Analüütiline geomeetria

VIII loeng. Üleminek ühelt reeperilt teisele. Baasiteisenduse maatriks. Koordinaatide teisendused.

Sügissemester 2016

Reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ määrab ruumi E^3 koordinaadisüsteemi järgmiselt: olgu P ruumi mingi punkt, selle kohavektor on $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, iga vektor on esitatav kujul $\vec{r} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$, kus reaalarvud x, y, z on üheselt määratud. Kordajaid x, y, z nimetatakse nii punkti P, kui ka vektori $\vec{r}$ koordinaatideks. Kirjutame $P\,(x, y, z)$ ja $\vec{r} = (x, y, z)$.

Reeper $\mathfrak{R}$ peab rahuldama tingimust: baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on mittekomplanaarsed ja see on ainus kitsendus reeperi moodustamiseks. Seega võime moodustada teise reeperi $\mathfrak{R}' = \{O'; \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$. Teine reeper tekitab teise koordinaadisüsteemi kolmemõõtmelises ruumis. Olgu x', y', z' punkti P koordinaadis teises koordinaadisüsteemis, st $P(x', y', z')$ ja $\vec{r}\,' = (x', y', z')$.

Käesoleva teema eesmärk on leida kuidas punkti koordinaadid ühes koordinaadisüsteemis avalduvad selle punkti koordinaatide teises koordinaadisüsteemis kaudu. Selleks oletame, et reeper $\mathfrak{R}$ on antud. Teine reeper $\mathfrak{R}'$ on täielikult määratud, kui on antud alguspunkti O' koordinaadid (esimeses koordinaadisüsteemis) ja baasivektorite $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ koordinaadid (samuti esimeses koordinaadisüsteemis).

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ ja

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1{}' &= a_{11}\,\vec{e}_1 + a_{21}\,\vec{e}_2 + a_{31}\,\vec{e}_3,\\
\vec{e}_2{}' &= a_{12}\,\vec{e}_1 + a_{22}\,\vec{e}_2 + a_{32}\,\vec{e}_3,\\
\vec{e}_3{}' &= a_{13}\,\vec{e}_1 + a_{23}\,\vec{e}_2 + a_{33}\,\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Moodustame 3-järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Definitsioon

Maatriksit A nimetatakse baasiteisenduse maatriksiks.

Baasiteisenduse maatriks määrab üleminekut ühe reeperi baasilt teise reeperi baasile. Üleminek reeperilt $\mathfrak{R}$ reeperile $\mathfrak{R}'$ on täielikult määratud paariga $(\vec{r}_0, A)$, kus $\vec{r}_0$ on alguspunkti O' kohavektor, st $\vec{r}_0 = (a_1, a_2, a_3)$.

Järgnevas üleminekut reeperilt $\mathfrak{R}$ reeperile $\mathfrak{R}'$ näitame järgmiselt

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{r}_0, A} \mathfrak{R}'.$$

Teoreem

Maatriks A on baasiteisenduse maatriks parajasti siis, kui $\det A \neq 0$. Kui $\det A > 0$, siis reeperi orientatsioon ei muutu (baasiteisenduse maatriks A säilitab ruumi orientatsiooni) ja kui $\det A < 0$, siis reeperi orientatsioon muutub.

Tõestus.
Kehtib valem (V. loeng)

$$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = \det A \, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Definitsioon

3-järku maatriksit A nimetatakse regulaarseks maatriksiks, kui $\det A \neq 0$.

Regulaarsete kolmandat järku maatriksite hulka tähistatakse $\mathrm{GL}\,(3)$.

Seega, kui A on baasiteisenduse maatriks, siis $A \in \mathrm{GL}\,(3)$.

Olgu $\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{r}_0, A} \mathfrak{R}'$. Olgu P ruumi mingi punkt, x, y, z punkti koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}$ ja x', y', z' punkti koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}'$. Leiame, kuidas x, y, z avalduvad x', y', z' kaudu.

Teoreem

Kui x, y, z on punkti koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}$, x', y', z' on punkti koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}'$ ja $\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{r}_0, A} \mathfrak{R}'$, siis

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_1, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_2, \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Tasandi korral

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_1, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_2. \end{aligned}$$

Valemit (1) nimetatakse ruumi punkti koordinaatide teisenemise valemiks üleminekul ühelt reeperilt teisele.

Oletame, et ruumis E on antud kolm reeperit $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}''$ ja

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{0},A} \mathfrak{R}', \quad \mathfrak{R}' \xrightarrow{\vec{0},B} \mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{0},C} \mathfrak{R}''.$$

Juhime tähelepanu sellele, et reeperite alguspunktid ühtivad $O \equiv O' \equiv O''$, st üleminekul ühelt reeperiklt teisele muutuvad ainult baasivektorid. Leiame, kuidas baasiteisenduse maatriks C avaldub baasiteisenduste maatriksite A, B kaudu. Selleks, et oleks lihtsam arvutada, eeldame, et reeperite teisendused toimuvad tasandil. Eespool tõestatud teoreemist järeldub

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= b_{11}x'' + b_{12}y'', \\ y' &= b_{21}x'' + b_{22}y'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x'' + c_{12}y'', \\ y &= c_{21}x'' + c_{22}y''. \end{aligned}$$

Kehtib

$$c_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} \Longrightarrow c_{11} = (a_{11} \;\; a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{11} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B esimese veeru elementidega korrutamise abil. Kehtib

$$c_{12} = a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} \Longrightarrow c_{12} = (a_{11} \;\; a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{12} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B teise veeru elementidega korrutamise abil. Üldiselt, kui maatriksi C element c_{ij} on moodustatud maatriksi A i-nda rea elementide maatriksi B j-nda veeru elementide korrutamise abil, siis maatriksit C nimetatakse maatriksite A, B korrutiseks ja kirjutatakse $C = A \cdot B$.

Teoreem

Kui

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{0},A} \mathfrak{R}', \quad \mathfrak{R}' \xrightarrow{\vec{0},B} \mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{0},C} \mathfrak{R}'',$$

siis $\boxed{C = A \cdot B}$.

Mainime, et maatriksite korrutamine on mittekommutatiivne $A \cdot B \neq B \cdot A$ ja assotsiatiivne $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Nüüd kitsendame reeperite klassi, st eeldame, et diagrammis $\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{r}_0, A} \mathfrak{R}'$ reeperid on ristreeperid. On ilmne, et baasiteisenduse maatriks ei saa enam olla ainult regulaarne maatriks, kuid ta peab rahuldama lisa tingimust. Leiame selle tingimuse. Esiteks esimese reeperi baas $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on ristbaas, st

$$\begin{aligned} <\vec{e}_1, \vec{e}_1> = <\vec{e}_2, \vec{e}_2> = <\vec{e}_3, \vec{e}_3> &= 1, \\ <\vec{e}_1, \vec{e}_2> = <\vec{e}_2, \vec{e}_3> = <\vec{e}_1, \vec{e}_3> &= 0. \end{aligned}$$

Teiseks arvestame, et teise reeperi baas $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ on ka ristbaas

$$\begin{aligned} < \vec{e}_1', \vec{e}_1' > = < \vec{e}_2', \vec{e}_2' > = < \vec{e}_3', \vec{e}_3' > &= 1, \\ < \vec{e}_1', \vec{e}_2' > = < \vec{e}_2', \vec{e}_3' > = < \vec{e}_1', \vec{e}_3' > &= 0. \end{aligned}$$

Kehtib $\vec{e}_1' = a_{11}\ \vec{e}_1 + a_{21}\ \vec{e}_2 + a_{31}\ \vec{e}_3$, järelikult

$$(a_{11})^2 + (a_{21})^2 + (a_{31})^2 = 1. \tag{2}$$

Analoogiliselt

$$(a_{12})^2 + (a_{22})^2 + (a_{32})^2 = 1, \tag{3}$$
$$(a_{13})^2 + (a_{23})^2 + (a_{33})^2 = 1, \tag{4}$$

ja

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \tag{5}$$
$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \tag{6}$$
$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{32} + a_{31}a_{33} = 0. \tag{7}$$

Definitsioon

Maatriksit A nimetatakse ortogonaalseks maatriksiks, kui selle elemendid rahuldavad tingimusi (2) - (7). Teist järku ortogonaalsete maatriksite (tasandi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(2) \subset \mathrm{GL}\,(2)$ ja kolmandat järku ortogonaalsete maatriksite (ruumi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $\mathrm{O}\,(3) \subset \mathrm{GL}\,(3)$.

Uurime teist järku ortogonaalse maatriksi struktuuri. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

baasiteisenduse maatriks. Seega

$$\begin{aligned} (a_{11})^2 + (a_{21})^2 &= 1, \\ (a_{12})^2 + (a_{22})^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Kehtib kas $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ või $a_{11} = 0, a_{22} = 0$. Eeldame $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$. Viimase võrrandi kirjutame kujul

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Tähistame

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = \lambda.$$

Leiame

$$A = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \mp\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \pm\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix}.$$

Lisaks, kui $a_{11} = a_{22} = 0$, on meil veel neli maatriksit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teoreem

Teist järku ortogonaalse maatriksi determinandi absoluutväärtus võrdub arvuga 1, st $|\det A| = 1$.

Definitsioon

Ortogonaalset maatriksit A nimetatakse spetsiaalseks ortogonaalseks maatriksiks, kui $\det A = 1$. Spetsiaalsete ortogonaalsete maatriksite hulka tähistatakse SO (2)

Uurime teist järku spetsiaalse ortogonaalse maatriksi kuju. Eelmise teoreemi tõestusest järeldub, et teist järku spetsiaalse ortogonaalse maatriksi jaoks on kaks võimalust

$$\text{i) } A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix}.$$

Võtame kasutusele uue parammeetri τ, kus $\lambda = \tan\tau$ ja $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$. Kasutades parameetrit τ ja trigonomeetrilist valemit

$$1 + \tan^2\tau = \frac{1}{\cos^2\tau},$$

leiame maatriksite A_1, A_2 kuju

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & -\cos\tau \end{pmatrix}.$$

Geomeetriliselt baasiteisenduse maatriks A_1 määrab tasandi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ pööret ümber reeperi alguspunkti (kui $\vec{r}_0 = \vec{0}$) nurga τ võrra kellaosuti liikumise suuna vastupidises suunas, kui $\tau > 0$ ja kellaosuti liikumise suunas, kui $\tau < 0$ (vt joonis). Parameetri τ määramispiirkond on vahemik $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kuid nüüd võime laiendada parameetri τ määramispiirkonda $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ haarates maatrikseid

$$B_2 \ \ (\tau = \frac{\pi}{2}), \quad B_3(\tau = -\frac{\pi}{2}).$$

On lihtne veenduda, et kõik teist järku spetsiaalsed ortogonaalsed maatriksid (A_1, A_2, B_2, B_3) moodustavad maatriksite üheparameetrilise parve

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\,\pi.$$

Teoreem

Teist järku spetsiaalsed ortogonaalsed maatriksid SO(2) moodustavad ühe parameetrilise parve

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau \le 2\,\pi.$$

Teist järku spetsiaalne ortogonaalne maatriks $A(\tau)$ määrab tasandi reeperi pööret nurga τ võrra.

Täiendav materjal. Defineerime kujutust ψ, mis seab igale kompleksarvule $z = a + i\,b$ vastavusse teist järku maatriksi

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Kujutusel ψ on järgmised omadused:

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1)\cdot\psi(z_2),\ |z| = \mathtt{det}\,\psi(z),\ \psi(\bar z) = (\psi(z))^{\mathtt{T}}.$$

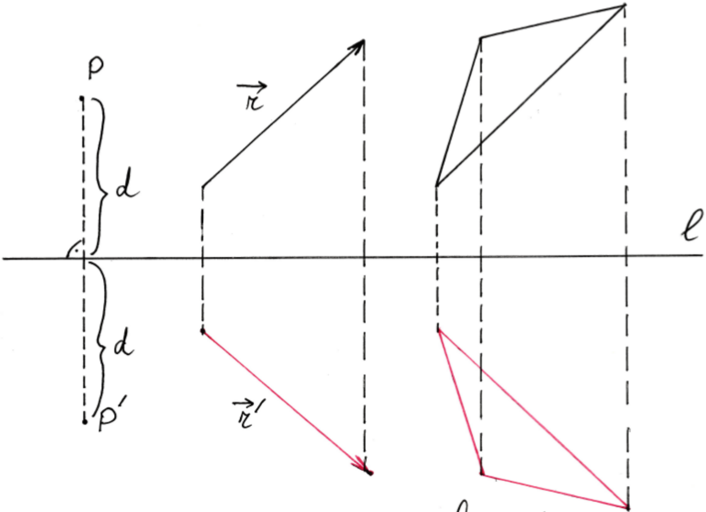
Leidke, millised kompleksarvud kujutuse ψ korral vastavad spetsiaalsetele ortogonaalsetele maatriksitele. Kasutades seda, tõestage

$$A(\tau_1 + \tau_2) = A(\tau_1) \cdot A(\tau_2).$$

Järelikult, koordinaadisüsteemi pöördel ümber alguspunkti nurga τ võrra punkti koordinaadid teisenevad järgmiselt

$$\begin{aligned} x &= \cos\tau\, x' - \sin\tau\, y', \\ y &= \sin\tau\, x' + \cos\tau\, y'. \end{aligned}$$

Ortogonaalsed maatriksid determinandiga -1 on seotud tasandi peegeldustega. Kui tasandil on antud sirge l, siis tasandi peegelduseks nimetatakse kujutust $R : E^2 \to E^2$, mis seab tasandi igale punktile vastavusse sümmeetrilise punkti antud sirge suhtes (vt joonis). On ilmne, et sirge l punktid jäävad paigale (peegelduse püsipunktid) ja peegeldus on tasandi vektorite lineaarteisendus.



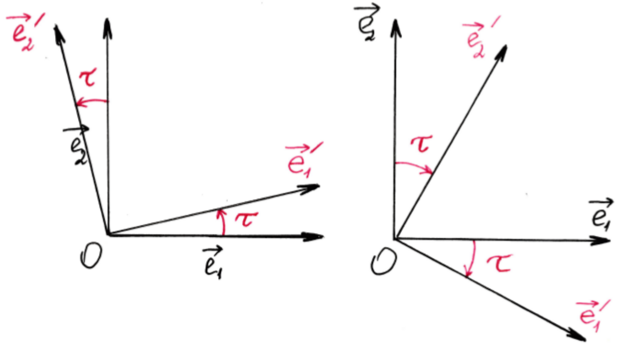
Tasandi peegeldus sirge ℓ suhtes.

Peegeldusel on idempotentsuse omadus, st kui peegeldust rakendada kaks korda järjest, siis tulemuseks on tasandi samasusteisendus $\text{id}_{E^2}(P) = P$, st $R^2 = \text{id}_{E^2}$. Märgime, et maatriks B_1 on idempotentne maatriks, st $B_1^2 = I$, kus I on ühikmaatriks. Maatriks B_1 teisendab reeperit $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ reeperiks $\vec{e}_1' = \vec{e}_2, \vec{e}_2' = \vec{e}_1$ ja see on lähtereeperi peegeldus esimese veerandi nurgapoolitaja suhtes. On võimalik tõestada, et kahe ristreeperi korral (alguspunktid ühtivad, orientatsioonid võivad olla erinevad) ühte ristreeperit saab teisendada teiseks pöörde ja peegelduse kompositsiooni abil.

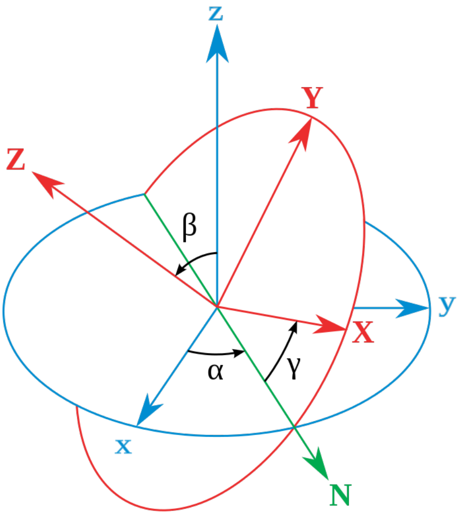
Kolmandat järku ortogonaalsed maatriksid moodustavad kolmeparameetrilise parve (tundmatute arv - sõltumatute tingimuste arv=9-6=3). Kui ruumi baasiteisenduse maatriks on ortogonaalne maatriks determinandiga 1 (kolmandat järku spetsiaalne ortogonaalne maatriks), siis maatriks määrab reeperi pööret ümber alguspunkti. Kui pöördetelg ei ole koordinaattelg, siis reeperi pöörde saab jaotada kolmeks elementaarpöördeks järgmiselt (vt joonis): esimese ristreeperi poolt tekitatud koordinaadisüsteemi teljed on x-telg, y-telg ja z-telg, teise ristreeperi poolt tekitatud koordinaatteljed on X-telg, Y-telg ja olgu N xy-koordinaattasandi ja XY-koordinaattasandi lõikesirge,

1. x, y, z-koordinaatteljestikut pöörame ümber z-telje nurga α võrra nii, et x-telg ühtib N;
2. x, y, z-koordinaatteljestikut pöörame ümber lõikesirge N nurga β võrra nii, et z-telg ühtib Z-teljega;
3. x, y, z-koordinaatteljestikut pöörame ümber Z-telje nurga γ võrra nii, et x-telg ühtib X-teljega.

Nurgad α, β, γ on Euleri nurgad.



Tasandi reeperi pööre



Euleri nurgad

Eksami küsimused

1. Baasiteisenduse maatriks. Teoreem baasiteisenduse maatriksist. Koordinaatide teisenemise valemid.
2. Üleminek ühelt ristreeperilt teisele ristreeperile. Ortogonaalsed maatriksid. Teoreem ortogonaalse maatriksi determinandist.
3. Spetsiaalsed ortogonaalsed maatriksid. Teoreem teist järku spetsiaalse ortogonaalse maatriksi struktuurist.
4. Euleri nurgad.