Analüütiline geomeetria

VI loeng. Sirge võrrandid.

Sügissemester 2016

Joonte ja pindade võrrandid

Analüütilise geomeetria selles osas vaadeldakse jooni (tasandil ja ruumis) ja pindu (ruumis). Joonte ja pindade uurimiseks kasutame koordinaatide meetodit, st eeldame, et tasandil või ruumis on antud koordinaadisüsteem (ristkoordinaadid, polaarkoordinaadid, silindrilised koordinaadid või sfäärilised koordinaadid) ning joon või pind on määratud võrrandiga. Sellise lähenemise korral joone või pinna uurimine taandub sellele vastava võrrandi uurimisele. Mainime, et joone või pinna võrrand sõltub koordinaadisüsteemist, kui toimub üleminek ühelt koordinaadisüsteemilt teisele, siis joone või pinna võrrand muutub. See näitab, et geomeetrias joon või pind on fundamentaalne objekt ja selle võrrand on abivahend, mis sõltub koordinaadisüsteemist. Matemaatilises analüüsis kasutatakse teist lähenemist, kus uurimise põhiobjektiks on funktsioon ja selle graafik (joon või pind) on abivahend.

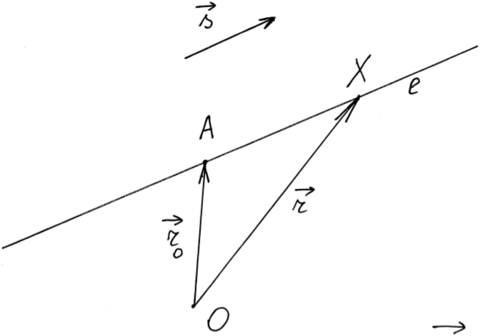
Sirge parameetriline vektorvõrrand

Eukleidilises ruumis kehtib aksioom:

Aksioom

Kui A, B on eukleidilise ruumi E erinevad punktid, siis leidub üks ja ainult üks sirge l, mis läbib punkte A, B.

Seega meil on üks-ühene vastavus $(A, B) \leftrightarrow$ sirge l. Olgu A, B eukleidilise ruumi erinevad punktid. Sellega on üheselt määratud sirge l. Moodustame vektori $\vec{s} = \vec{AB}$. On ilmne, et $\vec{s} \neq \vec{0}$ (punktid A, B on erinevad) ja vektor $\vec{s}$ määrab sirge l sihti. Tuletame meelde, et vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge l sihivektoriks. Olgu ruumis E antud reeper $\mathfrak{R}$ alguspunktiga O. Fikseerime sirge l punkti A ja olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor, st $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$. Olgu X sirge l suvaline punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor (vt joonis).



$\vec{s}$ on sirge l sihivektor. $\vec{r}-\vec{r}_0=\overrightarrow{AX}$, seega $\vec{r}-\vec{r}_0 \parallel \vec{s}$, st $\vec{r}-\vec{r}_0$ ja $\vec{s}$ on kollineaarsed vektorid. Järelikult leidub reaalarv t nii, et $\vec{r}-\vec{r}_0=t\cdot\vec{s}$. Sirge parameetriline vektorvõrrand on

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{s}}$$

Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Siit järeldub (kollineaarsete vektorite piisav ja tarvilik tingimus)

$$\boxed{\vec{r} - \vec{r}_0 = t\,\vec{s},} \tag{1}$$

kus t on reaalarv.

Definitsioon

Võrrandit (1) nimetatakse sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks, muutujat t nimetatakse sirge parameetriks.

Mainime, et võrrandit (1) sageli kirjutatakse kujul

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}.$$

Olgu $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi reeper ja

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \ \ \vec{r} = (x, y, z), \ \ \vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$$

vektorite $\vec{r}_0, \vec{r}, \vec{s}$ koordinaadid.

Sirge parameetrilise vektorvõrrandi kuju koordinaatides on järgmine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \\ z &= z_0 + s_3\, t, \end{aligned}$$

Antud võrrandit nimetatakse sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides. Kui eukleidiline ruum E on tasand ja on antud tasandi reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, siis tasandilise sirge parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus (x, y) on sirge muutuva punkti koordinaadid, (x_0, y_0) on sirge fikseeritud punkti (sirge alguspunkti) koordinaadid, (s_1, s_2) on sirge sihivektori koordinaadid ja t on parameeter, $-\infty < t < +\infty$.

Definitsioon

Tasandilise joone parameetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\begin{aligned} x &= \xi(t), \\ y &= \eta(t), \end{aligned}$$

kus $\xi(t), \eta(t)$ on t funktsioonid, $a \leq t \leq b$, ja muutujat t nimetatakse parameetriks (joone parameetriline võrrand). Ruumilise joone parameetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\begin{aligned} x &= \xi(t), \\ y &= \eta(t), \\ z &= \chi(t), \end{aligned}$$

kus $\xi(t), \eta(t), \chi(t)$ on t funktsioonid, $a \leq t \leq b$.

Joone parameetrilist võrrandit sageli kirjutatakse kujul $\vec{r}(t) = (\xi(t), \eta(t), \chi(t))$, kus $\vec{r}(t)$ on sirge punkti kohavektor. Funktsiooni $\vec{r}(t)$ nimetatakse vektorväärtustega funktsiooniks.

Kui tasandilise joone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1\, t, \\ y &= y_0 + s_2\, t, \end{aligned}$$

kus $s_1 \neq 0$, siis esimesest võrrandist leiame

$$t = \frac{x - x_0}{s_1}.$$

Järelikult

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}\,(x - x_0),$$

või

$$\boxed{y = k\, x + b,}$$

kus $k = \frac{s_2}{s_1}, b = y_0 - \frac{s_2\, x_0}{s_1}$. Kordajat k nimetatakse tasandilise sirge tõusuks. Tasandilise sirge kanooniliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}.}$$

Tasandi sirge on üheselt määratud, kui on antud sirge punkt A ja sirge normaalvektor $\vec{N}$, st sirge on risti vektori $\vec{N}$ poolt (kui sihivektori poolt) tekitatud sirgega. Olgu antud tasandi reeper $\mathfrak{R}$ ja $\vec{r}_0$ on punkti A kohavektor, $\vec{r}$ on sirge muutuva (suvalise) punkti kohavektor ning $\vec{s}$ on sirge sihivektor. Kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$, $\vec{s} \perp \vec{N}$, seega $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$ ja

$$< \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} >= 0.$$

Kirjutame kujul $< \vec{r}, \vec{N} >=< \vec{r}_0, \vec{N} >$ ja tähistades $< \vec{r}_0, \vec{N} >= -C$, saame $\boxed{< \vec{r}, \vec{N} >= -C}$. Kui $\vec{r} = (x, y), \vec{N} = (A, B)$, siis eespool kirjutatud võrrandi kuju koordinaatides on

$$A\,x + B\,y = -C \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\,x + B\,y + C = 0.}$$

Antud võrrandit nimetatakse tasandilise sirge üldvõrrandiks. Pöörame tähelepanu sellele, et üldvõrrandis kordajad A, B on sirge **normaalvektori koordinaadid.**

Definitsioon

Tasandi sirge ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$F(x, y) = c,$$

kus $F(x, y)$ on kahemuutuja funktsioon (diferentseeruv) ja c on reaalarv. Kui koordinaatide x, y suhtes $F(x, y)$ on n-astme polünoom, siis ilmutamata võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joont nimetatakse n-järku algebraliseks jooneks. Erijuhul, kui $n = 2$, st $F(x, y)$ on teise astme polünoom, joont nimetatakse teist järku jooneks. Kui $F(x, y)$ on esimese astme polünoom (lineaarne), siis võrrandiga $F(x, y) = c$ määratud joon on sirge.

Näide

Ringjoon raadiusega R ja keskpunktiga punktis $A(x_0, y_0)$. Ringjoone ilmutamata võrrand on

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

seega antud juhul $F(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, $c = R^2$ ja $F(x, y)$ on teise astme polünoom. Järelikult ringjoon on teist järku joon. Ringjoone parameetriline võrrand on

$$\begin{aligned} x &= R\cos t + x_0, \\ y &= R\sin t + y_0, \end{aligned}$$

kus $0 \leq t \leq 2\pi$.

Olgu tasandil antud polaarkoordinaatide süsteem r, ϕ.

Definitsioon

Tasandi joone võrrandiks polaarkoordinaatides nimetatakse võrrandit

$$r = r(\phi),$$

kus $r(\phi)$ on polaarnurga ϕ funktsioon ja $a \leq \phi \leq b$.

Olgu antud sirge parameetriline võrrand

$$\boxed{\begin{cases} x = & x_0 + t\,s_1, \\ y = & y_0 + t\,s_2, \\ z = & z_0 + t\,s_3 \end{cases}} \qquad (2)$$

Oletame, et $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 \neq 0$ ja avaldame parameetrit t

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Võrrandit

$$\boxed{\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3},}$$

nimetatakse ruumilise sirge kanooniliseks võrrandiks.

Sihivektor $\vec{s}$ on nullvektorist erinev vektor, seega tema kõik koordinaadid korraga ei saa olla nullid, kuid mõned neist võivad olla nullid. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui $s_3 = 0$, kirjutame

$$\frac{x-x_0}{s_1} = \frac{y-y_0}{s_2} = \frac{z-z_0}{0}.$$

See tähendab, et ülalpool kirjutatud võrrand on ekvivalentne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{s_1} = & \frac{y-y_0}{s_2}, \\ z-z_0 = & 0 \end{cases} \tag{3}$$

Näide

Näide

On antud kolmnurga tipud

$$A(3,-1,-1), B(1,2,-7), C(-5,14,-3).$$

Koostage sisenurga $\angle B$ nurgapoolitaja kanooniline võrrand.

Lahendus. Lahenduse idee seisneb selles, et rombi diagonaalid on sisenurkade nurgapoolitajad. Moodustame kaks vektorit $\vec{BA}, \vec{BC}$, nende koordinaadid on

$$\vec{a} = \vec{BA} = (2,-3,6), \quad \vec{b} = \vec{BC} = (-6,12,4).$$

Arvutame vektorite pikkused

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7, \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+144+16} = \sqrt{196} = 14$$

Näide

Näeme, et $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$. Kuidas leida vektoriga $\vec{a}$ samasuunalist vektorit ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunalist vektorit nii, et pikkused oleksid võrdsed?

Vastus: vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{a}_0$ ja vektoriga $\vec{b}$ samasuunaline ühikvektor $\vec{b}_0$!

Arvutame

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}), \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (-\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7})$$

Seega

$$\vec{c} = \vec{a}_0 + \vec{b}_0 = (-\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{8}{7}).$$

See on nurgapoolitaja sihivektor!

Näide

Märgime, et nurgapoolitaja sihivektoriks sobib iga vektor $\lambda\,\vec{c}$, kus $\lambda \neq 0$ on mingi reaalarv ($\vec{c}\,||\,\lambda\,\vec{c}$). Seega võtame $\vec{s} = 7\,\vec{c} = (-1, 3, 8)$. Vastus:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}.$$

Punkti kaugus sirgeni

On antud sirge l ja ruumi punkt P. Kuidas leida punkti P kaugust d sirgeni l? Oletame, et ruumis on antud reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, sirge sihivektor on vektor $\vec{s}$, sirge läbib punkti A. Kauguse d leidmiseks kasutame vektorkorrutise rööpküliku pindala omadust. Vaatleme rööpkülikut, mis on ehitatud vektoritele $\vec{s}, \vec{AP}$ (vt joonis). On ilmne, et kaugus d on võrdne selle rööpküliku kõrgusega, seega

$$d = \frac{|\vec{s} \times \vec{AP}|}{|\vec{s}|}. \tag{4}$$

Vektorit $\vec{AP}$ saab avaldada punktide A, P kohavektorite $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{r} = \vec{OP}$ kaudu järgmiselt $\vec{AP} = \vec{r} - \vec{a}$. Asendades valemisse (4) saame

$$\boxed{d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})|}{|\vec{s}|}.}$$

Näide

Näide

On antud sirge kanooniline v orrand

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2},$$

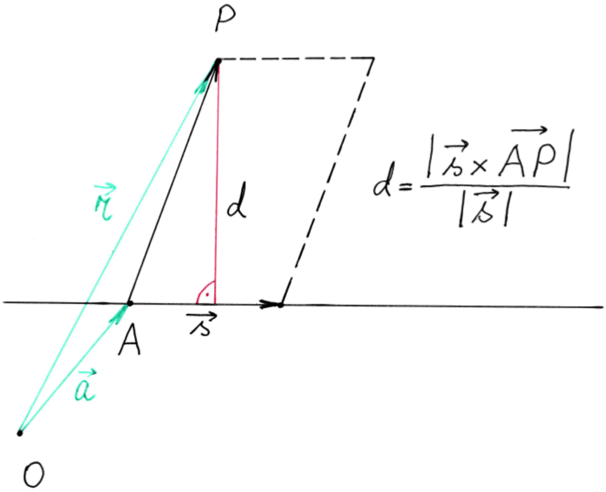
ja punkt $P(2,3,-1)$. Leida punkti P kaugus sirgeni.

Lahendus: $\vec{s} = (3,2,-2),\ A\,(5,0,-25),\ \vec{AP} = \vec{r} - \vec{a} = (-3,3,24)$.
Seega

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \right),$$

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a}) = (54,-66,15) = 3\,(18,-22,5),\ |\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{a})| = 3\sqrt{833},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{17},\ d = \frac{3\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = 3\sqrt{49} = 21.$$



$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{s}|}$$

Eksami küsimused

1. Tasandilise sirge parameetriline vektorvõrrand. Tasandilise sirge parameetriline ja kanooniline võrrand (koordinaatides). Tasandilise joone parameetrilise võrandi ja võrrand polaarkoordinaatides. Tasandilise sirge üldvõrrand.
2. Ruumilise sirge parameetriline vektorvõrrand. Ruumilise sirge parameetriline ja kanooniline võrrand (koordinaatides). Punkti kaugus sirgeni.

Eksami ülesanded

1. On antud sirgete l_1, l_2 parameetrilised vektorvõrrandid $\vec{r} = \vec{r}_1 + t\,\vec{s}_1$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + t\,\vec{s}_2$. Leida tarvilik ja piisav tingimus selleks, et sirged l_1, l_2 on lõikuvad sirged (st sirgetel on ainult üks ühine punkt, st lõikepunkt).
2. On antud sirge l parameetriline vektorvõrrand $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{s}$. On antud punkt P ja selle kohavektor $\vec{r}_P$. Olgu punkt M punkti P ristprojektsioon sirgele l. Leida punkti M kohavektor $\vec{r}_M$.