Analüütiline geomeetria

II loeng. Projektsioon. Baas ja reeper. Koordinaadid

Sügissemester 2016

Projektsioon

Oletame, et tasandil E^2 on antud kaks lõikuvat sirget l_1, l_2 ja nende lõikepunkt on tähistatud O. Fikseerime sirgel l_1 kaks erinevat punkti C, D. Vektorit $\vec{s}_1 = \vec{CD}$ nimetatakse sirge l_1 sihivektoriks. Teise sirge sihivektorit tähistame $\vec{s}_2$.

Projektsioon

Oletame, et tasandil E^2 on antud kaks lõikuvat sirget l_1, l_2 ja nende lõikepunkt on tähistatud O. Fikseerime sirgel l_1 kaks erinevat punkti C, D. Vektorit $\vec{s}_1 = \vec{CD}$ nimetatakse sirge l_1 sihivektoriks. Teise sirge sihivektorit tähistame $\vec{s}_2$.

Oletame, et ruumis E^3 on antud tasand $\mathfrak{a}$. Fikseerime tasandil kolm punkti A, B, C nii, et nad ei asu ühisel sirgel. Kaks mittekollineaarset vektorit $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ nimetatakse tasandi $\mathfrak{a}$ rihiks (vt joonis). Mainime, et kui on antud tasandi riht $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ja tasandi suvaline punkt O, siis selliste andmetega tasand on üheselt määratud. Vastavat tasandit edaspidi tähistame $[O; \vec{a}, \vec{b}]$.

Projektsioon

Oletame, et tasandil E^2 on antud kaks lõikuvat sirget l_1, l_2 ja nende lõikepunkt on tähistatud O. Fikseerime sirgel l_1 kaks erinevat punkti C, D. Vektorit $\vec{s}_1 = \vec{CD}$ nimetatakse sirge l_1 sihivektoriks. Teise sirge sihivektorit tähistame $\vec{s}_2$.

Oletame, et ruumis E^3 on antud tasand $\mathfrak{a}$. Fikseerime tasandil kolm punkti A, B, C nii, et nad ei asu ühisel sirgel. Kaks mittekollineaarset vektorit $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ nimetatakse tasandi $\mathfrak{a}$ rihiks (vt joonis). Mainime, et kui on antud tasandi riht $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ja tasandi suvaline punkt O, siis selliste andmetega tasand on üheselt määratud. Vastavat tasandit edaspidi tähistame $[O; \vec{a}, \vec{b}]$.

Olgu antud vektor $\vec{a} \in \mathbf{E}$. Rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist O ja vastavat rakendatud vektorit tähistame $\overline{OA}$. Seega $\vec{a} = \vec{OA}$. Projekteerime punkti A sirgele l_1 paralleelselt sirgega l_2 (vt joonis) (ruumi korral paralleelselt tasandiga $\mathfrak{a}$, vt joonis) ja punkti projektsiooni tähistame A'.

Vektorit $\vec{OA'}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ projektsioonivektoriks vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2 või ruumi korral paralleelselt tasandiga $\mathfrak{a}$) ja tähistatakse $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ projektsiooniks vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2) nimetatakse projektsioonivektori $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ pikkust märgiga "$+$", kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{s}_1$ ja märgiga "-", kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{s}_1$. Vektori $\vec{a}$ projektsiooni vektori $\vec{s}_1$ sihile tähistatakse $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$.

Vektorit $\vec{OA'}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ projektsioonivektoriks vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2 või ruumi korral paralleelselt tasandiga $\mathfrak{a}$) ja tähistatakse $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ projektsiooniks vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2) nimetatakse projektsioonivektori $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ pikkust märgiga "+", kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{s}_1$ ja märgiga "-", kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{s}_1$. Vektori $\vec{a}$ projektsiooni vektori $\vec{s}_1$ sihile tähistatakse $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$.

Kui sirge l_2 on risti sirgega l_1, siis arvu $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ ristprojektsiooniks vektori $\vec{s}_1$ sihile. Definitsioonist järeldub, et $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = |\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|$, kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{s}_1$ ja $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = -|\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|$, kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{s}_1$.

Vektorit $\vec{OA'}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ projektsioonivektoriks vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2 või ruumi korral paralleelselt tasandiga $\mathfrak{a}$) ja tähistatakse $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ projektsiooniks vektori $\vec{s}_1$ sihile (paralleelselt sirgega l_2) nimetatakse projektsioonivektori $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ pikkust märgiga "+", kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{s}_1$ ja märgiga "-", kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{s}_1$. Vektori $\vec{a}$ projektsiooni vektori $\vec{s}_1$ sihile tähistatakse $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$.

Kui sirge l_2 on risti sirgega l_1, siis arvu $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$ nimetatakse vektori $\vec{a}$ ristprojektsiooniks vektori $\vec{s}_1$ sihile. Definitsioonist järeldub, et $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = |\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|$, kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{s}_1$ ja $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = -|\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|$, kui $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{s}_1$. Seega kehtib valem $\boxed{|\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}| = |\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|.}$ Antud kursuse tähtsamad suurused on reaalarvud (või skalaarid) ja vektorid. Oma algebralise olemuse järgi nad on täielikult erinevad! Iga kord tuleb selgelt eristada, kas suurus on skalaar või vektor. Tähistus suure tähega "P", st $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$, on vektor ja $|\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|$ on selle vektori pikkus. Tähistus väikese "p", st $\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}$, on reaalarv ja $|\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}|$ on selle arvu absoluutväärtus.

Projektsioonivektor ja sihivektor on kollineaarsed vektorid, st $\vec{s}_1 \,||\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\,\vec{a}$.
Leiame kuidas projektsioonivektor $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\,\vec{a}$ avaldub sihivektori $\vec{s}_1$ kaudu.
Kehtib valem (vt Tõestus)

$$\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\,\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}\cdot\vec{s}_1.$$

Projektsioonivektor ja sihivektor on kollineaarsed vektorid, st $\vec{s}_1 \,||\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\, \vec{a}$.
Leiame kuidas projektsioonivektor $\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\, \vec{a}$ avaldub sihivektori $\vec{s}_1$ kaudu.
Kehtib valem (vt Tõestus)

$$\mathrm{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\, \mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \cdot \vec{s}_1.$$

Selles valemis tekib vektoriga $\vec{s}_1$ samasuunaline ühikvektor $\frac{1}{|\vec{s}_1|} \cdot \vec{s}_1$.
Tähistame vastavat ühikvektorit $\vec{e}_1$. Nüüd võime kirjutada kujul

$$\mathrm{Pr}_{\vec{e}_1}\vec{a} = \mathrm{pr}_{\vec{e}_1}\vec{a} \cdot \vec{e}_1.$$

Erijuhul ristprojektsiooni korral kehtib (vt joonis)

$$\mathrm{pr}_{\vec{e}_1}\vec{a} = |\vec{a}|\, \cos\angle(\vec{e}_1, \vec{a}),$$

Seega

$$\mathrm{Pr}_{\vec{e}_1}\vec{a} = |\vec{a}|\, \cos\angle(\vec{e}_1, \vec{a}) \cdot \vec{e}_1.$$

Sellest järeldub, et kehtib teoreem

Teoreem

Kui $\vec{a}, \vec{b}$ on kollineaarsed vektorid, st kehtib $\vec{a} || \vec{b}$, ja $\vec{a} \neq \vec{0}$, siis vektorit $\vec{b}$ saab avaldada vektori $\vec{a}$ kaudu, st leidub reaalarv α nii, et $\vec{b} = \alpha\, \vec{a}$, kus

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, \quad \textit{kui } \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, \\
\alpha &= -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, \quad \textit{kui } \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}.
\end{aligned}
$$

Nüüd projekteerime punkti A teisele sirgele l_2 ja punkti projektsiooni tähistame A'' (vt joonis 3). Teise projektsioonivektori korral kehtib analoogiline valem

$$\mathsf{Pr}_{\vec{s}_2}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_2|}\,\mathsf{pr}_{\vec{s}_2}\vec{a} \cdot \vec{s}_2.$$

Joonisel näeme, et $\vec{OA} = \mathsf{Pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} + \mathsf{Pr}_{\vec{s}_2}\vec{a}$. Seega

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\,\mathsf{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a} \cdot \vec{s}_1 + \frac{1}{|\vec{s}_2|}\,\mathsf{pr}_{\vec{s}_2}\vec{a} \cdot \vec{s}_2.$$

Kasutades samasuunalise ühikvektori mõistet võime kirjutada

$$\vec{a} = \mathsf{pr}_{\vec{1}_1}\vec{a} \cdot \vec{e}_1 + \mathsf{pr}_{\vec{e}_2}\vec{a} \cdot \vec{e}_2.$$

Erijuhul, kui projektsioon on ristprojektsioon, kehtib valem

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\cos\angle(\vec{e}_1, \vec{a}) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{a}|\,\cos\angle(\vec{e}_2, \vec{a}) \cdot \vec{e}_2.$$

Teoreem

Kui eukleidilisel tasandil E^2 *on antud kaks mittekollineaarset vektorit* $\vec{s}_1, \vec{s}_2$*, siis tasandi suvaline vektor* $\vec{a} \in \mathbf{E}^2$ *on vektorite* $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ *lineaarkombinatsioon, st*

$$\vec{a} = \alpha_1 \, \vec{s}_1 + \alpha_2 \, \vec{s}_2,$$

kus lineaarkombinatsiooni kordajad on üheselt määratud ja

$$\alpha_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|} \, pr_{\vec{s}_1} \vec{a}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{|\vec{s}_2|} \, pr_{\vec{s}_2} \vec{a}.$$

Teoreem

Kui eukleidilisel tasandil E^2 on antud kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{s}_1, \vec{s}_2$, siis tasandi suvaline vektor $\vec{a} \in \mathbf{E}^2$ on vektorite $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ lineaarkombinatsioon, st

$$\vec{a} = \alpha_1 \; \vec{s}_1 + \alpha_2 \; \vec{s}_2,$$

kus lineaarkombinatsiooni kordajad on üheselt määratud ja

$$\alpha_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|} \, pr_{\vec{s}_1} \vec{a}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{|\vec{s}_2|} \, pr_{\vec{s}_2} \vec{a}.$$

Kolmemõõtmelises ruumis E^3 kehtib analoogiline teoreem. Olgu antud ruumi punkt O ja kolm mittekomplanaarset vektorit $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$. Kui vaatleme igat vektorit $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ sirge sihivektorina, siis vektorid $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ määravad (üheselt) kolm sirget l_1, l_2, l_3, mis läbivad punkti O.

Olgu $\vec{a}$ suvaline vektor. Rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist O, rakendatud vektorit tähistame $\vec{OA}$ (vt joonis). Projekteerime punkti A tasandile $[O; \vec{s}_1, \vec{s}_2]$ parallelselt sirgega l_3. Projektsioonipunkti tähistame A'. On ilmne, et A' on tasandi $[O; \vec{s}_1, \vec{s}_2]$ punkt. Kehtib $\vec{OA} = \vec{OA'} + \vec{A'A}$. Projekteerime punkti A sirgele l_3 parallelselt tasandiga $[O; \vec{s}_1, \vec{s}_2]$ ja projektsioonipunkti tähistame B. On ilmne, et vektor $\vec{OB}$ on vektori $\vec{OA}$ projektsioonivektor, $\vec{OB} = \vec{A'A}$ ja eespool leitud valemist järeldub, et

$$\vec{A'A} = \vec{OB} = \mathrm{pr}_{\vec{s}_3}\ \vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_3|}\,\mathrm{pr}_{\vec{s}_3}\vec{a}\ \vec{s}_3.$$

Nüüd projekteerime punkti A' sirgetele l_1, l_2 ja eespool tõestatud teoreemist järeldub, et

$$\vec{OA'} = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\,\mathrm{pr}_{\vec{s}_1}\vec{OA'}\ \vec{s}_1 + \frac{1}{|\vec{s}_2|}\,\mathrm{pr}_{\vec{s}_2}\vec{OA'}\ \vec{s}_2.$$

On ilmne, et $\mathsf{Pr}_{\vec{s}_1}\ \vec{a} = \mathsf{Pr}_{\vec{s}_1}\ \vec{OA'}$ ja see kehtib ka $\vec{s}_2$ korral. Seega

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\,\mathsf{pr}_{\vec{s}_1}\vec{a}\ \vec{s}_1 + \frac{1}{|\vec{s}_2|}\,\mathsf{pr}_{\vec{s}_2}\vec{a}\ \vec{s}_2 + \frac{1}{|\vec{s}_3|}\,\mathsf{pr}_{\vec{s}_3}\vec{a}\ \vec{s}_3.$$

Kasutades samasuunalist ühikvektorit võime kirjutada

$$\vec{a} = \mathsf{pr}_{\vec{e}_1}\vec{a}\ \vec{e}_1 + \mathsf{pr}_{\vec{e}_2}\vec{a}\ \vec{e}_2 + \mathsf{pr}_{\vec{e}_3}\vec{a}\ \vec{e}_3.$$

Kui $l_1 \perp l_2 \perp l_3$ kehtib valem

$$\vec{a} = |\vec{a}|\ \cos\angle(\vec{e}_1, \vec{a}) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{a}|\ \cos\angle(\vec{e}_2, \vec{a}) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{a}|\ \cos\angle(\vec{e}_3, \vec{a}) \cdot \vec{e}_3$$

Teoreem

Kui eukleidilises ruumis E^3 on antud kolm mittekomplanaarset vektorit $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, siis ruumi suvaline vektor $\vec{a} \in \mathbf{E}^3$ on vektorite $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ lineaarkombinatsioon, st

$$\vec{a} = \alpha_1\ \vec{s}_1 + \alpha_2\ \vec{s}_2 + \alpha_3\ \vec{s}_3,$$

kus lineaarkombinatsiooni kordajad on üheselt määratud ja

$$\alpha_1 = \frac{1}{|\vec{s}_1|}\, pr_{\vec{s}_1}\vec{a}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{|\vec{s}_2|}\, pr_{\vec{s}_2}\vec{a}, \alpha_3 = \frac{1}{|\vec{s}_3|}\, pr_{\vec{s}_3}\vec{a}.$$

Definitsioon

Ruumi E^1 (sirge) reeperiks nimetatakse paari $\{O; \vec{e}\}$, kus O on sirge punkt ja $\vec{e} \in \mathbf{E}^1$ on sirge nullvektorist erinev vektor (sihivektor). Vektorit $\vec{e}$ nimetatakse $\mathbf{E^1}$ baasiks. Ruumi E^2 (tasand) reeperiks nimetatakse kolmikut $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kus O on tasandi punkt ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on mittekollineaarsed vektorid. Vektorite süsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse $\mathbf{E}^2$ baasiks. Ruumi E^3 reeperiks nimetatakse $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, kus O on ruumi punkt ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on mittekomplanaarsed vektorid. Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nimetatakse $\mathbf{E}^3$ baasiks. Punkti O nimetatakse reeperi alguspunktiks.

Definitsioon

Ruumi E^1 (sirge) reeperiks nimetatakse paari $\{O; \vec{e}\}$, kus O on sirge punkt ja $\vec{e} \in \mathbf{E}^1$ on sirge nullvektorist erinev vektor (sihivektor). Vektorit $\vec{e}$ nimetatakse $\mathbf{E^1}$ baasiks. Ruumi E^2 (tasand) reeperiks nimetatakse kolmikut $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kus O on tasandi punkt ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on mittekollineaarsed vektorid. Vektorite süsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse $\mathbf{E}^2$ baasiks. Ruumi E^3 reeperiks nimetatakse $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, kus O on ruumi punkt ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on mittekomplanaarsed vektorid. Vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nimetatakse $\mathbf{E}^3$ baasiks. Punkti O nimetatakse reeperi alguspunktiks.

Järgnevas ruumi E reeperit tähistame $\mathfrak{R}$ ja selle reeperi baasi $\vec{\mathbf{e}}$. Seega võime kirjutada $\mathfrak{R} = \{O; \vec{\mathbf{e}}\}$. Kui ruumi dimensioon on tähtis, siis seda näitame alaindeksiga, st $\mathfrak{R}_1 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_1\}$ on E^1 reeper, kus $\vec{\mathbf{e}}_1 = (\vec{e})$. Analoogiliselt $\mathfrak{R}_2 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_2\}$ on tasandi reeper, kus $\vec{\mathbf{e}}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ja $\mathfrak{R}_3 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_3\}$, kus $\vec{\mathbf{e}}_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Tasandi orientatsioon

Olgu tasandil antud reeper $\mathfrak{R}_2 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_2\}$, kus $\vec{\mathbf{e}}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Reeper määrab tasandi orientatsiooni.

Tasandi orientatsioon

Olgu tasandil antud reeper $\mathfrak{R}_2 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_2\}$, kus $\vec{\mathbf{e}}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Reeper määrab tasandi orientatsiooni.

Rakendame vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ vastavad rakendatud vektorid. Hakkame pöörama **esimest** rakendatud vektorit $\overline{OA}$ ümber rakenduspunkti O lühemat teed pidi rakendatud vektorini $\overline{OB}$ ja kui see toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas (samas suunas) (vt vt joonis), siis öeldakse, et reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ orientatsioon on parema käe (vasaku käe) orientatsioon ja repeerit nimetatakse parema käe (vasaku käe) reeperiks. Kui reeper on antud, siis tasandi orientatsiooniks nimetatakse vastava repeeri orientatsiooni, st reeper tekitab tasandi orientatsiooni.

Tasandi orientatsioon

Olgu tasandil antud reeper $\mathfrak{R}_2 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_2\}$, kus $\vec{\mathbf{e}}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Reeper määrab tasandi orientatsiooni.

Rakendame vektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ punktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}$ vastavad rakendatud vektorid. Hakkame pöörama **esimest** rakendatud vektorit $\overline{OA}$ ümber rakenduspunkti O lühemat teed pidi rakendatud vektorini $\overline{OB}$ ja kui see toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas (samas suunas) (vt vt joonis), siis öeldakse, et reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ orientatsioon on parema käe (vasaku käe) orientatsioon ja repeerit nimetatakse parema käe (vasaku käe) reeperiks. Kui reeper on antud, siis tasandi orientatsiooniks nimetatakse vastava repeeri orientatsiooni, st reeper tekitab tasandi orientatsiooni.

On ilmne, et iga reeper on kas parema käe või vasaku käe reeper. Seega kõik tasandi reeperid jagunevad kaheks klaasiks: 1) parema käe reeperid, 2) vasaku käe reeperid. Järelikult tasandil on kaks orientatsiooni. Edaspidi vaikselt eeldame, et reeper on parema käe reeper.

Ruumi orientatsioon

Olgu ruumis antud reeper $\mathfrak{R}_3 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_3\}$. Rakendame baasivektoreid alguspunktist O ja olgu $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ vastavad rakendatud vektorid. Kui esimese rakendatud vektori $\overline{OA}$ pööre (ümber rakenduspunkti O) lühemat teed pidi rakendatud vektorini $\overline{OB}$ jälgituna rakendatud vektori $\overline{OC}$ lõpp-punktist toimub kella osuti liikumise suunale vastupidises suunas, siis öeldakse, et reeperi $\mathfrak{R}_3 = \{O; \vec{\mathbf{e}}_3\}$ orientatsioon on parema käe orientatsioon ja reeperit ruumis nimetatakse parema käe reeperiks (vt joonis). Mainime, et ruumis on kaks orientatsiooni.

Reeper määrab tasandi või ruumi **koordinaadisüsteemi**. Näitame, kuidas reeper tekitab koordinaatteljestkku. Olgu $\mathfrak{R}_2 = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi reeper. Olgu l_1, l_2 sirged, mis läbivad punkti O ja baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on sirgete l_1, l_2 sihivektorid. Sirgeid l_1, l_2 nimetatakse koordinaattelgedeks, l_1 on abstsiss telg, l_2 on ordinaattelg (ja ruumis on veel üks koordinaattelg l_3, mida nimetatakse aplikaatteljeks).

Reeper määrab tasandi või ruumi **koordinaadisüsteemi**. Näitame, kuidas reeper tekitab koordinaatteljestkku. Olgu $\mathfrak{R}_2 = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi reeper. Olgu l_1, l_2 sirged, mis läbivad punkti O ja baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on sirgete l_1, l_2 sihivektorid. Sirgeid l_1, l_2 nimetatakse koordinaattelgedeks, l_1 on abstsiss telg, l_2 on ordinaattelg (ja ruumis on veel üks koordinaattelg l_3, mida nimetatakse aplikaatteljeks).

Kui koordinaatteljed on teineteisega risti ja baasivektorid on ühikvektorid

$$\boxed{l_1 \perp l_2, \quad |\vec{e}_1| = 1,\ |\vec{e}_2| = 1,}$$

siis tasandi reeperit $\mathfrak{R}_2$ nimetatakse ristreeperiks. Ruumi E^3 reeperit $\mathfrak{R}_3 = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nimetatakse ristreeperiks, kui

$$\boxed{l_1 \perp l_2 \perp l_3, \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1.}$$

Mainime, et ruumi ristreeperi baasi baasivektoreid sageli tähistatakse $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, st $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$. **Järgnevas kasutame peamiselt ristreepereid.**

Olgu ruumis E antud reeper $\mathfrak{R}$ ja P ruumi E suvaline punkt. Vektorit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ nimetatakse punkti P kohavektoriks. Kui P on tasandi punkt, siis eespool tõestatud teoreemist järeldub, et

$$\vec{r} = \mathrm{pr}_{\vec{e}_1}\vec{r} \cdot \vec{e}_1 + \mathrm{pr}_{\vec{e}_2}\vec{r} \cdot \vec{e}_2.$$

Kui tähistame $x = \mathrm{pr}_{\vec{e}_1}\vec{r}, y = \mathrm{pr}_{\vec{e}_2}\vec{r}$, siis

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2.$$

Arvupaari x, y nimetatakse vektori $\vec{r}$ ja punkti P koordinaatideks ja seda tähistatakse $\vec{r} = (x; y; z),\ \ P(x; y)$. Analoogiliselt ruumi punkti P korral

$$\vec{r} = \mathrm{pr}_{\vec{e}_1}\vec{r} \cdot \vec{e}_1 + \mathrm{pr}_{\vec{e}_2}\vec{r} \cdot \vec{e}_2 + \mathrm{pr}_{\vec{e}_3}\vec{r} \cdot \vec{e}_3,$$

ja kui tähistame $x = \mathrm{pr}_{\vec{e}_1}\vec{r}, y = \mathrm{pr}_{\vec{e}_2}\vec{r}, z = \mathrm{pr}_{\vec{e}_3}\vec{r}$, siis

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3.$$

Arvukolmikut x, y, z nimetatakse vektori $\vec{r}$ ja punkti P koordinaatideks ja kirjutame $\vec{r} = (x; y; z)$ ja $P(x; y; z)$.

Erijuhul, kui reeper on ristreeper, siis suvalise vektori $\vec{r}$ korral tema koordinaadid avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} x &= |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_1),\ y = |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_2),\ \ \vec{r}\in\mathbf{E}^2 \\ x &= |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_1),\ y = |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_2),\ z = |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_3), \vec{r}\in\mathbf{E}^3. \end{aligned}$$

Seega ristreeperi korral kehtivad valemid

$$\begin{aligned} \vec{r} &= |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_1 + |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_2 = \sum_{i=1}^{2}|\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_i, \\ \vec{r} &= |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_1)\cdot\vec{e}_1 + |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_2 + |\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Kasutades summa märki, võime kirjutada

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{N}|\vec{r}|\ \cos\angle(\vec{r},\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_i, \tag{1}$$

kus tasandi korral $N=2$ ja ruumi korral $N=3$ (siin N on ruumi dimensioon).

1. Olgu antud $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Kehtib
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2,$$
2. on antud punktid $P(x_1; y_1; z_1), Q(x_2; y_2; z_2)$, vektori $\overrightarrow{PQ}$ koordinaadid on
$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$
3. on antud punkt $P(x; y; z)$ ja vektor $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, kui rakendame vektorit $\vec{a}$ punktist P, siis rakendatud (seotud) vektori $\overline{PQ}$ lp̃p-punkti Q koordinaadid on
$$Q(x + a_1, y + a_2, z + a_3),$$
4. on antud kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1), \vec{r}_2 = (x_1; y_2; z_2)$, vektorite summa koordinaadid on
$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$
5. on antud vektor $\vec{r} = (x; y; z)$ ja arv α, korrutise koordinadid on
$$\alpha \cdot \vec{r} = (\alpha\, x; \alpha\, y; \alpha\, z).$$

Olgu antud lõigu otspunktid $P(x_1; y_1; z_1), R(x_2; y_2; z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x; y; z)$ nii, et Q jaotab lõigu PR suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$. Punkti Q koordinaadid avalduvad järgmiselt (vt Tõestus):

$$Q(\frac{\mu\, x_1 + \lambda\, x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu\, y_1 + \lambda\, y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu\, z_1 + \lambda\, z_2}{\lambda + \mu}).$$

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on polaarkoordinaadisüsteem. Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

Olgu antud lõigu otspunktid $P(x_1; y_1; z_1), R(x_2; y_2; z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x; y; z)$ nii, et Q jaotab lõigu PR suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$. Punkti Q koordinaadid avalduvad järgmiselt (vt Tõestus):

$$Q(\frac{\mu\, x_1 + \lambda\, x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu\, y_1 + \lambda\, y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu\, z_1 + \lambda\, z_2}{\lambda + \mu}).$$

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on polaarkoordinaadisüsteem. Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

1. punkt O (nimetatakse pooluseks);

Olgu antud lõigu otspunktid $P(x_1; y_1; z_1), R(x_2; y_2; z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x; y; z)$ nii, et Q jaotab lõigu PR suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, kus $\lambda > 0, \mu > 0$. Punkti Q koordinaadid avalduvad järgmiselt (vt Tõestus):

$$Q(\frac{\mu\, x_1 + \lambda\, x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu\, y_1 + \lambda\, y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu\, z_1 + \lambda\, z_2}{\lambda + \mu}).$$

Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida järgnevas kasutame, on polaarkoordinaadisüsteem. Polaarkoordinaadisüsteem on täielikult määratud, kui on antud

1. punkt O (nimetatakse strong pooluseks);
2. punktist O lähtuv kiir l (nimetatakse polaarteljeks).

Kui P on tasandi suvaline punkt, siis selle polaarkoordinaadid on (r, ϕ) (vt joonis), kus r on lõigu OP pikkus, st $r = |OP|$, ja ϕ on nurk, mida mõõdetakse kiirest l vastu päeva. Esimest koordinaati r nimetatakse polaarraadiuseks ja teist koordinaati ϕ nimetatakse polaarnurgaks. Mainime, et polaarnurk erineb vektorite vahelisest nurgast, sest polaarnurga mõiste kasutab tasandi orientatsiooni (ϕ mõnikord nimetatakse orienteeritud nurgaks).

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$. Teiseks, polaarnurk ei ole üheselt määratud, sest kui r on fikseeritud, siis ϕ ja $\phi + 2\pi\, k$ määravad ühte ja sama punkti. Siin on kaks võimalust, kas nõuame $0 \leq \phi < 2\pi$ või arvupaarid $(r, \phi), (r, \phi + 2\pi\, k)$ samastame, st $(r, \phi) \equiv (r, \phi + 2\pi\, k)$.

Polaarkoordinaadid

Koordinaadisüsteemi printsiip (punktid üks-üheses vastavuses arvupaaridega) on rikutud kahes aspektis. Esiteks, kui punkt on poolus, siis polaarnurk ei ole määratud. Kui tahetakse, et polaarkoordinaadisüsteem oleks korrektne (diferentsiaalgeomeetrias), siis poolust eemaldatakse (pooluses läbi torgatud tasand, *punctured plane*) või teiste sõnadega postuleeritakse, et polaarkoordinaatide määramispiirkond on $E^2 \setminus \{O\}$. Teiseks, polaarnurk ei ole üheselt määratud, sest kui r on fikseeritud, siis ϕ ja $\phi + 2\pi\, k$ määravad ühte ja sama punkti. Siin on kaks võimalust, kas nõuame $0 \leq \phi < 2\pi$ või arvupaarid $(r, \phi), (r, \phi + 2\pi\, k)$ samastame, st $(r, \phi) \equiv (r, \phi + 2\pi\, k)$. Kui tasandil on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kusjuures alguspunkt O asub pooluses, baasivektor $\vec{e}_1$ asub kiirel l, siis ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu järgmiselt (vt joonis):

$$x = r\ \cos\,\phi, \ \ y = r\ \sin\,\phi.$$

Silindrilised koordinaadid (ruumis) on täielikult määratud, kui on antud punkt O, sellest punktist lähtuv kiir l ja ühikvektor $\vec{n}$, mis on risti l, st $\vec{n} \perp l$. Punkti P silindrilised koordinaadid on näidatud joonisel. Konstrueerime ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et alguspunkt on punkt O, $\vec{e}_1$ on l sihivektor, $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ja reeper on parema käe reeper. Silindriliste koordinaatide r, ϕ, z seos ristkoordinaatidega x, y, z on järgmine

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\phi, \\ y &= r\ \sin\phi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Silindrilised koordinaadid (ruumis) on täielikult määratud, kui on antud punkt O, sellest punktist lähtuv kiir l ja ühikvektor $\vec{n}$, mis on risti l, st $\vec{n} \perp l$. Punkti P silindrilised koordinaadid on näidatud joonisel. Konstrueerime ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et alguspunkt on punkt O, $\vec{e}_1$ on l sihivektor, $\vec{e}_3 = \vec{n}$ ja reeper on parema käe reeper. Silindriliste koordinaatide r, ϕ, z seos ristkoordinaatidega x, y, z on järgmine

$$\begin{aligned} x &= r \cos\phi, \\ y &= r \sin\phi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Sfääriliste koordinaatide konstrueerimiseks fikseerime punkti O, sellest lähtuva kiire l ja ühikvektori $\vec{n}$ (nii nagu silindriliste koordinaatide korral). Punkti P silindrilised koordinaadid on näidatud joonisel. Seos ristkoordinaatidega on antud valemiga

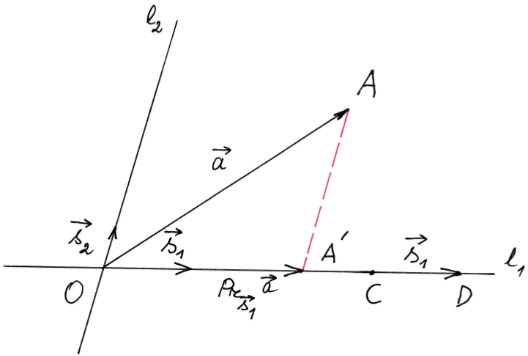
$$\begin{aligned} x &= r \sin\psi \cos\phi, \\ y &= r \sin\psi \sin\phi, \\ z &= r \cos\psi. \end{aligned}$$

Eksami küsimused

1. Vektori projektsioon sirgele (tasandil ja ruumis). Projektsiooni valem. Ristprojektsioon ja ristprojektsiooni valem.
2. Teoreem kollineaarsetest vektoritest, teoreem mittekollineaarsetest vektoritest ja teoreem mittekomplanaarsetest vektoritest.
3. Reeperi mõiste. Tasandi ja ruumi orientatsioon. Reeperi poolt tekitatud koordinaadisüsteemi kirjeldus. Ristreeper ja ristkoordinaadid. Tehted vektoritega koordinaatides.
4. Lõigu jaotamine antud suhtes.
5. Polaarkoordinaadid, silindrilised ja sfäärilised koordinaadid.

Eksami ülesanded

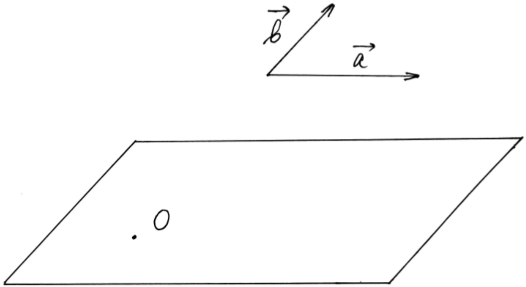
1. Tasandil on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Polaarkoordinaadisüsteemi $\{O', l\}$ konstrueeritakse järgmiselt: poolus $O'(-c; 0)$, kus $c > 0$, ja $\vec{e}_1$, rakendatud punktist O', asub kiirel l. Leida kuidas ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu.
2. Tasandil on antud polaarkoordinaadisüsteem $\{O; l\}$. Fikseerime tasandi kaks punkti P, Q. Olgu punkti P polaarkoordinaadid on (r_1, ϕ_1) ja punkti Q polaarkoordinaadid on (r_2, ϕ_2). Kas kehtib valem
$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = (r_1 + r_2, \phi_1 + \phi_2)?$$
Vastus peab olema põhjendatud.



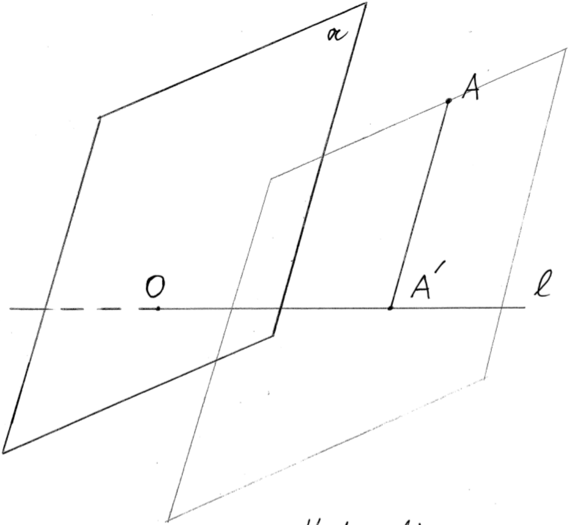
$\vec{s}_1$ on sirge l_1 <u>sihivektor</u>

$\vec{s}_2$ on sirge l_2 <u>sihivektor</u>

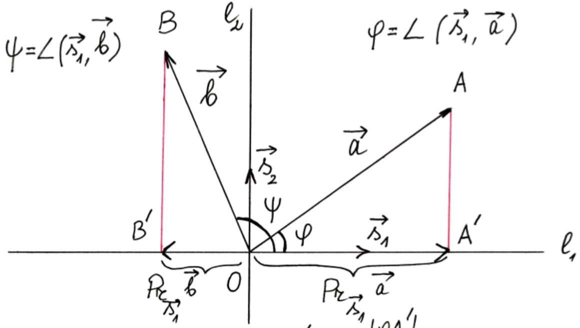
$\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$



Punkt O ja kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{a}, \vec{b}$ üheselt määravad tasandit, tähistame $[O; \vec{a}, \vec{b}]$



Punkti A projekteerimine // tasandiga



Täisnurkne kolmnurk $\triangle OA'A$, $\dfrac{|OA'|}{|OA|} = \cos\varphi$.

$\vec{s}_1 \uparrow\uparrow Pr_{\vec{s}_1}\vec{a} \Longrightarrow \dfrac{|Pr_{\vec{s}_1}\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \cos\varphi$

Analoogiliselt $\triangle OB'B$, $\dfrac{|OB'|}{|OA|} = \cos(\pi - \psi)$.

$\vec{s}_1 \uparrow\downarrow Pr_{\vec{s}_1}\vec{b} \Longrightarrow \dfrac{|Pr_{\vec{s}_1}\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \cos(\pi - \psi)$

Näitame, et pikkused on võrdsed. Tõepoolest

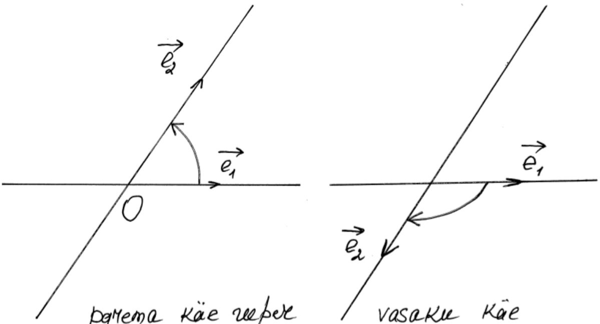
$|Pr_{\vec{s}_1}\vec{a}| = |pr_{\vec{s}_1}\vec{a}|,$

$$\left|\frac{1}{|\vec{s}_1|} pr_{\vec{s}_1}\vec{a}\cdot\vec{s}_1\right| = \frac{1}{\cancel{|\vec{s}_1|}}|pr_{\vec{s}_1}\vec{a}|\cancel{|\vec{s}_1|} =$$

$$= |pr_{\vec{s}_1}\vec{a}|$$

Näitame, et vektorid on samasuunalised.

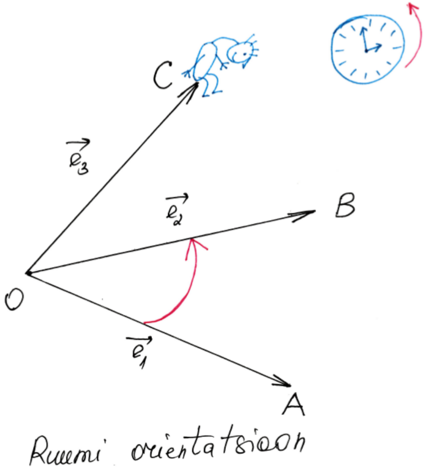
1. Kui $Pr_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{s}_1$, siis $pr_{\vec{s}_1}\vec{a} > 0$, ja vektor $\frac{1}{|\vec{s}_1|} pr_{\vec{s}_1}\vec{a}\cdot\vec{s}_1 \uparrow\uparrow \vec{s}_1$, seega $Pr_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \frac{1}{|\vec{s}_1|} pr_{\vec{s}_1}\vec{a}\cdot\vec{s}_1$.
2. Kui $Pr_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{s}_1$, siis $pr_{\vec{s}_1}\vec{a} < 0$ ja vektor $\frac{1}{|\vec{s}_1|} pr_{\vec{s}_1}\vec{a}\cdot\vec{s}_1 \uparrow\downarrow \vec{s}_1$, seega $Pr_{\vec{s}_1}\vec{a} \uparrow\uparrow \frac{1}{|\vec{s}_1|} pr_{\vec{s}_1}\vec{a}\cdot\vec{s}_1$.

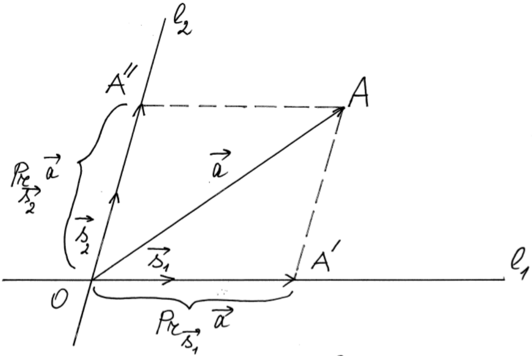


parema käe reeper

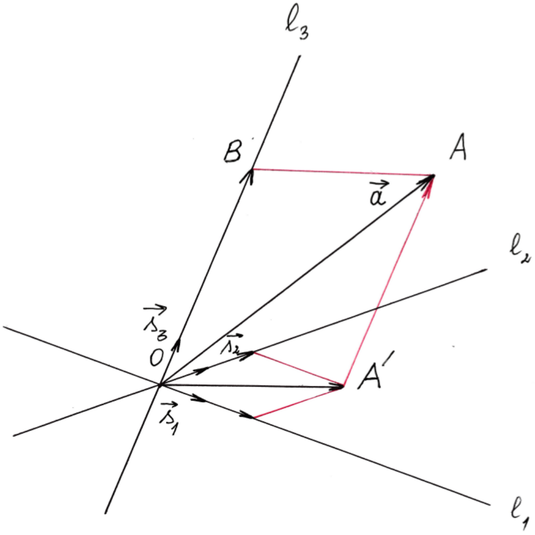
vasaku käe reeper

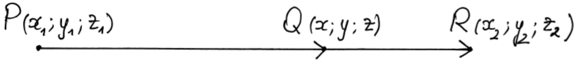
Tasandi orientatsioon on parema käe orientatsioon.


C
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
B
O
$\vec{e}_1$
A
Ruumi orientatsioon



$$\overrightarrow{OA} = Pr_{\vec{s}_1}\vec{a} + Pr_{\vec{s}_2}\vec{a}$$


l_3
B
A
$\vec{a}$
l_2
$\vec{s}_3$
$\vec{s}_2$
O
A'
$\vec{s}_1$
l_1



On antud lõigu PR otspunktid $P(x_1;y_1;z_1)$ ja $R(x_2;y_2;z_2)$. Tuleb leida lõigu punkt $Q(x;y;z)$ nii, et Q jaotab lõigu suhtes $\frac{\lambda}{\mu}$, st
$$\frac{|PQ|}{|QR|}=\frac{\lambda}{\mu},\quad \text{kus } \lambda>0,\ \mu>0.$$

On ilmne, et
$$\overrightarrow{PR}=\frac{|\overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ}.$$

Kehtib $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$. Seega
$$|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}|=|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{QR}|.$$

Järelikult
$$\overrightarrow{PR}=\frac{|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ}=$$
$$=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)\overrightarrow{PQ},\quad \overrightarrow{PQ}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{PR}$$

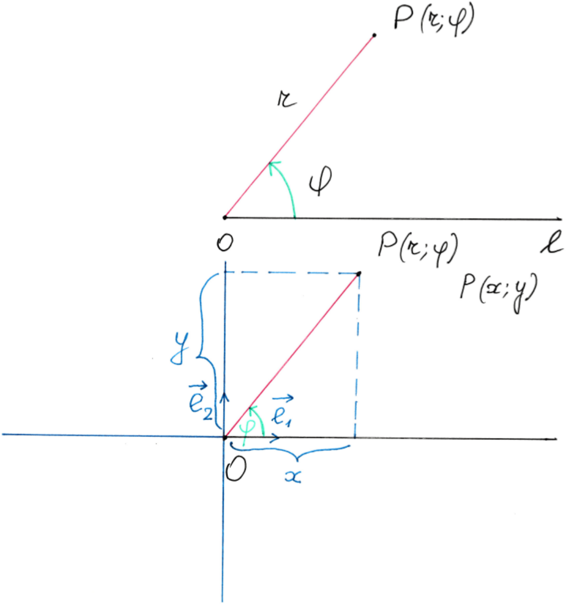
$$\overrightarrow{PR} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$

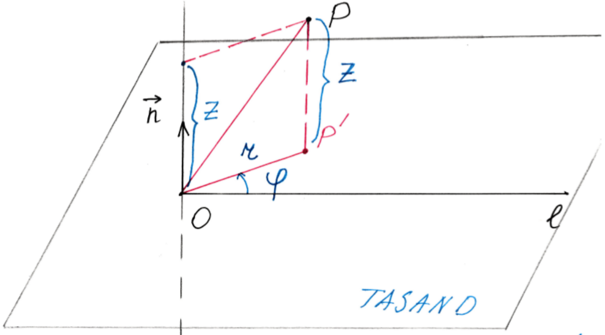
$$x = x_1 + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(x_2 - x_1) = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda+\mu}$$

$$y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda+\mu}, \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda+\mu}$$

$$Q\left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda+\mu};\ \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda+\mu};\ \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda+\mu}\right)$$

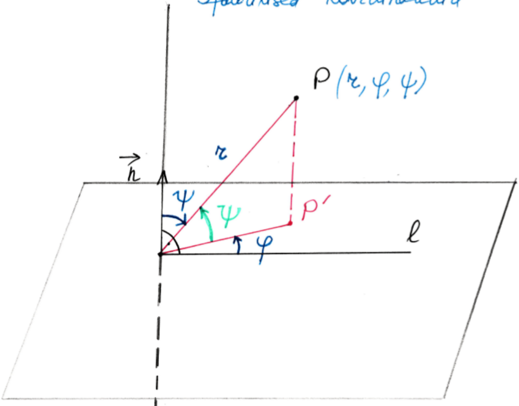

P (r;φ)
r
φ
O
P(r;φ)
ℓ
P(x;y)
y
e₂
e₁
φ
O
x

Silindrilised koordinaadid $(O, \ell, \vec{n})$



Punkti silindrilised koordinaadid on r, φ, z. Tasand on risti vektoriga $\vec{n}$ ja läbib sirget ℓ.

Sfäärilised koordinaadid



1. $P(r, \varphi, \psi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \psi \leq \pi$

2. $P(r, \varphi, \psi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$