Analüütiline geomeetria

III loeng. Vektorite skalaarkorrutis.

Sügissemester 2016

Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$. Tuletame meelde, kuidas defineeritakse nurka kahe vektori vahel. Esiteks rakendame vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ ühest ja samast punktist O ja olgu rakendatud vektorid $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vaheliseks nurgaks nimetatakse rakendatud vektorite $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ seda vahelist nurka, mis on väiksem või võrdne arvuga π. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahelist nurka tähistame ϕ. Järelikult $0 \leq \phi \leq \pi$. Kui $\phi = \frac{\pi}{2}$, siis öeldakse, et vektorid on teineteisega risti ja tähistatakse $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Definitsioon

Kahe vektori $\vec{a}, \vec{b}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu $|\vec{a}||\vec{b}| \ \cos\phi$ ja skalaarkorrutist tähistatakse $< \vec{a}, \vec{b} >$. Seega

$$< \vec{a}, \vec{b} >= |\vec{a}||\vec{b}| \ \cos\phi.$$

Kui vähemalt üks vektor on nullvektor (sellisel juhul nurk vektorite vahel ei ole määratud), siis $< \vec{a}, \vec{b} >= 0$.

Skalaarkorrutise omadused:

1. vektorite skalaarkorrutamine on kommutatiivne $<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$,
2. $<\vec{a},\vec{a}>=|\vec{a}|^2 \geq 0$, kusjuures $<\vec{a},\vec{a}>=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}=\vec{0}$,
3. vektorite $\vec{a},\vec{b}$ skalaarkorrutis on null parajasti siis, kui nad on teineteisega risti $\vec{a}\perp\vec{b}$ või vähemalt üks nendest on nullvektor, (vt tõestus)
4. Vektorite skalaarkorrutamine on lineaarne, st

$$<\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b},\vec{c}>=\alpha\;<\vec{a},\vec{c}>+\beta\;<\vec{b},\vec{c}>,$$

kus α,β on suvalised arvud ja $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ on suvalised vektorid,

5. kui $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ on ristreeper, siis kehtib

$$\begin{aligned}<\vec{e}_1,\vec{e}_1> &= <\vec{e}_2,\vec{e}_2>=<\vec{e}_3,\vec{e}_3>=1,\\ <\vec{e}_1,\vec{e}_2> &= <\vec{e}_2,\vec{e}_3>=<\vec{e}_1,\vec{e}_3>=0.\end{aligned}$$

Teisest omadusest järeldub, et vektori pikkuse võime arvutada kasutades valemit $|\vec{a}|=+\sqrt{<\vec{a},\vec{a}>}$.

Tarvilikus: $\vec{a} \perp \vec{b}$ või $\vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

1) kui $\vec{a} = \vec{0}$, siis definitsiooni kohaselt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$,

2) kui $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, siis

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0''} = 0$$

Piisavus: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Longrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ või $\vec{a} \perp \vec{b}$

Kirjutame $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi = 0$.

Kaks võimalust

1) $|\vec{a}| = 0$, seega $\vec{a} = \vec{0}$,

2) $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, siis $\cos\phi = 0 \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$

Defineerime kahe alaindeksiga suurust (Kroneckeri sümbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases}$$

Viimase omaduse kuju $< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \delta_{ij}$. Tuletame meelde, et ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral kehtib valem (Loeng II)

$$\vec{r} = |\vec{r}| \ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}| \ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

On ilmne, et $|\vec{r}| \ \cos\angle(\vec{r}, \vec{e}_i) =< \vec{r}, \vec{e}_i >, i = 1, 2, 3.$ Seega

$$\boxed{\vec{r} =< \vec{r}, \vec{e}_1 > \ \vec{e}_1+ < \vec{r}, \vec{e}_2 > \ \vec{e}_2+ < \vec{r}, \vec{e}_3 > \ \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} < \vec{r}, \vec{e}_i > \ \vec{e}_i.}$$

Järelikult ristreeperi (ristkoordinaatide) korral vektori $\vec{r}$ koordinaadid avalduvad järgmiselt:

$$x =< \vec{r}, \vec{e}_1 >, y =< \vec{r}, \vec{e}_2 >, z =< \vec{r}, \vec{e}_3 > .$$

Eeldame, et $\vec{c} \neq \vec{0}$. Võtame kaks vektorit $\vec{d}, \vec{f}$ nii, et $\vec{d} \perp \vec{c}$, $\vec{f} \perp \vec{c}$, $|\vec{d}| \neq 0$, $|\vec{f}| \neq 0$.
Vektorid $\vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$ on mittekomplanaarsed, järelikult suvalise vektori korral

$$\vec{a} = \frac{1}{|\vec{c}|} pr_{\vec{c}} \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{|\vec{d}|} pr_{\vec{d}} \vec{a} \cdot \vec{d} + \frac{1}{|\vec{f}|} pr_{\vec{f}} \vec{a} \cdot \vec{f}.$$

Ristprojektsiooni korral kehtib

$$\frac{1}{|\vec{c}|} pr_{\vec{c}} \vec{a} = \frac{1}{|\vec{c}|} |\vec{a}| \cos \angle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Järelikult vektori $\vec{a}$ esimene koordinaat on

$$x_1 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori $\alpha \cdot \vec{a}$ esimene koordinaat on

$$\alpha \cdot x_1 = \frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Analoogiliselt vektori $\beta \cdot \vec{b}$ esimene koordinaat on

$$\beta \cdot \frac{\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{\ldots}$$

Analoogiliselt vektori $\beta \cdot \vec{b}$ esimene koordinaat on

$$\frac{\beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ esimene koordinaat on summa

$$\frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2} + \frac{\beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Vektori $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ esimese koordinaadi võime arvutada

$$\frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle}{|\vec{c}|^2}$$

Seega

$$\frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle}{\cancel{|\vec{c}|^2}} = \frac{\alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle}{\cancel{|\vec{c}|^2}} + \frac{\beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle}{\cancel{|\vec{c}|^2}}$$

Olgu ruumis antud ristreeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, kus $(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2$ on vektorite ristkoordinaadid.

Teoreem

Vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ skalaarkorrutis on võrdne koordinaatide korrutiste summaga, kus summa esimene liidetav on esimeste koordinaatide korrutis, teine liidetav on teiste koordinaatide korrutis ja kolmas liidetav on kolmandate koordinaatide korrutis, st

$$\boxed{< \vec{r}_1, \vec{r}_2 >= x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2}.$$

Tõestus. Kehtib

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \ \Rightarrow \ \vec{r}_1 = x_1\, \vec{e}_1 + y_1\, \vec{e}_2 + z_1\, \vec{e}_3.$$

Seega kasutades skalaarkorrutise lineaarsust leiame

$$\begin{aligned} < \vec{r}_1, \vec{r}_2 > &= < x_1\, \vec{e}_1 + y_1\, \vec{e}_2 + z_1\, \vec{e}_3, \vec{r}_2 > \\ &= x_1 \ < \vec{r}_2, \vec{e}_1 > + y_1 \ < \vec{r}_2, \vec{e}_2 > + z_1 \ < \vec{r}_2, \vec{e}_3 > . \end{aligned}$$

Eespool tõestatud valemist järeldub

$x_2 =< \vec{r}_2, \vec{e}_1 >, y_2 =< \vec{r}_2, \vec{e}_2 >, z_2 =< \vec{r}_2, \vec{e}_3 >.$

Tõestatud teoreemist järeldub, et ristkoordinaatides vektori $\vec{r} = (x, y, z)$ pikkus on võrdne

$$|\vec{r}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ vektori pikkus.}$$

Kui $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis kahe vektori vahelise nurga koosinuse arvutame kasutades valemit

$$\cos \angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{< \vec{r}_1, \vec{r}_2 >}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Kui $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ on ruumi punktid, siis kauguse punktide vahel arvutame järgmiselt

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Juhin tähelepanu, et antud valem kehtib ainult ristkoordinaatides.

Eksami küsimused

1. Skalaarkorrutise definitsioon ja omadused. Baasivektorite skalaarkorrutised. Kroneckeri sümbol. Vektori ristkoordinaatide arvutamise valem skalaarkorrutise abil.
2. Teoreem (vektorite skalaarkorrutise valem ristkoordinaatides). Vektori pikkuse valem, kahe vektori vahelise nurga koosinuse valem, kahe punkti vahelise kauguse valem.

Eksami ülesanded

1. On antud kolm ühikvektorit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, mis rahuldavad tingimust $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Leida
$$< \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{b}, \vec{c} > + < \vec{c}, \vec{a} > .$$
2. Olgu a, b reaalarvud. Kui $a\,b = 0$, siis sellest kohe järeldub, et vähemalt üks arv arvudest a, b on null. Kas samasugune omadus kehtib vektorite skalaarkorrutise korral? Teiste sõnadega, kui $\vec{a}, \vec{b}$ on vektorid ja $< \vec{a}, \vec{b} >= 0$, kas sellest järeldub, et vähemalt üks vektoritest on nullvektor?
3. Kehtib $< \vec{a}, \vec{c} >=< \vec{b}, \vec{c} >$, kus $\vec{c} \neq \vec{0}$. Kas sellest võrdusest järeldub, et $\vec{a} = \vec{b}$? Vastus peab olema põhjendatud.
4. On antud kaks vektorit $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (ristreeper). Lihtsustada summa
$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \delta_{ij}\; x_i y_j .$$