Kategooriateooria eksamiküsimused
Sügis 2016

1. Tõestada Yoneda lemma (Teoreem 4.11) kolmest väitest kaks (omal valikul).
2. Tõestada, et kui kategoorias leiduvad korrutised ja tagasitõmbajad, siis leiduvad temas ka võrdsustajad (Teoreem 5.56).
3. Tõestada, et kui kategoorias leiduvad korrutised ja võrdsustajad, siis on ta täielik (Teoreem 5.56).
4. Tõestada, et kui funktor säilitab korrutisi ja tagasitõmbajaid, siis ta säilitab võrdsustajaid (Teoreem 5.65).
5. Tõestada, et kui funktor säilitab korrutisi ja võrdustajaid, siis ta säilitab kõiki väikseid piire (Teoreem 5.65).
6. Tõestada, et kovariantne mor-funktor säilitab kõiki piire (Lause 5.67).
7. Tõestada, et korrutistega kategoorias on võrdsutajate korrutis korrutiste võrdsustaja (Lause 5.75).
8. Tõestada, et hulkade kategoorias Set on olemas filtreeritud kopiirid (Lause 5.85).
9. Tõestada, et funktorite kategoorias saab piire arvutada punktiviisiliselt (Lause 5.90).
10. Tõestada, et kovariantne Yoneda funktor säilitab piire (Lause 5.93).
11. Tõestada, et iga funktor kategooriasse Set on esitatav mor-funktoritest ja nendevahelistest loomulikest teisendustest koosneva diagrammi kopiirina (Teoreem 5.94).
12. Tõestada, et adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ määrab ära loomuliku teisenduse $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$, nii et iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ korral paar $(\eta_A, F(A))$ on universaalne morfism objektist A funktorisse G ja iga $f : F(A) \to B$ korral $\varphi_{A,B}(f) = G(f)\eta_A : A \to G(B)$ (Teoreem 6.3).
13. Tõestada, et vasakpoolne kaasfunktor on määratud üheselt loomuliku isomorfismi täpsuseni (Lause 6.5).
14. Tõestada, et adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on ära määratud funktorite F, G ja sellise loomuliku teisenduse $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ poolt, et iga $\eta_A : A \to (GF)(A)$ on universaalne morfism objektist A funktorisse G (Teoreem 6.5).
15. Tõestada, et adjunktsioon $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on ära määratud selliste loomulikt teisenduste $\eta : 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$ poolt, et $(G * \varepsilon) \circ (\eta * G) = G$ ja $(\varepsilon * F) \circ (F * \eta) = F$ (Teoreem 6.5).
16. Tõestada, et kui funktoril on olemas vasakpoolne kaasfunktor, siis ta säilitab piire (Lause 6.6).
17. Tõestada, et parempoolne kaasfunktor on täielik ja täpne parajasti siis, kui adjunktsiooni koühik on loomulik isomorfism (Lause 6.12).
18. Tõestada, et funktor on kategooriate ekvivalents parajasti siis, kui ta on täielik, täpne ja tihe (Teoreem 6.15).
19. Tõestada, et täieliku kategooria reflektiivne alamkategooria on täielik (Lause 6.22).
20. Tõestada teoreem bikorrutiste kohta Ab-kategooriates (Teoreem 7.10).