Palun kirjutage lahenduste lehele oma nimi ja variandi tähis. Ülesannete leht ja mustandipaberid **tuleb** ära anda koos valminud tööga. **Elektrooniliste abivahendite kasutamine ei ole lubatud.**

Ülesanne 1

(**5p**) On antud vektorruumi $\mathbb{R}^3$ elemendid $e_1 = (1, 2, -1)$, $e_2 = (-1, 0, 1)$ ja $e_3 = (0, 1, 2)$. Näidake, et süsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baasiks ning leidke elemendi $a = (0, 3, 2)$ koordinaadid sellel baasil.

Ülesanne 2

(**4p**) Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ alamruumid.

(a) $V = \{(a, 0, 3b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$

(b) $V = \{(a, b^2, a) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$

Ülesanne 3

(**4p**) Kolmnurga ABC tippudeks on $A(4; -2; -1)$, $B(1; -2; 3)$ ja $C(0; -2; -4)$. Leidke tipu C juures olev sisenurk kraadides ning koostage külje BC poolt määratud sirge võrrand.

Ülesanne 4

(**3p**) Kolmnurga ABC tippudeks on $A(-1; 5; 0)$, $B(1; 2; 1)$ ja $C(-5; 4; -3)$. Leidke vektorkorrutise abil kolmnurga ABC pindala.

Ülesanne 5

(**3p**) Leidke punkti $P(1; -1; -4)$ kaugus tasandist π, mis läbib punkte $A(2; 0; 1)$, $B(-2; -2; 1)$ ja $C(6; 1; 0)$.

Ülesanne 6

(**6p**) Põhjendage järgmiste arvridade koonduvust või hajuvust.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 - 7n^3}{n^3 + 3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{5^n}.$

Palun kirjutage lahenduste lehele oma nimi ja variandi tähis. Ülesannete leht ja mustandipaberid **tuleb** ära anda koos valminud tööga. **Elektrooniliste abivahendite kasutamine ei ole lubatud.**

Ülesanne 1

(**5p**) Näidake, et funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

Ülesanne 2

(**5p**) Leidke funktsiooni

$$f(x,y) = \cos(\pi - 2x^3y^2) + e^{x^2-1}$$

segatuletis $f_{xy}(x,y)$.

Ülesanne 3

(**5p**) Arvutage **täisdiferentsiaali** abil ligikaudu

$$(3{,}12^2 - 6{,}05)^3.$$

Ülesanne 4

(**5p**) Leidke funktsiooni

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

kõik lokaalsed ekstreemumid.

Ülesanne 5

(**5p**) Leidke integraal

$$\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy,$$

kus D on piiratud sirgetega $y=0$, $y=2x$ ja $x=\frac{\pi}{2}$.

Palun hinnake kontrolltöö nr. 2 raskusastet.
Tõmmake ring ümber sobiva variandi.

A. liiga raske

B. paras

C. kerge

Ülesanne 1

(**5p**) Lahendage eralduvate muutujatega Cauchy ülesanne

$$y' + y^2 = 0, \quad y(1) = 1.$$

Ülesanne 2

(**6p**) Lahendage homogeenne diferentsiaalvõrrand

$$\frac{y}{x}y' - 1 = \frac{y^2}{x^2}.$$

Ülesanne 3

(**6p**) Lahendage esimest järku lineraarne diferentsiaalvõrrand

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{xe^x}.$$

Ülesanne 4

(**6p**) Lahendage teist järku lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}.$$

Ülesanne 5

(**2p**) Näidake, et funktsioonide süsteem

$$y = x + e^{-x}, \quad z = e^x$$

on harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$y' = 1 - z^{-1}, \quad z' = (y - x)^{-1}$$

lahendiks.

Määramata kordajate meetod erilahendi leidmiseks

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{3}$$

$$k^2 + ak + b = 0 \tag{4}$$

Võrrandi (1) vabaliikme $f(x)$ kuju	Võrrandi (2) lahendid	Võrrandi (1) erilahendi $Y(x)$ kuju
$Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + ... + q_m$	Arv 0 ei ole (2) lahend	$R_m(x) = r_0x^m + r_1x^{m-1} + ... + r_m$
	Arv 0 on l-kordne (2) lahend	$x^l R_m(x)$
$e^{\alpha x}Q_m(x)$ (α on reaalarv)	Arv α ei ole (2) lahend	$e^{\alpha x}R_m(x)$
	Arv α on l-kordne (2) lahend	$x^l e^{\alpha x}R_m(x)$
$e^{\alpha x}Q_m(x)\cos\beta x$ või	Arvud $\alpha \pm i\beta$ ei ole (2) lahendid	$e^{\alpha x}\Big[R_m(x)\cos\beta x + \widetilde{R}_m(x)\sin\beta x\Big]$, $\widetilde{R}_m(x) = \widetilde{r}_0x^m + \widetilde{r}_1x^{m-1} + ... + \widetilde{r}_m$
$e^{\alpha x}Q_m(x)\sin\beta x$ (α ja β on reaalarvud)	Arvud $\alpha \pm i\beta$ on l-kordsed (2) lahendid	$x^l e^{\alpha x}\Big[R_m(x)\cos\beta x + \widetilde{R}_m(x)\sin\beta x\Big]$

Konstantide varieerimise meetod erilahendi leidmiseks

Kui on leitud homogeense võrrandi $y''+ay'+by = 0$ üldlahend $y_h = C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, siis võrrandi $y''+ay'+by = f(x)$ erilahend avaldub kujul $Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, kus funktsioonide $C_1(x), C_2(x)$ leidmiseks tuleb kasutada süsteemi

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$