Analüütiline geomeetria

IX. loeng. **Ellips**

Sügissemester 2016

Tasandilise joone võrrand

Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi ristreeper ja x, y vastavad ristkoordinaadid. Tasandilise joone ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y) = c$. Kui $F(x, y)$ on muutujate x, y algebraline polünoom, siis tasandilist joont võrrandiga $F(x, y) = c$ nimetatakse algebraliseks jooneks. Kui $F(x, y)$ on teise astme polünoom, siis tasandilist joont $F(x, y) = c$ nimetatakse teist järku jooneks. Teise astme kahe muutuja x, y polünoomi üldkuju on

$$F(x, y) = A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F,$$

kus kordajad A, B, C, D, E, F on reaalarvud. Seega tasandilise teist järku joone võrrandi üldkuju on

$$A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2 + 2D\,x + 2E\,y + F = 0.$$

Teist järku joone võrrand

Teist järku joone võrrandi polünoomi võime jaotada kolmeks osaks

$$\begin{array}{ll} A\,x^2 + 2B\,xy + C\,y^2, & \text{võrrandi ruutosa} \\ 2D\,x + 2E\,y, & \text{võrrandi lineaarosa} \\ F, & \text{vabaliige.} \end{array}$$

Moodustame kaks maatriksit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}.$$

Esimest maatriksit nimetatakse teist järku joone võrrandi põhimaatriksiks ja teist maatriksit nimetatakse teist järku joone võrrandi laiendatud maatriksiks.

Ellips

1. Fikseerime tasandil E^2 kaks erinevat punkti F_1, F_2. Olgu $2\,c$ lõigu F_1F_2 pikkus, st
$$c = \frac{1}{2}\,|F_1F_2|,$$
2. fikseerime reaalarvu $a > c$.

Definitsioon

Tasandilist joont nimetatakse ellipsiks, kui selle joone iga punkt X rahuldab tingimust
$$\boxed{|F_1X| + |F_2X| = 2\,a.}$$
Punkte F_1, F_2 nimetatakse ellipsi fookusteks ja $r_1 = |F_1X|, r_2 = |F_2X|$ nimetatakse ellipsi punkti X fokaalraadiusteks.

Ellipsi võrrandi võime kirjutada kujul
$$\boxed{r_1 + r_2 = 2\,a.}$$

Ellips võrrand koordinaatides

Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi ristreeper, kus

- O on lõigu F_1F_2 keskpunkt,
- $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}, |\vec{e}_1| = 1$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1, |\vec{e}_2| = 1$ ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on parema käe baas.

Ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse ellipsi kanooniliseks reeperiks ja vastavat koordinaadisüsteemi nimetatakse ellipsi kanooniliseks koordinaadisüsteemiks.

Teoreem

Ellipsi võrrand kanoonilise reeperi korral on

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{1}$$

kus $b^2 = a^2 - c^2$. Teise astme võrrandit (1) nimetatakse ellipsi kanooniliseks võrrandiks.

Ellipsi fookuste F_1, F_2 koordinaadid kanoonilise reeperi korral on $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Seega

$$r_1 = |F_1X| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Asendame ellipsi võrrandisse

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Kirjutame kujul

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Tõstame ruutu

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

Lihtsustame

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = 4a^2-4a\sqrt{\ldots} + \cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$$

Tõstame ruutu

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2$$

Kirjutame kujul

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

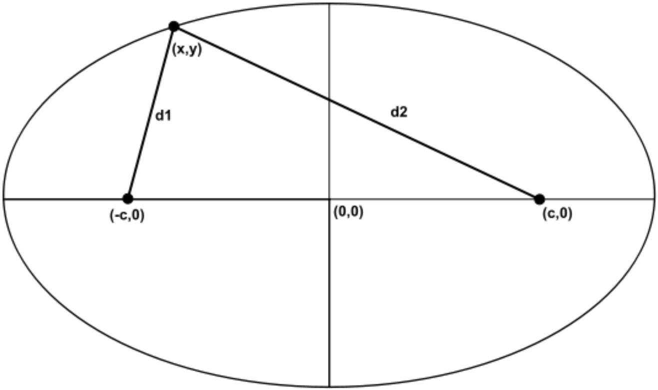
Tähistame $a^2-c^2=b^2$ $(a>c)$, kus b on positiivne arv, mis rahuldab tingimust $b^2=a^2-c^2$.

Järelikult

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Big| : a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Joonis, ellips



Joonis: Ellips

Ellipsi sümmeetriad

Uurime ellipsi sümmeetriaid kasutades ellipsi kanoonilist võrrandit. Kui tasandiline joon on sümmeetriline sirge suhtes, siis vastavat sirget nimetatakse joone sümmeetriateljeks. Kui tasandiline joon on sümmeetriline punkti suhtes, siis vastavat punkti nimetatakse joone keskpunktiks. Olgu $X(x, y)$ ellipsi suvaline punkt, siis

- punktiga $X(x, y)$ sümmeetriline punkt x-koordinaattelje suhtes $Y(x, -y)$ on ka ellipsi punkt. Seega x-koordinaattelg on ellipsi sümmeetriatelg, st ellips on sümmeetriline x-koordinaattelje suhtes.

Sümmeetriad

- punktiga $X(x,y)$ sümmeetriline punkt y-koordinaattelje suhtes $Z(-x,y)$ on ka ellipsi punkt. Seega y-koordinaattelg on ellipsi sümmeetriatelg, st ellips on sümmeetriline y-koordinaattelje suhtes.
- punktiga $X(x,y)$ sümmeetriline punkt alguspunkti suhtes $V(-x,-y)$ asub ellipsil. Seega, ellips on sümmeetriline alguspunkti suhtes, järelikult O on ellipsi keskpunkt.

Definitsioon

Tasandilise joone lõikepunkti selle joone sümmeetriateljega nimetatakse joone tipuks.

Ellipsi sümmeetriateljed on koordinaatteljed, seega ellipsil on neli tippu $A(-a,0), B(a,0), C(0,b), D(0,-b)$. Lõike AB, CD ja nende pikkusi $|AB| = 2\,a, |CD| = 2\,b$ nimetatakse ellipsi telgedeks.

Ekstsentrilisus

Lõike OA, OB, OC, OD ja nende pikkusi $a = |OA| = |OB|, b = |OC| = |OD|$ nimetatakse ellipsi pooltelgedeks. Kanoonilistes koordinaatides kehtib $a > b$ ja seetõttu arvu a nimetatakse suuremaks pooltelјeks ja arvu b väiksemaks pooltelјeks.

Definitsioon

Arvu $\epsilon = \frac{c}{a}$ nimetatakse ellipsi ekstsentrilisuseks. Arvu $p = \frac{b^2}{a}$ nimetatakse ellipsi fokaalparameetriks.

Ellipsi ekstsentrilisus rahuldab võrratust $0 < \epsilon < 1$. Kehtib

Teoreem

Ellipsi fokaalparameeter on võrdne ellipsi kõrgusega fookuse kohal.

Fookuse F_2 koordinaadid on $(c, 0)$. Ellipsi kõrgus selle fookuse kohal on võrdne ellipsi punkti P teise koordinaadiga y, kus $y > 0$.

Arvutame
$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seega
$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}.$$

Järelikult
$$y = \frac{b^2}{a} = p$$

Fokaalraadiused

Teoreem

Olgu $X(x, y)$ ellipsi suvaline punkt ja r_1, r_2 punkti X fokaalraadiused. Kehtivad fokaalraadiuste arvutamise valemid

$$r_1 = a + \epsilon\, x, \quad r_2 = a - \epsilon\, x.$$

Definitsioon

Sirgeid

$$x = -\frac{a}{\epsilon}, \quad x = \frac{a}{\epsilon},$$

nimetatakse ellipsi juhtsirgeteks.

Juhtsirget $x = -\frac{a}{\epsilon} (x = \frac{a}{\epsilon})$ nimetatakse ellipsi vasakpoolseks (parempoolseks) juhtsirgeks. Fookust $F_1 (F_2)$ nimetatakse vasakpoolseks (parempoolseks) fookuseks.

Kehtib $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Ellipsi võrrandist leiame

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Asendame

$$r_2 = \sqrt{x^2 - 2xc + \underbrace{c^2 + b^2}_{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$= \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}} = |a - \varepsilon x|$$

Arvestame, et $0 < \varepsilon < 1$, $x < 0$, seega $a - \varepsilon x > 0$ ja

$$\boxed{r_2 = a - \varepsilon x}$$

Teoreem

Teoreem

Olgu X ellipsi suvaline punkt, r punkti X fokaalraadius, d punkti X kaugus fokaalraadiusega samapoolse juhtsirgeni. Punkt X on ellipsi punkt parajasti siis, kui ta rahuldab tingimust

$$\frac{r}{d} = \epsilon.$$

Tasandilise joone parameetriliseks võrrandiks nimetatakse kujutust $\gamma : I \to E_2$, kus $I \subset \mathbb{R}$ on

- vahemik $I = (a, b)$ (lõplik, pool-lõpmatu, lõpmatu),
- pool-lõik $I = (a, b]$ või $I = [a, b)$,
- lõik $I = [a, b]$.

Kui ellipsi pooltelјed on a, b ja reeper on kanooniline, siis ellipsi parameetriline võrrand on

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \; I = [0, 2\pi].$$

Tarvilikus. Olgu $X(x,y)$ ellipsi mingi punkt. Tõestame parempoolse fookuse $F_2(c;0)$ ja parempoolse juhtsirge $l_2: x = +\frac{a}{\varepsilon}$ korral. Kehtib

$$d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Piisavus. Olgu $X(x,y)$ rahuldab tingimust $\frac{r}{d} = \varepsilon$. Kirjutame koordinaatides

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Eksami küsimused

1. Teist järku joone üldvõrrand. Võrrandi põhimaatriks ja laiendatud maatriks.
2. Ellipsi definitsioon. Kanooniline reeper. Ellipsi kanooniline võrrand (teoreem).
3. Ellipsi sümmeetriateljed ja keskpunkt. Ellipsi tipud. Ellipsi teljed, poolteljed ja ekstsentrilisus. Teoreem ellipsi kõrgusest fookuse kohal.
4. Teoreem ellipsi fokaalraadiustest. Ellipsi juhtsirged. Teoreem seosest ellipsi punkti kauguse juhtsirgeni ja vaastava fokaalraadiuse vahel.