne ning et $cov(A_t, Z_{t-k}) = 0 \, \forall k > 0$. Korrutades võrrandi (4.3) mõlemaid pooli suurusega $\tilde{Z}_{t-k}$ ning võttes keskväärtuse, saame

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(k-i), \; k > 0$$

kust pärast suurusega $\gamma(0)$ läbijagamist saame võrduse

$$\rho(k) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(k-i), \; k > 0.$$

See tähendab, et autokorrelatsioonikordajad rahuldavad p-ndat järku lineaarset rekurrentset võrrandit. Selliste võrrandite kohta on teada, et mingite kordajate $c_i, i = 1, \ldots, p$ kehtib

$$\rho(k) = \sum_{i=1}^{p} c_i d_{ik},$$

kus jadad $d_{ik}, \; k = 1, 2, \ldots$ on defineeritud funktsiooni $\phi(x)$ juurte abil järgmiselt: kui x_j on funktsiooni ϕ m-kordne nullkoht (komplekstasandil), siis m jadadest c_{ik} on kujul $k^\ell x_j^{-k}, \; 0 \le \ell \le m-1$. Sellest esitusest järeldub, et AR(p) protsesside korral on lõpmatult paljud suurustest $\rho(k)$ nullist erinevad. Lisaks sellele, autokorrelatsioonikordajad $\rho(1), \ldots, \rho(p-1)$ ei ole suvalised, vaid rahuldavad Yule-Walker võrrandeid

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \ldots + \phi_p\rho(p-1), \tag{4.4}$$
$$\rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \ldots + \phi_p\rho(p-2), \tag{4.5}$$
$$\ldots \tag{4.6}$$
$$\rho(p-1) = \phi_1\rho(p-2) + \phi_2\rho(p-3) + \ldots + \phi_{p-1} + \phi_p\rho(1) \tag{4.7}$$

mistõttu on kordajad $c_1, \ldots, c_p$ üheselt määratud.

Harjutus 23 *Vaatleme protsess $Z_t = \frac{5}{6}Z_{t-1} - \frac{1}{6}Z_{t-2} + A_t$. Leida selle puhul $\rho(1), \rho(2), \rho(3)$, kasutades eelnevalt tuletatud seoseid. Lisaks leida valem $\rho(k)$ jaoks kujul $\rho(2) = c_1 x_1^{-k} + c_2 x_2^{-k}$, kus x_1 ja x_k on vastava polünoomi ϕ nullkohad (st tuleb leida c_1, c_2, x_1, x_2 väärtused, mille korral see valem kehtib iga k korral).*

Samas autokorrelatsioonikordajad peavad definitsiooni kohaselt olema vahemikus $[-1, 1]$, mistõttu statsionaarsuse eeldus ei saa olla täidetud, kui mõni polünoomi ϕ nullkohtadest on mooduli poolest ühest väiksem ja vastav kordaja autokorrelatsioonide esituses nullkohtade kaudu on nullist erinev. Juht, kus mõni funktsiooni ϕ nullkohtadest on mooduli poolest võrdne ühega, vajab eraldi uurimist, kuid selle käsitlemine on käesoleva kursuse mahtu arvestades ebaotstarbekas. Käesolevas kursuses kasutame järgneva lemma tulemust.

Lemma 21 *Eeldame, et protsessi* (4.3) *puhul protsess A_t on nõrgalt teist järku statsionaarne, tsentreeritud ja mittekorreleeritud, rahuldab tingimust $D(A_t) > 0$ ning et kehtivad võrdused* $\operatorname{cov}(A_t, Z_{t-i}) = 0, i > 0$. *Siis on vastav protsess nõrgalt teist järku statsionaarne parajasti siis, kui polünoomi $\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i$ nullkohad on mooduli poolest ühest suuremad.*

4.2.2 Osaautokorrelatsioonid

AR(p) protsesside korral on sobiva mudeli kindlakstegemisel suur kasu järgmisest tulemusest.

Lemma 22 *Olgu Z teist järku nõrgalt statsionaarne AR(p) protsess. Siis tema osaautokorrelatsioonikordajad on võrdsed nulliga alates järgust $p + 1$.*

Tõestus. Olgu $k > p$. Olgu P vähimruutude projektor suurustega $\tilde{Z}_{t-1}, \ldots, \tilde{Z}_{t-k+1}$ määratud alamruumile. Kuna A_t on mittekorreleeritud suurustega $\tilde{Z}_{t-1}, \ldots, \tilde{Z}_{t-k+1}$, siis on lihtne veenduda, et $A_t = \tilde{Z}_t - P\tilde{Z}_t$. Selleks näitame, et

$$P\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i}.$$

P definitsiooni kohaselt peame me selleks näitama, et

$$E[(\tilde{Z}_t - \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tilde{Z}_{t-i})^2] \geq E[(\tilde{Z}_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i})^2]$$

kõikide kordajate $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ korral.
Tähistame kirjapaneku lihtsustamise huvides

$$X = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \tilde{Z}_{t-i}, \; Y = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i},$$

siis kasutades suuruse A_t tsentreeritust ning sõltumatust suurustest X ja Y saame

$$\begin{aligned} E[(\tilde{Z}_t - X)^2] &= E[(A_t + Y - X)^2] = E[A_t^2] - 2E[A_t(X - Y)] + E[(X - Y)^2] \\ &= E[A_t^2] + E[(X - Y)^2] \geq E[A_t^2]. \end{aligned}$$

Samas

$$E[(\tilde{Z}_t - Y)^2] = E[A_t^2],$$

seetõttu on suurus Y tõepoolest võrdne suuruse $\tilde{Z}_t$ projektsiooniks vähimruutude mõttes.
Kasutades jällegi suuruse A_t mittekorreleeritust varasemate protsessi Z väärtustega saame nüüd

$$\operatorname{cov}(\tilde{Z}_t - P\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_{t-k} - P\tilde{Z}_{t-k}) = \operatorname{cov}(A_t, \tilde{Z}_{t-k} - P\tilde{Z}_{t-k}) = 0.$$

Osaautokorrelatsioonikordaja definitsiooni kohaselt on seega protsessi $\tilde{Z}$ k-ndat järku osaautokorrelatsioonikordaja võrdne nulliga.□

Madalamat järku osaautokorrelatsioone saame leida Yule-Walkeri võrrandite abil pärast seda, kui autokorrelatsioonid on leitud. Yule-Walkeri võrrandeid võib kasutada ka osaautokorrelatsioonide hindamiseks, asendades võrrandites teoreetilised autokorrelatsioonid nende hinnangutega. Praktikas on samuti kasulik teadmine (vt [8], valem 3.2.35), et AR(p) protsessi korral on osaautokorrelatsioonikordajate hinnangud alates järgust $k = p + 1$ ligikaudu sõltumatud, keskväärtusega 0 ning standardhälbega $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

4.2.3 AR(1) tüüpi mudelid

Vaatleme mudeleid kujul

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + A_t.$$

Kuna selle mudeli korral $\phi(x) = 1 - \phi_1 x$, mille ainsaks nullkohaks on $x_1 = \frac{1}{\phi_1}$, siis statsionaarsuse jaoks on vajalik tingimuse $|\phi_1| < 1$ täidetus. Kuna autokorrelatsioonid rahuldavad eelneva põhjal seost

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1), \; k > 0,$$

siis

$$\rho(k) = \phi_1^k, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Seega kahanevad autokorrelatsoonide absoluutväärtused eksponentsiaalselt, kusjuures juhul $\phi_1 > 0$ on nad sama märgiga ning juhul $\phi_1 < 0$ vahelduvate märkidega. Osaautokorrelatsioonid on alates järgust 2 võrdsed nulliga ning esimest järku osaautokorrelatsioon on (nagu alati) võrdne $\rho(1)$-ga. Näited vastavate aegridade käitumisest koos empiiriliste autokorrelatsioonide ja empiiriliste osaautokorrelatsioonidega juhul $\phi_1 = 0.8$ ja $\phi_1 = -0.8$ on toodud vastavalt joonistel 4.1 ja 4.2.

4.2.4 AR(2) tüüpi mudelid

Vaatleme mudeleid kujul

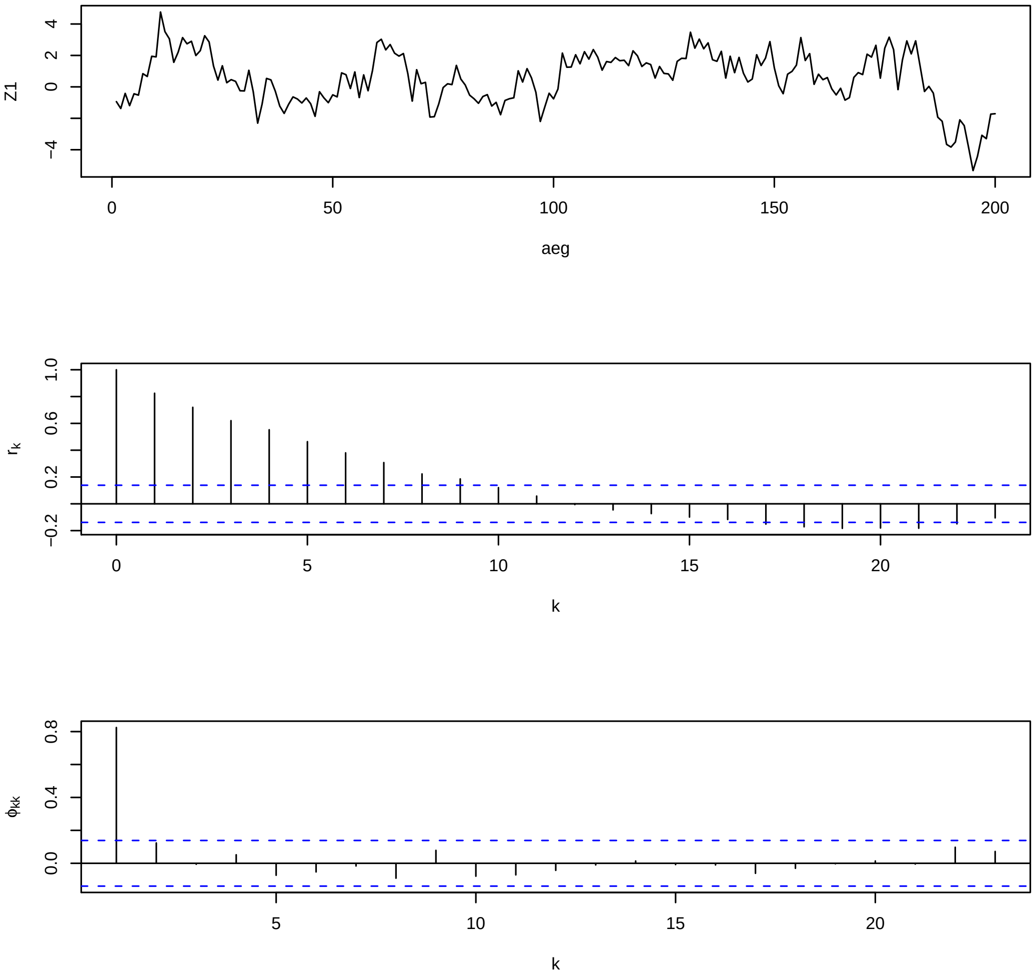
$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + A_t.$$

Selleks, et funktsiooni $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$ nullkohad oleks väljaspool komplekstasandi ühikringi, peavad kordajad ϕ_1 ja ϕ_2 rahuldama geomeetriliselt küllaltki lihtsalt kirjeldatavaid tingimusi.

Lemma 23 *Statsionaarsuse tingimus on AR(2) mudeli puhul samaväärne võrratustega*

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &< 1, \\ \phi_2 - \phi_1 &< 1, \\ \phi_2 &> -1, \end{aligned}$$

st punkti (ϕ_1, ϕ_2) *peab paiknema tippudega (0,1), (-2,-1) ja (2,-1) määratud kolmnurgas.*



Joonis 4.1: AR(1) tüüpi aegrea 200 väärtust juhul $\phi_1 = 0.8$ ning autokorrelatsioonide ja osaautokorrelatsioonide hinnangud

Autokorrelatsioonikordajad saab arvutada vastavalt rekurrentsele seosele

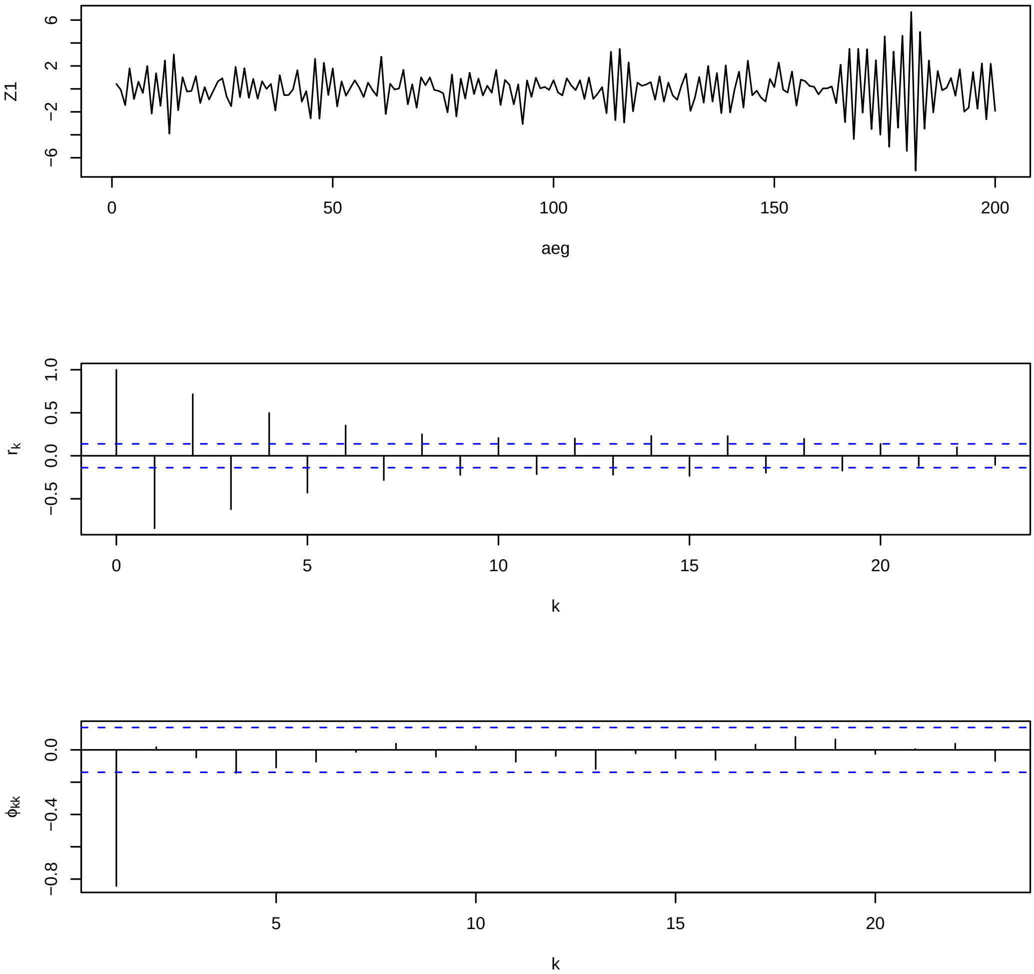
$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2), \;\; k > 1,$$

lähtudes väärtustest $\rho(0) = 1$ ja $\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$. Viimane tuleneb Yule-Walkeri esimesest võrrandist:

$$\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1).$$

Samas saame neid võrrandeid kasutada ka kordajate ϕ_1 ja ϕ_2 hindamiseks lähtuvalt teadaolevatest empiirilistest autokorrelatsioonidest: lahendades Yule-Walkeri võrrandid ϕ_1 ja ϕ_2 suhtes, saame

$$\phi_1 = \frac{\rho(1)(1-\rho(2))}{1-\rho(1)^2}, \;\; \phi_2 = \frac{\rho(2)-\rho(1)^2}{1-\rho(1)^2},$$



Joonis 4.2: AR(1) tüüpi aegrea 200 väärtust juhul $\phi_1 = -0.8$ ning autokorrelatsioonide ja osaautokorrelatsioonide hinnangud

mille abil on võimalik empiirilistest autokorrelatsioonidest r_1 ja r_2 arvutada kordajate ϕ_1 ja ϕ_2 hinnangud.

Teoreetilised osaautokorrelatsioonid on nullid alates järgust 3, esimest järku osaautokorrelatsion ϕ_{11} on võrdne $\rho(1)$-ga ning teist järku osaautokorrelatsioon on võrdne kordajaga ϕ_2 (miks?), seega on võimalik kordajaid hinnata ka osaautokorrelatsioonide hinnangute abil.

4.3 Liikuva keskmise protsessid

Järgnevas vaatleme MA(q) protsesside

$$\tilde{Z}_t = A_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i A_{t-i}$$

omadusi. Varasemast teame, et sellised protsessid vähemalt nõrgalt teist järku statsionaarse ja mittekorreleeritud protsessi A_t korral on alati vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarsed. Varasema põhjal teame, et pööratavuseks on vajalik, et polünoomi $\theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i$ korral oleks funktsioon $\pi(x) = \frac{1}{\theta(x)}$ arendatav piirkonnas $|x| \leq 1$ korral koonduvasse astmeritta ning et selleks on tarvilik ja piisav, et $\theta(x)$ nullkohad oleks kõik mooduli poolest ühest suuremad. Pööratava protsessi autoregressiivse esituse

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t$$

kordajate π_i leidmiseks on jällegi kaks võimalust:

1. leiame funktsiooni $\frac{1}{\theta(x)}$ esituse astmereana ning arvestame, et $-\pi_i$ on selles astmereas x^i kordaja,

2. leiame $\pi_1, \pi_2, ...$ samm-sammult, võrdsustades võrduse

   $$(1 - \pi_1 x - \pi_2 x^2 - \pi_3 x^3 + \ldots)(1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i) = 1$$

   mõlema poole erinevate x astmete kordajaid.

Harjutus 24 *Leida protsessi*

$$Z_t = A_t - \frac{9}{20} A_{t-1} + \frac{1}{20} A_{t-2}$$

autoregressiivse esituse $Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i Z_{t-i} + A_t$ *kordaja* π_3.

4.3.1 Autokorrelatsioonid

Arvestades, et üldise lineaarse protsessi korral

$$\gamma(k) = \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

ning et MA(q) protsessi korral

$$\psi_0 = 1; \;\; \psi_i = -\theta_i, \;\; i = 1, \ldots, q; \psi_k = 0, \;\; k > q$$

saame, et MA(q) protsessi autokorrelatsioonikordajad avalduvad kujul

$$\rho(k) = \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}}{1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_i^2}, \ k = 1, \dots, q$$

ning $\rho(k) = 0, \ k > q$. Nagu me ka hiljem näeme, on $MA(q)$ protsesside korral võimalik, et täpselt samad autokorrelatsioonid (ja seega ka osaautokorrelatsioonid) vastavad erinevatele parameetritele $\theta_1, \dots, \theta_q$. Osutub aga, et ainult üks parameetrite θ valik vastab pööratavale protsessile ning aegrea vaatluste põhjal saame parima tuleviku prognoosi, kasutades pööratavat mudelit.

4.3.2 MA(1) protsessi omadused.

Vaatleme protsessi kujul

$$\tilde{Z}_t = A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Selle protsessi korral

$$\rho(1) = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

ning $\rho(k) = 0, \ k > 1$. Kuna me saame $\rho(1)$ avaldise kirjutada (juhul $\rho(1) \neq 0$) ka kujul

$$\rho(1) = -\frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \theta_1},$$

siis on selge, et täpselt samasugused autokorrelatsioonid on ka protsessil

$$\tilde{Z}_t = A_t - \frac{1}{\theta_1} A_{t-1}.$$

Samas, kui $|\theta_1| > 1$, siis võime defineerida suurused $\bar{A}_t$ kujul

$$\bar{A}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_1^{-i} \tilde{Z}_{t-i},$$

mille korral kehtib

$$\tilde{Z}_t = \bar{A}_t - \frac{1}{\theta_1} \bar{A}_{t-1}.$$

Kuna suurused $\bar{A}_t$ on tsentreeritud, mittekorreleeritud ning konstantse dispersiooniga (vt järgnev harjutus), siis võime ilma üldsust kitsendamata eeldada, et vaadeldava protsessi korral on kordaja θ_1 absoluutväärtuselt ühest väiksem ning et tegemist on pööratava protsessiga.

Harjutus 25 *Veenduda, et juhul $|\theta_1| > 1$ defineeritud juhuslikud suurused $\bar{A}_t$ on mittekorreleeritud ning konstantse dispersiooniga (seega tegemist on vähemalt teist järku nõrgalt statsionaarse protsessiga) ning et kehtivad võrdused $\tilde{Z}_t = \bar{A}_t - \frac{1}{\theta_1}\bar{A}_{t-1}, \ t \in \mathbb{Z}$.*

Harjutus 26 *Näidata, et juhul $|\theta_1| \neq 1$ kehtib võrratus $|\rho(1)| < \frac{1}{2}$.*

Osaautokorrelatsioonide leidmiseks paneme tähele, et vaadeldaval juhul tuleb Yule-Walker võrrandisüsteemi kohaselt leida kolmediagonaalse võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}\phi_{k1} + \rho(1)\phi_{k2} &= \rho(1),\\ \rho(1)\phi_{k1} + \phi_{k2} + \rho(1)\phi_{k3} &= 0,\\ &\dots\\ \rho(1)\phi_{k,k-2} + \phi_{k,k-1} + \rho(1)\phi_{kk} &= 0,\\ \rho(1)\phi_{k,k-1} + \phi_{kk} &= 0\end{aligned}$$

puhul suuruse ϕ_{kk} väärtus. Kui siit elimineerida teisest võrrandist esimese võrrandi abil tundmatu ϕ_{k1}, kolmandast võrrandist saadud teise võrrandi abil ϕ_{k2} jne, siis jõuame kahediagonaalse süsteemini

$$\begin{aligned}b_1\phi_{k1} + \rho(1)\phi_{k2} &= f_1,\\ b_2\phi_{k2} + \rho(1)\phi_{k3} &= f_2,\\ &\dots\\ b_{k-1}\phi_{k,k-1} + \rho(1)\phi_{kk} &= f_{k-1},\\ b_k\phi_{kk} &= f_k,\end{aligned}$$

kus $b_1 = 1,\ f_1 = \rho(1)$ ning

$$b_{i+1} = 1 - \frac{\rho(1)^2}{b_i},\ f_{i+1} = -\frac{\rho(1)}{b_i}f_i,\ i = 2, \dots, k.$$

Arvestades, et $|\rho(1)| < \frac{1}{2}$ saame $b_i > \frac{1}{2}\ \forall i$ ning seega

$$|\phi_{kk}| = \frac{|f_k|}{b_k} \le (2\rho(1))^k,$$

seega osaautokorrelatsioonikordajad on küll kõik nullist erinevad, kuid kahanevad eksponentsiaalselt.

4.3.3 MA(2) protsessi omadused.

Vaatleme protsessi kujul

$$\tilde{Z}_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \theta_2 A_{t-2}.$$

Selle protsessi korral

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2},\\ \rho(2) &= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}\end{aligned}$$

ning $\rho(k) = 0,\ k > 2$. Küllalt lihtne on veenduda, et kui x_1, x_2 on polünoomi

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2$$

nullkohad, siis täpselt samad autokorrelatsioonikordajad on kõikidel MA(2) protsessidel, millele vastavate polünoomide nullkohad on kujul x_1^i, x_2^j, kus $i, j \in \{-1, 1\}$. Samas ainult üks nendest protsessidest rahuldab pööratavuse tingimust ning jällegi võime üldsust kitsendamata eeldada, et meid huvitav protsess rahuldab pööratavuse tingimust. Analoogiliselt AR(2) protsesside statsionaarsuse tingimustega saame nüüd, et pööratava MA(2) protsessi kordajad θ_1 ja θ_2 peavad rahuldama tingimusi

$$\theta_2 + \theta_1 < 1,\ \theta_2 - \theta_1 < 1,\ \theta_2 > -1.$$

4.4 ARMA(p,q) protsessid

Vaatleme protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{Z}_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i A_{t-i}.$$

See protsess on statsionaarne, kui polünoomi $\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i$ nullkohad on väljaspool komplekstasandi ühikringi ning pööratavuse tingimus on täidetud, kui polünoomi $\theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i$ nullkohad on väljaspool komplekstasandi ühikringi. Arvutades kovariatsiooni $\tilde{Z}_t$ ja $\tilde{Z}_{t-k}$ vahel juhul $k > q$, saame

$$\gamma(k) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \gamma(k-i),$$

mistõttu autokorrelatsioonikordajad $\rho(k)$ rahuldavad rekurrentset võrrandit

$$\rho(k) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho(k-i)$$

alates $k = q + 1$. Erijuhul $p = 1$ järeldub siit, et $\rho(k) = \phi^{k-q} \rho(q),\ k > q$, seega kahanevad autokorrelatsioonid eksponentsiaalselt alates järgust $k = q + 1$.

4.5 ARMA(1,1) protsessid

Vaatleme protsesse kujul

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}.$$

Leiame avaldised selle protsessi autokovariatsioonidele ja autokorrelatsioonidele. Kõigepealt paneme tähele, et

$$\mathrm{cov}(\tilde{Z}_t, A_t) = \sigma_A^2.$$

Seejärel saame leida

$$\mathrm{cov}(\tilde{Z}_t, A_{t-1}) = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_A^2.$$

Leides nüüd kovariatsiooni $\tilde{Z}_t$ avaldise parema poole ja $\tilde{Z}_t$ vahel, saame

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1))\sigma_A^2$$

ning kovariatsioon $\tilde{Z}_t$ avaldise parema poole ja $\tilde{Z}_{t-1}$ vahel annab

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) - \theta_1\sigma_A^2.$$

Siit saame

$$\gamma(0) = \frac{(1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2)\sigma_A^2}{1 - \phi_1^2},$$
$$\gamma(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \theta_1\phi_1)\sigma_A^2}{1 - \phi_1^2}$$

ja seega

$$\rho(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \theta_1\phi_1)}{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}.$$

Kuna alates $k = 2$ kehtib

$$\rho(k) = \phi_1\rho(k-1),$$

siis autokorrelatsioonid kahanevad eksponentsiaalselt alates järgust 2.

4.6 Lineaarsed mudelid mittestatsionaarsete aegridade jaoks. Prognoosimine ja parameetrite hindamine

4.6.1 ARIMA mudelid

Sageli ei vasta aegrida statsionaarsuse nõuetele, kuna keskmine on ajas muutuv, kuid selle rea muudud või muutude muudud käituvad kooskõlas statsionaarsuse eeldustega. Järgnevas vaatlemegi selliste protsesside mudeleid.

Kui $Z_t,\ t \in \mathbf{R}$ on mingi protsess, siis muutude protsessi $Z_t - Z_{t-1}$ võime kirjutada kujul $(1-B)Z_t$ ning muutude muutude protsessi kujul $(1-B)^2 Z_t$.

Definitsioon 24 *ARIMA(p,d,q) protsessiks nimetatakse juhuslikku protsessi Z_t, mille d-ndat järku muudud (ehk diferentsid) $W_t = (1-B)^d Z_t$ vastavad ARMA(p,q), protsessile.*

Eelneva definitsiooni kohaselt on W_t teist järku nõrgalt statsionaarne ning rahuldab

$$\tilde{W}_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \tilde{W}_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i A_{t-i},$$

kus $\tilde{W}_t = W_t - E(W_t)$, juhuslikud suurused A_t on tsentreeritud, sama dispersiooniga ja mittekorreleeritud omavahel. Edasises eeldame täiendavalt, et A_t on mittekorreleeritud suurustega $\tilde{W}_{t-i}, i = 1, 2, \ldots$ iga t korral ning et $EW_t = 0$, kui $d > 0$

(sest vastasel korral on tegemist d järku polünoomi poolt antud globaalse trendiga aegreaga ning trendi lubamist-mittelubamist on mõistlik eraldi vaadelda). Samuti eeldame, et tegemist on pööratava protsessiga.

Vaatleme juhtu $W_t = (1-B)Z_t$, siis

$$Z_t = Z_{t-1} + W_t = Z_{t-2} + W_{t-1} + W_t = Z_{t-k} + \sum_{j=k+1}^{t} W_t.$$

Summa on aga vaadeldav tükiti konstantse funktsiooni integraalina. Üldisemalt, kui $W_t = (1-B)^d Z_t$, siis tuleb Z leidmiseks protsessist W rakendada summeerimist d korda, mis on samastatav d-kordse integraali leidmisega. Seetõttu nimetataksegi ARIMA(p,d,q) protsesse integreeritud ARMA protsessideks.

Harjutus 27 *Olgu antud suurused* $c_i = (1-B)^i Z_1,\ i = 0,\ldots,d-1$ *ning protsessi* $W_t = (1-B)^d Z_t$ *väärtused* $w_2,\ldots,w_n$. *Avaldada* Z_n *väärtus* z_n $c_0,\ldots,c_{d-1},w_2,\ldots,w_n$ *kaudu.*

4.7 Sesoonsed ARIMA mudelid

Sageli on andmetes mingi loomulik periood (näiteks aasta), mille korral aegrea järgnevat väärtust mõjutavad lisaks hiljutistele väärtustele ka perioodi või isegi mitme perioodi võrra minevikus olevad väärtused. Üheks võimaluseks sellise efekti modelleerimiseks on lihtsalt lisada perioodile vastavate nihetega autoregressiivseid ja/või liikuva keskmise liikmeid üldisesse mudelisse, kuid sageli on tulemusi lihtsam interpreteerida, kui perioodilist käitumist kirjeldav mudel esitada sesoonsete ja mittesesoonsete tegurite korrutise teel.

Perioodiga s multiplikatiivseteks ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)$_s$ tüüpi mudeliteks nimetatakse mudeleid kujul

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D Z_t = \theta(B)\Theta(B^s)A_t,$$

kus

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i,\ \ \Phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{P} \Phi_i x^i,$$
$$\theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i,\ \ \Theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{Q} \Theta_i x^i.$$

Siin tuleb tähele panna, et tegemist on ARIMA tüüpi mudelite alamklassiga. Saadava mudeli puhul eeldatakse, et $\phi(x)$ ja $\Phi(x)$ rahuldavad statsionaarsuse tingimusi ning et $\theta(x)$ ja $\Theta(x)$ rahuldavad pööratavuse tingimusi; sel juhul on vastavad tingimused täidetud ka vaadeldaval ARIMA tüüpi mudelil.

Lihtsalt mõistetavaks multiplikatiivseks sesoonseks ARIMA tüüpi mudelite erijuhuks on ARIMA(p,d,q)x(0,1,0)$_s$ tüüpi mudelid, kus s tähistab vaatluste arvu perioodis (tavaliselt aasta), kuna sel juhul vastavad aastased muudud ARIMA tüüpi mudelile.

Mudelite identifitseerimiseks on kasulik teada mõningatel lihtsamatel juhtudel autokorrelatsioonikordajate teoreetilist käitumist. Vaatleme näitena ARIMA(0,0,1)x(0,0,1)$_s$ autokorrelatsioonikordajate leidmist juhul $s \geq 3$. Olgu

$$Z_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^s)A_t$$

ehk

$$Z_t = A_t - \theta_1 A_{t-1} - \Theta_1 A_{t-s} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-s-1}.$$

Siit $A_k,\ k \in \mathbf{Z}$ sõltumatuse tõttu saame

$$\gamma(0) = (1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2)\sigma_A^2.$$

Kuna Z_{t-1} avaldises

$$Z_{t-1} = A_{t-1} - \theta_1 A_{t-2} - \Theta_1 A_{t-s-1} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-s-2}$$

on Z_t avaldisega võrreldes samade indeksitega A_{t-1} ja A_{t-s-1}, siis

$$\gamma(1) = \mathrm{cov}(Z_t, Z_{t-1}) = (-\theta_1 - \theta_1 \Theta_1^2)\sigma_A^2,$$

seega

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{-\theta_1(1 + \Theta_1^2)}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2}.$$

Seejärel on $k \geq 2$ korral Z_{t-k} ja Z_t avaldises samu liikmeid ainult siis, kui $k = s-1, s, s+1$; muudel juhtudel on kõik liikmed erinevad ning vastavad autokovariatsioonid ja autokorrelatsioonid võrdsed nulliga. Juhul $k = s - 1$ avaldub Z_{t-k} kujul

$$Z_{t-s+1} = A_{t-s+1} - \theta_1 A_{t-s} - \Theta_1 A_{t-2s+1} + \theta_1 \Theta_1 A_{t-2s},$$

seega

$$\gamma(s-1) = \theta_1 \Theta_1 \sigma_A^2,\ \rho(s-1) = \frac{\theta_1 \Theta_1}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2}.$$

Analoogiliselt leiame

$$\gamma(s) = (-\Theta_1 - \theta_1^2 \Theta_1)\sigma_A^2,\ \rho(s) = -\frac{\Theta_1(1 + \theta_1^2)}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2},$$
$$\gamma(s+1) = \theta_1 \Theta_1 \sigma_A^2,\ \rho(s+1) = \frac{\theta_1 \Theta_1}{1 + \theta_1^2 + \Theta_1^2 + \theta_1^1 \Theta_1^2}$$

Kõik ülejäänud autokorrelatsioonid on nullid. Seega vaadeldava mudeli tunnuseks on üks madalat järku nullist erinev autokorrelatsioon ning kolm nullist erinevat autokorrelatsiooni nihke s ümbruses, kusjuures perioodile s eelnev ja järgnev autokorrelatsioon on teoreetiliselt võrdsed.

Harjutus 28 *Leida* ARIMA(0,0,2)x(0,0,1)$_s$ *mudeli autokorrelatsioonikordajad juhul* $s \geq 5$

Harjutus 29 *Leida* ARIMA(0,0,1)x(1,0,0)$_s$ *mudeli autokorrelatsioonikordajad juhul* $s = 6$.

4.7.1 Aegridade prognoosimine ARIMA mudelite korral

Olgu meil antud aegrida $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ning oletame, et me teame, et see vastab ARIMA(p,d,q) tüüpi protsessile teadaolevate parameetritega μ (suuruse $(1-B)^d Z_t$ keskväärtus),$\phi_1, \ldots, \phi_p$ ja $\theta_1, \ldots, \theta_q$, kusjuures eeldame, et protsess on pööratav ning et kaalud $\phi_i,\ i = 1, \ldots, p$ rahuldavad statsionaarsuse tingimust. Esituse lihtsuse mõttes eeldame samuti, et $(1-B)^d Z_t$ keskväärtus on null. Järgnevas uurime, kuidas sel juhul leida minimaalse ruutkeskmise veaga prognoose suurusele $Z_{n+p},\ p \geq 1$ ning prognoosivigade standardhälbeid.

Edasises kasutame oluliselt aegrea erinevaid esitusi. Pööratavusest järeldub, et me saame vaadeldava ARIMA(p,d,q) protsessi esitada autoregressiivsel kujul

$$Z_t = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i Z_{t-1} + A_t,$$

kus kaalud π_i on on määratavad võrdusest

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x^i = \frac{\phi(x)(1-x)^d}{\theta(x)},$$

kus

$$\phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i,\ \ \theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i.$$

Samuti teame, et statsionaarse protsessi saab esitada üldise lineaarse protsessi kujul, seega leiduvad kordajad ψ_i, mille korral

$$(1-B)^d Z_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \right) A_t.$$

Kolmandaks esituseks on protsessi definitsioonis olev kuju, mis sisaldab lõpliku arvu eelnevaid Z ja A väärtuseid.

Harjutus 30 *Esitada ARIMA(0,1,1) protsess*

$$Z_t = Z_{t-1} + A_t - \frac{1}{2} A_{t-1}$$

autoregressiivsel kuju.

Autoregressiivse kuju kordajaid saab leida ka samm-sammult, võrdsustades seose

$$\pi(x)\theta(x) = \phi(x)$$

paremal ja vasakul pool x astmete ees olevaid kordajaid.

Harjutus 31 *Leida protsessi*

$$Z_t = A_t - 0.5 A_{t-1} + 0.3 A_{t-2}$$

autoregressiivse esituse kordaja π_4.

Ruutkeskmise vea mõttes parima prognoosi leidmine

Kui juhusliku suuruse kohta ei ole mingit lisainformatsiooni, siis tema parimaks prognoosiks on keskväärtus.

Harjutus 32 *Olgu X lõplikku dispersiooni omav keskväärtusega μ juhuslik suurus ning olgu a prognoos selle juhusliku suuruse väärtuse jaoks. Näidata, et ennustusviga $E((X-a)^2)$ on minimaalne juhul, kui $a = \mu$.*

Kui juhusliku suuruse ennustamisel on kasutada mingit lisainformatsiooni, siis saab näidata, et parimaks ennustuseks selle informatsiooni põhjal on tinglik keskväärtus. Käesolevas kursuses me tingliku keskväärtuse üldist definitsiooni sisse ei too, küll aga kasutame teadaolevaid tulemusi selle omaduste kohta.

Lemma 25 *Olgu I mingi lõplik või loenduv indeksite hulk ning olgu Z ja $Y_i,\ i \in I$ juhuslikud suurused. Siis suuruse Z tinglik keskväärtus tingimusel, et $Y_i,\ i \in I$ on teada on juhuslik suurus $E(Z \mid Y_i,\ i \in I)$, mis rahuldab järgmisi omadusi:*

1. *Kui Z on sõltumatu juhuslikest suurustest $Y_i,\ i \in I$, siis*
$$E(Z \mid Y_i,\ i \in I) = EZ.$$
2. *Kui $Z = \alpha Z_1 + \beta Z_2$, siis*
$$E(Z \mid Y_i,\ i \in I) = \alpha E(Z_1 \mid Y_i,\ i \in I) + \beta E(Z_2 \mid Y_i,\ i \in I).$$
3. *Kui $Z = Y_{i_0}$ mingi $i_0 \in I$ korral, siis*
$$E(Z \mid Y_i,\ i \in I) = Z.$$
Üldisemalt, kui $Z = f(Y)$, kus $Y = (Y_i)_{i \in I}$, siis
$$E(Z \mid Y_i\ i \in I) = Z.$$
4. *Kui Z ja $Y_i,\ i \in I$ on lõpliku dispersiooniga, siis $W = E(Z \mid Y_i,\ i \in I)$ minimiseerib suurust $E[(Z-W)^2]$ üle kõigi suuruste $Y_i,\ i \in I$ kaudu avalduvate juhuslike suuruste W.*

Tingliku keskväärtuse korrektse definitsiooni ja omaduste tõestused võib leida näiteks raamatust [9].

Alati ei ole aga võimalik parimat prognoosi leida, kuid võib olla võimalik anda valemid parima lineaarse prognoosi jaoks, mis vastab vähimruutude projektori kasutamisele. Vähimruutude projektori korral kehtivad tingliku keskväärtusega analoogilised tulemused, mis on toodud järgnevas lemmas.

Lemma 26 *Olgu I mingi lõplik või loenduv indeksite hulk ning olgu Z ja $Y_i,\ i \in I$ lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused. Olgu P vähimruutude projektor suurustega 1 ja $Y_i,\ i \in I$ määratud kõikide lõpliku dispersiooniga juhuslike suuruste ruumi alamruumile (ehk nende lineaarsele kattele). Projektoril P on järgmised omadused*

1. Kui Z on mittekorreleeritud suurustega $Y_i,\ i \in I$, siis

$$PZ = EZ.$$

2. Kui $Z = \alpha Z_1 + \beta Z_2$, siis

$$PZ = \alpha PZ_1 + PZ_2.$$

3. Kui $Z = Y_{i_0}$ mingi $i_0 \in I$ korral, siis

$$PZ = Z.$$

Üldisemalt, kui Z avaldub suuruste 1 ja $Y_i,\ i \in I$ lineaarkombinatsioonina, siis

$$PZ = Z.$$

4. $W = PZ$ minimiseerib $E[(Z - W)^2]$ üle kõigi suuruste 1 ja $Y_i,\ i \in I$ lineaarkombintsioonida esituvate juhuslike suuruste W. (tuleneb vähimruutude projektori definitsioonist).

Juhul, kui suurused $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ on soltumatud, siis saame kasutada tingliku keskväärtuse omadusi ja tuletada parima prognoosi leidmise valemid ning veahinnangud. Kui aga saame eeldada ainult seda, et $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ on mittekorreleeritud, tsentreeritud ja teist järku nõrgalt statsionaarsed, siis on lihtne veenduda, et leitavad tulemused kehtivad parimate lineaarsete prognooside jaoks. Vastaku protsess Z ARIMA(p,d,q) mudelile, kusjuures järgnevas eeldame, et $E((1 - B)^d Z_t) = 0$ ning samuti eeldame mudeli protsessi $W_t = (1 - B)^d Z_t$ statsionaarust ja pööratavust. Tähistame

$$\hat{Z}_{\ell|k} = E(Z_\ell \mid Z_{k-i},\ i = 0, 1, 2, \ldots),$$

siis tingliku keskväärtuse omadustest järeldub

$$\hat{Z}_{\ell|k} = Z_\ell \text{ kui } \ell \leq k.$$

Kasutades protsessi esitust autoregressiivsel kujul ning teadmist, et $E(A_{k+j} \mid Z_{k-i},\ i \geq 0) = 0$, saame juhul $\ell \geq 1$

$$\begin{aligned}\hat{Z}_{k+\ell|k} &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \hat{Z}_{k+l-i|k} \\ &= \sum_{i=1}^{\ell-1} \pi_i \hat{Z}_{k+l-i|k} + \sum_{i=\ell}^{\infty} \pi_i Z_{k+\ell-i}.\end{aligned}$$

Pikemate prognooside arvutamisel saab seda valemit kasutada samm-sammult: kõigepealt arvutame $\hat{Z}_{k+1|k}$ ajaks k teadaolevate Z väärtuste abil, seejärel kasutame saadud tulemust $\hat{Z}_{k+2|k}$ arvutamiseks jne. Saadud tulemuse rakendamisel on aga kaks probleemi. Esiteks, tegemist on lõpmatu summaga, mille täpne arvutamine on põhimõtteliselt raskendatud kui mitte lausa võimatu. Teiseks, praktikas on alati teada ainult lõplik arv Z minevikuväärtusi, nii et lõpmatu summa tuleb igal juhul asendada lõpliku summaga ja see toob kaasa mõningase prognoosivea. Samas aga pööratava mudeli korral kahanevad kordajad π_i eksponentsiaalselt ning seda kiiremini, mida suurem on mooduli poolest vähim polünoomi $\theta(x)$ nullkoht. Seega enamikel juhtudel lähenevad kordajad π_i kiiresti nullile ning lõpmatu summa on väga hästi lähendatav küllalt väikese arvu liidetavatega lõpliku summaga.

Alternatiivne moodus tulevikuväärtuste ennustamiseks põhineb otseselt ARIMA(p,d,q) mudeli kujul, mis sisaldab lõpliku arvu liidetavaid. Paneme tähele, et me võime selle mudeli esitada kujul

$$\tilde{\phi}(B)Z_t = \theta(B)A_t,$$

kus

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x)(1-x)^d, \ \phi(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i x^i, \ \theta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i x^i.$$

Olgu polünoomi $\tilde{\phi}$ esituseks

$$\tilde{\phi}(x) = 1 - \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i x_i,$$

siis võib vaadeldava mudeli kirjutada ka kujul

$$Z_t = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i Z_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i A_{t-i}.$$

Seega juhul $\ell \le q$ korral kehtib

$$\hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k} - \sum_{i=\ell}^{q} \theta_i A_{k+\ell-i}$$

ning juhul $\ell > q$ on prognoosid arvutatavad valemist

$$\hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k}.$$

Nagu näha, määrab polünoomiga $\tilde{\phi}$ määratud rekurrentne võrrand prognooside käitumise alates $\ell > q$.

Eelneva prognoosivalemi kasutamine nõuab A_t väärtuste teadmist $k - q \le t \le k$ korral. Teoreetiliselt ei valmista see probleeme, kuna pööratava mudeli korral on A-d Z-de kaudu leitavad, kuid praktiliselt on probleemiks see, et meil on teada ainult lõplik arv Z_t-de väärtuseid ning isegi kui oleks teada kogu minevik, oleks lõpmatute summade leidmine tülikas. Hädast päästab aga meid järgnevas lemmas toodud tulemus, mille kohaselt võime piisavalt pika aegrea korral leida A_t realiseerinud väärtused vastavalt võrrandile

$$\tilde{a}_t = z_t - \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i z_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \tilde{a}_{t-i}, \ p+d < t \le k, \tag{4.8}$$

kus

$$\tilde{a}_t = 0, \ p+d-q+1 \le t \le p+d. \tag{4.9}$$

Lemma 27 *Olgu z_t, $1 \leq t$ mingi ARIMA(p,d,q) tüüpi protsessi väärtused ning olgu a_t, $t \geq 1$ nendele väärtustele vastavad protsessi A_t väärtused. Olgu $\tilde{a}_t$ vastavalt võrrandile (4.8) ja algväärtustele (4.9) arvutatud suurused. Siis*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - \tilde{a}_n| = 0.$$

Harjutus 33 *Tõestada eelnev lemma.*

Prognoosivea standardhälbe leidmine

Defineerime $\theta_i = 0,\ i > q$, siis võime parima prognoosi kirjutada kujul

$$\hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{i=1}^{p+d} \tilde{\phi}_i \hat{Z}_{k+\ell-i|k} - \sum_{i=\ell}^{\infty} \theta_i A_{k+\ell-i}.$$

Kasutades seda valemit ning ARIMA mudeli kuju (kus samuti käsitluse lihtsuse mõttes summeerime θ-dega liikmeid kuni lõpmatuseni), saab matemaatilise induktsiooni abil küllaltki lihtsalt näidata, et kehtib võrdus

$$Z_{k+\ell} - \hat{Z}_{k+\ell|k} = \sum_{j=0}^{\ell-1} \psi_j A_{k+\ell-j}, \tag{4.10}$$

kus

$$\psi_0 = 1,\ \psi_j = \sum_{i=1}^{\min(j,p+d)} \tilde{\phi}_i \psi_{j-i} - \theta_j,\ j \geq 1. \tag{4.11}$$

Harjutus 34 *Tõestada, et prognoosiveas esinevad kaalud ψ_k avalduvad valemiga* (4.11) *toodud kujul. Soovitus: kasutada matemaatilist induktsiooni järgneval kujul:*

1. *Veenduda, et $\ell = 1$ korral valem* (4.10) *kehtib*

2. *Eeldada, et valem kehtib $\ell \leq \ell_0$ korral, kus $\ell_0 \geq 1$ ning näidata, et siis kehtib see ka $\ell = \ell_0 + 1$ korral. Selleks näidata, et kehtib valem*

$$Z_{k+\ell_0+1} - \hat{Z}_{k+\ell_0+1|k} = \sum_{i=1}^{\min(p+d,\ell_0)} \tilde{\phi}_i (Z_{k+\ell_0+1-i} - \hat{Z}_{k+\ell_0+1-i|k}) + A_{k+\ell_0+1} - \sum_{i=1}^{\ell_0} \theta_i A_{k+\ell_0+1-i}.$$

   Seejärel asendada viimase võrduse paremal poolel olevad vead eelduse põhjal kehtivast valemist (4.10) *ning seejärel muuta kahekorses summas summeerimisjärjekorda nii et välimine summa oleks üle muutuja $j' = i + j$ ja sisemine summa oleks üle muutuja i. Seejärel näidata, et saadud valem annab kordajate ψ_j definitsiooni* (4.11) *kasutades prognoosivea valemi juhul $\ell = \ell_0 + 1$*

3. *Kui eelmine punkt on lõpule viidud, siis matemaatilise induktsiooni põhjal kehtib prognoosivea valem iga $\ell \geq 1$ korral.*

Seega on prognoosivea kaalud lihtsalt arvutatavad ning nende abil avaldub ℓ-sammulise prognoosi vea dispersioon kujul

$$D(Z_{k+\ell} - \hat{Z}_{k+\ell|k}) = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\ell-1} \psi_i^2.$$

Harjutus 35 *Olgu Z protsess, mis vastab ARIMA mudelile*

$$(1 + 0.1\,B + 0.4\,B^2)(1 - B)Z_t = (1 + 0.2B)A_t,$$

kus B on tagasinihke operaator ($BZ_t = Z_{t-1}$). Leidke sellel mudelil põhinevate parimate 1,2,3,4-sammuliste prognooside vigade standardhälbed eeldusel, et $D(A_t) = 1$.

Eelnevas vigade standardhälbe arvutuses läks tegelikult vaja ainult, et suurused A_t on mittekorreleeritud ja konstantse dispersiooniga. Tavaliselt väljastavad programmid ka usaldusintervalle, mis kehtivad juhul, kui suurused A_t on normaaljaotusega ja sõltumatud (sest siis on ka prognoosivead normaaljaotusega).

4.7.2 ARIMA mudeli parameetrite hindamine

Parameetrite hindamisel on mitmeid võimalikke lähenemisi. Kuna tarkvara pakub sageli võimalust nende vahel valida, siis oleks hea teada, mille poolest nad erinevad. Parameetreid hindame protsessile $W_t = (1 - B)^d Z_t$ vastava aegrea andmete $w_1, w_2, \ldots, w_n$ põhjal. Lihtsuse mõttes eeldame ka, et $E(W_t) = 0$.

Tingimusliku ruutude summa minimiseerimine

Oletame, et meil on teada $z_0, z_{-1}, \ldots, z_{1-p-d}$ ning $a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-q}$ tegelikud väärtused; siis saame fikseeritud parameetrite θ ja ϕ korral arvutada $a_1 = z_1 - \hat{z}_{1|0}$, $a_2 = z_2 - \hat{z}_{2|1}$, $\ldots, a_n = z_n - \hat{z}_{n|n-1}$. Seega võime parameetreid valida näiteks nii, et minimiseerime prognoosivigade ruutude summat

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Sama valikukriteeriumini jõuame ka siis, kui eeldame, et suurused A_t on sõltumatud ja normaaljaotusega ning leiame parameetrid θ ja ϕ nii, et maksimiseerime aegrea $z_1, \ldots, z_n$ tõepära (ehk vektori $(a_1, \ldots, a_n)$ tõepära). Siin tuleb aga aru saada, et tegemist on tingliku tõepäraga; tingimuseks on see, et meil on teada lõigu alguses toodud z ja a eelnevad väärtused. Seetõttu nimetatakse seda parameetrite valiku reeglit tingliku ruutude summa minimiseerimiseks ehk tinglikuks suurima tõepära meetodiks.

Praktikas kasutatakse mitmeid erinevaid varasemate väärtuste fikseerimise mooduseid, millest lihtsaim vastab kõikide eelnevate z ja a väärtuste võrdsustamisele nulliga. Kui vaatlusi on väga palju, siis selline lähenemine annab normaaljaotusega häirituste korral praktiliselt sama tulemuse, kui suurima tõepära meetod; suhteliselt lühikeste aegridade korral võivad tulemused olla oluliselt erinevad. Käesolevas alapeatükis eeldame, et juhuslikud suurused A_t on sõltumatud ning normaaljaotusega.

Suurima tõepära meetod

Kuna protsessi W_t väärtused on esitatavad sõltumatute normaaljaotusega juhuslike suuruste A_t lineaarkombinatsioonidena, siis on vektor $W_1, \dots, W_n$ mitmemõõtmelise normaaljaotusega. Mitmemõõtmelise tsentreeritud normaaljaotuse tihedusfunktsioon esitub kujul

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{2}\pi)^{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}}|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}} \exp(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{x}'\mathbf{\Sigma}^{-\mathbf{1}}\mathbf{x}),$$

kus $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, Σ on vastava juhusliku vektori kovariatsioonimaatriks ning $|\Sigma|$ tähistab maatriksi determinanti. Kui $(W_1, \dots, W_n)$ vastab ARMA(p,q) protsessile, siis saab kovariatsioonimaatriksi kirjutada kujul

$$\Sigma = \sigma_A^2 \Omega(\phi, \theta),$$

kus Ω ei sõltu juhuslike suuruste A_t dispersioonist.

Harjutus 36 *Leida $\Omega(\phi_1)$ ARIMA(1,0,0) mudeli korral ning $\Omega(\theta_1)$ ARIMA(0,0,1) mudeli korral*

Suurima tõepära meetodi korral maksimiseeritakse tavaliselt tõepära logaritmi, mis avaldub kujul

$$l(\phi, \theta, \sigma_A) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma_A^2 - \frac{1}{2}\ln|\Omega(\phi,\theta)| - \frac{1}{2\sigma_A^2}\mathbf{w}'\Omega(\phi,\theta)^{-1}\mathbf{w}.$$

Kuna σ_A järgi see funktsioon saavutab maksimumi kohal

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{n}\mathbf{w}'\Omega(\phi,\theta)^{-1}\mathbf{w},$$

siis suurima tõepära hinnangud parameetritele $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ ja $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$ leidmiseks tuleb maksimiseerida (pärast konstantse liidetava ärajätmist) avaldist

$$-\frac{n}{2}\ln(\mathbf{w}'\Omega(\phi,\theta)^{-1}\mathbf{w}) - \frac{1}{2}\ln|\Omega(\phi,\theta)|.$$

Tingimusteta ruutude summa meetod

Inglise keeles *method of unconditional sum of squares*. Selle meetodi puhul jäetakse suurima tõepära avaldises vaatluse alt välja determinandiga liige ning minimiseeritakse avaldist

$$\mathbf{w}'\Omega(\phi,\theta)^{-1}\mathbf{w}.$$

Arvutuslikult on see veidi lihtsam, kuid ei oma märkimisväärseid eeliseid suurima tõepära meetodi eest.

4.8 ARIMA tüüpi mudelite valikust

Üldine lähtekoht on see, et mida vähem on mudelis parameetreid, seda parem (muidugi tingimusel, et mudel andmetega sobib). Mudeli sobivuse üle otsustatakse prognoosivigade sõltumatuse kontrolli põhjal; teoreetiliselt peaksid prognoosivead vastama sõltumatutele juhuslike suuruste väärtustele. Kuna täielikku sõltumatust on väga raske kindlaks teha, siis aegridade puhul keskendutakse autokorrelatsioonide uurimisele (mis peaks sõltumatute vigade puhul olema teoreetiliselt nullid).

Omaette küsimus on see, kuidas teha valikut erinevate mudelite vahel, mis kõik rahuldavad sobivuse kriteeriume, seda eriti juhul, kui parameetrite arvud on erinevad (või mudelid kuuluvad erinevatesse klassidesse). Naiivseks lähenemiseks on see, et kui me sobitame mudeleid tõepära maksimiseerides, siis sobivaima mudeli korral peaks vaadeldava aegrea tekkimise tõepära olema suurim. Selle lähenemise puuduseks on see, et lõpliku arvu andmete olemasolul saame me suurema parameetrite arvuga mudelit olemasolevate andmetega alati paremini sobitada isegi juhul, kui tegelikkuses selline mudel sobiv ei ole (nn ülesobitamine). Seetõttu tuleb sobivuse võrdlemisel kindlasti arvestada ka parameetrite arvu. Üheks selliseks sobivuse mõõdikuks, mis arvestab nii parameetrite arvu kui ka tõepära, on nn Akaike informatsioonikriteerium, mis avaldub kujul

$$AIC = 2k - 2\ln L,$$

Peatükk 5

Mitmemõõtmelised ja mittelineaarsed mudelid

Siiani vaatlesime aegrea tulevikuväärtuste prognoosimist juhul, kus kasutada oli ainult vaadeldava aegrea minevikuväärtused. Sageli aga on võimalik prognoose tunduvalt täpsustada, kui kasutada lisaks vaadeldava aegrea minevikuväärtustele veel teisi andmeid, näiteks teiste juhuslike suuruste minevikuväärtuseid. Näiteks on loomulik arvata, et majanduse üldseisundi näitajate minevikuväärtused mõjutavad oluliselt siseturismiga seotud suuruseid. Käesolevas peatükis vaatleme mõningaid mooduseid, kuidas selliseid sõltuvusi matemaatiliselt modelleerida ning kuidas vastavaid mudeleid praktikas kasutada.

5.1 Mitmene lineaarne regressioon ARIMA tüüpi vigadega

Olgu Z_t meid huvitava tunnuse väärtus ajal t ning $(X_1(t), \ldots, X_m(t))$ argumenttunnuste vektor, mida saab kasutada suuruse Z_t prognoosimiseks. Mitmese lineaarse regressiooni mudeliks on mudel kujul

$$Z_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i X_i(t) + \varepsilon_t,$$

kus vead ε_t on sama jaotusega, sõltumatud ja tsentreeritud, kordajate hinnangute vigade tuletamisel eeldatakse ka vigade normaaljaotusele vastavust. Aegridade puhul enamasti selline mudel (eriti vigade sõltumatuse eeldus) ei kehti, mistõttu standardsete lineaarse regressiooni vahendite kasutamine ning saadud mudeli põhjal prognoosimine võib viia vägagi valedele tulemustele. Sageli aga sobivad aegridade puhul andmetega mudelid, kus vead ε_t vastavad mingile ARIMA tüüpi protsessile, sel juhul räägitakse lineaarsest regressioonist ARIMA tüüpi vigadega ehk ARIMAX mudelist. Mudeli sobitamise protseduur on kaheetapiline: kõigepealt sobitame tavalise regressiooni abil andmetele mitmese regressioonimudeli ja analüüsime vigade käitumist. Vigade käitumise põhjal valime ARIMA mudeli kuju suuruste ε_t jaoks ning seejärel leiame valitud ARIMAX tüüpi mudeli parameetrid (nii β-d kui ARIMA kordajad) näiteks suurima tõepära meetodil või siis tinglike prognoosivigade ruutude summa minimiseerimise teel. Leitud mudeli headuse kriteeriumiks on prognoosivigade sõltumatus, mida testitakse autokorrelatsioonide sõltumatute juhuslike suuruste väärtustele vastavuse testimise abil.

5.2 Ülekandefunktsiooni mudelid

Inglise keeles *transfer function models*. Vaatleme juhtu, kus meil on kaks protsessi Z_t ja X_t, millele vastavate aegridade väärtused on meil olemas. Lihtsuse mõttes eeldame, et mõlemad protsessid on statsionaarsed (vastasel juhul võib proovida leida mõlemast sobivat järku diferentsid, et saada soovitud omadustega ridu). Meie eesmärgiks on kindlaks teha, milliseid X minevikuväärtuseid (ja võib-olla ka Z minevikuväärtuseid) regressoritena kasutada nii, et saada võimalikult häid ennustusi protsessi Z jaoks. Täpsemalt, vaatleme ARIMAX mudelit kujul

$$Z_t = \beta_0 + \sum_{i=b}^{\infty} \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \tag{5.1}$$

kus $b \geq 1$ ja suurused ε_t vastavad mingile $ARMA$ protsessile

$$\phi(B)\varepsilon_t = \theta(B)A_t,$$

kusjuures eeldame, et suurused A_t on sõltumatud ka protsessi X_t väärtustest. Sel juhul on ka suurused ε_t sõltumatud suurustest X_t. Selleks, et parameetreid oleks lõplik arv ning et ennustamiseks kasutataks ainult X_t minevikuväärtuseid, otsime sobivat mudelit selliste hulgast, kus funktsioon

$$\beta(x) = \sum_{i=b}^{\infty} \beta_i x^i$$

on esitatav lõpliku arvu parameetrite abil kujul

$$\beta(x) = x^b \frac{v(x)}{\delta(x)} = x^b \frac{\sum_{i=0}^{s} v_i x^i}{1 - \sum_{i=1}^{r} \delta_i x^i}.$$

Sellise mudeli võib kirjutada ka kujul

$$Z_t = \sum_{i=1}^{r} \delta_i Z_{t-i} + \sum_{i=0}^{s} v_i X_{t-b-i} + \eta_t,$$

kus suurused η_t vastavad ARMA protsessile kujul

$$\phi(B)\eta_t = \delta(B)\theta(B)A_t.$$

Funktsiooni $\beta(x)$ nimetatakse ülekandefunktsiooniks, kuna ta kirjeldab, kuidas X omandatud väärtused mõjuvad ehk kanduvad üle suuruste Z väärtustele. Mudeli sobitamise etapid on järgmised:

1. Leiame hinnangud suurustele β_i

2. Suuruste β_i hinnangute põhjal määrame kindlaks sobiva nihke b ning kasutades teadmist sellest, kuidas erinevate r ja s väärtuste korral peaks suurused β teoreetiliselt käituma, leiame hinnangud ka parameetritele r ja s
3. Leiame sobiva mudeli vigade ε_t jaoks
4. Hindame mudeli parameetreid suurima tõepära meetodil
5. Kontrollime jääkvigade sõltumatust
6. arvutame prognoosid (kuni b ajaperioodi ette).

Vaatleme lähemalt mõningaid nendest etappidest

5.2.1 Suuruste β_i hindamine

Tähistame kujul $\gamma_{xx}(k)$ ja $\gamma_{zz}(k)$ protsesside X ja Z k-ndat järku autokovariatsioone ning defineerime ristkovariatsioonid kujul

$$\gamma_{xz}(k) = \mathrm{cov}(X_t, Z_{t+k});$$

vastavad autokorrelatsioonid olgu $\rho_{xx}(k)$, $\rho_{yy}(k)$ ning $\rho_{xz}(k)$. Korrutades võrrandit (5.1) suurusega X_{t-k} ning leides keskväärtuse (ehk arvutades võrrandi parema ja vasaku poole kovariatsiooni suurusega X_{t-k}) saame

$$\gamma_{xz}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \gamma_{xx}(i-k).$$

Kui nüüd eeldada, kordajad β_i on praktiliselt võrdsed nulliga alates mingist järgust K, siis saame võrrandisüsteemi suuruste $\beta_k,\ k = 0, \ldots, K-1$ määramiseks. Samas on nende võrrandite lahendamisel (asendades teoreetilised auto- ja ristkovariatsioonid empiirilistega) saadud hinnangud küllalti ebatäpsed, seetõttu on võimaluse korral parem kasutada nn eelvalgendamise (inglise keeles *prewhitening*) tehnikat.

Eelvalgendamise tehnika on rakendatav, kui protsess X vastab mingile pööratavale ARMA tüüpi mudelile. Lihtsuse mõttes eeldame siin, et $EX_t = 0$, kuigi tegelikult see ei ole oluline (X_t asendamine suurusega $X_t - EX_t$ muudab ainult konstantset liiget ning ei mõjuta tegelikult eelvalgendamise protseduuri).

Oletame, et X vastab mudelile

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x(B)\alpha_t,$$

kus suurused α_t on sõltumatud, sama jaotusega (ning sõltumatud suurustest $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$). Eelnevate eelduste põhjal on nad ka sõltumatud suurustest η_t. Pööratavuse tõttu saame

$$\alpha_t = \theta_x(B)^{-1}\phi_x(B)X_t.$$

Rakendades nüüd operaatorit $\theta_x(B)^{-1}\phi_x(B)$ võrduse (5.1) mõlemale poole, saame

$$W_t = \sum_{i=b}^{\infty} \beta_i \alpha_{t-i} + \xi_t,$$

kus

$$W_t = \theta_x(B)^{-1}\phi_x(B)Z_t,\ \xi_t = \theta_x(B)^{-1}\phi_x(B)\varepsilon_t.$$

Leides nüüd eelneva võrduse mõlema poole kovariatsiooni suurusega α_{t-k} saame

$$\gamma_{\alpha w}(k) = \sigma_\alpha^2\beta_k,$$

kust saame kordaja β_k avaldada. Praktilise arvutuse seisukohalt on suurused α_k leitavad suuruste ühesammuliste prognooside vigadena leitud mudeli abil suuruste X_t prognoosimisel ning suurused W_t vastavad täpsel sama mudeli kasutamisel suuruste Y_t ennustamisel tekkivatele ühesammulistele prognoosivigadele.

Eelnevast parema arusaamise huvides vaatleme näitena lihtsat juhtu, kus X vastab mudelile

$$X_t = 0.4X_{t-1} + \alpha_t.$$

Sel juhul mudelile vastavaks ühesammuliseks prognoosiks ajal t on $0.4X_{t-1}$ ning vastavaks prognoosiveaks $(1-0.4B)X_t$. Rakedades Z_t esitusele operaatorit $(1-0.4B)$ ehk arvutades $Z_t - 0.4Z_{t-1}$ (mis vastab Z_t prognoosimise veale, kui eeldada selle jaoks mudeli $Z_t = 0.4Z_{t-1} + A_{z,t}$ kehtimist), saame

$$\begin{aligned} Z_t - 0.4Z_{t-1} &= (1-0.4)\beta_0 + \sum_{i=b}^{\infty}\beta_i(X_{t-i} - 0.4X_{t-i-1}) + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1} \\ &= 0.6\beta_0 + \sum_{i=b}^{\infty}\beta_i\alpha_{t-i} + \varepsilon_t - 0.4\varepsilon_{t-1}. \end{aligned}$$

Kuna eelduste kohaselt suurused ε_t ja α_k sõltumatud iga t, k korral, siis on siit ka vaadeldaval juhul selgesti näha, et korrelatsioonide leidmine suurustega $\alpha_{t-k},\ k > 0$ võimaldab meil leida kordajaid $\beta_k,\ k > 0$ ilma võrrandisüsteeme lahendamata.

5.2.2 Mudeli kuju parameetrite b,r ja s valik

Kui kordajad β_k on hinnatud, siis b valiku kriteeriumiks on tingimus $\beta_i \approx 0,\ i = 0, 1, \ldots, b-1$. Kui ainult (küllalt väike) lõplik arv kordajatest β_k on nullist erinevad, siis võime võtta $r = 0$ ja $s = k_0 - b$, kus k_0 vastab viimase nullist erineva β_k indeksile. Muudel juhtudel aga saab analoogiliselt ARIMA tüüpi mudelite analüüsiga näidata, et alates järgust $k = b + s + 1$ rahuldavad kordajad β_k rekurrentset võrrandit

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{r}\delta_i\beta_{k-i}.$$

Teades selliste rekurrentsete võrrandite lahendite käitumist on võimalik püstitada hüpoteese sobiva r (ja ka s) väärtuse kohta.

Harjutus 37 *Näidata, et juhul $r = 1$ kehtib*

$$\beta_k = \delta_1^{k-b-s}\beta_{b+s}\ \forall k > b + s.$$

5.3 Garch mudelid

Sageli on majanduslike aegridade puhul võimalik täheldada seda, et suuremate võnkumistega rahutumad perioodid vahelduvad suhteliselt stabiilsete perioodidega ning sageli jääb see efekt alles ka prognoosivigade puhul pärast parima ARIMA tüüpi mudeli sobitamist. See aga tähendab, et vähemalt prognoosivigade arvutamise tulemused ei ole usaldusväärsed, kuna seal lähtutakse üleüldisest keskmisest vigade standardhälbest, mis huvipakkuva hetke jaoks võib olla liiga suur (kui parajasti on tegemist rahulikuma perioodiga) või liiga väike (kui on tegemist rahutuma perioodiga).

Lihtsalt vaatluse abil ei ole alati lihtne eristada juhuslikult tekkivaid sõltumatute juhuslike suuruste keskmiselt suuremate ja keskmiselt väiksemate rühmade teket sellisest, kus sellised rühmad on seotud muutuva varieeruvusega. Samas ARIMA mudelite sobitamisel võime teha lihtsa testi: vaatleme prognoosivigade ruutude autokorrelatsioone ja osaautokorrelatsioone. Kui on tegemist mudeliga, kus häiritused A_t on sõltumatud, on ka prognoosivigade ruutude teoreetilised autokorrelatsioonid ja osaautokorrelatsioonid nullid ning seega peaks empiirilised autokorrelatsioonid ja osaautokorrelatsioonid jääma vastavatesse veapiiridesse. Kui see nii aga ei ole, siis ei pruugi leitud mudel olla sugugi parim ning kindlasti tuleb veapiiridesse suhtuda suure ettevaatusega.

Üheks mudelite klassiks, mille korral varieeruvus muutub ajast sõltuvalt sissetulnud häiritustest, on ARIMA mudelid GARCH (*Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) häiritusega kujul

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \sum_{i=1}^{p} \phi_i Z_{t-1} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \varepsilon_{t-i}, \\
\varepsilon_t &= \sigma_t A_t, \\
\sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^{q_1} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p_1} \beta_i \sigma_{t-i}^2.
\end{aligned}
$$

Kui parameeter σ_t sõltub ainult eelnevatest häiritustest (st kui β-dega liikmeid pole), siis nimetatakse seda mudelit ARCH mudeliks.

Mudeli sobitamise protseduur on järgmine:

1. Leiame andmestikule parima ARIMA tüüpi mudeli
2. Vaatleme prognoosivigade ruutude autokorrelatsioone ja osaautokorrelatsioone. Kui mõned autokorrelatsioonid on veapiiridest selgelt väljas, siis on mõistlik katsetada GARCH tüüpi mudelitega. Esialgseks hüpoteesiks parameetri q_1 osas võib võtta nullist erinevate osaautokorrelatsioonide arvu; samas tasub vaadelda ka madalamat järku GARCH mudeleid.
3. Mudeli loeme sobivaks siis, kui nn. normaliseeritud prognoosivead (st vead, mis on jagatud hetkele vastava σ_t väärtusega) ja nende ruudud ei ole oluliselt korreleeritud (st Ljung-Box testi p-väärtused on nii vigade kui ka vigade ruutude korral piisavalt suured).

Kirjandus

[1] Statistikaamet, tarbijahinna indeks,
http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/04HINNAD/04HINNAD.asp

[2] Statistikaamet, majutatud turistide arv,
http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/23Turism_ja_majutus/02Majutus/02Majut

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Local_regression

[4] R. B. Cleveland, W. S. Cleveland, J.E. McRae, and I. Terpenning (1990) STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess. Journal of Official Statistics, 6, 3–73.

[5] http://www.census.gov/srd/www/x12a/

[6] M. G. Kendall, A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 3, 1966, London, Griffin

[7] T. W. Andersson, *The statistical analysis of time series* J. Wiley & Sons, 1971

[8] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, *Time series analysis: forecasting and control*, Holden-Day 1969.

[9] D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press 1991.