Analüütiline geomeetria

I loeng. Vektori mõiste, tehted vektoritega

Sügissemester 2016

Loengukonspekt

Loengukonspektid

1. Aivo Parring, *Algebra ja geomeetria*, (IV. peatükk, Vektoralgebra, V. peatükk, Sirged ja tasandid, VI. peatükk, Ellips, hüperbool ja parabool), math.ut.ee (Matemaatika ja statistika instituudi koduleht) → Õppetöö → Kursuste materjalid → Algebra ja geomeetria
2. Aine MTMM.00.327 "Analüütiline geomeetria" koduleht ÕIS, õppematerjalid, slaidid.

Seotud vektorid

Analüütilise geomeetria rajaja on prantsuse matemaatik René Descartes (1596 – 1650).

Seotud vektorid

Analüütilise geomeetria rajaja on prantsuse matemaatik René Descartes (1596 – 1650). Analüütilise geomeetria meetod tugineb koordinaadisüsteemi mõistele. Analüütilises geomeetrias eeldatakse, et ruumis on antud koordinaadisüsteem. Mida meie peame silmas, kui ütleme, et ruumis on antud koordinaadisüsteem?

Seotud vektorid

Analüütilise geomeetria rajaja on prantsuse matemaatik René Descartes (1596 – 1650). Analüütilise geomeetria meetod tugineb koordinaadisüsteemi mõistele. Analüütilises geomeetrias eeldatakse, et ruumis on antud koordinaadisüsteem. Mida meie peame silmas, kui ütleme, et ruumis on antud koordinaadisüsteem? Üldiselt, koordinaadisüsteem määrab kujutust

$$\text{geomeetrilise ruumi punktide hulk} \rightarrow \text{arvukolmikute hulk}.$$

Seotud vektorid

Analüütilise geomeetria rajaja on prantsuse matemaatik René Descartes (1596 – 1650). Analüütilise geomeetria meetod tugineb koordinaadisüsteemi mõistele. Analüütilises geomeetrias eeldatakse, et ruumis on antud koordinaadisüsteem. Mida meie peame silmas, kui ütleme, et ruumis on antud koordinaadisüsteem? Üldiselt, koordinaadisüsteem määrab kujutust

$$\text{geomeetrilise ruumi punktide hulk} \to \text{arvukolmikute hulk}.$$

Tähtis on see, et kujutus peab olema üks-ühene. Sellisel juhul ruumi igat punkti võime samastada arvukolmikuga ja uurida ruumi geomeetriat algebra meetodite abil. Selles seisneb analüütilise geomeetria meetodi võimsus.

Seotud vektorid

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on eukleidiline ruum, so geomeetriline ruum, kus kehtib eukleidiline geomeetria.

Seotud vektorid

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on eukleidiline ruum, so geomeetriline ruum, kus kehtib eukleidiline geomeetria. Eukleidilise geomeetria algmõisted on punkt, sirge ja tasand, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid.

Seotud vektorid

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on eukleidiline ruum, so geomeetriline ruum, kus kehtib eukleidiline geomeetria. Eukleidilise geomeetria algmõisted on punkt, sirge ja tasand, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid. Kaasaegses geomeetrias on erinevaid eukleidilise geomeetria aksiomaatikaid (aksioomide süsteem). Kõige tuntum on D. Hilbert'i eukleidilise geomeetria aksiomaatika. Selle aksiomaatika lühikirjeldus:

Seotud vektorid

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on eukleidiline ruum, so geomeetriline ruum, kus kehtib eukleidiline geomeetria. Eukleidilise geomeetria algmõisted on punkt, sirge ja tasand, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid. Kaasaegses geomeetrias on erinevaid eukleidilise geomeetria aksiomaatikaid (aksioomide süsteem). Kõige tuntum on D. Hilbert'i eukleidilise geomeetria aksiomaatika. Selle aksiomaatika lühikirjeldus:

1. algmõisted on punkt, sirge ja tasand;

Seotud vektorid

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on eukleidiline ruum, so geomeetriline ruum, kus kehtib eukleidiline geomeetria. Eukleidilise geomeetria algmõisted on punkt, sirge ja tasand, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid. Kaasaegses geomeetrias on erinevaid eukleidilise geomeetria aksiomaatikaid (aksioomide süsteem). Kõige tuntum on D. Hilbert'i eukleidilise geomeetria aksiomaatika. Selle aksiomaatika lühikirjeldus:

1. algmõisted on punkt, sirge ja tasand;
2. nende vahelised seosed on vahelsus (punktid sirgel), sisalduvus (punkt ja sirge, punkt ja tasand, sirge ja tasand), kongruentsus, geomeetriline võrdsus (nt võrdsed lõigud, võrdsed nurgad, võrdsed kolmnurgad).

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*.

Seotud vektorid

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid.

Seotud vektorid

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B, mis asuvad antud sirgel. Kahe punkti A ja B süsteemi nimetatakse lõiguks ja tähistatakse AB või BA. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid.

Seotud vektorid

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B, mis asuvad antud sirgel. Kahe punkti A ja B süsteemi nimetatakse lõiguks ja tähistatakse AB või BA. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise lõigu AB korral on määratud tema pikkus (reaalarv) ja vastavat arvu (pikkust) tähistame $|AB|$.

Seotud vektorid

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B, mis asuvad antud sirgel. Kahe punkti A ja B süsteemi nimetatakse lõiguks ja tähistatakse AB või BA. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise lõigu AB korral on määratud tema pikkus (reaalarv) ja vastavat arvu (pikkust) tähistame $|AB|$.

Oletame, et on antud punkt O ja kaks kiirt, mis lähtuvad punktist O. Süsteemi, mis koosneb kahest kiirest, nimetatakse nurgaks. Igale nurgale vastab reaalarv, so nurga suurus.

Seotud vektorid

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B, mis asuvad antud sirgel. Kahe punkti A ja B süsteemi nimetatakse lõiguks ja tähistatakse AB või BA. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise lõigu AB korral on määratud tema pikkus (reaalarv) ja vastavat arvu (pikkust) tähistame $|AB|$.

Oletame, et on antud punkt O ja kaks kiirt, mis lähtuvad punktist O. Süsteemi, mis koosneb kahest kiirest, nimetatakse nurgaks. Igale nurgale vastab reaalarv, so nurga suurus. Lihtsustades, võib öelda, et eukleidiline geomeetria on pikkused ja nurgad.

Seotud vektorid

Eukleidilist ruumi tähistame E. Kui eukleidilise ruumi dimensioon on oluline, siis seda näitame ülaindeksiga. Näiteks, kui eukleidiliseks ruumiks on kolmemõõtmeline ruum, siis kirjtame E^3. Kui tasand (kahemõõtmeline ruum), siis kirjutame E^2.

Seotud vektorid

Eukleidilist ruumi tähistame E. Kui eukleidilise ruumi dimensioon on oluline, siis seda näitame ülaindeksiga. Näiteks, kui eukleidiliseks ruumiks on kolmemõõtmeline ruum, siis kirjtame E^3. Kui tasand (kahemõõtmeline ruum), siis kirjutame E^2.

Olgu X, Y eukleidilise ruumi E punktid. Sellega on määratud lõik XY. Punktid X, Y ei ole järjestatud ja selleks on kaks võimalust: XY või YX. Kui nüüd seda tüüpi tähistuses esimesel kohal olevat tähte interpreteerime lõigu alguspunktina ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktina, siis lõigul on määratud suund, st meie lõik muutub suunatud lõiguks.

Seotud vektorid

Eukleidilist ruumi tähistame E. Kui eukleidilise ruumi dimensioon on oluline, siis seda näitame ülaindeksiga. Näiteks, kui eukleidiliseks ruumiks on kolmemõõtmeline ruum, siis kirjtame E^3. Kui tasand (kahemõõtmeline ruum), siis kirjutame E^2.

Olgu X, Y eukleidilise ruumi E punktid. Sellega on määratud lõik XY. Punktid X, Y ei ole järjestatud ja selleks on kaks võimalust: XY või YX. Kui nüüd seda tüüpi tähistuses esimesel kohal olevat tähte interpreteerime lõigu alguspunktina ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktina, siis lõigul on määratud suund, st meie lõik muutub suunatud lõiguks.

Definitsioon

Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, so suund, nimetatakse suunatud lõiguks ehk seotud vektoriks. Seotud vektorit alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistame edaspidi $\overline{XY}$ abil. Kõigi seotud vektorite hulka tähistame $\overline{E}$ abil.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse seotud nullvektoriks.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse seotud nullvektoriks. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad mõisted, st pikkus ja nurk, saab üle kanda seotud vektoritele.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse seotud nullvektoriks. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad mõisted, st pikkus ja nurk, saab üle kanda seotud vektoritele. Seotud vektori $\overline{XY}$ pikkuseks, tähistame $|\overline{XY}|$, nimetame teda määrava lõigu pikkust, st $|\overline{XY}| = |XY.|$
Seega pikkusega null on ainult seotud nullvektorid ja ainult need.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse seotud nullvektoriks. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad mõisted, st pikkus ja nurk, saab üle kanda seotud vektoritele. Seotud vektori $\overline{XY}$ pikkuseks, tähistame $|\overline{XY}|$, nimetame teda määrava lõigu pikkust, st $|\overline{XY}| = |XY.|$
Seega pikkusega null on ainult seotud nullvektorid ja ainult need.

Olgu $\overline{AB}, \overline{AC}$ kaks seotud vektorit alguspunktiga punktis A (nad on nullvektorist erinevad vektorid). Iga seotud vektor määrab kiirt, mis lähtub punktist A. Seega meil on süsteem, mis koosneb kahest kiirest, ja see on nurk. Vastavat nurka nimetatakse seotud vektorite $\overline{AB}, \overline{AC}$ vaheliseks nurgaks ja tähistatakse $\angle(\overline{AB}, \overline{AC})$. Antud definitsioonist järeldub, et

$$0 \leq \angle(\overline{AB}, \overline{AC}) \leq \pi.$$

Vastandvektor

Seotud vektor on üheselt määratud kolme karakteristikuga:

1. alguspunkt,
2. pikkus,
3. suund.

Vastandvektor

Seotud vektor on üheselt määratud kolme karakteristikuga:

1. alguspunkt,
2. pikkus,
3. suund.

Paneme tähele, et kahe punkti X, Y korral $(X \neq Y)$ meil on kaks järjestust, seega meil on kaks seotud vektorit $\overline{XY}$ ja $\overline{YX}$.

Vastandvektor

Seotud vektor on üheselt määratud kolme karakteristikuga:

1. alguspunkt,
2. pikkus,
3. suund.

Paneme tähele, et kahe punkti X, Y korral $(X \neq Y)$ meil on kaks järjestust, seega meil on kaks seotud vektorit $\overline{XY}$ ja $\overline{YX}$. Seotud vektorit $\overline{YX}$ nimetame seotud vektori $\overline{XY}$ vastandvektoriks ja vastandvektorit tähistame $-\overline{XY}$, seega $\overline{YX} = -\overline{XY}$. Kehtivad seosed

$$-(-\overline{XY}) = \overline{XY}, \quad -\overline{XX} = \overline{XX}, \quad |-\overline{XY}| = |\overline{XY}|.$$

Seotud vektorid

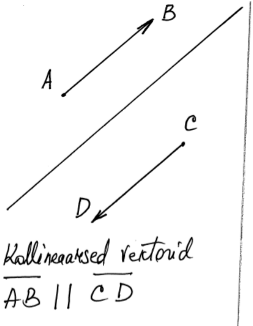
Definitsioon

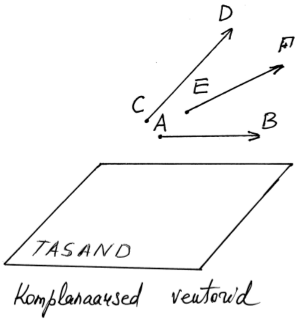
Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame kollineaarseks seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui lõik AB on paralleelne lõiguga CD või nad asuvad ühisel sirgel ja tähistame $\overline{AB}||\overline{CD}$. Kolm seotud vektorit $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ nimetatakse komplanaarseteks (komplanaarsed seotud vektorid), kui vastavad lõigud on parallelsed ühe ja sama tasandiga.

Seotud vektorid

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame kollineaarseks seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui lõik AB on paralleelne lõiguga CD või nad asuvad ühisel sirgel ja tähistame $\overline{AB}||\overline{CD}$. Kolm seotud vektorit $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ nimetatakse komplanaarseteks (komplanaarsed seotud vektorid), kui vastavad lõigud on parallelsed ühe ja sama tasandiga.





Märkused:

1. Ülalpool antud kollineaarsete vektorite definitsiooni ei saa rakendada seotud nullvektorile $\overline{0}$. Tõepoolest seotud nullvektor koosneb ainult ühest punktist ja tema siht ei ole määratud. Nüüd arvestame, et eukleidilises geomeetrias kehtib Eukleidese V aksioom: kui on antud punkt A (nt see on meie seotud nullvektor) ja sirge l (millel asub teine vektor), siis alati leidub sirge, mis läbib punkti A ja on paralleelne sirgega l. Seega vektorite teoorias lihtsalt postuleeritakse, et *seotud nullvektor on kollinearne mistahes seotud vektoriga.*

2. Komplanaarsete vektorite definitsioonis eeldame, et seotud vektorid on ruumi vektorid, st $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \in \overline{E}^3$. See tähendab, et komplanaarsete vektorite definitsiooni ei saa rakendada sirge vektoritele $\overline{E}^1$ ja tasandi vektoritele $\overline{E}^2$. Mainime, et kehtib: kui kolmikus $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ vähemalt kaks vektorit on kollineaarsed, siis kogu kolmik on komplanaarsed vektorid.

Märkused:

1. Vektorite kollineaarsuse ja komplanaarsuse mõisted on tihedalt seotud vektorruumi teooria mõistega "vektorite lineaarne sõltuvus (sõltumatus)". Vektorite lineaarse sõltuvuse mõistet defineeritakse algebralise tingimuse abil, kus kasutatakse tehteid vektoritega (liitmine ja korrutamine arvudega). Vektorite kollineaarsuse ja komplanaarsuse mõiste on geomeetriline lähenemine vektorite lineaarse sõltuvuse (või sõltumatuse) mõistele. Vektorite teoorias tõestatakse, et **kolm vektorit (ruumi vektorid) on lineaarselt sõltumatud parajasti siis, kui nad on mittekomplanaarsed vektorid**. Seega komplanaarsuse mõiste annab geomeetrilise kriteeriumi selleks, et kontrollida kas antud kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad või sõltumatud. Teoorias tõestatakse, et kolmemõõtmelises ruumis (dimensioon on 3!) **neli** suvalist vektorit on linearselt sõltuvad. Seega komplanaarsuse mõiste laiendamisel neljale (või rohkem) vektorile **ei ole mõtet**.

Samasuunaline vektor

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame samasuunaliseks (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui

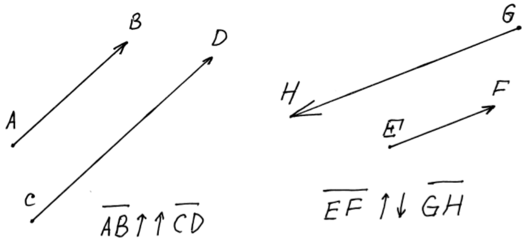
1. $\overline{AB}||\overline{CD}$, seotud vektor $\overline{AB}$ on kollineaarne seotud vektoriga $\overline{CD}$,
2. seotud vektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$) abil.

Samasuunaline vektor

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame samasuunaliseks (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui

1. $\overline{AB}||\overline{CD}$, seotud vektor $\overline{AB}$ on kollineaarne seotud vektoriga $\overline{CD}$,
2. seotud vektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$) abil.



Võrdsed seotud vektorid ja vabavektori mõiste

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame võrdseks seotud vektoriga $\overline{CD}$ ja tähistame $\overline{AB} = \overline{CD}$ abil, kui

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}|, \quad \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}.$$

Võrdsed seotud vektorid ja vabavektori mõiste

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame võrdseks seotud vektoriga $\overline{CD}$ ja tähistame $\overline{AB} = \overline{CD}$ abil, kui

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}|, \quad \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}.$$

Definitsioon

Olgu $\overline{AB}$ seotud vektor. Moodustame seotud vektorite klassi, kuhu kuuluvad **kõik** seotud vektoriga $\overline{AB}$ võrdsed seotud vektorid. Vastavat klassi nimetatakse seotud vektori $\overline{AB}$ poolt tekitatud vabavektoriks. Vabavektorit tähistame $\vec{AB}$ abil. Seotud nullvektori poolt tekitatud vabavektorit nimetatakse nullvektoriks ja tähistatakse $\vec{0}$ abil.

Vabavektori mõiste

Kasutades hulga teooria valemeid, võime kirjutada

$$\vec{AB} = \{\overline{CD} \in \overline{E} : \overline{CD} = \overline{AB}\}, \vec{0} = \{\overline{AA} : A \in E\}.$$

Vabavektoreid tähistame noolega varustatud ladina tähestiku väikeste tähtedega $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Selline tähistus rõhutab seda, et vabavektoril ei ole alguspunkti ja lõpp-punkti. Seega $\vec{AB} = \vec{a}$.

Vabavektori mõiste

Kasutades hulga teooria valemeid, võime kirjutada

$$\vec{AB} = \{\overline{CD} \in \overline{E} : \overline{CD} = \overline{AB}\}, \vec{0} = \{\overline{AA} : A \in E\}.$$

Vabavektoreid tähistame noolega varustatud ladina tähestiku väikeste tähtedega $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Selline tähistus rõhutab seda, et vabavektoril ei ole alguspunkti ja lõpp-punkti. Seega $\vec{AB} = \vec{a}$.

Olgu antud ruumi punkt A ja vabavektor $\vec{a}$. On ilmne, et leidub üks ja ainult üks ruumi punkt B selline, et seotud vektor $\overline{AB}$ tekitab vabavektorit $\vec{a}$. Sellisel juhul ütleme, et seotud vektor $\overline{AB}$ on vabavektor $\vec{a}$ rakendatud punktist A. Teiste sõnadega võime rakendada vabavektorit suvalisest punktist ja saame tulemuseks seotud vektori. Sellega seoses seotud vektorit hakkame nimetama rakendatud vektoriks ja alguspunkti rakenduspunktiks.

Pikkus ja nurk

Vabavektori mõiste on defineeritud eukleidilise geomeetria raames, seega eukleidilise geomeetria tähstaimad mõisted, so pikkus ja nurk, saab laiendada vabavektoritele. Olgu $\vec{a}$ vabavektor, fikseerime punkti A ja rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. *Vektori $\vec{a}$ pikkust määrame valemiga*

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Pikkus ja nurk

Vabavektori mõiste on defineeritud eukleidilise geomeetria raames, seega eukleidilise geomeetria tähstaimad mõisted, so pikkus ja nurk, saab laiendada vabavektoritele. Olgu $\vec{a}$ vabavektor, fikseerime punkti A ja rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. *Vektori $\vec{a}$ pikkust määrame valemiga*

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ kaks vektorit ja A ruumi punkt. Rakendame vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ punktist A, tekivad seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{AC}$. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vaheliseks nurgaks nimetame seotud vektorite $\overline{AB}, \overline{AC}$ vahelist nurka, st

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overline{AB}, \overline{AC}).$$

Ühikvektor

Vabavektor on üheselt määratud kahe parameetriga:

1. pikkus,
2. suund.

Järelikult kaks vektorit on **võrdsed**, kui nende **pikkused on võrdsed** ja nad on **samasuunalised**.

Ühikvektor

Vabavektor on üheselt määratud kahe parameetriga:

1. pikkus,
2. suund.

Järelikult kaks vektorit on **võrdsed**, kui nende **pikkused on võrdsed** ja nad on **samasuunalised**.

Vabavektorite hulka tähistame $\mathbf{E}$. Kui dimensioon on oluline, siis kirjutame $\mathbf{E^3}$ kolmemõõtmelise ruumi korral, $\mathbf{E^2}$ tasandi korral ja $\mathbf{E^1}$ sirge korral.

Definitsioon

Ühikvektoriks nimetatakse vektorit pikkusega 1, st $\vec{a}$ on ühikvektor, kui $|\vec{a}| = 1$.

Vabavektorid on kollineaarsed (komplanaarsed), kui nende poolt tekitatud seotud (rakendatud) vektorid on kollineaarsed (komplanaarsed).

Vektorite liitmine

Vektorite liitmine:

Vektorite liitmine

Vektorite liitmine:
Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}$,$\vec{b}$. Fikseerime punkti $A \in E$ ja rakendame esimest vektorit $\vec{a}$ punktist A, tekib seotud vektor $\overline{AB}$. Nüüd rakendame teist vektorit $\vec{b}$ punktist B, saame seotud vektori $\overline{BC}$. Vektorit $\vec{AC}$ nimetatakse vektorite $\vec{a}$,$\vec{b}$ summaks ja tähistatakse $\vec{a} + \vec{b}$ või $\vec{AB} + \vec{BC}$. Kui tähistada $\vec{AC} = \vec{c}$, siis võime kirjutada kas $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ või $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Nii defineeritud liitmist nimetatakse kolmnurga reegliks.

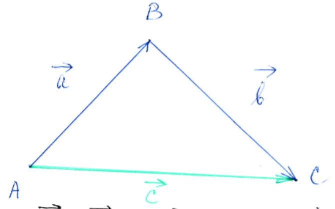
Vektorite liitmine

Vektorite liitmine:
Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}$,$\vec{b}$. Fikseerime punkti $A \in E$ ja rakendame esimest vektorit $\vec{a}$ punktist A, tekib seotud vektor $\overline{AB}$. Nüüd rakendame teist vektorit $\vec{b}$ punktist B, saame seotud vektori $\overline{BC}$. Vektorit $\vec{AC}$ nimetatakse vektorite $\vec{a}$,$\vec{b}$ summaks ja tähistatakse $\vec{a}+\vec{b}$ või $\vec{AB}+\vec{BC}$. Kui tähistada $\vec{AC}=\vec{c}$, siis võime kirjutada kas $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ või $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$. Nii defineeritud liitmist nimetatakse kolmnurga reegliks.
Näitame, et ülalpool antud vektorite summa definitsioon on korrektne, st ei sõltu punkti A valikust. Fikseerime teise punkti $A' \neq A$ ja kordame ülalpool kirjeldatud protsessi. Tekib teine kolmnurk $\triangle A'B'C'$. Kehtib

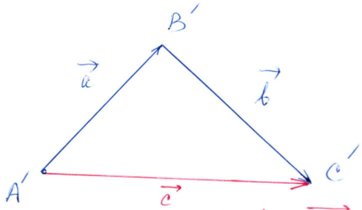
$$AB \| A'B', |AB| = |A'B'|, BC \| B'C', |BC| = |B'C'|.$$

Seega $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Järelikult $|AC| = |A'C'|, AC \| A'C'$ ja joonisel näeme, et seotud vektorid on samasuunalised $\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{A'C'}$. Seega seotud vektorid on võrdsed $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Võrdsed seotud vektorid tekitavad ühte ja sama vabavektorit, st $\vec{AC} = \vec{A'C'} = \vec{c}$.

Vektorite liitmine



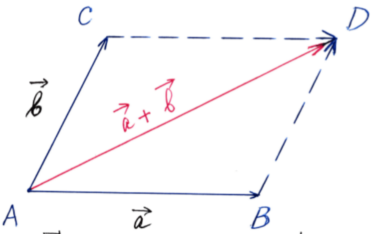
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



$\overline{AC} = \overline{A'C'}$ $\qquad$ $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$

Kolmnurk $\triangle ABC$ on võrdne kolmnurgaga

Vektorite liitmine



Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on rakendatud ühest ja samast punktist A (seotud vektorid $\overline{AB}$, $\overline{AC}$). ABCD on vektoritele $\overline{AB}, \overline{AC}$ ehitatud rööpkülik. On ilmne, et selle rööpküliku diagonaali poolt tekitatud vektor $\overrightarrow{AD}$ on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa. Siit järeldub

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (kommutatiivsus).}$$

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Vastandvektori poolt tekitatud vabavektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vabavektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Vastandvektori poolt tekitatud vabavektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vabavektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, vektorite liitmine on kommutatiivne;

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Vastandvektori poolt tekitatud vabavektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vabavektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, vektorite liitmine on kommutatiivne;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, vektorite liitmine on assotsiatiivne;

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Vastandvektori poolt tekitatud vabavektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vabavektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, vektorite liitmine on kommutatiivne;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, vektorite liitmine on assotsiatiivne;
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Vastandvektori poolt tekitatud vabavektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vabavektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, vektorite liitmine on kommutatiivne;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, vektorite liitmine on assotsiatiivne;
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A, saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Vastandvektori poolt tekitatud vabavektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vabavektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, vektorite liitmine on kommutatiivne;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, vektorite liitmine on assotsiatiivne;
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Tõestame omadust 4. Fikseerime punkti A, rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist A, tekib seotud vektor $\overline{AB}$. Nüüd rakendame vastandvektorit $-\vec{a}$ punktist B, tekib teine seotud vektor $\overline{BA}$. Kasutame kolmnurga reeglit

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}.$$

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus on seotud vektorite pikkustega?

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus on seotud vektorite pikkustega?

Üldiselt vektorite summa pikkus **ei võrdu** vektorite pikkuste summaga $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}|+|\vec{b}|$! Teiste sõnadega vektori pikkus ei ole lineaarfunktsioon. Tegelikult kehtib kolmnurga võrratus $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Summa pikkus

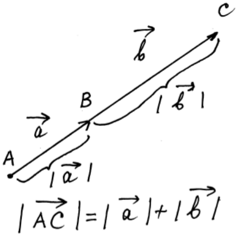
Kuidas vektorite summa pikkus on seotud vektorite pikkustega?

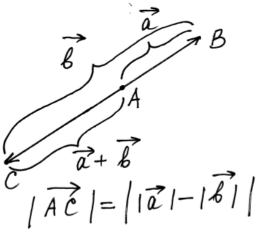
Üldiselt vektorite summa pikkus **ei võrdu** vektorite pikkuste summaga $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}|+|\vec{b}|$! Teiste sõnadega vektori pikkus ei ole lineaarfunktsioon. Tegelikult kehtib kolmnurga võrratus $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Milliste vektorite korral kehtib võrdsus?

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus on seotud vektorite pikkustega?

Üldiselt vektorite summa pikkus **ei võrdu** vektorite pikkuste summaga $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}|+|\vec{b}|$! Teiste sõnadega vektori pikkus ei ole lineaarfunktsioon. Tegelikult kehtib kolmnurga võrratus $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Milliste vektorite korral kehtib võrdsus?Võrdsus kehtib **ainult** samasuunaliste vektorite korral. Kui $\vec{a}, \vec{b}$ on samasuunalised vektorid, siis kehtib $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$. Kui $\vec{a}, \vec{b}$ on vastasuunalised vektorid, siis kehtib $|\vec{a}+\vec{b}| = |\,|\vec{a}|-|\vec{b}|\,|$.





Korrutamine arvuga

Teine tehe on vektorite korrutamine reaalarvudega. Olgu $\vec{a}$ mingi vektor ja α reaalarv. Tuletame meelde, et vektor on täielikult määratud, kui on antud tema pikkus ja suund.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ ja reaalarvu α korrutiseks nimetatakse vektorit $\alpha\,\vec{a}$, mis rahuldab kahte tingimust

1. (pikkus) $|\alpha\,\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
2. (suund) $\alpha\,\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, kui $\alpha > 0$, ja $\alpha\,\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, kui $\alpha < 0$, (kui $\alpha = 0$, siis esimesest tingimusest järeldub, et $\alpha\,\vec{a} = \vec{0}$).

Omadused

Reaalarvudega koorutamisel on järgmised omadused:

1. $\alpha\,(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$,
2. $(\alpha+\beta)\,\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$,
3. $(\alpha\,\beta)\,\vec{a} = \alpha\,(\beta\,\vec{a})$,
4. $1\,\vec{a} = \vec{a}$.

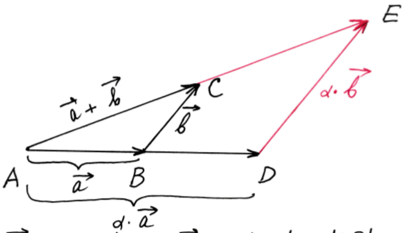
Tõestame esimest omadust juhul $\alpha > 0$ (vt järgmise slaidi joonis). Kehtib valem $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$. Tõepoolest

$$|(-1)\,\vec{a}| = |-1|\,|\vec{a}| = |\vec{a}|, \quad |-\vec{a}| = |\vec{a}|,$$

seega $|(-1)\,\vec{a}| = |-\vec{a}|$. Vektor $(-1)\,\vec{a}$ on vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$ ja vektor $-\vec{a}$ (so vektori $\vec{a}$ vastandvektor) on ka vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$. Järelikult $(-1)\,\vec{a} \uparrow\uparrow -\vec{a}$ ja $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$.

$$\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$$

$\alpha > 0$



$$|\alpha\cdot\vec{a}| = |\alpha|\cdot|\vec{a}| = \alpha\cdot\vec{a} \Rightarrow |AD| = \alpha\cdot|AB| \Rightarrow \frac{|AD|}{|AB|} = \alpha$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \alpha$$

$$|DE| = \alpha\cdot|BC| \Rightarrow |\overrightarrow{DE}| = |\alpha|\cdot|\vec{b}|,\ \overrightarrow{DE}\uparrow\uparrow\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \alpha\cdot\vec{b}$$

$$|AE| = \alpha\cdot|AC| \Rightarrow |\overrightarrow{AE}| = |\alpha|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|,\ \overrightarrow{AE}\uparrow\uparrow(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow \alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b} = \alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

Lineaarkombinatsioon

Kasutades vektorite liitmist ja arvuga korrutamist, meie võime moodustada avaldise

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{a}_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i, \tag{1}$$

kus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on vektorid ja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ on arvud. Avaldist 1 nimetatakse vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ lineaarkombinatsiooniks kordajaga $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Tähistame

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i.$$

On lihtne näha, et kehtib väide: *kui vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ on kollinearsed (komplanaarsed), siis vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k, \vec{b}$ on kollineaarsed (komplanaarsed)*.

Ühikvektor

Olgu $\vec{a}$ nullvektorist erinev vektor. Siis vektor

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a},$$

on ühikvektor. Vektorit $\vec{e}$ nimetatakse vektoriga $\vec{a}$ samasuunaliseks ühikvektoriks.

Eksami küsimused

1. Seotud vektori mõiste. Nullvektor, vastandvektor, kollineaarsed, komplanaarsed ja võrdsed seotud vektorid. Seotud vektori pikkus ja nurk seotud vektorite vahel.
2. Võrdsed seotud vektorid. Vabavektori mõiste. Võrdsed vabavektorid. Vabavektori pikkus ja nurk vabavektorite vahel. Kollineaarsed ja komplanaarsed vabavektorid.
3. Vabavektorite liitmine. Omadused. Vabavektorite korrutamine arvudega. Omadused. Vabavektorite lineaarkombinatsioon. Ühikvektori mõiste.