Analüütiline geomeetria

V loeng. Vektorite segakorrutis.

Sügissemester 2016

Definitsioon

Olgu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ruumi vektorid. Vektorite segakorrutiseks (`vector triple product`) nimetatakse reaalarvu, mida tähistatakse $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ abil, ja mis antakse valemiga

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = < \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} > .$$

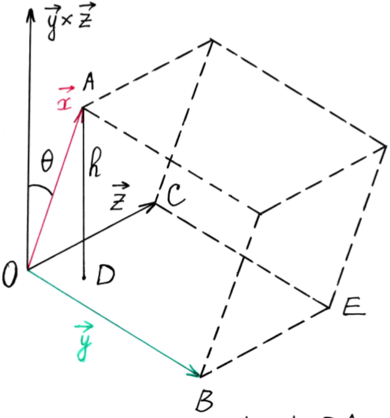
Teoreem

Mittekomplanaarsete vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ segakorrutise $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ absoluutväärtus on võrdne vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga

$$|(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})| = V.$$

Vektorite segakorrutis on positiivne, kui $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on parema käe kolmik ja negatiivne, kui vasaku käe kolmik.

Tõestus. Rööptahuka ruumala V võrdub rööptahuka põhja pindala ja kõrguse korrutisega, st $V = S_{OBEC} \cdot h$ (vt joonis).
Teame, et rööpküliku pindala on võrdne vektorkorrutise pikkusega, st $S_{OBEC} = |\vec{y} \times \vec{z}|$. Joonisel näeme, et $h = |\vec{x}| \, |\cos \theta|$, kus θ on nurk vektori $\vec{x}$ ja vektorkorrutise $\vec{y} \times \vec{z}$ vahel.



$V = S_{OBEC}\cdot h$, $h = |DA|$, DA on rööp-tahuka kõrgus tippust A, $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y}\times\vec{z})$,

$h = |\vec{x}|\cdot\cos\theta$, $S_{OBEC} = |\vec{y}\times\vec{z}|$,

$V = S_{OBEC}\cdot h = |\vec{y}\times\vec{z}|\cdot|\vec{x}|\cdot|\cos\theta| = |\langle\vec{x}, \vec{y}\times\vec{z}\rangle|$

Seega $V = |\vec{x}|\,|\vec{y}\times\vec{z}|\,|\cos\theta| = |<\vec{x},\vec{y}\times\vec{z}>| = |(\vec{x},\vec{y},\vec{z})|$.
Vektoritele ehitatud tetraeedri ruumala (vt joonis) on $V = \frac{1}{6}|(\vec{x},\vec{y},\vec{z})|$ ja prisma ruumala on $V = \frac{1}{2}|(\vec{x},\vec{y},\vec{z})|$.

Teoreem

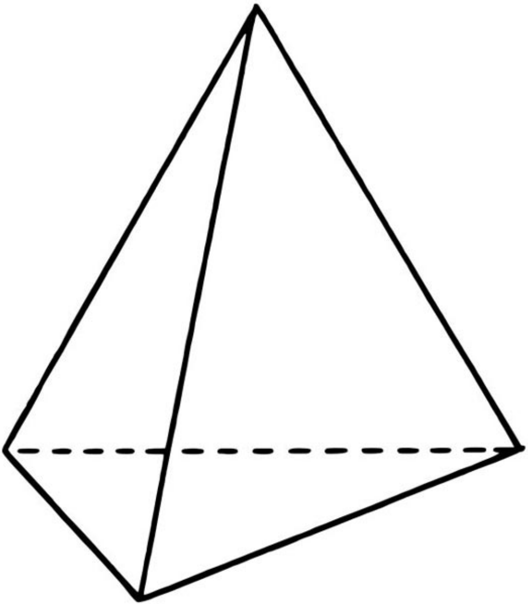
Vektorite $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ segakorrutis võrdub nulliga parajasti siis, kui vektorid on komplanaarsed.

Tõestus. Olgu $\theta = \angle(\vec{x},\vec{y}\times\vec{z}), \phi = \angle(\vec{y},\vec{z})$. Tuletame meelde, et kehtib väide: kolm vektorit on komplanaarsed, kui vähemalt kaks nendest on kollineaarsed.

Tarvilikus. Olgu $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = 0$. Seega $|\vec{x}||\vec{y}\times\vec{z}|\,\cos\theta = 0$. Siit järeldub, et kas 1) $|\vec{x}| = 0$, või 2) $|\vec{y}\times\vec{z}| = 0$, või 3) $\cos\theta = 0$. Esimese ja teise võimaluse korral vektorid on komplanaarsed, kuna kaks nendest on kollineaarsed. Kui $\cos\theta = 0$, siis θ on täisnurk, ja $\vec{x}\perp\vec{y}\times\vec{z}$, seega vektorid on kollineaarsed.

Piisavus. Analoogiliselt.

Järeldus. Kui segakorrutises vähemalt kaks vektorit on kollineaarsed (**võrdsed**), siis segakorrutis võrdub nulliga.



Segakorrutisel on järgmised omadused:

1. Suvaliste vektorite korral kehtib

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (\vec{y},\vec{z},\vec{x}) = (\vec{z},\vec{x},\vec{y}) = -(\vec{y},\vec{x},\vec{z}) = -(\vec{x},\vec{z},\vec{y}) = -(\vec{z},\vec{y},\vec{x}).$$

   Tõepoolest segakorrutise absoluutväärtus on võrdne rööptahuka ruumalaga, järelikult ta ei sõltu vektorite järejestusest, st kui vektorid vektorkorrutises on ümber paigutatud, siis segakorrutise absoluutväärtus ei muutu. Nüüd märgime, et vektorite tsükliline permutatsioon ei muuda kolmiku $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ orientatsiooni, ja mittetsükliline permutatsioon muudab orientatsiooni.

2. Vektorkorrutis on lineaarne, st

$$(\alpha\,\vec{x}_1 + \beta\,\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}) + \beta\,(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}),$$

   kus α, β on suvalised reaalarvud.

Nüüd eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Teoreem

Olgu antud kolm vektorit

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= x_1\,\vec{e}_1 + y_1\,\vec{e}_2 + z_1\,\vec{e}_3, \\ \vec{a}_2 &= x_2\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + z_2\,\vec{e}_3, \\ \vec{a}_3 &= x_3\,\vec{e}_1 + y_3\,\vec{e}_2 + z_3\,\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Vektorite segakorrutis võrdub järgmise 3-ndat järku determinandiga

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Alustame kolme vektori segakorrutise arvutamisest. Nüüd leiame $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Kehtib $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$. Järelikult $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = <\vec{e}_1, \vec{e}_1> = 1$.

$$(x_1\cdot\vec{e}_1 + y_1\cdot\vec{e}_2 + z_1\cdot\vec{e}_3,\ x_2\cdot\vec{e}_1 + y_2\cdot\vec{e}_2 + z_2\cdot\vec{e}_3,\ x_3\cdot\vec{e}_1 + y_3\cdot\vec{e}_2 + z_3\cdot\vec{e}_3) =$$

$$= x_1 y_2 z_3 (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + y_1 z_2 x_3 \cdot (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) + z_1 x_2 y_3 \cdot$$

$$\cdot (\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) + z_1 y_2 x_3 \cdot (\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) + y_1 x_2 z_3 \cdot (\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) +$$

$$+ x_1 z_2 y_3 \cdot (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) =$$

$$= (x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 -$$

$$- x_1 y_3 z_2)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

$$\boxed{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).}$$

Näide

Tetraeedri tipud asuvad punktides koordinaatidega $A(2;1;-1), A(3;0;2), C(5;1;1), D(0;-1;3)$. Leida tetraeedri tipu C kaugus põhjast ABD.

Lahendus. Kaugus on võrdne tetraeedri või vastava rööptahuka kõrgusega tipust C rööptahuka põhjale ABD. Tähistame kõrgust h. h leidmiseks kasutame valemit $h = \frac{V}{S}$, kus S on (vektoritele $\vec{AB}, \vec{AD}$ ehitatud) rööpküliku pindala. Seega

$$h = \frac{|(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC})|}{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}.$$

Arvutame $\vec{AC} = (3;0;2), \vec{AB} = (1;-1;3), \vec{AD} = (-2;-2;4)$, ja

$$(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad V = |-2| = 2.$$

Analoogiliselt

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}) = (2; -10; -4),$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$$

Kaugus on võrdne $h = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Teoreem

Kolm vektorit on komplanaarsed parajasti sii, kui vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinant (esimese rea elemendid on esimese vektori koordinaadid, teise rea elemenid on teise vektori koordinaadid ja kolmanda rea elemendid on kolmanda vektori koordinaadid) võrdub nulliga.

Vektoralgebra tähtsad samasused:

1. Jacobi samasus

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0},}$$

2. Lagrange'i samasus

$$<\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}>=\begin{vmatrix} <\vec{a},\vec{c}> & <\vec{a},\vec{d}> \\ <\vec{b},\vec{c}> & <\vec{b},\vec{d}> \end{vmatrix}.$$

3. $$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(<\vec{a},\vec{b}>)^2. \qquad (1)$$

Lagrange'i samasuse tõestus:

$$\begin{aligned} <\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d}> \quad &= \quad (\vec{a}\times\vec{b},\vec{c},\vec{d}) \\ &= (\vec{d},\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) \\ &=<\vec{d},(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}> \\ &=<\vec{d},<\vec{a},\vec{c}>\ \vec{b}-<\vec{b},\vec{c}>\ \vec{a}> \\ &=<\vec{a},\vec{c}><\vec{b},\vec{d}>-<\vec{b},\vec{c}><\vec{a},\vec{d}> \\ &=\begin{vmatrix} <\vec{a},\vec{c}> & <\vec{a},\vec{d}> \\ <\vec{b},\vec{c}> & <\vec{b},\vec{d}> \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kui viimane samasus (1) on kirjutatud kujul
$(<\vec{a},\vec{b}>)^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}\times\vec{b}|^2$, siis sellest järeldub võrratus

$$|<\vec{a},\vec{b}>| \leq |\vec{a}|\ |\vec{b}|,$$

mis kannab nime Cauchy-Schwarz'i võrratus.

Ristreeperi baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ skalaarkorrutiste valem on

$$< \vec{e}_i, \vec{e}_j >= \delta_{ij},$$

kus δ_{ij} on Kroneckeri sümbol. Kas on võimalik ristreeperi baasivektorite vektorkorrutiste tabelit kirjutada sarnasel kompaktsel kujul? Osutub, et see on võimalik ja selleks kasutatakse Levi-Civita sümbolit ε_{ijk}, mille definitsioon on järgmine

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (i,j,k) \text{ on } (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2), \\ -1, & \text{kui } (i,j,k) \text{ on } (3,2,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2), \\ 0, & \text{kui vähemalt kaks indeksit on võrdsed.} \end{cases}$$

Ristreeperi baasivektorite vektorkorrutiste tabel on antud järgmise valemiga

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_k.$$

Täiendav materjal: kvaternioonid ja vektoralgebra

Hulka $\mathbb{K}$ kahe tehtega (liitmine "$+$" ja korrutamine "$\cdot$") nimetatakse korpuseks, kui

- $\mathbb{K}$ on liitmise suhtes Abeli rühm,
- $\mathbb{K} - \{0\}$ on korrutamise suhtes Abeli rühm,
- distributiivsus $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

ratsionaalarvude korpus $\mathbb{Q}$

$\downarrow$

reaalarvude korpus $\mathbb{R}$

$\downarrow$

kompleksarvude korpus $\mathbb{C}$

$\downarrow$

korpus ?

Kvaternioonid

Uute arvude konstrueerimiseks lisame arvule $\mathbf{1}$ **kolm** sümbolit i, j, k. Defineerime, et uus arv q (nimetame kvaterniooniks) on ühiku $\mathbf{1}$ ja sümbolite i, j, k lineaarkombinatsioon reaalarvuliste kordajatega, st

$$q = x_0\,\mathbf{1} + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k.$$

Kvaternioonide korrutustabelit määrame järgmiselt:

	$\mathbf{1}$	i	j	k
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	i	j	k
i	i	$-\mathbf{1}$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-\mathbf{1}$	i
k	k	j	$-i$	$-\mathbf{1}$

Kui $x_0 = 0$ kvaterniooni nimetatakse puhtimaginaarseks kvaterniooniks.

Seos vektoralgebraga

Kvaternioonid olid konstrueeritud, kirjeldatud ja uuritud W.R. Hamiltoni (inglise - iiri matemaatik) töödes (1843).
Kompleksarvud saab samastada tasandi punktidega, seega kompleksarvude korrutamine tekitab tasandi punktide korrutamist.
Hamilton arvas, et ka kolmemõõtmelise ruumi punktid peavad moodustama algebralise struktuuri ja ta püüdis leida vastavat struktuuri, kus oleks määratud kolmemõõtmelise ruumi puntkide liitmine ja korrutamine. Kõik Hamiltoni katsed leida kolmemõõtmelise ruumi punktide korrutamist ebaõnnestusid. Selle probleemi lahendus tuli siis, kui W.R. Hamilton taipas, et kasutada tuleb mitte kolmemõõtmelist ruumi, vaid **neljamõõtmelist ruumi**. Mainime, et kvaternioonid moodustavad neljamõõtmelise ruumi, kus baasiks on $\{\mathbf{1}, i, j, k\}$, ja puhtimaginaarsed kvaternioonid moodustavad selle ruumi kolmemõõtmelise alamruumi.

Kvaternioonid ja geomeetria

Oletame, et ruumis on antud ristreeper. Kvaternioonide moodustajaid i, j, k samastame selle reeperi **ristbaasiga** $\vec{e}_1 \equiv i, \vec{e}_2 \equiv j, \vec{e}_3 \equiv k$. Seega i, j, k on nii kvaternioonide moodustajad, kui ka ruumi ristbaasi vektorid. Seega lineaarkombinatsiooni

$$q = x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k$$

on võimalik vaadelda nii puhtimaginaarse kvaternioonina, kui ka kolmemõõtmelise ruumi vektorina.
Järelikult selliste lineaarkombinatsioonide jaoks meil on **neli tehet**: liitmine ja korrutamine reaalarvudega (siin ei ole vahet, kas q on vektor või kvaternioon), kvaternioonide korrutamine $(q \cdot q')$, vektorite skalaarkorruttamine $(< q, q' >)$ ja vektorkorrutamine $(q \times q')$. Kui

$$q = x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k,\;\; q' = x'_1\, i + x'_2\, j + x'_3\, k,$$

on puhtimaginaarsed kvaternioonid, siis kehtib

$$\boxed{q \cdot q' = - < q, q' > \mathbf{1} + q \times q'.}$$

Kaaskvaterniooni defineeritakse valemi $\bar{q} = x_0\,\mathbf{1} - x_1\,i - x_2\,j - x_3\,k$ abil. Kehtib

$$|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

kus $|q|$ nimetatakse kvaterniooni mooduliks. Puhtimaginaarse kvaterniooni juhul

$$|q|^2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

ja kvaterniooni moodul on võrdne vastava vektori pikkusega. Kehtivad valemid

$$|q_1 \cdot q_2| = |q_1||q_2|, \quad |q^{-1}| = |q|^{-1}, \quad q \neq \mathbf{0}.$$

Olgu $q_1 \neq \mathbf{0}$ kvaternioon. Uurime kvaternioonide teisendust

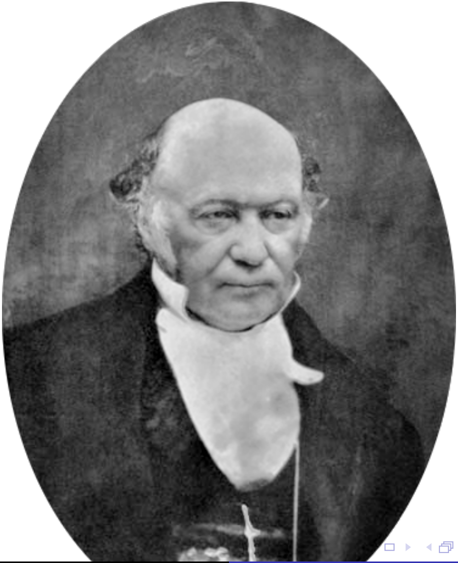
$$q \to q_1^{-1} \cdot q \cdot q_1. \tag{2}$$

On võimalik näidata, et teisendus on lineaarteisendus ja kvaterniooni moodul ei muutu sellise teisenduse korral (moodul on teisenduse invariant). Tõepoolest kasutame ülalpool kirjutatud omadusi

$$|q_1^{-1} \cdot q \cdot q_1| = |q_1^{-1}|\,|q|\,|q_1| = |q|.$$

Erijuhul, kui q, q_1 on puhtimaginaarsed kvaternioonid, teisendus (2) tekitab kolmemõõtmelise vektorruumi lineaarteisendust sellise omadusega, et vektori pikkus ei muutu. Järelikult teisendus on ruumi pööre! See näitab, et kvaternioonid saab kasutada kolmemõõtmelise ruumi pöörete kirjeldamiseks, ja see on põhjus, miks kvaternioonid leiavad kasutamist mehaanikas ja arvutiteaduses (kolmemõõtmeliste objektide pöörlemised arvuti ekraanil).

W. R. Hamilton



Eksami küsimused

1. Segakorrutise definitsioon. Teoreem rööptahuka ruumalast.
2. Teoreem komplanaarsetest vektoritest.
3. Segakorrutise omadused. Teoreem vektorite segakorrutisest, kui on antud vektorite koordinaadid.
4. Lagrange'i samasus, Levi-Civita sümbol ja baasivektorite vektorkorrutiste valem Levi-Civita sümboli abil.