Analüütiline geomeetria

X. loeng. **Hüperbool ja parabool**

Sügissemester 2016

Hüperbooli võrrand

Fikseerime tasandil E_2 kaks erinevat punkti F_1, F_2. Olgu $c = \frac{1}{2}|F_1F_2|$. Fikseerime reaalarvu $a > 0$ nii, et ta rahuldab tingimust $a < c$.

Definitsioon

Tasandilist joont nimetatakse hüperbooliks, kui selle joone iga punkt X rahuldab tingimust

$$\boxed{\Big| |F_1X| - |F_2X| \Big| = 2\,a.}$$

Punktid F_1, F_2 on hüperbooli fookused ja $r_1 = |F_1X|, r_2 = |F_2X|$, $r_1(X), r_2(X)$ on hüperbooli punkti X fokaalraadiused.

Hüperbooli võrrandi võime kirjutada kujul

$$\boxed{|r_1 - r_2| = 2\,a.}$$

Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi ristreeper, kus

- O on lõigu F_1F_2 keskpunkt,
- $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}, |\vec{e}_1| = 1$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1, |\vec{e}_2| = 1$ ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on parema käe baas.

Ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse hüperbooli kanooniliseks reeperiks ja vastavat koordinaadisüsteemi nimetatakse hüperbooli kanooniliseks koordinaadisüsteemiks.

Teoreem

Hüperbooli võrrand kanoonilistes koordinaatides on

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{1}$$

kus $b^2 = c^2 - a^2, b > 0$. Teise astme võrrandit (1) nimetatakse hüperbooli kanooniliseks võrrandiks.

Fokaalraadiused

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Hüperbooli tingimus $|r_1 - r_2| = 2a$. Võime kirjutada kujul $r_1 = r_2 \pm 2a$. Tõstame ruutu

$$r_1^2 = r_2^2 \pm 4ar_2 + 4a^2,$$

$$r_1^2 - r_2^2 - 4a^2 = \pm 4ar_2. \qquad (1)$$

Arvutame

$$r_1^2 - r_2^2 - 4a^2 = \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2xc - \cancel{c^2} - \cancel{y^2} - 4a^2 =$$

$$= 4xc - 4a^2$$

Seega valemi (1) kuju on

$$4xc - 4a^2 = \pm 4ar_2, \quad xc - a^2 = \pm ar_2$$

Tõstame ruutu

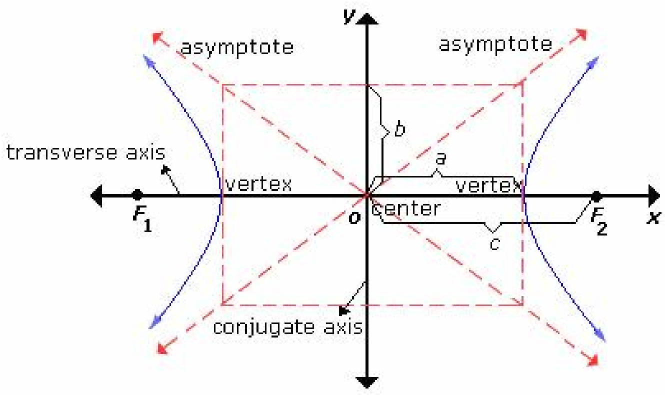
$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2[x^2 - 2xc + c^2 + y^2],$$

$$x^2c^2 - \cancel{2xca^2} + a^4 - a^2x^2 + \cancel{2xca^2} - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

Tähistame $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$.

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \Longrightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Joonis, hüperbool



Joonis: Hüperbool

Hüperbooli sümmeetriad

Uurime hüperbooli sümmeetriaid kasutades kanoonilist võrrandit. Määrame tasandi teisendust $\phi : E^2 \to E^2$ valemiga $\phi(x, y) = (x, -y)$. See on tasandi peegeldus abstsisstelje suhtes. Kehtib $P^2(x, y) = P(x, -y) = (x, y)$, seega $P^2 = \mathrm{id}_{E^2}$ peegeldus on idempotentne teisendus. Olgu $P(x, y)$ hüperbooli punkt, st koordinaadid x, y rahuldavad hüperbooli võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Näitame, et punkt $\phi(P)$ on ka hüperbooli punkt. Tõepoolest $\phi(P) = (x, -y)$ ja

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Järelikult hüperbool on sümmeetriline abstsisstelje suhtes. Analoogiliselt näitame, et hüperbool on sümmeetriline ordinaattelje suhtes ja alguspunkti suhtes. Sellest järeldub, et koordinaatteljed on hüperbooli sümmeetriateljed ja alguspunkt on hüperbooli keskpunkt.

Ekstsentrilisus

x-telg lõikab hüperbooli punktides $A(-a, 0), B(a, 0)$, järelikult definitsiooni kohaselt need punktid on hüperbooli tipud. y-telg ei lõika hüperbooli ja selle pärast $C(0, b), D(0, -b)$ nimetatakse hüperbooli ebatippudeks. Tippudega A, B määratud lõiku ja tema pikkust $(2a)$ nimetatakse hüperbooli reaalteljeks, ebatippudega C, D määratud lõiku ja tema pikkust $(2b)$ nimetatakse hüperbooli ebateljeks, a, b nimetatakse hüperbooli pooltelgedeks.

Definitsioon

Arvu $\epsilon = \frac{c}{a}$ nimetatakse hüperbooli ekstsentrilisuseks. Arvu $p = \frac{b^2}{a}$ nimetatakse hüperbooli fokaalparameetriks.

Hüperbooli ekstsentrilisus rahuldab võrratust $\epsilon > 1$. Kehtib

Teoreem

Hüperbooli fokaalparameeter on võrdne hüperbooli kõrgusega fookuse kohal.

Tõestus

Tõestame parempoolse fookuse $F_2(c,0)$ korral.
Hüperbooli kõrgus fookuse F_2 kohal on võrdne hüperbooli punkti $P(c,y)$ teise koordinaadiga y.
Leiame koordinaadi y kasutades hüperbooli võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right), \quad y^2=\frac{b^2c^2}{a^2}-b^2,$$

$$y^2=\frac{b^2(a^2+b^2)}{a^2}-b^2, \quad y^2=\cancel{b^2}+\frac{b^4}{a^2}-\cancel{b^2}=\frac{b^4}{a^2}$$

$$y=\frac{b^2}{a}=p$$

Fokaalraadiused

Olgu $X(x, y)$ hüperbooli suvaline punkt ja r_1, r_2 punkti X fokaalraadiused.

Teoreem

Kehtivad valemid

$r_1 = \epsilon\, x + a, \;\; r_2 = \epsilon\, x - a,$ *(X on hüperbooli parempoolse haru punkt),*

$r_1 = -\epsilon\, x - a, \;\; r_2 = -\epsilon\, x + a,$ *(X on hüperbooli vasakpoolse haru punkt),*

Kui hüperbooli poolteljed on a, b (a on reaalpooltelg ja b on ebapooltelg) ja koordinaadisüsteem on kanooniline, siis hüperbooli parempoolse haru parameetriline võrrand on

$$\gamma_p(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \;\; -\infty < t < +\infty,$$

ja vasakpoolse haru parameetriline võrrand on

$$\gamma_v(t) = (-a \cosh t, b \sinh t), \;\; -\infty < t < +\infty.$$

Tõestus

Olgu $\mathcal{X}(x,y)$ hüperbooli parempoolse haru punkt, st $x>0$. Fokaalraadius r_2 on võrdne

$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (1)$$

$\mathcal{X}(x,y)$ on hüperbooli punkt, järelikult

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}.$$

Asendame (1) võrrandisse

$$r_2=\sqrt{x^2-2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=$$

$$=\sqrt{\varepsilon^2x^2-2\varepsilon a x+a^2}=|\varepsilon x-a|=\varepsilon x-a$$

$$x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2=\frac{c^2}{a^2}x^2=\varepsilon^2x^2, \qquad c^2-b^2=a^2$$

$$2xc=2\cdot x\,\frac{c}{a}\cdot a=2x\varepsilon a, \qquad x\geq a,\ \varepsilon>1$$

Asümptoodid

Definitsioon

Sirgeid

$$y = \frac{b}{a}\,x, \quad y = -\frac{b}{a}\,x,$$

nimetatakse hüperbooli asümptootideks.

Teoreem

Hüperbooli punkti kaugenemisel lõpmatusse piki hüperbooli haru, selle punkti kaugus vastava asümptoodini läheneb nullile.

Tõestus. Oletame, et $X(x,y)$ on hüperbooli punkt ja $x > 0, y > 0$. Kasutame parameetrilist võrrandit $x = a\,\cosh t, y = b\,\sinh t$. Vastava asümptoodi võrrandi võime kirjutada kujul $b\,x - a\,y = 0$. Arvutame punkti kauguse asümptoodini. Punkti X kaugus d asümptoodini on võrdne

$$d = \frac{|b\,p_1 - a\,p_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\,|\cosh t - \sinh t|.$$

Asümptoodid

Kehtib

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Seega $\cosh t - \sinh t = e^{-t}$ ja

$$\lim_{X \to \infty} d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lim_{t \to \infty} |e^{-t}| = 0.$$

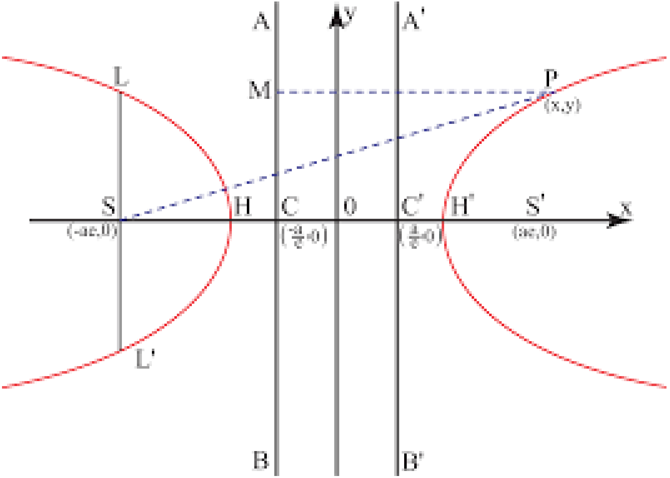
Definitsioon

Sirgeid

$$x = -\frac{a}{\epsilon}, \quad y = \frac{a}{\epsilon},$$

nimetatakse hüperbooli juhtsirgeteks.

Joonis



Joonis: Hüperbooli juhtsirged

Juhtsirged

Teoreem

Olgu X hüperbooli suvaline punkt, r punkti X fokaalraadius, d punkti X kaugus fokaalraadiusega samapoolse juhtsirgeni. Punkt X on hüperbooli punkt parajasti siis, kui ta rahuldab tingimust

$$\frac{r}{d} = \epsilon.$$

Tõestus

Tõestame parempoolse fookuse $F_2(c,0)$ ja parempoolse juhtsirge $x = \frac{a}{\varepsilon}$ korral. Kehtib

$$d_2 = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{x\varepsilon - a}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

Olgu
$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

Koordinaatides

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad (x-c)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2x\varepsilon a + a^2,$$

$$x^2 - \cancel{2xc} + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - \cancel{2xc} + a^2,$$

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Parabool

Olgu l tasandi sirge ja F temal mitteasuv punkt, st $F \notin l$. Olgu p punkti F kaugus sirgeni l.

Definitsioon

Parabooliks nimetatakse tasandilist joon, mille iga punkt X asub võrdsel kaugusel fikseeritud sirgest l ja fikseeritud punktist F. Punkti F nimetatakse parabooli fookuseks, sirget l parabooli juhtsirgeks ja arvu p parabooli fokaalparameetriks.

Olgu X tasandi punkt ja d selle punkti kaugus juhtsirgeni l, siis X on parabooli punkt, kui ta rahuldab tingimust $d = |FX|$. Olgu l' tasandi sirge selline, et ta läbib punkti F ja on risti sirgega l, olgu A sirgete l, l' lõikepunkt. Parabooli kanoonilise koordinaadisüsteemi konstrueerime järgmiselt:

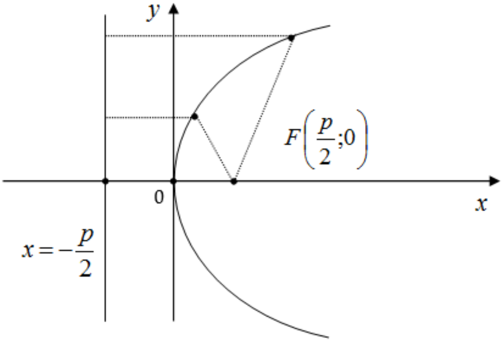
- alguspunkt O on lõigu AF keskpunkt;
- $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \vec{AF}$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, parema käe baas.

Parabooli võrrand

Kanoonilises koordinaadisüsteemis fookuse koordinaadid on $F(\frac{p}{2}, 0)$ ja juhtsirge võrrand on $x = -\frac{p}{2}$.

Teoreem

Parabooli võrrand kanoonilises koordinaadisüsteemis on $y^2 = 2p\,x$.



Joonis: Parabool

Tõestus

Parabooli tingimus $d = |F'X|$. Kehtib

$$d = x + \frac{p}{2}, \quad |F'X| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

seega

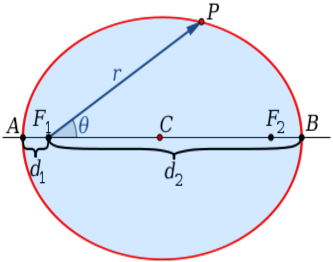
$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Tõstame ruutu

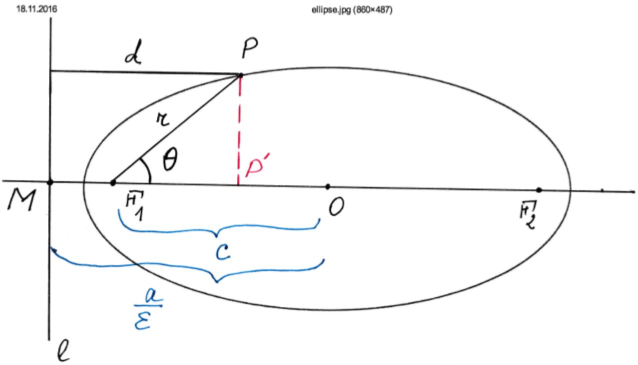
$$\cancel{x^2} + xp + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2,$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Olgu tasandil antud ellips. Leiame ellipsi võrrandi polaarkoordinaatides. Polaarkoordinaadisüsteemi määrame järgmiselt: a) poolus asub ellipsi vasakpoolses fookuses; b) polaartelg on sirge, mis läbib fookuseid F_1, F_2, kusjuures positiivne suund on määratud vektoriga $\vec{F_1F_2}$.



Joonis: Ellips



$$|MP| = d, \quad |MP| = |MF_1| + |F_1P'|, \quad |F_1P'| = r\cos\theta,$$

$$|MF_1| = \frac{a}{\varepsilon} - c, \quad d = \frac{a}{\varepsilon} - c + r\cos\theta$$

$$\boxed{\frac{r}{d} = \varepsilon} \Longrightarrow \frac{r}{\frac{a}{\varepsilon} - c + r\cos\theta} = \varepsilon \Longrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}}$$

Ellips

Olgu P ellipsi mingi punkt ja r, θ tema polaarkoordinaadid. Punkti P polaarraadius r on võrdne (vasakpoolse) fokaalraadiusega $|F_1P|$. Olgu d punkti P kaugus juhtsirgeni l. Kehtib

$$\boxed{\frac{r}{d} = \epsilon.} \tag{2}$$

Olgu P' punkti P ristprojektsioon polaarteljele. Olgu M juhtsirge l ja polaartelje lõikepunkt. On ilmne, et $|MP'| = d$. Teiselt poolt $|MP'| = |MF_1| + |F_1P'|$. Kehtib $|F_1P'| = r\,\cos\theta$ ja $|MF_1| = \frac{a}{\epsilon} - c$. Seega $d = \frac{a}{\epsilon} - c + r\,\cos\theta$. Asendades võrrandisse (2) saame

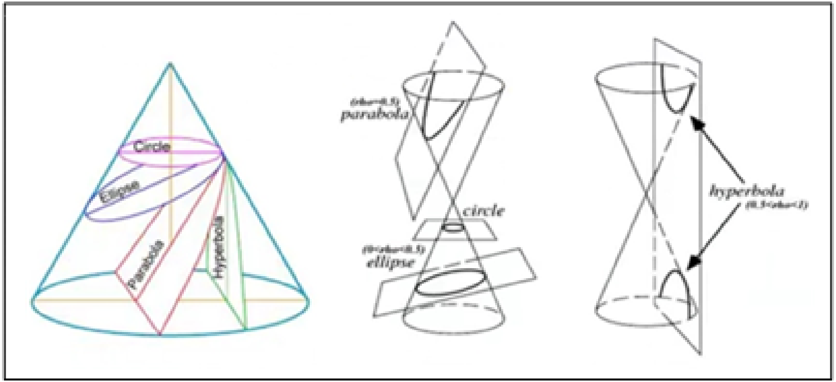
$$\frac{r}{\frac{a}{\epsilon} - c + r\,\cos\theta} = \epsilon \Longrightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 - \epsilon\,\cos\theta},}$$

kus $p = \frac{b^2}{a}$ on fokaalparameeter. Antud võrrandit nimetatakse ellipsi (hüperbooli, parabooli) võrrandiks polaarkoordinaatides.

Koonuselõiked

Ellips, hüperbool ja parabool on koonuselõiked. Tõepoolest, oletame, et on antud kahekatteline koonus ja hakkame lõikama koonust tasandiga. Sõltuvalt sellest, milline on lõiketasandi asend koonuse suhtes, meil tekivad erinevad lõikejooned.

- Kui lõiketasand ei läbi koonuse tippu ja on risti koonuse sümmeetriateljega, siis lõikejoon on ringjoon.
- Kui nüüd veidi pöörame lõiketasandit, siis lõikejoon on ellips.
- Pöörame lõiketasandit niikaua, et ta on paralleelne koonuse moodustajaga. Lõikejoon on parabool.
- Nüüd pöörame lõiketasandit edasi ja kui tasand on paralleelne koonuse sümmeetriateljega, siis lõikejoon on hüperbool.



Joonis: Koonuselõiked

Eksami küsimused

- Hüperbooli definitsioon. Hüperbooli kanooniline reeper. Teoreem hüperbooli kanoonilisest võrrandist.
- Hüperbooli sümmeetriad. Hüperbooli tipud, poolteljed ja ekstsentrilisus. Teoreem hüperbooli kõrgusest fookuse kohal.
- Teoreem hüperbooli fokaalraadiustest.
- Hüperbooli parameetriline võrrand, hüperbooli asümptoodid. Teoreem hüperbooli punkti kaugusest hüperbooli asümptoodist.
- Hüperbooli juhtsirged. Teoreem hüperbooli punkti fokaalraadiusest ja kaugusest juhtsirgeni.
- Parabooli definitsioon, kanooniline reeper ja teoreem parabooli kanoonilisest võrrandist.
- Ellipsi võrrand polaarkoordinaatides.