2016

Kõrgem matemaatika II

MTMM.00.341

II OSA

MATEMAATILINE ANALÜÜS

TARTU ÜLIKOOL | Matemaatika ja statistika instituut

SISUKORD

Matemaatiline analüüs

III PTK READ

SISSEJUHATUS

Eelnevalt oleme tutvunud erinevate funktsioonide rittaarendustega. Taylori valem punkti $x = a$ ümbruses on kujul

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Maclaurini valemi saame, kui Taylori valemis võtta arv a võrdseks nulliga:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Vaatame funktsiooni

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Me võime vaadelda igat muutuja x astet kui mingisugust muutuja x funktsiooni $g_k(x) = x^k$

$$g_0(x) = x^0 = 1, \qquad g_1(x) = x^1 = x, \qquad g_2(x) = x^2, \ldots$$

Siis funktsioon $f(x)$ on kujul

$$f(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(x).$$

Seega võime kasutada ka teistsuguselt määratud funktsioone $g_k(x)$ ja arendada ritta erinevalt astmereast.

3.1. ARVREAD, REA SUMMA

Definitsioon 3.1.

Arvreaks (lühemalt reaks) nimetatakse **lõpmatut summat**, mis avaldub kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k} = \boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{u_1} + \ldots + \boldsymbol{u_n} + \ldots \qquad (1)$$

Rea liikmeteks nimetatakse arve u_0, u_1 ….,
rea üldliikmeks nimetatakse suvalise indeksiga rea liiget $\boldsymbol{u_n}$.

Moodustame rea (1) osasummad järgmiselt:

$$S_0 = u_0;\ S_1 = u_0 + u_1; \ldots; S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Rea osasummade jadaks nimetatakse jada $(\boldsymbol{S_n})$, kus

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.}$$

Definitsioon 3.2.

Rea summaks nimetatakse piirväärtust (kui see eksisteerib)

$$\boldsymbol{S = \lim_{n\to\infty} S_n,}$$

kirjutame

$$\boldsymbol{S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.}$$

Aritmeetilised read. Aritmeetilise jada $a_n = a_1 + d(n-1)$ esimese n liikme summa S_n avaldub kujul

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_1 + (k-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d).$$

Kirjutame rea liikmete summad tagurpidises järjekorras

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ldots + a_1.$$

Liites kokku mõlemad avaldised, saame

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \ldots + (2a_1 + (n-1)d) =$$

$$= n(2a_1 + (n-1)d),$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Esimese n naturaalarvu summa: $a_1 = d = 1$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Geomeetrilised read. Geomeetrilise jada $a_n = a_1 q^{n-1}$ esimese n liikme summa S_n avaldub järgmiselt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 x^k = a_1 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_1 x^{n-1}.$$

Lõpliku rea liikmete saamiseks korrutame saadud summa muutujaga x:

$$x \cdot S_n = a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_1 x^n.$$

Lahutame kaks eelnevat avaldist, saame

$$S_n - x \cdot S_n = a_1 - a_1 x^n = a_1(1 - x^n),$$

$$S_n(1-x) = a_1(1-x^n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1(1-x^n)}{1-x}.$$

$$a_1 = 1: \quad \frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}.$$

Harmoonilised read. Harmooniliseks reaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ \dots,\alpha>0.$$

Kui $\alpha=1$, siis saame järgmise harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots$$

Summa S_n avaldub

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ \dots+\frac{1}{n}.$$

Näide 3.1. Leida osasummade jada ja summa järgmisele reale

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}.$$

Lahutame kõigepealt murru osamurdude summaks järgmiselt:

$$\frac{2}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}.$$

Määrame kordajad A ja B võrdusest $2=A(n+2)+Bn$.
Kui võtta $n=0$, siis saame $A=1$ ja kui võtta $n=-2$, siis saame $B=-1$. Seega

$$\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}.$$

Leiame osasummade jada S_n

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right).$$

Koondame liikmed ja saame

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}.$$

Rea summa saamiseks peame võtma piirväärtuse järgmiselt

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Seega saime rea summaks

$$S=\frac{3}{2}.$$

3.2. ARVRIDADE KOONDUVUS JA HAJUVUS

Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

koondub summaks S, kui rea summa S on lõplik (kui eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$), ehk kui rea osasummade jada (S_n) koondub summaks S.
Rida (1) hajub, kui piirväärtust ei eksisteeri või kui piirväärtus on lõpmatu ehk kui rea osasummade jada (S_n) ei koondu. Seega kui

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \text{ või } \sum_{k=0}^{\infty} u_k = -\infty,$$

siis on tegemist hajuva reaga. Kui **real on lõplik summa**, siis sümboliga

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

tähistatakse nii rida kui ka tema summat.

Tarvilik tingimus rea koonduvuseks (rea hajumise tunnus).
Lause 3.1. Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ **koondub**, siis tema üldliige läheneb nullile:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0. \qquad (2)$$

Tõestus. Kui rida koondub, siis eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Samuti kehtib $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Kuna kehtib võrdus

$$u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - u_0 - u_1 - \dots - u_{n-1} = S_n - S_{n-1},$$

siis võttes mõlemast võrduse poolest piirväärtuse, saame

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

∎

Tarvilikku tingimust tuleks kõigepealt kontrollida. See tähendab, et tarviliku tingimuse kehtimine ei ole piisav rea koondumise üle otsustamiseks, vaid teame seda, et **kui tingimus ei ole täidetud, võime kindlalt öelda, et rida hajub**. Seetõttu võib tarvilikku tingimust nimetada ka **rea hajumise tunnuseks.**

Näide 3.2. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots; \qquad S_1 = -1, \qquad S_2 = -1 + 1 = 0,$$

$$S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \dots$$

Rea osasummad moodustavad jada $(-1,0,-1,0,\dots)$, mis on hajuv ja seetõttu ka vastav rida on hajuv.

Näide 3.3. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots; \qquad S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + 1 = 2, \qquad S_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \ldots.$$

Rea osasummad moodustavad jada $(1, 2, 3, 4, \ldots)$, mis on tõkestamata ja seetõttu on tegemist hajuva reaga.

Kirjutame välja arvrea (1) järgmise summana

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \tag{3}$$

Arvrea (1) **jääkliikmeks** nimetatakse rida

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \boldsymbol{u_k}. \tag{4}$$

Arvrea summa *S* võime samuti kirjutada järgmisel kujul

$$\boldsymbol{S = S_n + R_n,}$$

kus R_n on rea (4) summa.
Koonduva rea (1) korral on rea jääkliige samuti koonduv rida ja tema summa R_n on lõpmata väike suurus piirprotsessis $n \to \infty$ ehk

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} R_n = 0.}$$

Tehted koonduvate ridadega.

1. Kui arvreas (1) juurde lisada või ära jätta lõplik arv liikmeid, siis see ei mõjuta rea koonduvust. Koonduv rida jääb koonduvaks ning hajuv rida jääb hajuvaks.
2. Kui arvrida (1) koondub, siis koondub ka rida $\sum cu_k$, kus c on reaalarv, kehtib võrdus

$$\sum_{k=0}^{\infty} cu_k = c\sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

3. Kui kaks erinevat rida $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ koonduvad, siis koonduvad ka read, mis on moodustatud nende ridade summast $\sum(u_k + v_k)$ja vahest $\sum(u_k - v_k)$ ning kehtib võrdus

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Näide 3.4. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+5}.$$

Kontrollime koonduvuse tarvilikku tingimust (2), selleks leiame piirväärtuse.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 1.$$

Tarvilik tingimus koondumiseks ei ole täidetud, seega saame öelda, et antud rida hajub.

Lause 3.2. Geomeetriline rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots$$

koondub siis ja ainult siis, kui $|q| < 1$. Geomeetrilise rea summa avaldub sel juhul valemiga

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Tõestus. Kasutame seost

$$(1-q)(1+q+q^2+\ \ldots + q^n) = 1 - q^{n+1},$$

saame

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

suvalise $n \in \mathbb{N}_0$ korral. Kui $|q| < 1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, mistõttu

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}.$$

Seega juhul $|q| < 1$ rida $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub summaks $\frac{1}{1-q}$.

Kui $|q| \geq 1$, siis ei ole tarvilik tingimus koondumiseks täidetud, ehk $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} \neq 0$. Sellest järeldub, et sel juhul geomeetriline rida hajub.

∎

Lause 3.3. Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ \ldots$$

hajub.

Harmoonilise rea üldliige avaldub valemiga $u_n = 1/n$, koondumise tarvilik tingimus (2) on täidetud, sest

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Järeldus. Tarvilik tingimus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ei ole piisav rea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondumiseks.

Lause 3.4. Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ \ldots$$

koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$.

3.3. POSITIIVSED JA VAHELDUVATE MÄRKIDEGA ARVREAD

Definitsioon 3.3.

Positiivseks arvreaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k}\text{, kus } \boldsymbol{u_k} \geq \boldsymbol{0} \text{ iga } k = 0,1,2 \ldots \text{ korral.} \tag{5}$$

Lause 3.5. Positiivne rida (5) **koondub** siis ja ainult siis, kui tema osasummade jada on tõkestatud, ehk kui leidub arv $M > 0$, nii et

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{u_k} \leq \boldsymbol{M} \text{ iga } n = 0,1, \ldots. \text{korral.} \tag{6}$$

Järelikult positiivsete ridade korral rida koondub, kui

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

rida hajub, kui

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Võrdluslaused.

1. **Lause 3.6.** Olgu $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ sellised read, et

$$\boldsymbol{0 \leq u_k \leq v_k}, \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

   a. Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{v_k}$ **koondub**, siis koondub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
   b. Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k}$ **hajub**, siis hajub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$.
   Järeldus. Lause 3.6 väited a ja b kehtivad, kui mingist indeksist n alates kehtib võrratus $u_k \leq v_k$ iga $k \geq n$ korral.

2. **Lause 3.7**. Kui $k \to \infty$ korral on $\boldsymbol{u_k \sim c v_k}$ mingi konstandi $c > 0$ korral, siis mõlemad positiivsed read $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ kas koonduvad või hajuvad üheaegselt.
   $u_k \sim c v_k$ tähistab suuruste **ekvivalentsust**. Suurused on ekvivalentsed, kui piirväärtus nende suhtest on võrdne suurusega 1 ehk

$$\lim \frac{u_k}{v_k} = 1.$$

Näide 3.5. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Kuna $2k - 1 = k + (k - 1) \geq k$, siis

$$\frac{1}{2k-1} \leq \frac{1}{k}$$

ning

$$\frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

iga $k \in \mathbb{N}$ puhul. Olgu

$$u_k = \frac{1}{(2k-1)^2}, v_k = \frac{1}{k^2},$$

Siis harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub lause 3.4 põhjal ja võrdluslause 3.6 a kohaselt koondub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, järelikult on tegemist koonduva reaga.

POSITIIVSETE RIDADE KOONDUVUSTUNNUSED

D'Alembert'i koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} < 1, \text{siis rida (5) koondub,} \\ > 1, \text{siis rida (5) hajub,} \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Cauchy koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \begin{cases} < 1, \text{siis rida (5) koondub,} \\ > 1, \text{siis rida (5) hajub,} \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Raabe koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \begin{cases} > 1, \text{siis rida (5) koondub,} \\ < 1, \text{siis rida (5) hajub,} \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Logaritmiline koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \begin{cases} > 1, \text{siis rida (5) koondub,} \\ < 1, \text{siis rida (5) hajub,} \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Integraaltunnus. Olgu funktsioon $f(x)$ pidev monotoonselt kahanev piirkonnas $[a, \infty)$ ja olgu $u_n = f(n)$. Rida (5) koondub siis ja ainult siis, kui päratu integraal

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

koondub, kusjuures tema jääkliikme jaoks kehtib hinnang

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\, dx.$$

Cauchy tunnus on võimsam kui d'Alembert'i tunnus. Kui d'Alembert'i tunnus võimaldab otsustada rea koonduvust või hajuvust, siis võimaldab seda ka Cauchy tunnus, kuid mitte vastupidi. Raabe tunnus on võimsam kui d'Alembert'i tunnus. Logaritmiline tunnus on omakorda võimsam Cauchy ja Raabe tunnusest. Rea koonduvuse uurimist alustatakse tavaliselt nõrgemate koonduvustunnuste rakendamisega, sest nad on lihtsamad. Võimsamaid tunnuseid kasutatakse siis, kui nõrgemad tunnused ei anna vastust.

Näide 3.6. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}.$$

Rea üldliikme kohta kehtib hinnang

$$\frac{2^n}{1+3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Saime geomeetrilise rea üldliikme kui $q = 2/3$. Kuna geomeetriline rida koondub, siis 1. võrdluslause (**lause 3.6**) põhjal võime järeldada, et ka temast väiksem rida koondub.

Näide 3.7. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}.$$

Kui $n \to \infty$, siis rea üldliikme kohta kehtib järgmine hinnang

$$\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{n\sqrt{3+o(1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Saime harmoonilise rea üldliikme $1/n$. Kuna harmooniline rida $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ hajub, siis 2. võrdluslause (**lause 3.7**) põhjal hajub ka antud rida.

Näide 3.8. Uurida järgmise rea koonduvust olenevalt parameetri $a > 0$ väärtustest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n.$$

Kasutame **Cauchy tunnust**, saame

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a.$$

Rida koondub, kui $a < 1$ ja hajub kui $a > 1$. Kui $a = 1$, siis koondumise tarvilikust tingimusest saame

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = e^{-1}$$
$$\neq 0.$$

Seega rida hajub ka $a = 1$ korral. Samasuguse tulemuseni jõuame ka logaritmilise tunnuse põhjal:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n} = 0.$$

Näide 3.9. Uurida järgmise rea koonduvust parameetri $p > 0$ korral

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln p}.$$

Kasutame **Raabe tunnust**, saame

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(n+1)^{\ln p}}{n^{\ln p}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln p}}{\frac{1}{n}} = -\ln p.$$

Kui $-\ln p > 1$ ehk kui $p < 1/e$, siis rida koondub, kui $-\ln p < 1$ ehk kui $p > 1/e$, siis rida hajub.
Kui $-\ln p = 1$ ehk kui $p = 1/e$, siis rida hajub, sest saime harmoonilise rea, mis hajub lause 3.3 põhjal.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln\frac{1}{e}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};\ \lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0.$$

Näide 3.10. Näidata, et järgmine harmooniline rida koondub, kui $a > 1$ ja hajub kui $a \le 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}.$$

Kui $a \le 0$, siis rida hajub, sest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = \lim_{n\to\infty} n^a = \infty.$$

Vaatame juhtu, kus $a > 0$. Kasutame **integraaltunnust**, funktsiooniks $f(x) = 1/x^a$.

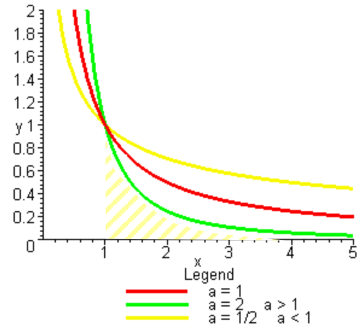
$$a = 1:\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{c\to+\infty} \ln x\Big|_1^c = \lim_{c\to+\infty} (\ln c - \ln 1) = \lim_{c\to+\infty} \ln c = \infty.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^a} \underset{a\neq 1}{=} \lim_{c\to\infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Big|_1^c = \frac{1}{1-a} \lim_{c\to\infty} (c^{1-a} - 1).$$

$a > 1 \ \Rightarrow\ 1 - a < 0$:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{c\to\infty} (c^{1-a} - 1) = \frac{1}{1-a} \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{c^{a-1}} - 1\right) = \frac{1}{1-a} \cdot (-1) = a.$$

$$a < 1 \ \Rightarrow\ 1 - a > 0:\quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{c\to\infty} (c^{1-a} - 1) = \infty.$$



Seega oleme näidanud, et integraal koondub juhul, kui $a > 1$, ülejäänud juhtudel integraal hajub. Integraaltunnuse põhjal võime järeldada sellest, et ka harmooniline rida koondub juhul $a > 1$.

Definitsioon 3.3. **Vahelduvate märkidega reaks** nimetatakse rida kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{, kus } a_n > 0. \qquad (7)$$

Vahelduvate märkidega arvrea koonduvuse uurimiseks kasutatakse Leibnizi tunnust.

Leibnizi koonduvustunnus. Kui

$$\text{a) } a_1 \geq a_2 \geq \ \dots \geq a_n \geq \ \dots,$$

$$\text{b) } \lim a_n = 0,$$

siis rida (7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{, kus } a_n > 0$$

koondub ja tema jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jaoks kehtib hinnang:

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Näide 3.11. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Rea üldliige avaldub järgmiselt

$$a_n = \frac{1}{n \ln n},$$

$$a_2 \geq a_3 \geq \ \dots \geq a_n \geq \ \dots \text{ ja}$$

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Leibnizi tunnuse põhjal rida koondub ja tema jääkliikme jaoks kehtib hinnang:

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln k} \right| \leq \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}.$$

3.4. RIDADE KOONDUVUSTUNNUSED

Definitsioon 3.4.

Rida (1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

nimetatakse **absoluutselt koonduvaks**, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida (8) on koonduv

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|. \qquad (8)$$

Definitsioon 3.5.

Kui rida (1) koondub aga ei koondu absoluutselt, siis sellist rida nimetatakse **tingimisi koonduvaks**.

Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv. Kui koondub rida (8), siis sellest järeldub, et koondub ka rida (1).
Rea koondumise uurimiseks on kaks põhilist koonduvustunnust.

D'Alembert'i koonduvustunnus.
Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\begin{cases}<1, \text{siis rida } (1) \text{ koondub absoluutselt,}\\ >1, \text{siis rida } (1) \text{ hajub,}\\ =1, \text{siis ei saa otsustada.}\end{cases}$$

Cauchy koonduvustunnus.
Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k|}\begin{cases}<1, \text{siis rida } (1) \text{ koondub absoluutselt,}\\ >1, \text{siis rida } (1) \text{ hajub,}\\ =1, \text{siis ei saa otsustada.}\end{cases}$$

Näide 3.12. Uurida järgmise rea (näide 3.11) koonduvust

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}.$$

Integraaltunnuse põhjal rida hajub, sest

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}=\lim_{c\to\infty}\int_2^{c}\frac{1}{x\ln x}=\lim_{c\to\infty}\int_2^{c}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{c\to\infty}(\ln\ln x)|_2^c=\lim_{c\to\infty}(\ln\ln c-\ln\ln 2)=\infty.$$

Kuna vahelduvate märkidega rida koondub aga ei koondu absoluutselt, siis tegemist on tingimisi koonduva reaga.

Näide 3.13. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{5^n}.$$

Kasutame **d'Alembert**'i tunnust.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{5}=\frac{2}{5}<1.$$

Järelikult rida koondub absoluutselt.

3.5. ASTMEREAD

Definitsioon 3.6.

Astmereaks nimetatakse rida, mille liikmeteks on funktsioonid $f_n(x) = a_n x^n$ kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.} \tag{9}$$

Astmerea üldisem kuju

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots,} \tag{10}$$

kus $a \in \mathbb{R}$ on fikseeritud arv.
Astmerea kordajateks nimetatakse arve $\boldsymbol{a_0, a_1}$ ….,
rea üldliikmeks nimetatakse suvalise indeksiga rea liiget $\boldsymbol{a_n}$.

Geomeetriline rida on astmerida kujul (9), kus $a_k = 1$ iga $k \in \mathbb{N}_0$ korral.
Astmerea üldisemalt kujult (10) saame muutuja vahetusega $x - a = t$ üle minna reale (9) ja vastupidi. Iga astmerea jaoks on võimalik leida suurus R, mille korral astmerida koondub absoluutselt, kui $|x - a| < R$ ($|x| < R$) ja hajub, kui $|x| > R$ ($|x - a| > R$), kus $0 \leq R < \infty$.

Definitsioon 3.7.

Astmerea (9) koonduvusvahemikuks nimetatakse vahemikku $(\boldsymbol{-R, R})$,
astmerea (10) koonduvusvahemikuks vastavalt vahemikku $(\boldsymbol{a - R, a + R})$.
Suurust $\boldsymbol{R}$ nimetatakse **koonduvusraadiuseks**.

Kui $R = 0$, siis koondub astmerida vaid punktis $x = 0$.
Koonduvusvahemike otspunktides võib astmerida koonduda kas tingimisi või absoluutselt või hajuda.
Koonduvusraadiuse leidmiseks kasutatakse **valemeid**:

$$\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}, \tag{12}$$

kui $a_n \neq 0$ ja piirväärtused eksisteerivad.

Definitsioon 3.8. **Astmerea koonduvuspiirkonnaks** nimetatakse hulka X

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub} \right\}.$$

Definitsioon 3.9. **Astmerea absoluutse koonduvuse piirkonnaks** nimetatakse hulka A

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x|^k \text{ koondub} \right\}.$$

Näide 3.14. Leida koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond järgmisele astmereale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Kõigepealt leiame koonduvusraadiuse R kasutades valemit (11):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Saime $R = 1$ ja seega koonduvusvahemik on $(-1{,}1)$. Selles vahemikus vaadeldav astmerida koondub absoluutselt. Vahemiku otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida. Kui $x = -1$, saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Saime harmoonilise rea, mille koondumist saame uurida integraaltunnuse abil

$$a = 1: \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{c\to+\infty} \ln|x+1|\Big|_0^{c} = \lim_{c\to+\infty} (\ln c - \ln 1) = \lim_{c\to+\infty} \ln c = \infty.$$

Integraaltunnuse põhjal saame öelda, et $x = -1$ korral rida hajub.
Kui $x = 1$, saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Saime vahelduvate märkidega rea, mille koondumist saame uurida Leibnizi tunnuse abil. Kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

saame Leibnizi tunnuse abil öelda, et rida $x = 1$ korral koondub, kuid ei koondu absoluutselt. Seega koonduvuspiirkond $X = (-1, 1]$ ja absoluutse koonduvuse piirkond $A = (-1{,}1)$.

Näide 3.15. Leida koonduvusraadius R ja koonduvusvahemik järgmisele astmereale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Kuna argument x on astmes $2n$, siis teeme kõigepealt muutuja vahetuse $t = 2n$. Kasutame valemit (11):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{t\to\infty} \left|\frac{t+1}{t}\right| = \lim_{t\to\infty} \frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t} = 1.$$

Seega $R = \sqrt{1} = 1$ ja koonduvusvahemik on $(-1{,}1)$.

Näide 3.16. Leida koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond järgmisele astmereale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Kõigepealt leiame koonduvusraadiuse R kasutades valemit (12):

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

Saime $R = 1$ ja seega vaadeldav astmerida koondub absoluutselt vahemikus $(-1,1)$. Vahemiku otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida. Kui $x = -1$, saame arvrea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt. Kui $x = 1$, siis saame arvrea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

mis on hajuv (harmooniline rida, $\alpha = 1$). Seega koonduvuspiirkond $X = [-1, 1)$ ja absoluutse koonduvuse piirkond $A = (-1,1)$.

Teoreem 3.1. Cauchy-Hadamardi teoreem.

(a) Juhul $\boldsymbol{R = 0}$ koondub astmerida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k x^k}$ vaid punktis $x = 0$, s.t.

$$\boldsymbol{A = X = \{0\}}.$$

(b) Juhul $\boldsymbol{0 < R < \infty}$, siis astmerida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k x^k}$ koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$ ja hajub hulgas $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$, s.t.

$$\boldsymbol{(-R, R) \subset A \subset X \subset [-R, R]}.$$

(c) Kui $\boldsymbol{R = \infty}$, siis astmerida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k x^k}$ koondub absoluutselt igas punktis $x \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\boldsymbol{A = X = \mathbb{R}}.$$

Cauchy-Hadamardi teoreem ei väida midagi astmerea koonduvuse kohta koonduvusvahemiku $(-R, R)$ otspunktides, kui $0 < R < \infty$.

Teoreem 3.2. Astmerida (9) võib igas lõigus $[0, x]$, kus $x \in (-R, R)$, **liikmeti integreerida**, kusjuures

$$\boldsymbol{\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}.$$

Teoreem 3.3. Astmerida (9) võib igas punktis $x \in (-R, R)$ **liikmeti diferentseerida**, kusjuures

$$\boldsymbol{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}}.$$

Teoreemid 3.1-3.3 kehtivad ka astmerea (10) korral.

Abeli lemma. Kui astmerida (9) koondub koonduvusvahemiku $(-R, R)$ parempoolses otspunktis R, siis selle astmerea summa $f(x)$ on vasakult pidev punktis R ehk $f(R-) = f(R)$:

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Kui astmerida (9) koondub punktis $-R$, siis selle astmerea summa $f(x)$ on paremalt pidev punktis $-R$ ehk $f(-R) = f(-R+)$.
Funktsioon f on vahemikus X arendatud astmereaks (esitatud astmereana), kui iga $x \in X = (c - R, c + R)$ korral on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n.$$

3.6. TAYLORI JA MACLAURINI READ

Definitsioon 3.10.

Funktsiooni $f(x)$ **Taylori reaks** nimetatakse astmerida, mille kordajad (**Taylori kordajad**) avalduvad kujul

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Taylori rida avaldub järgmisel kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a_n (x - c)^n} =$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \ldots$$

Definitsioon 3.11.
Maclaurini reaks nimetatakse rida, mis saadakse Taylori reast, võttes $c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$

Vahemikus $X = (c - R, c + R)$ piiramata diferentseeruv funktsioon f on arendatav Taylori reaks selles vahemikus parajasti siis, kui funktsiooni f Taylori valemi jääkliige R_n rahuldab vahemikus X tingimust

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Kui funktsioon f on arendatav astmereaks vahemikus X, siis see astmerida on funktsiooni f Taylori rida. Paljude funktsioonide arendused astmereaks saame tuntud astmeridadest aritmeetiliste tehete, rea liikmeti integreerimise ja liikmeti diferentseerimise teel.

3.6.1. TAYLORI VALEMI TULETAMINE

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ omab kõiki tuletisi kuni järguni $(n+1)$ (kaasa arvatud) mingis punkti $x = a$ sisaldavas vahemikus. Leiame hulkliikme $P_n(x)$ nii, et

$$P_n(a) = f(a);\ P'_n(a) = f'(a);\ P''_n(a) = f''(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{13}$$

Hulkliiget $P_n(x)$ hakkame otsima kujul

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n \tag{14}$$

Selle hulkliikme kordajad leiame tingimusest (13). Selleks leiame enne $P_n(x)$ tuletised:

$$\begin{gathered} P'_n(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1}, \\ P''_n(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + \dots + n\,(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \\ P'''_n(x) = 2\cdot 3c_3 + \dots + n\,(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot c_n. \end{gathered} \tag{15}$$

Asendame nüüd valemitesse (14) ja (15) $x = a$, saame

$$\begin{gathered} P_n(a) = c_0;\ \ P'_n(a) = c_1;\ \ P''_n(a) = 2c_2;\ \ P'''_n(a) = 2\cdot 3c_3; \\ \dots;\ \ P_n^{(n)}(a) = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot c_n. \end{gathered} \tag{16}$$

Võrdustest (13) ja (16) saame

$$c_0 = f(a);\ \ c_1 = f'(a);\ \ c_2 = \frac{1}{1\cdot 2}f''(a);\ \ c_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a), \dots, c_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}f^{(n)}(a)$$

ehk

$$c_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

kus $f^{(0)}(a) = f(a);\ \ 0! = 1; 1! = 1.$

Asendame nüüd need väärtused c_k, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ valemisse (14), saame otsitava hulkliikme

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{17}$$

Tähistame tähega $R_n(x)$ vahe $f(x) - P_n(x) = R_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = P_n(x) + R_n(x).$

Saime valemi, mida nimetatakse **Taylori valemiks**

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)}$$

$\boldsymbol{R_n(x)}$ nimetatakse **jääkliikmeks**. Järelikult võime nende argumendi x väärtuste korral, mille korral $R_n(x)$ on küllalt väike, vaadelda funktsiooni $y = f(x)$ asemel hulkliiget (Taylori valem).

Järeldus 1. Ilmselt $R_n(x) = 0$ siis, kui funktsioon on n- astme hulkliige, see tähendab

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_n\,x^n.$$

Sel juhul kujutab (17) endast lihtsalt antud hulkliikme teist kuju. Iga niisuguse hulkliikme võib lahutada $\boldsymbol{x-a}$ astmete järgi.

Näide 3.17. Esitada hulkliige $P_2(x) = -5 + 2x + x^2$ muutuja $x - 3$ astmete järgi.

Selleks asendame

$$x = [3 + (x-3)]:\ P_2(x) = -5 + 2[3 + (x-3)] + [3 + (x-3)]^2 \\ = 10 + 8(x-3) + (x-3)^2.$$

3.6.2. TUNTUIMAD ASTMEREAD

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \dots + \frac{x^n}{n!} + \ \dots.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \ \dots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \ \dots.$$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + n\frac{(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot 2}{(n-1)!}ax^{n-1} + x^n,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ \dots, x \in (-1,1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \dots, x \in (-1,1],$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \dots, x \in [-1,1].$$

Näide 3.18. Leida funktsiooni $f(x) = \arcsin x$ Maclaurini rida $n = 3$ korral.

$$f(x) = \arcsin x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{(1-x^2)^3}, \qquad f'''(0) = 1.$$

Saime Maclaurini rea

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3} + \ \dots.$$

Näide 3.19. Leida funktsiooni $f(x) = 1/(1-2x)$ Maclaurini rida, määrata rea koonduvusraadius R.

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, \qquad f'(0) = 2,$$

$$f''(x) = \frac{8}{(1-2x)^3}, \qquad f''(0) = 8,$$

$$f'''(x) = \frac{48}{(1-2x)^4}, \qquad f'''(0) = 48.$$

Saime Maclaurini rea

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ \dots.$$

Sama rea saamiseks võime kasutada ka järgmise funktsiooni arendust astmeritta

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ \dots$$

Asendades suuruse x suurusega $2x$, saame

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ \dots$$

Rea koonduvusraadius on

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^n}{2^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

3.7. ORTOGONAALREAD*

Näitena ortogonaalreast võime kirjutada funktsiooni (9) Legendre polünoomide lineaarse kombinatsioonina

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x). \tag{18}$$

Legendre võrrand on teist järku lineaarne diferentsiaalvõrrand kujul

$\boldsymbol{(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0}$, kus $\boldsymbol{l}$ on reaalarv (vt III osa, punkt 6.4.6).

Definitsioon 3.12.

Legendre polünoomideks nimetatakse $\boldsymbol{l}$ astme polünoome, mis on Legendre võrrandi **erilahenditeks**.

$$\boldsymbol{P_l(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2l-1)}{l!}\left\{x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \ \dots\right\}}$$

Kui $-1 \le x \le 1$, siis $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Funktsioon $P_k(x)$ on k järku muutuja x polünoom. Iga x astet saame näidata Legendre polünoomide lineaarse kombinatsioonina

$$x^0 = P_0, \quad x^1 = P_1, \qquad x^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0), \qquad x^3 = \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1),$$

$$x^4 = \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0), \qquad x^5 = \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1).$$

Sellisel juhul funktsioon (18) avaldub kujul

$$f(x) = a_0P_0 + a_1P_1 + \frac{a_2}{3}(2P_2 + P_0) + \frac{a_3}{5}(2P_3 + 3P_1) + \frac{a_4}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0) +$$

$$+\frac{a_5}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1) + \ \ldots$$

$$= \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ \ldots\right)P_0 + \left(a_1 + \frac{3a_3}{5} + \frac{3a_5}{7} + \ \ldots\right)P_1$$

$$+ \left(\frac{2a_2}{3} + \frac{4a_4}{7} + \ \ldots\right)P_2 \quad (19)$$

$$+ \left(\frac{2a_3}{5} + \frac{4a_5}{9} + \ \ldots\right)P_3 + \left(\frac{8a_4}{35} + \ \ldots\right)P_4 + \left(\frac{8a_5}{63} + \ \ldots\right)P_5 + \ \ldots$$

Loodusteadustes kasutatakse lahendeid, mis asuvad vahemikus $-1 \le x \le 1$, sellel lõigul kehtib

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{k,m} \ = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \dfrac{2}{2m+1}, & k = m \end{cases} \tag{20}$$

Seda kasutame võrrandis (18) olevate kordajate c_k leidmiseks. Selleks korrutame võrrandit (18) funktsiooniga $P_m(x)$ ja integreerime

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,f(x)dx = \int_{-1}^{1} P_m(x)\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_kP_k(x)\right]dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)\,dx.$$

Kasutades võrrandit (20)

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,f(x)dx = c_m \int_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}c_m \qquad c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)\,f(x)dx.$$

Rakendame valemisse (9)

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\,dx = \frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^{1} P_m(x)\,x^k\,dx.$$

Asendades $P_m(x)$, saame avaldada konstandid c_m konstantide a_k kaudu.

Näide 3.20. Leiame $m = 0$ korral kordaja c_0.

$$P_0 = 1,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^{1} x^k\, dx, \qquad \int_{-1}^{1} x^k\ dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\bigg|_{-1}^{1} = \begin{cases} \frac{2}{2k+1}, & k \text{ paaris} \\ 0, & k \text{ paaritu} \end{cases}$$

$$c_0 = a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k+1}.$$

Saime sama kordaja P_0 jaoks, kui valemis (19).

Üldjuht.

Definitsioon 3.13.
Integreeruva ruuduga funktsioonide süsteemi $\{g_n(x)\}$ nimetatakse **ortogonaalseks** lõigul $[a, b]$, kui

$$\int_a^b \boldsymbol{g_n(x) g_m(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n}$$

ja **ortonormeerituks** lõigul $[a, b]$, kui

$$\int_a^b \boldsymbol{g_n(x) g_m(x)\, dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}}.$$

Olgu $\{g_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, funktsioonide süsteem, mis on ortogonaalne lõigus $[a, b]$ kaalufunktsiooni $w(x)$ suhtes

$$\int_a^b g_m^*(x) g_n(x)\, w(x) dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Olgu $f(x)$ suvaline funktsioon, mis on defineeritud lõigus $[a, b]$, mida saab laiendada hulka $\{g_n(x)\}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot g_n(x) \quad \bigg| \cdot g_m^*(x) w(x) \quad \bigg| \int_a^b$$

$$\int_a^b g_m^*(x) f(x) w(x)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot \int_a^b g_m^*(x) f(x) w(x)\ dx = c_m \int_a^b g_m^*(x) g_m(x) w(x)\ dx.$$

Asendame m muutujaga n

$$c_n = \frac{\int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx}{\int_a^b g_n^*(x) g_n(x) w(x)\ dx}.$$

Nimetaja on funktsiooni $\{g_n(x)\}$ normeerimisintegraal, ruut normist

$$\|g_n\| = \sqrt{\int_a^b g_n^*(x) g_n(x) w(x)\ dx}\,, \qquad c_n = \frac{1}{\|g_n^2\|}\int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx.$$

Funktsiooni normeerimiseks tuleb funktsioon jagada tema normiga, tulemuseks saame ortonormeeritud hulga

$$\bar{g}_n = \frac{1}{\|g_n\|} g_n(x), \quad \int_a^b \bar{g}_m^*(x)\bar{g}_n(x) w(x)\ dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}, \qquad f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot \bar{g}_n(x).$$

$$c_n = \frac{1}{\|g_n^2\|}\int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx = \int_a^b \bar{g}_n^*(x) f(x) w(x)\ dx.$$

Ortonormeeritud süsteem $\{\boldsymbol{g_n(x)}\}$ on **täielik**, kui iga funktsioon $f(x)$ on avaldatav lõigus lineaarkombinatsioonina süsteemi funktsioonidest

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot g_n(x), \qquad c_n = \int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx.}$$

Funktsioonid $f(x)$ võivad olla pidevad ja ka tükiti pidevad, omavad lõpliku arvu lõplikke katkevusi ning lõpliku arvu maksimum- ja miinimumpunkte selles lõigus. Funktsiooni saab arendada ritta

$$f(x) \approx f_k(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ \ldots + c_k g_k(x),$$

$$\int_a^b [f(x) - f_k(x)]^2 w(x) \to 0, \ \ k \to \infty\,.$$

Rida $f_k(x)$ **koondub** lõigul $[a, b]$ **keskmiselt** funktsiooniks $f(x)$. See tähendab, et koondumist funktsiooniks $f(x)$ ei pea toimuma iga muutuja x korral.

Loodusteadustes on rakendusteks järgmised näited:

1. Elektrostaatikas ja gravitatsiooniteoorias

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x).$$

Rida koondub kui $|x| < 1$ ja $|t| < 1$. Elektrostaatiline potentsiaal.

2. Hajumisteoorias

$$e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) i^k \cdot j_k(t) \cdot P_k(x),$$

kus $j_k(t)$ on sfäärilised Besseli funktsioonid. Rida koondub kui $|x| < 1$ iga t korral.

3.8. FOURIER READ

Tuntuim ja kõige enam uuritud ortogonaalrida on trigonomeetriline süsteem $\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \dots\}$. Olgu $f(x)$ lõigus $[-\pi,\pi]$ määratud funktsioon. Teatud tingimustel on funktsioon $f(x)$ esitatav summana

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}, \tag{21}$$

kus $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ on mingid konstandid. Eeldame, et $f(x)$ on lõigus $[-\pi,\pi]$ integreeruv funktsioon ja korrutame võrduse (21) mõlemat poolt trigonomeetrilise süsteemi elementidega ja integreerime üle lõigu $[-\pi,\pi]$ (oletame, et see on võimalik). Kasutades seoseid

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos kx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi,\qquad\int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\sin mx\,dx=0,\qquad k\neq m,$$

saame kordajate a_k ja b_k jaoks valemid

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos kx\,dx,\quad k=0,1,2,\dots;\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin kx\,dx,\quad k=1,2,\dots\end{aligned}\tag{22}$$

Definitsioon 3.14.

Funktsiooni $f(x)$ trigonomeetriliseks Fourier' reaks lõigus $[-\pi,\pi]$ nimetatakse rida

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)}, \tag{23}$$

kus kordajad a_0, a_k, b_k on määratud seostega

$$\boldsymbol{\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos kx\,dx,\quad k=0,1,2,\dots;\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin kx\,dx,\quad k=1,2,\dots\end{aligned}}\tag{22}$$

Valemi (23) võime kirjutada ka kujul

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

Näide 3.21.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx\,),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Punktis 0 on katkevuspunkt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot 1\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot 1\, dx = 1,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{k} \bigg|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos k\pi),$$

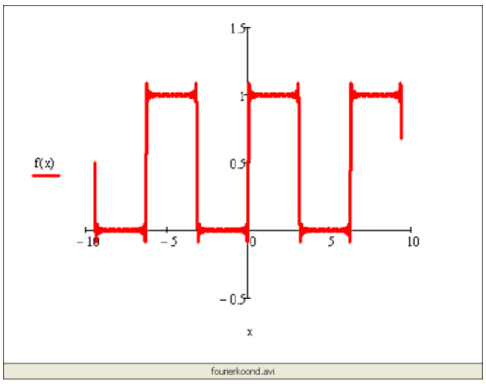
$$\cos k\pi = \begin{cases} 1, & k \text{ paaris} \\ -1, & k \text{ paaritu} \end{cases} \qquad b_k = \frac{2}{k\pi}, \qquad k \text{ paaritu},$$

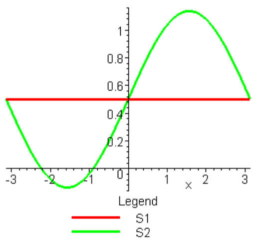
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ \dots \right).$$

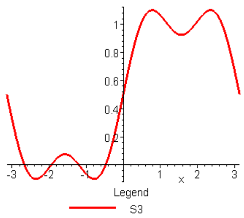
Osasummad

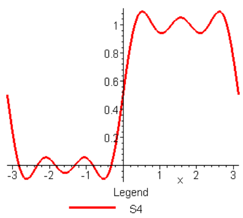
$$S_1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x\,; \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right);$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right).$$









Fourier' integraali saame, kui teisendame Fourier' rea integraalkujule

$$\boldsymbol{f(x) = \int_0^\infty [u(y)\cos xy + v(y)\sin xy]\,dy,}$$

$$\boldsymbol{u(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos xy\,dx, \qquad v(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin xy\,dx.}$$

Fourier' integraali saab esitada ka eksponentkujul. Kasutades Euleri võrrandeid

$$\cos xy = \frac{1}{2}\left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right), \qquad \sin xy = \frac{1}{2i}\left(e^{ixy} - e^{-ixy}\right).$$

Defineerime funktsiooni

$$w(y) = \frac{1}{2}[u(y) - iv(y)].$$

Asendame Fourier' integraali, saame Fourier' rea **eksponentkuju**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y)e^{ixy}\,dy \qquad w(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Eksponentkuju saab sümmeetrilisemaks teha asendusega $g(y) = \sqrt{2\pi}w(y)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}\,dy \qquad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Neid valemeid nimetatakse **Fourier' teisendusteks**.
Fourier' teisenduste jaoks on vajalik, et funktsioon oleks määratud vahemikus $(-\infty, \infty)$ ja seal absoluutselt integreeruv, ehk leidub Q:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = Q.$$

Näide 3.22.

$$f(x) = \begin{cases} A, & -a < x < a \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

$$g(y) = \frac{2Aa}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ay}{ay},$$

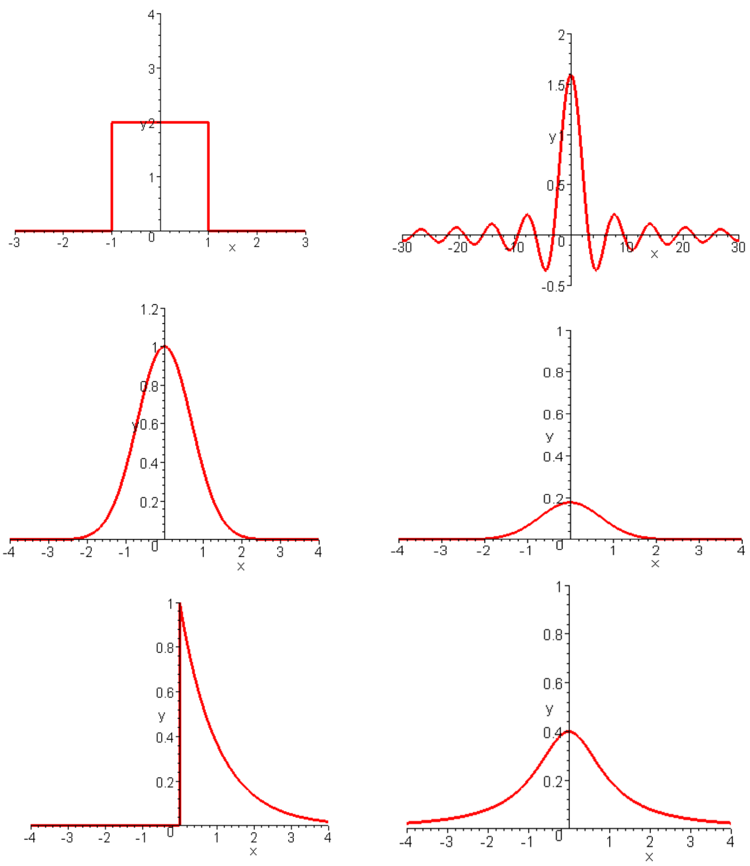
$$f(x) = e^{-ax^2}, \qquad a > 0,$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{y^2}{4a}},$$

$$f(x) = e^{-ax}, \qquad x > 0, a > 0,$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a - iy}{a^2 + y^2}\right).$$

$$Re\big(g(y)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{a^2+y^2}\right).$$



IV PTK MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

4.1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI MÕISTE

- Kui x ja y on ristküliku külgede pikkused, siis pindala $\boldsymbol{S}$ avaldub valemiga $S = x \cdot y$. Igale x ja y väärtuste paarile vastab pindala üks väärtus, S on kahe muutuja funktsioon.
- Kui risttahuka servade pikkused on x, y, z, siis tema ruumala avaldub kujul $V = x \cdot y \cdot z$. Ruumala V on kolme muutuja funktsioon.
- Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $pV = nRT$ saame avaldada gaasi ruumala

$$V = f(p, T, n) = \frac{nRT}{p}.$$

Ruumala V on 3 muutuja p, T ja n funktsioon ehk $V = f(p, T, n)$.
- Funktsionaalne sõltuvus R on nelja muutuja funktsioon, mis on antud järgmiselt

$$R = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Definitsioon 4.1.

Kahe muutuja x ja y funktsioon on z, kui igale muutuvate suuruste x ja y paarile vastab üks muutuva suuruse z väärtus $z = f(x, y)$.

Võtame argumendi väärtuste paari: $x = x_0, y = y_0$. Kui nendele vastav z väärtus on olemas, siis öeldakse, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud punktis (x_0, y_0).
Kolme või enama arvu muutujate funktsioonid defineeritakse analoogiliselt.

Definitsioon 4.2.

Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkonnaks nimetatakse argumentide x ja y väärtuspaaride (x, y) hulka, mille puhul funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud.

Funktsiooni määramispiirkonda saab kujutada geomeetriliselt. Kui x ja y iga väärtuspaari kujutada xy tasapinna punktidena, siis funktsiooni määramispiirkonda kujutab teatud punktide hulk tasapinnal.

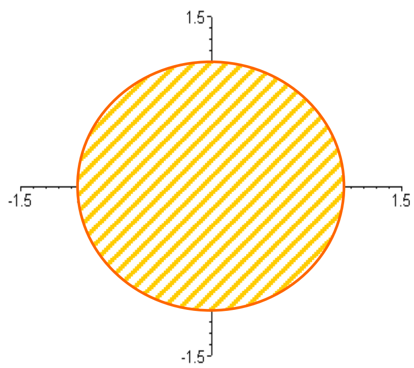
Näide 4.1. Leida määramispiirkond funktsioonile

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Et funktsioon oleks määratud, peab juuritav olema mittenegatiivne:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Määramispiirkonnaks on punktid ringjoone sees või ringjoonel.



Näide 4.2. Leida määramispiirkond funktsioonile

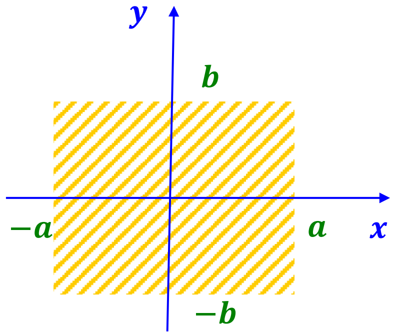
$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Määramispiirkonnaks on punktid ringjoone sees, ringjoon ei ole kaasa arvatud.

Näide 4.3. Leida määramispiirkond funktsioonile

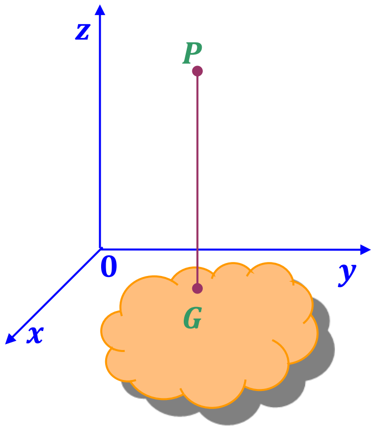
$$f(x, y) = \ln(a^2 - x^2) + \ln(b^2 - y^2).$$

$$a^2 - x^2 > 0 \quad -a < x < a,$$
$$b^2 - y^2 > 0 \qquad -b < y < b,$$



kus a, b on konstandid.

Vaatleme funktsiooni $z = f(x, y)$,mis on määratud xy – tasapinna mingis piirkonnas G. Püstitame piirkonna G igas punktis (x, y) ristsirge ja asetame sellele lõigu, mis võrdub funktsiooni väärtusega $f(x, y)$.
Nii saame punkti P koordinaatidega (x, y, z), $z = f(x, y)$.



Definitsioon 4.3.
Kahe muutuja funktsiooni $\boldsymbol{f(x,y)}$ **graafikuks** nimetatakse punktide P hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $z = f(x, y)$.

Järgnevalt defineerime m muutuja funktsiooni, tema määramispiirkonna ja graafiku.

Definitsioon 4.4.

Olgu hulk $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$. Kui igale punktile $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ hulgast D on eeskirja f abil vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv u, siis öeldakse, et **hulgal $\boldsymbol{D}$ on määratud $\boldsymbol{m}$ muutuja funktsioon** ja kirjutatakse

$$\boldsymbol{u = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D}$$

või

$$u = f(P), \quad \forall P \in D.$$

Hulka D nimetatakse funktsiooni $\boldsymbol{f}$ **määramispiirkonnaks**.
Funktsiooni $\boldsymbol{f}$ graafikuks nimetatakse hulka

$$Gr(f) = \{Q = (x_1, \dots, x_m, u) \colon P = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D, u = f(P)\}.$$

Kaks m muutuja funktsiooni $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ja $u = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ osutuvad samadeks funktsioonideks, kui neil mõlemal on üks ja sama määramispiirkond D ja samad vastavuse eeskirjad.

4.2. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Definitsioon 4.5.
Punkti $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ ümbruseks raadiusega $\boldsymbol{r}$ nimetatakse punktide hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrratust $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, need punktid asetsevad ringi sees, mille raadius on r ja keskpunkt on $M_0(x_0, y_0)$.
Defineerime kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse. Olgu antud xy tasapinna mingis piirkonnas G määratud funktsioon $z = f(x, y)$. Vaatleme mingit punkti $M_0(x_0, y_0)$ selles piirkonnas. Tähistame kahe punkti vahelist kaugust $d(A, B)$.

Definitsioon 4.6.

Funktsiooni $\boldsymbol{f(x,y)}$ **piirväärtuseks** punkti $\boldsymbol{M(x,y)}$ lähenemisel punktile $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ nimetatakse arvu $\boldsymbol{A}$, kui argumendi tõkestamatu lähenemine punktile (x_0,y_0) toob kaasa funktsiooni $f(x,y)$ väärtuste tõkestamatu lähenemise arvule A.
Kui arv A on funktsiooni $f(x,y)$ piirväärtuseks punkti $M(x,y)$ lähenemisel punktile M_0, siis kirjutatakse

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

ehk $\boldsymbol{f(x,y)\to A}$, kui $\boldsymbol{(x,y)\to(x_0,y_0)}$.

Kui $\boldsymbol{A=0}$, siis öeldakse, et funktsioon $f(x,y)$ on punkti $M_0(x_0,y_0)$ ümbruses **lõpmata väike suurus**.
Kui $\boldsymbol{A=\infty}$ või $\boldsymbol{A=-\infty}$, siis öeldakse, et funktsioon $f(x,y)$ on punkti $M_0(x_0,y_0)$ ümbruses **lõpmata suur suurus**. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse korral kehtivad ühe muutuja funktsiooni piirväärtuste teooria põhilised teoreemid.

Teoreem 4.1.
Lõpliku arvu funktsioonide summa piirväärtus võrdub nende piirväärtuste summaga.
$x\to x_0, y\to y_0;\ \ f(x,y)\to A, g(x,y)\to B$ siis

$$\boldsymbol{f(x,y)+g(x,y)\to A+B.}$$

Analoogiliselt

$$\boldsymbol{f(x,y)-g(x,y)\to A-B.}$$

Teoreem 4.2.
Funktsioonide korrutise piirväärtus võrdub piirväärtuste korrutisega.
$x\to x_0, y\to y_0;\ \ f(x,y)\to A,\ g(x,y)\to B$ siis

$$\boldsymbol{f(x,y)\cdot g(x,y)\to A\cdot B.}$$

Teoreem 4.3.
Kahe funktsiooni jagatise piirväärtus võrdub nende funktsioonide piirväärtuste jagatisega eeldusel, et nimetaja piirväärtus ei võrdu nulliga.
Kui

$$x\to x_0, y\to y_0;\ \ f(x,y)\to A, g(x,y)\to B,$$

siis

$$\boldsymbol{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\to\frac{A}{B}}.$$

Definitsioon 4.7.
Kui punkti $M_0=(x_0,y_0)$ ümbruses on funktsioonil $f(x,y)$ olemas piirväärtus

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = g(y)$$

ja piirväärtus

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = A,$$

siis arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ **korduvaks piirväärtuseks** punktis M_0 ja kirjutatakse

$$\boldsymbol{\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = A.}$$

Analoogiliselt

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = B.$$

Näide 4.4. Leida järgmised piirväärtused.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(2x^2-y^2) = -2\,; \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{5-xy}{x^2+y^2} = 5;$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\frac{x\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} x\cdot\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy} = a,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{z^2\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2} = 1.$$

Üleminek polaarkoordinaatidele: $\boldsymbol{x = r\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\varphi}$. Kui $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{0}$, siis $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{0}$ iga nurga φ korral ja $\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$. Leiame polaarkoordinaatidele üle minnes järgmise piirväärtuse:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2} = 0.$$

Arv A on funktsiooni $f(x,y)$ piirväärtuseks punktis M_0 siis ja ainult siis, kui piirprotsessi iga lähenemisteed mööda punktile M_0 annab arvu A. Kui on vaja näidata, et piirväärtust punktis M_0 ei eksisteeri, tuleb leida kaks lähenemisteed punktile M_0 ja näidata, et piirväärtused on erinevad.

Näitame, et järgmist piirväärtust ei eksisteeri:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Läheneme punktile $(0{,}0)$ mööda sirget $y = x$, siis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-1)}{2x^2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Läheneme punktile $(0{,}0)$ mööda sirget $y = 2x$, siis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(2x)^2}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}.$$

Märkus. Kui argumendid lähenevad punktile (x,y), kus nad ei ole võrdse väärtusega: $x \neq y$, siis tuleks piirväärtuse leidmisel läheneda punktile mööda sellist sirget, mis läbib antud punkti. Näiteks punkti $(-1{,}1)$ korral võib läheneda punktile mööda sirget $y = x + 2$ või $y = -x$.

Definitsioon 4.8.

Funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ nimetatakse **pidevaks punktis** $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$, kui ta on selles punktis määratud ning funktsiooni väärtus punktis $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ võrdub tema piirväärtusega lähenemisel sellele punktile

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Funktsiooni, mis on pidev mingi piirkonna igas punktis, nimetatakse **pidevaks selles piirkonnas**. Pidevuse tingimuse võib kirjutada ka kujul

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.
Kui funktsioon $f(x,y)$ **ei ole pidev** punktis (x_0, y_0), siis öeldakse, et funktsioon $f(x,y)$ **on katkev** selles punktis. Sellel juhul nimetakse punkti (x_0, y_0) funktsiooni $f(x,y)$ **katkevuspunktiks**.

Teoreem 4.4. Kõik mitme muutuja **elementaarfunktsioonid on pidevad** oma määramispiirkonnas.

Näide 4.5. Näidata, et funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

Funktsiooni f määramispiirkond on kogu xy-tasand. Igas piirkonnas, kus $x^2+y^2 \neq 0$, on funktsioon f elementaarfunktsioon ja teoreemi 4.4 põhjal pidev. Kontrollida tuleb funktsiooni f pidevust ainult punktis $(0,0)$. Selleks kasutame pidevuse definitsiooni ja võtame piirväärtuse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0),$$

siis järelikult funktsioon f on pidev ka punktis $(0,0)$. Seega funktsioon f on pidev oma määramispiirkonnas. Kui piirväärtus ei võrdu funktsiooni väärtusega antud punktis, siis funktsioon on katkev selles punktis.

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse ja pidevuse mõisteid saab üldistada ka m muutuja funktsioonide jaoks. Olgu hulk $D \subset \mathbb{R}^m$ ja funktsioon $f: D \to \mathbb{R}$ ning olgu punkt $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in D$ hulga D kuhjumispunkt (see tähendab, et punkti A igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Definitsioon 4.9.

Kui argumendi $P = (x_1, \dots, x_m)$ tõkestamata lähenemine punktile $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(P)$ tõkestamata lähenemise arvule c, siis ütleme, et **funktsiooni f piirväärtus protsessis $P \to A$** on arv c ja kirjutame

$$\lim_{P \to A} f(P) = c$$

või

$$\lim_{x_1,\dots,x_m \to a_1,a_2,\dots,a_m} f(x_1, \dots, x_m) = c.$$

Definitsioon 4.10.

Funktsiooni $u = f(P)$ nimetatakse **pidevaks punktis A**, kui

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

Kui funktsioon ei ole pidev punktis A, siis funktsiooni nimetatakse **katkevaks punktis A.**

4.3. OSATULETISED

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Anname muutujale x juurdekasvu Δx, jättes y väärtuse muutmata. Siis funktsioon z saab juurdekasvu (osamuudu)

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Definitsioon 4.11.

Funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **esimest järku osatuletiseks argumendi $\boldsymbol{x}$ järgi** nimetatakse **piirväärtust**

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **esimest järku osatuletiseks argumendi $\boldsymbol{y}$ järgi** nimetatakse piirväärtust

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Osatuletist argumendi x järgi tähistatakse

$$z'_x, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad f'_x(x, y), \qquad z_x, \qquad f_x(x, y).$$

Osatuletist argumendi y järgi tähistatakse

$$z'_y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad f'_y(x, y), \qquad z_y, \qquad f_y(x, y).$$

Osatuletise defineerimisel funktsiooni **osamuut** $\boldsymbol{\Delta_x z}$ arvutatakse **muutumatu $\boldsymbol{y}$** puhul ja funktsiooni **osamuut** $\boldsymbol{\Delta_y z}$ **muutumatu $\boldsymbol{x}$** puhul, võime definitsioonid formuleerida järgnevalt.

Funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **osatuletise leidmiseks $\boldsymbol{x}$ järgi** võetakse tema **tuletis argumendi $\boldsymbol{x}$ järgi**, mis **arvutatakse eeldusel, et $\boldsymbol{y}$ on konstantne**.

Analoogiliselt: funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **osatuletise leidmiseks $\boldsymbol{y}$ järgi** võetakse tema **tuletis argumendi $\boldsymbol{y}$ järgi**, mis **arvutatakse eeldusel, et $\boldsymbol{x}$ on konstantne**.

Siit on näha, et osatuletiste leidmiseks **sobivad ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirjad**, tuleb meeles pidada, millise muutuja järgi osatuletist otsitakse. Tuletame veel meelde reeglid konstandi tuletise leidmiseks: konstandi tuletis on null aga kui konstant on funktsiooni kordajaks, mille järgi osatuletist leiame, siis jääb konstant tuletise ette kordajaks.

$$c' = 0, (cf(x))' = c(f(x))'.$$

Näide 4.6. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 + 3y^2 + 2xy^2$.

Võttes osatuletise argumendi x järgi, argumendi y tuletist võtame konstandi tuletise reegli järgi, ehk teises liidetavas on ainult argumendist y sõltuv funktsioon, seega

$$(3y^2)'_x = 0.$$

Kolmas liidetav sõltub ka argumendist x, seega tuletise võtmisel jäävad konstandid tuletise ette kordajateks:

$$(2xy^2)'_x = 2y^2(x)_x{}' = 2y^2.$$

Võttes osatuletise argumendi y järgi, argumendi x tuletist võtame konstandi tuletise reegli järgi, siis esimeses liidetavas on ainult argumendist x sõltuv funktsioon, seega

$$(x^2)'_y = 0.$$

Kolmas liidetav sõltub ka argumendist y, seega tuletise võtmisel jäävad konstandid tuletise ette kordajateks:

$$(2xy^2)'_y = 2x(y^2)_y{}' = 2x2y = 4xy.$$

Osatuletised funktsioonile z on kujul

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4xy.$$

Näide 4.7. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Definitsioon 4.12.

Olgu hulk $D \subset \mathbb{R}^m$, funktsioon $f: D \to \mathbb{R}$ ning $P = (x_1, \dots, x_m)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_i}$$

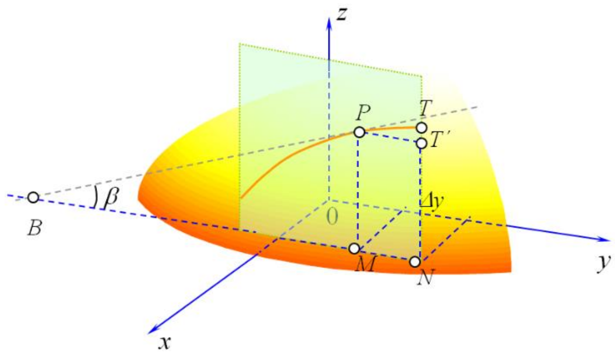
nimetatakse **funktsiooni f osatuletiseks muutuja x_i järgi** punktis P ja tähistatakse $f_x(x_1, \dots, x_m)$ või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m).$$

OSATULETISTE GEOMEETRILINE TÕLGENDUS

Osatuletis $\boldsymbol{\partial z/\partial y}$ võrdub arvuliselt pinna $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ ja tasapinna $\boldsymbol{x = \text{const}}$ lõikejoone puutuja tõusunurga tangensiga (joonis).

Osatuletis $\boldsymbol{\partial z/\partial x}$ võrdub arvuliselt pinna $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ ja tasapinna $\boldsymbol{y = \text{const}}$ lõikejoone puutuja tõusunurga tangensiga.



Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest, saame **teist järku osatuletised**.
Neid tähistatakse järgmiselt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad f''_{xx}(x, y), \qquad z''_{xx}, \qquad z_{xx}, \qquad f_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \qquad f''_{xy}(x, y), \qquad z''_{xy}, \qquad z_{xy}, \qquad f_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad f''_{yy}(x,y), \qquad z''_{yy}, \qquad z_{yy}, \qquad f_{yy}(x,y).$$

Näide 4.8. Leida kõik teist järku osatuletised järgmise funktsiooni jaoks $z=x^4-5x^2y^2+6xy+7$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-10xy^2+6y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-10x^2y+6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-10y^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-20xy+6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-10x^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-20xy+6.$$

Definitsioon 4.13.
Teist järku segatuletisteks nimetatakse osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Määratud ja pideva funktsiooni z korral on funktsiooni pidevad segatuletised võrdsed. Kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 4.5. Kui funktsioon $z=f(x,y)$ ning tema osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

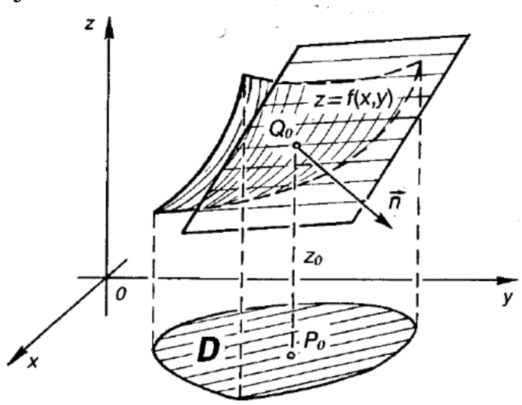
on punktis $M(x,y)$ ning selle mingis ümbruses määratud ja pidevad, siis selles punktis teist järku segatuletised on võrdsed

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}}.$$

Definitsioon 4.14.
Funktsiooni $\boldsymbol{f(x,y)}$ nimetatakse **diferentseeruvaks punktis $\boldsymbol{P(a,b)}$**, kui funktsioonil on selles punktis **osatuletised määratud ja pidevad**.

Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab **geomeetriliselt** selle funktsiooni graafiku **puutujatasandi olemasolu** vastavas graafiku punktis.

Definitsioon 4.15.
Pinna $\boldsymbol{z=f(x,y)}$ puutujatasandiks punktis $\boldsymbol{Q_0(x_0,y_0)}$ nimetatakse **tasandit**, millel asuvad kõik pinna punkti $\boldsymbol{Q_0(x_0,y_0)}$ läbivate joonte puutujad.



Definitsioon 4.16.
Pinna normaalsirgeks (normaaliks) punktis $\boldsymbol{Q_0(x_0, y_0)}$ nimetatakse punkti $\boldsymbol{Q_0(x_0, y_0)}$**läbivat sirget**, mis on **risti puutujatasandiga** punktis $\boldsymbol{Q_0(x_0, y_0)}$.

Teoreem 4.6. Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ pidev punkti $P(a, b)$ mingis ümbruses. Kui funktsioon $f(x, y)$ on diferentseeruv punktis $P(a, b)$, siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis $A = (a, b, f(a, b))$. Puutujatasandi võrrand on

$$\boldsymbol{z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)}.$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni $f(x, y)$ graafikul eksisteerib punktis A puutujatasand, kusjuures see puutujatasand ei ole paralleelne z-teljega, siis funktsioon $f(x, y)$ on diferentseeruv punktis A.

Pinna $z = f(x, y)$ **normaalsirge** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ on esitatav kahe võrrandiga:

1) parameetriline võrrand

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = a + tf'_x(a, b)} \\ \boldsymbol{y = b + tf'_y(a, b)} \\ \boldsymbol{z = f(a, b) - t} \end{cases}$$

2) kanooniline võrrand

$$\boldsymbol{\frac{x - a}{f'_x(a, b)} = \frac{y - b}{f'_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}}.$$

4.4. TÄISDIFERENTSIAAL

Eeldame, et kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev. Anname argumentidele x ja y juurdekasvud $\Delta x, \Delta y$. Siis funktsioon saab juurdekasvu $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Eeldame lisaks, et funktsioonil on punktis (x, y) pidevad osatuletised. Avaldame Δz osatuletiste kaudu. Selleks liidame ja lahutame paremast poolest $\pm f(x, y + \Delta y)$:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Mõlemates nurksulgudes on ühe muutuja funktsioonid. Rakendame neile Lagrange'i keskväärtusteoreemi

$$[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad \bar{x} \in [x, x + \Delta x],$$

$$[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad \bar{y} \in [y, y + \Delta y],$$

Asendame

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Eelduse kohaselt on osatuletised pidevad (pidevuse definitsioonist ja piirväärtuse omadusest saame)

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_1,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \varepsilon_2,$$

Järelikult

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Kaks viimast liidetavast on kõrgemat järku lõpmata väikesed suurused võrreldes kahe esimesega ja Δz peaosa moodustab kaks esimest liiget.
Argumendi diferentsiaaliks nimetatakse argumendi muutu

$$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy = \Delta y.}$$

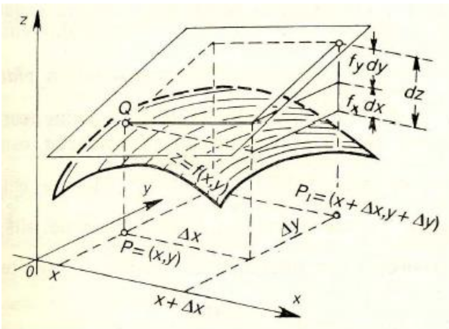
Definitsioon 4.17.

Kahe muutuja funktsiooni **juurdekasvu peaosa** argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel nimetatakse selle funktsiooni **täisdiferentsiaaliks**. Tähistatakse

$$\boldsymbol{dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,}$$

$$\boldsymbol{dz = z'_x\, dx + z'_y dy.}$$

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni $z = f(x,y)$ täisdiferentsiaal funktsiooni graafiku puutujatasandi aplikaadi (z-koordinaadi) muutu üleminekul punktist $P(x,y)$ punkti $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.



Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali saab kasutada funktsiooni **juurdekasvu ligikaudseks arvutamiseks**, sellisel juhul loetakse

$$\boldsymbol{\Delta z \approx dz} \text{ ehk } \boldsymbol{\Delta z \approx z'_x\, dx + z'_y dy.}$$

Selline võrdsustamine on õigustatud, kui argumentide juurdekasvud on väikesed. Samast valemist on võimalik leida ka **funktsiooni uus väärtus $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$**, selleks avaldame funktsiooni muudu avaldisest

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$$

funktsiooni uue väärtuse täisdiferentsiaali kaudu järgmiselt

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \approx z'_x\, dx + z'_y dy,$$

$$\boldsymbol{f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x,y) + z'_x\, dx + z'_y dy.}$$

Näide 4.9. Leida funktsiooni $z = 3x^2 + \cos y$ täisdiferentsiaal.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y \quad \Rightarrow \quad dz = 6x\, dx - \sin y\, dy.$$

Näide 4.10. Olgu silindri kõrgus 25 cm ja raadius 10 cm. Kui palju muutub silindri ruumala, kui kõrgust suurendada 2 mm ja põhja raadiust vähendada 1 mm võrra?

Silindri ruumala $V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow V(10,25) = \pi \cdot 100 \cdot 25 = 2500\pi.$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h \quad \Rightarrow \quad dV = \pi r^2\, dh + 2\pi r h\, dr.$$

$$r = 10; \;\; \Delta r = -0{,}1 \;\; (\text{cm}); \quad h = 25; \; \Delta h = 0{,}2\; (\text{cm}).$$

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h.$$

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta h + 2\pi r h \Delta r = \pi[100 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0{,}1] = -30\pi.$$

Ruumala väheneb 30π võrra. $V_1 = V + \Delta V \approx 2500\pi - 30\pi = 2470\pi$. Uue ruumala täpne väärtus on $V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow V(10 - 0{,}1; 25 + 0{,}2) = \pi \cdot 9{,}9^2 \cdot 25{,}2 = 2469{,}85\pi$.

Näide 4.11. Arvutada täisdiferentsiaali abil ligikaudselt avaldise $2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4$ väärtus.

Kasutame valemit $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + z'_x\, dx + z'_y dy$. Leiame kõigepealt funktsiooni kuju ja osatuletised argumentide järgi, siis argumentide arvulised väärtused ja juurdekasvud.

$$f(x, y) = x^3 y^4, f'_x = 3x^2 y^4, \;\; f'_y = 4x^3 y^3,$$

$$x = 3, \Delta x = -0{,}03; \;\; y = 3, \Delta y = 0{,}01$$

$$f(3, 3) = 2187, f'_x(3, 3) = 2187, f'_y(3, 3) = 2916.$$

Funktsiooni uue väärtuse ligikaudne suurus on

$$2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4 \approx 2187 + 2187(-0{,}03) + 2916 \cdot 0{,}01 = 2150{,}55.$$

Täpne väärtus esitatuna tuhandikeni on $2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4 = 2150{,}4796 \ldots$

Täisdiferentsiaal m muutuja funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ jaoks punktis P_0 avaldub kujul

$$\boldsymbol{df(P_0) = f_{x_1}(P_0)dx_1 + f_{x_2}(P_0)dx_2 + \cdots + f_{x_m}(P_0)dx_m.}$$

4.5. KÕRGEMAT JÄRKU OSATULETISED

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Leiame esimest järku osatuletised. Osatuletised on argumentide x, y funktsioonid, **leiame uuesti osatuletised x ja y järgi**, saame teist järku osatuletised.

Teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y).$$

Teist järku tuletisi võib omakorda diferentseerida x ja y järgi, saame **kolmandat järku osatuletised**

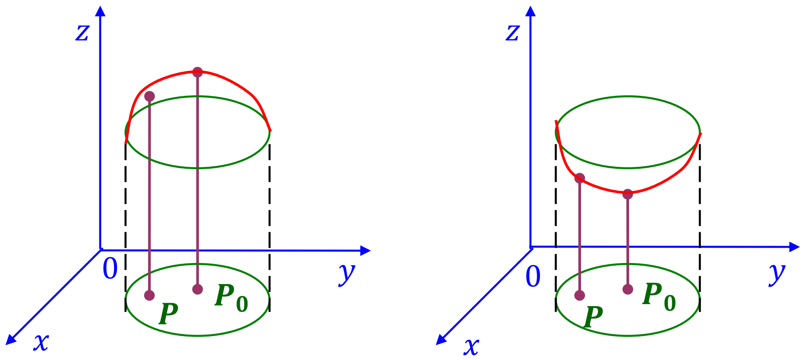
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}.$$

4.6. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID. OPTIMISEERIMINE

Tuletame kõigepealt meelde ühe muutuja funktsiooni jaoks ekstreemumite tarvilikke tingimusi. Funktsioonil $y = f(x)$ on punktis $x = x_0$ maksimum parajasti siis, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$. ja miinimum parajasti siis, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$.
Punkti ümbruse mõistest järeldub, et punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$ kuulub punkti P_0 r–ümbrusesse siis ja ainult siis, kui $h^2 + k^2 < r^2$.
Tõepoolest, kui leiame punktide $P_0(x_0, y_0)$ ja $P(x_0 + h, y_0 + k)$ vahelise kauguse, saame

$$\sqrt{(x_0 + h - x_0)^2 + (y_0 + h - y_0)^2} < r, \qquad \sqrt{h^2 + k^2} < r.$$

Definitsioon 4.17.
Funktsioonil $z = f(x, y)$ on lokaalne maksimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti küllalt väike ümbrus, mille kõikides punktides $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.



Definitsioon 4.18.
Funktsioonil $z = f(x, y)$ on lokaalne miinimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti küllalt väike ümbrus, mille kõikides punktides $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Kui funktsioonil on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis kehtivad tingimused:

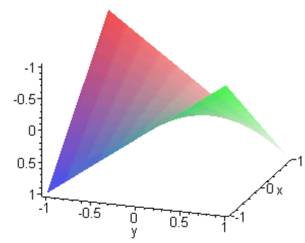
$$\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.}$$

Tõepoolest, kui kahe muutuja funktsioonil on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis ka ühe muutuja funktsioonil $F(x, y_0)$ on punktis $x = x_0$ ekstreemum ja järelikult tema tuletis argumendi x järgi on võrdne nulliga. Samuti peab ekstreemumpunktis $x = x_0$ osatuletis argumendi y järgi olema võrdne nulliga. **Saadud tingimused ei ole piisavad tingimused ekstreemumi olemasoluks.**

Näide 4.12. Leida funktsiooni $z = xy$ statsionaarsed punktid.

Antud funktsiooni korral on tarvilikud tingimused on täidetud aga ekstreemumi ei ole:

$$z_0(0,0): \; z'_x(z_0) = 0, \quad z'_y(z_0) = 0.$$

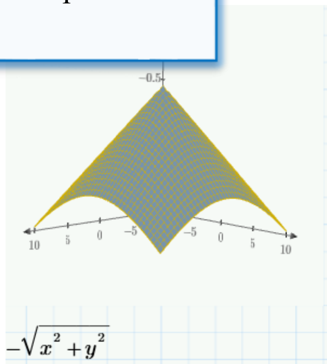


Definitsioon 4.19.

Statsionaarseks punktiks nimetatakse punkti, mille korral funktsiooni kõik osatuletised selles punktis on võrdsed nulliga.

Definitsioon 4.20.

Kriitiliseks punktiks nimetatakse punkti, kui see punkt on statsionaarne punkt või osatuletist selles punktis ei eksisteeri või osatuletis on lõpmatu.



Näiteks funktsioonil $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$ on kriitiliseks punktiks $(0,0)$ (joonis).
Funktsiooni kriitiline punkt võib asetseda ka määramispiirkonna rajajoonel.
Funktsioonil võib lokaalne ekstreemum esineda vaid tema kriitilises punktis.

Teoreem 4.7.

Kui funktsioonil $z = f(x,y)$ on olemas punkti (x_0, y_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis (x_0, y_0), kus

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

on lokaalne ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0,$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0)

lokaalne maksimum, kui selles punktis $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$,
lokaalne miinimum, kui $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Kui $W(x,y) < 0$, siis funktsioonil $f(x,y)$ selles punktis lokaalset ekstreemumit ei ole. Kui $W(x,y) = 0$, siis tuleb funktsiooni käitumist uurida, kas Δz säilitab märki punkti (x_0, y_0) ümbruses.
$\boldsymbol{W(x,y)}$ nimetatakse funktsiooni **diskriminandiks.**

Näide 4.13. Leida funktsiooni $z = 3x + 24y - x^3 - 2y^3$ lokaalsed ekstreemumid.

$$f'_x = 3 - 3x^2, \;\; 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1;$$

$$f'_y = 24 - 6y^2, \;\; 6y^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2.$$

Funktsiooni statsionaarsed punktid on: $(1,2)$; $(1,-2)$; $(-1,2)$; $(-1,-2)$. Saime neli punkti. Kontrollime nendes punktides diskriminandi W väärtust.

$f''_{xx} = -6x, \quad f''_{yy} = -12y, \quad f''_{xy} = 0.$

$W = (-6x)(-12y) - 0^2 = 72xy.$

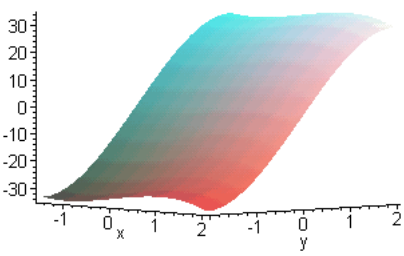
$(1,-2)$: $72 \cdot 1 \cdot (-2) < 0$; $(-1,2)$: $72 \cdot (-1) \cdot 2 < 0$;

$(1,2)$: $72 \cdot 1 \cdot 2 > 0$; $f''_{xx} = -6x = -6 < 0$.

Maksimumpunkt: $z(1,2) = 3 + 48 - 1 - 16 = 34$,

$(-1,-2)$: $72 \cdot (-1) \cdot (-2) > 0$; $f''_{xx} = -6x = 6 > 0$.

Miinimumpunkt: $z(-1,-2) = -3 - 48 + 1 + 16 = -34$.



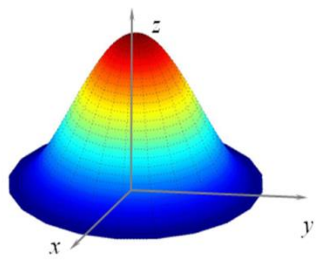
Seega funktsiooni lokaalsed ekstreemumid on:

$$z_{\min}(-1,-2) = -34; \;\; z_{\max}(1,2) = 34.$$

Näide 4.14. Leida funktsiooni $z = \cos\,(y^2 + x^2)$ lokaalsed ekstreemumid.

$$z'_x = -2x\sin\,(y^2+x^2), \quad z'_y = -2y\sin\,(y^2+x^2).$$

$$\begin{cases} -2x\sin\,(y^2+x^2) = 0 \\ -2y\sin\,(y^2+x^2) = 0 \end{cases}.$$



Ekstreemumpunktiks on punkt koordinaatidega $(0;0)$.

$$z''_{xx} = -2\sin(y^2+x^2) - 4x^2\cos(y^2+x^2),$$

$$z''_{yy} = -2\sin\,(y^2+x^2) - 4y^2\cos(y^2+x^2),$$

$$z''_{xy} = -4xy\cos\,(y^2+x^2).$$

$$W = (-2\sin(y^2+x^2) - 4x^2\cos(y^2+x^2))(-2\sin\,(y^2+x^2) - 4y^2\cos(y^2+x^2)) - \left(-4xy\cos\,(y^2+x^2)\right)^2.$$

$W(0,0) = 0$. Kuna diskriminant on võrdne nulliga, tuleb funktsiooni täiendavalt uurida, jooniselt on näha, et tegemist on maksimumpunktiga.
Kui kolme muutuja funktsioonil $u = f(x,y,z)$ on olemas punkti (x_0, y_0, z_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$, kus

$$\boldsymbol{f'_x(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad f'_y(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad f'_z(x_0,y_0,z_0) = 0}$$

on lokaalne ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$\boldsymbol{W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0,}$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0, z_0)

lokaalne maksimum, kui selles punktis $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) < 0,\; A = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0,}$

lokaalne miinimum, kui $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) > 0,\; A = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0.}$

Definitsioon 4.21.

Globaalseks ekstreemumiks nimetatakse funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust antud piirkonnas.

Nende leidmiseks peame leidma kõigepealt lokaalsed ekstreemumid, seejärel leiame funktsiooni väärtused rajapunktides, neist suurim on globaalne maksimum ja vähim on globaalne miinimum.

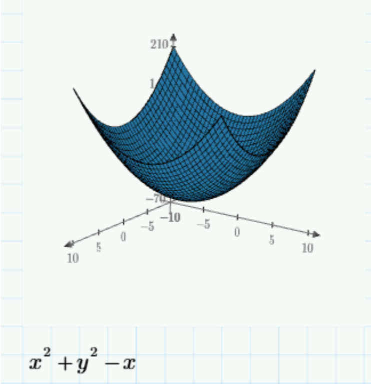
Definitsioon 4.22.
Kui funktsioon f on antud piirkonnas D, siis funktsioonil on punktis $P_0 \in D$ **globaalne maksimum**, kui piirkonna D igas punktis P kehtib võrratus

$$f(P) \leq f(P_0)$$

ja **globaalne miinimum**, kui piirkonna D igas punktis kehtib võrratus

$$f(P) \geq f(P_0).$$

Näide 4.15. Leida funktsiooni $z = x^2 + y^2 - x$ globaalsed ekstreemumid piirkonnas $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.



$z'_x = 2x - 1, \quad z'_y = 2y, \quad z''_{xx} = 2, \quad z''_{yy} = 2, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0.$
Võrdsustades kaks esimest võrrandit nulliga, saame statsionaarseks punktiks

$$x = \frac{1}{2}, y = 0.$$

Funktsiooni väärtus selles punktis on

$$z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

Piirkonna rajajoon on ringjoon keskpunktiga koordinaatide alguspunktis, raadiusega 1. Rajajoonel kehtib võrrand $x^2 + y^2 = 1$ ehk $y^2 = 1 - x^2$, kus $x \in [-1, 1]$. Kontrollime rajajoonel olevaid funktsiooni väärtuseid punktides $(-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ ja $(0, 1)$, kust leiame maksimaalse ja minimaalse, seejärel võrdleme neid väärtuseid leitud lokaalsete ekstreemumitega.
Suurim väärtus rajajoonel on $z(-1, 0) = 2$ ja vähim $z(1,0) = 0$. Seega funktsiooni globaalsed ekstreemumid on

$$z_{\min}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}; \; z_{\max}(-1, 0) = 2.$$

Definitsioon 4.23.
Funktsiooni $f(x, y)$ optimiseerimiseks nimetatakse funktsiooni maksimumi ja miinimumi (ekstreemumite) leidmist.

Paljudes optimiseerimisülesannetes on vaja rahuldada ka lisatingimused, mis kujutavad endast ühte või mitut muutujate vahelist seost. Lihtsamatel juhtudel saab kasutada muutujate elimineerimise võtet, kus üks või mitu lisatingimust võimaldavad avaldada tundmatu teiste kaudu ja asendada võrranditesse.

4.6.1. TINGLIKUD EKSTREEMUMID. LAGRANGE'i MEETOD

Lagrange'i kordajate meetod on lisakitsendustega optimiseerimisülesande lahendusmeetod. Ülesande lahendamiseks tuleb moodustada Lagrange'i funktsioon (laiendatud funktsioon)

$$\boldsymbol{J = f + \lambda g},$$

kus f on funktsioon, $\boldsymbol{g}$ **lisatingimus** kujul $g = 0$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ **Lagrange'i kordaja**, mille peame leidma. Lahendamiseks leiame osatuletised funktsioonist J kõigi tundmatute järgi, võrdsustame osatuletised nulliga. Saame süsteemi, kus lisaks osatuletistele on vaja rahuldada lisatingimus $g = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0, i = 1,2, \dots , n \\ g = 0 \end{cases}$$

Saadud võrrandisüsteemist leiame **tinglikud statsionaarsed punktid**.
Seejuures eeldame, et nende punktide ümbrustes, mis on saadud süsteemi lahenditeks, on funktsioonide f ja J esimest järku osatuletised pidevad.

Definitsioon 4.24.
Tinglikuks kriitiliseks punktiks nimetatakse punkti, kui see punkt on statsionaarne punkt või punkte, mis rahuldavad lisatingimust ja kus funktsioonide f ja J osatuletised ei ole pidevad.

Funktsioonil võib tinglik lokaalne ekstreemum esineda vaid tema tinglikus kriitilises punktis. Kui Lagrange'i funktsioonil J on tinglikus statsionaarses punktis vastava $\lambda = \lambda_0$ korral lokaalne või globaalne ekstreemum, siis funktsioonil f on selles punktis P_0 vastav tinglik lokaalne või globaalne ekstreemum.

Vaatame kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$, mille jaoks on vaja leida lokaalne ekstreemum lisakitsenduse $g(x, y) = 0$ korral. Siis Lagrange'i funktsioon on kujul $J = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ja statsionaarsed punktid leiame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ ja lisakitsenduse $g(x, y, z) = 0$ jaoks on Lagrange'i funktsioon kujul $J = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ ja statsionaarsete punktide leidmiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} = 0, \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Saame kolm võrrandit ekstreemumite leidmiseks, **lisaks peab olema rahuldatud lisakitsendus**. Kokku neljast võrrandist leiame ekstreemumpunkti kõik koordinaadid (x, y, z) ja Lagrange'i kordaja λ väärtuse.

Märkus. Kui võtame osatuletise ka Lagrange'i kordaja λ järgi, saame võrrandi $g(x, y, z) = 0$, seega võime lisatingimuse asendada osatuletisega:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0.$$

Näide 4.16. Leida lokaalsed tinglikud ekstreemumid funktsioonile $f = x^2 + y^2$ lisakitsendusel $x + y = 4$.

Moodustame laiendatud funktsionaali $J = f + \lambda g$, mis sisaldab funktsiooni ja Lagrange'i kordajaga läbikorrutatud lisatingimust:

$$J = x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 4).$$

Võtame osatuletised tundmatute järgi, saame

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = 2x + \lambda \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2y + \lambda \end{cases},$$

Võrdsustame saadud osatuletised nulliga, lisakitsendusega koos saame lahendamiseks süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

Süsteemi lahenditeks on $x = 2, y = 2, \lambda = -4$. Kuna $f''_{xx} = 2 > 0$, siis leitud punkt võib olla lokaalseks miinimumpunktiks. Kui uurime ekstreemumi piisavaid tingimusi, selgub, et

$$W = 2 \cdot 2 - 0 > 0,$$

seega tegemist on lokaalse ekstreemumiga. Leitud punktile $(2, 2)$ vastav funktsiooni väärtus on 8. Seega funktsioonil on lokaalne tinglik miinimum $f_{\min}\,(8, 2) = 8$.

Üldjuht. Olgu antud n muutuja funktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja lisatingimused $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_k, k = 1,2, \dots, m$, kus $a_1, a_2, \dots, a_m$ on konstandid. Tuleb konstrueerida abifunktsioon

$$\boldsymbol{J} = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ \dots + \lambda_m g_m = \boldsymbol{f} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\lambda_k g_k}.$$

Osatuletised argumentide järgi

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}.$$

Osatuletised võrdsustame nullidega ja lisame lisakitsendused, saame lahendamiseks järgmise süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0, \ \ i = 1,2, \dots, n, \\ \qquad\qquad g_k = a_k, \ \ k = 1,2, \dots, m. \end{cases}$$

Tundmatuid on kokku $m + n$: argumente x_i on n ja Lagrange'i kordajaid λ_i on m.

Näide 4.17. Ruutvormid n muutujaga:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_i x_j\,, \quad g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

kus $C_{ij} = C_{ji}$ on konstandid. Juhul $n = 3$ saame

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} C_{ij} x_i x_j$$
$$= C_{11} x_1^2 + 2C_{12} x_1 x_2 + 2C_{13} x_1 x_3 + C_{22} x_2^2 + 2C_{23} x_2 x_3 + C_{33} x_3^2,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Lagrange'i kordajate meetod

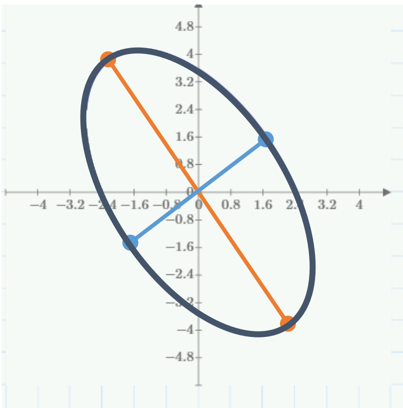
$$J = (C_{11} - \lambda)x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + 2C_{13}x_1x_3 + (C_{22} - \lambda)x_2^2 + 2C_{23}x_2x_3 + (C_{33} - \lambda)x_3^2,$$

$$\begin{cases} (C_{11} - \lambda)x_1 + C_{12}x_2 + C_{13}x_3 = 0 \\ C_{21}x_1 + (C_{22} - \lambda)x_2 + C_{23}x_3 = 0 \\ C_{31}x_1 + C_{32}x_2 + (C_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Saime karakteristliku võrrandisüsteemi.

Näide 4.18. Leida punktid ellipsil $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$, mis on kõige lähemalt ja kõige kaugemal koordinaatide alguspunktist.

Tegemist on ellipsiga (vt joonis), mille keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis ja me peame leidma punktide koordinaadid ellipsi lühema ja pikema pooltelje jaoks, mis annavadki lühima ja pikima kauguse koordinaatide alguspunktist.



Peame leidma ekstreemumid funktsioonile, mis leiab kauguse koordinaatide alguspunkti ja ellipsi suvalise punkti vahel. Tähistame suvalise ellipsi punkti tähega $P(x, y)$, siis kaugus avaldub

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Et ekstreemumi leidmine oleks lihtsam, võtame funktsiooniks kauguse ruudu $d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2$, lisakitsenduseks on ellipsi võrrand $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$. Seega laiendatud funktsionaal saab kuju

$$J = x^2 + y^2 + \lambda(17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100).$$

Leiame osatuletised kõigi tundmatute järgi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = 2x + 34\lambda x + 12\lambda y \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2y + 12\lambda x + 16\lambda y \\ \dfrac{\partial J}{\partial \lambda} = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 \end{cases}$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + \lambda(34x + 12y) = 0 \\ 2y + \lambda(12x + 16y) = 0 \\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100 \end{cases}$$

Esimesest kahest võrrandist avaldame Lagrange'i kordaja λ ja paneme mõlemad avaldised omavahel võrduma, saame

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y}, \quad 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2.$$

Lihtsustame ja jagame võrrandit arvuga (-3), saame

$$8x^2 - 12xy - 8y^2 = 0.$$

Liites saadud võrrandi juurde viimasele süsteemi võrrandile, saame

$$25x^2 = 100, \qquad x = \pm 2.$$

Edasi leiame argumendi y väärtused. Kui $x = 2$, siis

$$y^2 + 3y - 4 = 0,$$

kust saame $(y-1)(y+4) = 0$ ehk $y = 1, y = -4$.
Kui $x = -2$, siis

$$y^2 - 3y - 4 = 0,$$

kust saame $(y+1)(y-4) = 0$ ehk $y = -1, y = 4$.
Kokkuvõttes oleme saanud 4 ekstreemumpunkti: $(2,1), (-2,-1), (2,-4)$ ja $(-2,4)$. Punktide koordinaatide põhjal saame öelda, et kaks esimest punkti on koordinaatide alguspunktile kõige lähemal ja kolmas ja neljas punkt on kõige kaugemal punktist (0,0).

4.7. VÄHIMRUUTUDE MEETOD

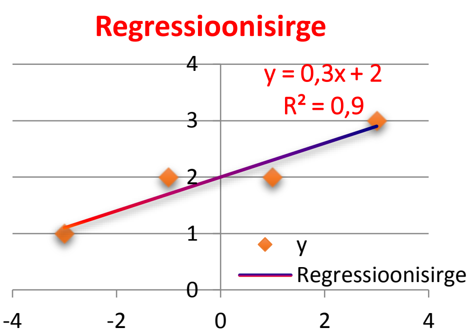
Kui ei ole olemas funktsiooni esitust analüütiliselt, vaid on uurimistulemused tabeli kujul (katseandmed)

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

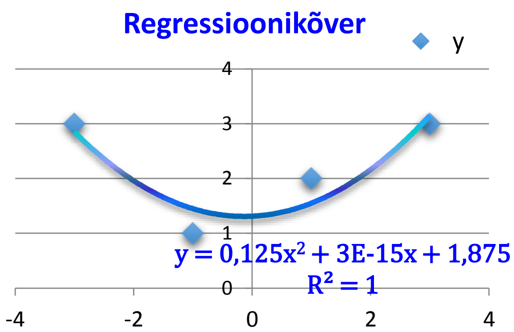
Tahame saada antud sõltuvuse esitust valemi kujul $\boldsymbol{y = f(x)}$. Saame tuletada ligikaudse valemi. **Vähimruutude meetodi idee** seisneb selles, et parimaks valemiks, mis esitab katseliselt saadud sõltuvust, peetakse seda, mille puhul katsel saadud väärtuste ja valemi järgi arvutatud väärtuste vahede ruutude summa on vähim.

Kõigepealt tuleb ette anda funktsiooni $y = f(x)$ kuju, mis sisaldab teatava arvu parameetreid. Nende parameetrite leidmiseks kasutame vähimruutude meetodit. Milline funktsioon valida, selleks tuleks katseandmed kanda joonisele. Paarid $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ esitavad punkte xy tasandil. Kui graafikul on näha, et punktid on grupeerunud järgmisel viisil:

- teatud **sirge** lähedale (joonis 1), siis võib eeldada, et x ja y vahel on lineaarne sõltuvus, mis on esitatav valemiga $\boldsymbol{y = ax + b}$, kus $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on otsitavad parameetrid;
- mingi **kõvera** ümbruses (joonis 2), siis on tegemist ruutsõltuvusega $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, kus otsitavad $\boldsymbol{a, b}$ ja $\boldsymbol{c}$ leiame vähimruutude meetodil;

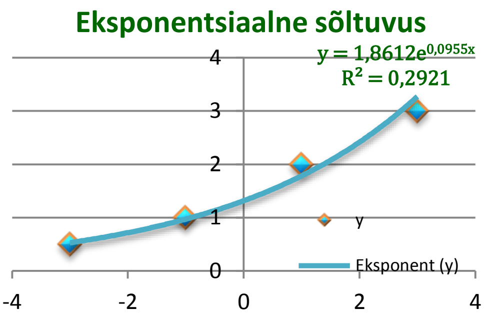


Joonis 1.



Joonis 2.

- **eksponentsiaalne** sõltuvus (joonis 3) $\boldsymbol{y = ab^x}$ kus otsitavad on $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$.



Joonis 3.

Lineaarne regressioon.

Olgu antud empiiriline valem kujul $y = ax + b$. Leiame parameetrid a ja b tingimusest, et sirge tuleb tõmmata nii, et empiiriliselt saadud punktide ordinaatide ja samadele abstsissidele vastavate sirgete punktide ordinaatide vahede ruutude summa on minimaalne, ehk

$$u = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \to \min$$

Saadud summat võib vaadelda kui kahe muutuja funktsiooni a ja b suhtes ((x_k, y_k) on etteantud). Tuleb leida funktsiooni $u = u(a, b)$ miinimum. Tarvilik tingimus selleks on osatuletiste nulliga võrdumine:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$$

Leiame vastavad osatuletised:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-x_2) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-x_n);$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-1) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-1).$$

Võrdsustades osatuletised nulliga, saame a ja b suhtes 2 lineaarset võrrandit kahe tundmatuga:

$$\begin{cases} 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-x_2) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-x_n) = 0 \\ 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-1) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + (ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \ldots + (ax_n + b - y_n) \cdot x_n = 0 \\ (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \ldots + (ax_n + b - y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \\ a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + b \cdot n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Saadud süsteemi nimetatakse **normaalvõrrandite süsteemiks**. Leiame siit a ja b ning asetame empiirilisse valemisse $y = ax + b$. Seda nimetatakse ka **lineaarseks regressiooniks**. Kontrollime, kas on tegemist miinimumiga ja ka ekstreemumi piisavaid tingimusi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \Rightarrow \quad \min,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Schwartz'i Bunjakowski võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \cdot \mu_i)^2, \qquad (\gamma_i = x_i;\ \mu_i = 1).$$

Regressioonikõver.

Olgu x ja y vaheline seos kirjeldatav ruutseosega $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$. Leiame kordajad a, b ja c vähimruutude meetodi abil:

$$u = [y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)]^2 + [y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n^2 + bx_n + c)]^2.$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2, \qquad u = u(a, b, c).$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] \cdot (-x_1^2) + 2[y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)] \cdot (-x_2^2) + \ldots$$
$$+2[y_n - (ax_n^2 + bx_n + c)] \cdot (-x_n^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 2[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)] \cdot (-x_2) + \cdots$$
$$+2[y_n - (ax_n^2 + bx_n + c)] \cdot (-x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = 2[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] \cdot (-1) + 2[y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)] \cdot (-1) + \cdots$$
$$+2[y_n - (ax_n^2 + bx_n + c)] \cdot (-1).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-x_i^2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-x_i). \\ \dfrac{\partial u}{\partial c} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-1) \end{cases}$$

Funktsiooni $u = u(a, b, c)$ miinimumi tarvilikud tingimused on:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0.$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2[-y_i x_i^2 + a x_i^4 + b x_i^3 + c x_i^2] = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2[-y_i x_i + a x_i^3 + b x_i^2 + c x_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2[-y_i + a x_i^2 + b x_i + c] \qquad = 0 \end{cases}.$$

Süsteem kordajate leidmiseks:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i} \\ \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i} \\ \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i} \end{cases}.$$

Piisavus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 2x_1^4 + 2x_2^4 + \ldots + 2x_n^4 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 > 0 \Rightarrow \quad \text{min},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 2\left(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3\right) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} = 2\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Eksponentsiaalne sõltuvus.

Otsime valemit kujul $\boldsymbol{y = ab^x}$, otsitavateks on parameetrid a ja b. Logaritmime ja kasutame logaritmi omadusi:

$$\log y = \log(a \cdot b^x); \qquad \log y = \log a + x \log b.$$

Näeme, et $\log y$ sõltub argumendist x lineaarselt. Leiame parameetrid kujul $\log a$, $\log b$

$u = [\log y_1 - (x_1 \log b + \log a)]^2 +$

$$+[\log y_2 - (x_2 \log b + \log a)]^2 + \ldots + [\log y_n - (x_n \log b + \log a)]^2,$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} [\log y_i - (x_i \log b + \log a)]^2, \qquad u = u(\log a, \log b).$$

Miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial(\log b)} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = \sum_{i=1}^{n} 2[\log y_i - (x_i \log b + \log a)] \cdot (-1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial(\log b)} = \sum_{i=1}^{n} 2[\log y_i - (x_i \log b + \log a)] \cdot (-x_i),$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \log b + n \cdot \log a = \sum_{i=1}^{n} \log y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \log b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log a = \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\log b \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \log a = \sum_{i=1}^{n} \log y_i} \\ \boldsymbol{\log b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \log a \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log y_i} \end{cases}$$

Siit saab leida $\log a$ ja $\log b$, nendest avaldada otsitavad a ja b.

Piisavus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(\log a)^2} = 2n, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial(\log b)^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial(\log a)\partial(\log b)} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Schwartz'i-Bunjakowski võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \cdot \mu_i)^2, \qquad (\gamma_i = x_i; \ \mu_i = 1).$$

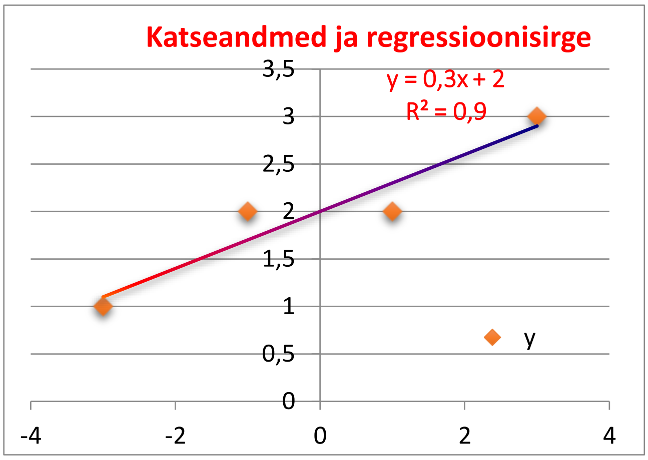
Näide 4.19. Katse tulemusel saadi järgmised x ja y väärtused:

x	-3	-1	1	3
y	1	2	2	3

Leida sirge võrrand, mis väljendaks sõltuvust $y = ax + b$. Saadud seose põhjal prognoosida $y(2)$.

Arvutuste lihtsustamiseks on mõistlik paigutada lähteandmed koos tehetega tabelisse.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	-3	1	9	-3
	-1	2	1	-2
	1	2	1	2
	3	3	9	9
Summa	**0**	**8**	**20**	**6**
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$



$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20a + 0b = 6 \\ 0\,a + 4b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3 \\ b = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Regressioonisirge võrrand on $y = 0,3x + 2$. Argumendi väärtuse 2 korral prognoositav väärtus on

$$y(2) = 0,3 \cdot 2 + 2 = 2,6.$$

Arvutused on lihtsalt teostatavad näiteks Microsoft Exceli tabelarvutusprogrammi kasutades, pannes paika esimesed valemid ja kopeerides valemid kõigi argumendi väärtuste jaoks. Graafikule saab lisada regressioonisirge, kui valida **Scatter** tüüpi graafik (ainult punktid) ja parema hiireklahviga katseandmete peal valides avanevast rippmenüüst **Add Trendline**. Samas on Excelis olemas funktsioonid regressioonisirge kordajate a ja b arvutamiseks, need on vastavalt $slope(x,y)$ ja $intercept(x,y)$, kus argumentide x ja y asemele tuleb märkida piirkond vastavate argumentide arvuliste väärtuste asukohaga.
Täpselt samal kujul on olemas funktsioonid ka näiteks inseneriprogrammis *Mathcad 15.0* või *Mathcad Prime 2.0*, mis lisaks MS Exceli võimalustele lubab teha integraal- ja diferentsiaalarvutust, sümbolarvutust, lahendada võrrandeid, võrrandisüsteeme ja diferentsiaalvõrrandeid, lisaks teha kolmedimensionaalseid graafikuid pindadest ning koostada animatsioone.

4.8. LIITFUNKTSIOONI TULETIS. TÄISTULETIS

Olgu antud funktsioon $z = F(u,v)$, kus u ja v on sõltumatute muutujate x ja y funktsioonid: $u = \varphi(x,y)$, $v = \omega(x,y)$. Sellisel juhul on z argumentide x ja y liitfunktsioon. Funktsiooni z võib avaldada ka vahetult x ja y kaudu

$$z = F\big(\varphi(x,y), \omega(x,y)\big) \tag{24}$$

Näide 4.20. Näide liitfunktsiooni kohta: $z = u^3v^3 + u + 1,\ \ u = x^2 + y^2,\ \ v = e^{x+y} + 1$.

$$z = (x^2 + y^2)^3(e^{x+y} + 1)^3 + x^2 + y^2 + 1.$$

Eeldame, et funktsioonide $z = F(u,v), u = \varphi(x,y), v = \omega(x,y)$ osatuletised argumentide järgi on pidevad. Püüame leida osatuletised mitte kasutades võrrandit (24). Anname argumendile x muudu Δx, jättes y väärtuse muutumatuks. Siis funktsioonid u ja v saavad muudu $\Delta_x u, \Delta_x v$ ja ka funktsioon $z = F(u,v)$ saab muudu Δz.

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1\Delta_x u + \gamma_2\Delta_x v\,, \qquad |: \Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Leiame piirväärtuse, kui $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0.$$

Järelikult

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Andes argumendile y muudu Δy ja jättes x muutumatuks, võib analoogiliselt leida

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Näide 4.21. Leida osatuletised funktsioonile $z = \ln\,(u^2 + v),\quad u = e^{x+y^2},\quad v = x^2 + y$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2ue^{x+y^2}}{u^2+v} + \frac{2x}{u^2+v} = \frac{2}{u^2+v}(u^2+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u2ye^{x+y^2}}{u^2+v} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}(4u^2y+1).$$

Näide 4.22. Leida osatuletised funktsioonile $z = \sin\,(u^2 + v^3),\quad u = e^{2x},\quad v = \ln x$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos\,(u^2+v^3)\cdot 2u, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \cos\,(u^2+v^3)\cdot 3v^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\,(u^2+v^3)\cdot 2u\cdot 2e^{2x} + \cos\,(u^2+v^3)\cdot 3v^2\cdot\frac{1}{x} = \cos\,(u^2+v^3)\left(4u^2 + \frac{3v^2}{x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\,(u^2+v^3)\cdot 2u\cdot 0 + \cos\,(u^2+v^3)\cdot 3v^2\cdot 0 = 0.$$

Saadud valemeid võib üldistada suurema arvu muutujate juhule. Olgu $w = F(z,u,v,s)$,kus z,u,v ja s on sõltumatute muutujate x ja y funktsioonid $z = z(x,y), u = u(x,y), v = v(x,y), s = s(x,y)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}.$$

Olgu antud funktsioon $z = F(x,y,u,v)$, kus $y = y(x), u = u(x), v = v(x)$, siis z on tegelikult ühe muutuja x funktsioon ja leiame tema tuletise x järgi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = 1.$$

Saame **liitfunktsiooni täistuletise** valemi

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Erijuhul, kui funktsioon $\boldsymbol{u = f(x,y,z)}$ muutub ajas, ehk $\boldsymbol{x = x(t), y = y(t), z = z(t)}$, siis funktsiooni täistuletis avaldub kujul

$$\boldsymbol{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}}.$$

Näide 4.23. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 + \sqrt{y}\,,\ y = \sin x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

4.8.1. LIITFUNKTSIOONI TÄISDIFERENTSIAAL

Vaatame funktsiooni $z = F(u,v)$, kus $u = \varphi(x,y)$, $v = \omega(x,y)$. Arvutame täisdiferentsiaali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Asendame siia vastavad liitfunktsioonide osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right),$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv, \qquad \boldsymbol{dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv}.$$

Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali avaldis on **invariantne** ehk ei olene sellest, kas u ja v on sõltumatud muutujad või funktsioonid.

Näide 4.24. Leida liitfunktsiooni täisdiferentsiaal $z = u^2 v^3,\ u = x^2 \sin y,\ v = x^3 e^y$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^3, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 3v^2, \quad dz = 2uv^3 du + 3u^2v^2 dv.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 e^y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x^3 e^y.$$

$$du = 2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy, \qquad dv = 3x^2 e^y\, dx + x^3 e^y\, dy.$$

$$dz = 2uv^3(2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy) + 3u^2v^2(3x^2 e^y\, dx + x^3 e^y\, dy),$$

$$dz = (4uv^3 x \sin y + 9u^2v^2x^2e^y)dx + (2uv^3x^2 \cos y + 3u^2v^2x^3e^y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

4.9. ILMUTAMATA FUNKTSIOONI TULETIS

Väljendagu suuruste x ja y vahelist sõltuvust võrrand $F(x,y) = 0$.

Teoreem 4.8.

Kui pidev funktsioon y on antud ilmutamata kujul võrrandiga

$$\boldsymbol{F(x,y) = 0}$$

ja $F(x,y), F'_x, F'_y$ on pidevad punktis (x,y) ja $F'_y(x,y) \neq 0$, siis funktsiooni y tuletis vaadeldavas punktis on

$$\boldsymbol{y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}}.$$

Tõestus.
Anname sõltumatule muutujale x muudu Δx. Siis funktsioon y saab muudu Δy ehk argumendi väärtusele $x + \Delta x$ vastab funktsiooni väärtus $y + \Delta y$. Seetõttu $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$. Järelikult ka $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = 0$. See on kahe muutuja funktsiooni täismuut

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y.$$

Kuna võrrandi vasak pool võrdub nulliga, järelikult on null ka parem pool

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0, \qquad |: \Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma_1 + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Avaldame sellest suhte $\Delta y / \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Leiame piirväärtuse, kui argument $\Delta x \to 0$. Siis ka $\gamma_1 \to 0, \gamma_2 \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}}.$$

Me ei tea funktsiooni kuju $y = f(x)$, aga oskame leida y tuletist ∎

Näide 4.25. Leida funktsiooni $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ tuletis.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \qquad y'_x = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Teine võimalus tuletise arvutamiseks on arvestada, et funktsioon y sõltub argumendist x, tuletise leidmiseks kasutame liitfunktsiooni tuletise reeglit.

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

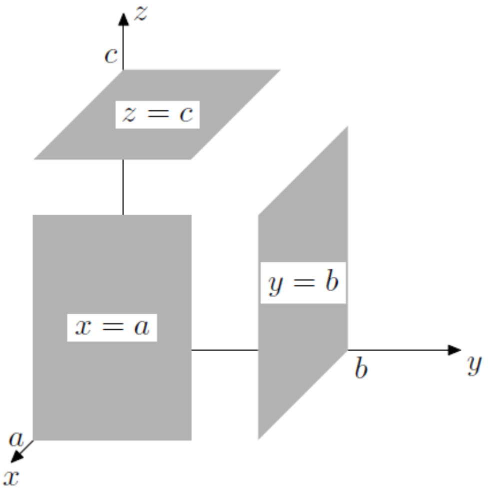
Näide 4.26. Leida funktsiooni $e^y - e^x + xy = 0$ tuletis.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x, \qquad y'_x = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

$$e^y \cdot y' - e^x + y + xy' = 0, \qquad y' \cdot (e^y + x) = e^x - y \;\Rightarrow\; y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

4.10. NIVOOJOONED, NIVOOPINNAD. TULETIS ANTUD SUUNAS

Kahe muutuja funktsiooni graafiku joonestamisel on abiks selle lõiked tasanditega, mis on risti ühega kolmest koordinaatteljest (paralleelne ühega koordinaattasanditest). Koordinaattasandite võrrandid on järgmised.
yz-tasandi võrrand on $x = 0$, xz-tasandi võrrand on $y = 0$, xy-tasandi võrrand $z = 0$.
Tasand $x = a$ on x-teljega risti, yz-tasandiga paralleelne.
Tasand $y = b$ on y-teljega risti, xz-tasandiga paralleelne.
Tasand $z = c$ on z-teljega risti, xy-tasandiga paralleelne.

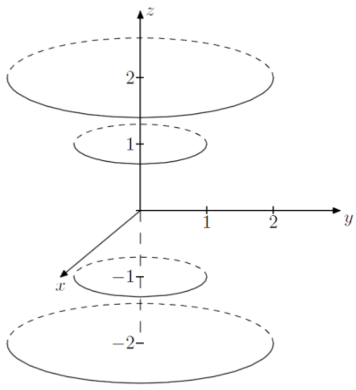


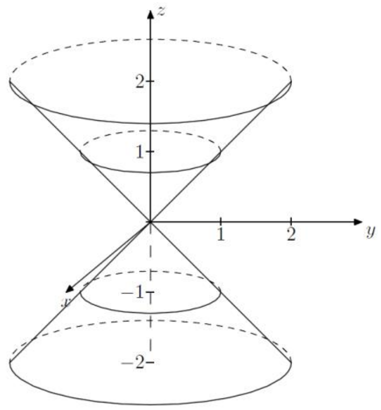
Definitsioon 4.24.
Pinna $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **nivoojoonteks**
(tasandilõigeteks tasanditega $z = C$ erinevate C väärtuste korral) nimetatakse **jooni** $\boldsymbol{z = f(x, y) = C}$.

Näide 4.26. Joonestada pinna $z^2 = x^2 + y^2$ nivoojooned, mis tekivad pinna lõikamisel tasanditega

$$z = 0,\ z = 1,\ z = -1 \text{ ja } z = 2,\ z = -2$$

ning lõiget tasandiga $x = 0$.

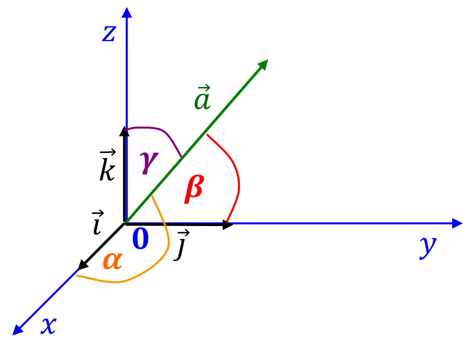




Olgu ruumi mingis piirkonnas D defineeritud funktsioon $u = u(x, y, z)$. Sel juhul öeldakse, et piirkonnas D on antud skalaarne väli. Kui $u = u(x, y, z)$ tähendab näiteks temperatuuri punktis $M(x, y, z)$, siis öeldakse, et on antud temperatuuriväli.
Kui piirkond D on täidetud vedeliku või gaasiga ja $u = u(x, y, z)$ tähendab rõhku punktis $M(x, y, z)$, siis on tegemist rõhuväljaga.
Vaatleme piirkonna D punkte, kus funktsioonil $u = u(x, y, z)$ on konstantne väärtus C: $u = u(x, y, z) = C$.
Need punktid moodustavad mingisuguse pinna. Kui võtame konstandile C teise väärtuse, saame teise pinna. Neid pindu nimetatakse **nivoopindadeks**.

Definitsioon 4.25.
Vektori suunakoosinusteks nimetatakse nende nurkade koosinusi, mis vektor moodustab koordinaattelgede positiivsete suundadega. Tähistame $\boldsymbol{\cos\alpha}, \boldsymbol{\cos\beta}, \boldsymbol{\cos\gamma}$.

$\vec{\imath} = (1,0,0)$, $|\vec{\imath}| = 1$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, $|\vec{\jmath}| = 1$, $\vec{k} = (0,0,1)$, $|\vec{k}| = 1$.



Kui leiame skalaarkorrutise vektorist $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ja ühikvektorist $\vec{\imath} = (1,0,0)$, saame

$$\vec{a} \cdot \vec{\imath} = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0 = x_1.$$

Skalaarkorrutis on avaldatav ka järgmiselt:

$$\vec{a} \cdot \vec{\imath} = |\vec{a}||\vec{\imath}| \cos\alpha, \quad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}}.$$

Analoogiliselt saame leida suunakoosinused

$$\boldsymbol{\cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}}; \quad \boldsymbol{\cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}}.$$

Tõstame kõik suunakoosinused ruutu ja liidame kokku

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z_1^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{|\vec{a}|^2}.$$

Et $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, siis $\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$.

Olgu vektor $\vec{e}$ vektoriga $\vec{a}$ kollineaarne ühikvektor, siis $|\vec{e}| = 1$.

$$\vec{e} = \left(\frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

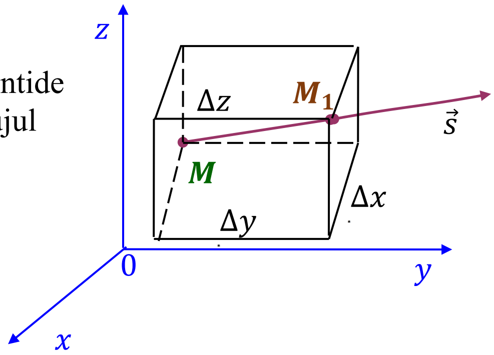
$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.$$

TULETIS ANTUD SUUNAS

Vaatleme piirkonnas D funktsiooni $u = u(x, y, z)$ ja punkti $M(x, y, z)$. Rakendame punktis M vektori $\vec{s}$, mille suunakoosinused on $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Võtame vektoril $\vec{s}$ punkti $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, mille kaugus vektori alguspunktist on Δs. Seega

$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, $\overrightarrow{MM_1} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.



Eeldame, et funktsioon u ja tema osatuletised kõikide argumentide järgi on piirkonnas D pidevad. Funktsiooni täismuut esitub kujul

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

kus $\varepsilon_1, \varepsilon_{2,}\varepsilon_1 \to 0$, kui $\Delta s \to 0$.

Jagame võrduse kõik liikmed suurusega Δs

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Järelikult

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.$$

Definitsioon 4.26.

Funktsiooni $\boldsymbol{u = u(x, y, z)}$ tuletiseks punktis $\boldsymbol{(x, y, z)}$ vektori $\vec{s}$ suunas nimetatakse suhte $\boldsymbol{\Delta u/\Delta s}$ piirväärtust, kui $\boldsymbol{\Delta s \to 0}$ ja tähistatakse $\boldsymbol{\partial u/\partial s}$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Leiame piirväärtuse

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Teades osatuletisi, on lihtne leida tuletist suunas $\vec{s}$.

Näide 4.27. Leida funktsiooni u tuletis suunas s, kui on teada suunavektori nurgad koordinaattelgedega

$$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Kuna koosinused antud nurkadest on

$$\cos 0 = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

siis funktsiooni u tuletis suunas s avaldub

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Näide 4.28. Olgu antud funktsioon $u = x^2 + y^2 + z^2$. Leida tuletis $\partial u/\partial s$ punktis $M(1,1,1)$ vektori $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ suunas.

Vektor $\vec{s} = (2; 1; 3)$. Leiame suunakoosinused, siis osatuletised ja asendame valemisse.

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^3} = \sqrt{14}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

4.11. GRADIENT

Vaatleme funktsiooni $u = u(x, y, z)$ määramispiirkonna D igas punktis vektorit, mille projektsioonideks koordinaattelgedel on selle funktsiooni osatuletiste $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z$ väärtused selles punktis.

Definitsioon 4.27.

Gradiendiks nimetatakse vektorit

$$\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Gradienti tähistatakse ka $\nabla f(x,y)$. Ütleme, et piirkonnas D on määratud gradiendi vektorväli.

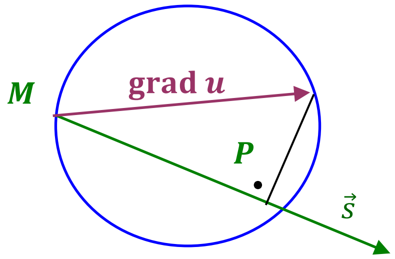
Omadused.
1. Gradient on igas punktis risti pinna nivoojoontega.
2. Gradient on vektor, mis näitab pinna kiireima tõusu suunda, gradiendi vastandvektor näitab kiireima languse suunda.
3. Gradiendiks oleva vektori pikkus näitab suurimat tõusu.

Teoreem 4.9. Kui on antud skalaarne väli $u = u(x,y,z)$ ja selle skalaarse välja gradientväli

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

siis **tuletis $\partial u/\partial s$ vektori $\vec{s}$ suunas** võrdub vektori grad u projektsiooniga vektoril $\vec{s}$.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{s_0} \cdot \operatorname{grad} u, \qquad pr_{\vec{s}} \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial s}.$$



Piltlikult saame esitada nii: vaatame sfääri, millele grad u on diameetriks. Rakendame vektori $\vec{s}$ punktis M

$$MP = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad MP = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Omadused.

1. Tuletis antud punktis vektori $\vec{s}$ suunas on maksimaalne siis, kui vektor $\vec{s}$ on gradiendisuunaline, tuletise maksimaalne väärtus on $|\operatorname{grad} u|$.
2. Tuletis nivoopinna puutuja sihilise vektori suunas võrdub nulliga.

4.12. KÕRGEMAT JÄRKU TÄISDIFERENTSIAAL

Olgu meil funktsioon $z = f(x,y)$. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali nimetatakse ka esimeseks täisdiferentsiaaliks. Olgu funktsioonid f'_x, f'_y diferentseeruvad punktis $M(x,y)$. Järelikult f''_{xy}, f''_{yx} on pidevad ja $f''_{xy} = f''_{yx}$. Esimest järku täisdiferentsiaalil on kuju

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$

kus dx ja dy vaatame kui konstantseid kordajaid. Suurus dz on kahe muutuja funktsioon. Leiame tema täisdiferentsiaali

$$d(dz) = d\big(f'_x dx + f'_y dy\big) = \big(f'_x dx + f'_y dy\big)'_x dx + \big(f'_x dx + f'_y dy\big)'_y dy =$$

$$= \big(f''_{xx} dx + f''_{yx} dy\big)dx + \big(f''_{xy} dx + f''_{yy} dy\big)dy = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2.$$

Saime valemi **teist järku täisdiferentsiaali** jaoks

$$\boldsymbol{d(dz) = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2}.$$

Kolmandat järku täisdiferentsiaali valem

$$\boldsymbol{d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3}.$$

4.13. TAYLORI VALEM MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE JAOKS

Taylori valem ühe muutuja funktsiooni jaoks on kujul

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Olgu antud funktsioon $z = f(x,y)$, mis on määratud mingis piirkonnas S. Eeldame, et punkti $M_0(a,b)$ ümbruses on funktsioonil z pidevad osatuletised kuni järguni $n+1$. Toome sisse abifunktsiooni $\varphi(t) = f(x,y)$, kus $x = a + t\Delta x,\ y = b + t\Delta y,\ 0 \leq t \leq 1$. Kui $t = 0, M_0(a,b)$. Kui $t = 1$, siis saame punkti $M(a+\Delta x, b+\Delta y)$. Asendame ühe muutuja Taylori valemisse funktsiooni $\varphi(t)$ jaoks $a = 0$ korral:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + R_n. \tag{25}$$

Leiame tuletised

$$\varphi(t) = f(x,y) = f(a + t\Delta x, b + t\Delta y), \qquad \varphi'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$$
$$= df(x,y),$$

$$\varphi''(t) = \left(f'_x x'_t + f'_y y'_t\right)'_x x'_t + \left(f'_x x'_t + f'_y y'_t\right)'_y y'_t$$
$$= f''_{xx}(\Delta x)^2 + f''_{xy}\Delta x \Delta y + f''_{yx}\Delta y \Delta x + f''_{yy}(\Delta y)^2 =$$
$$= f''_{xx}(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}\Delta x \Delta y + f''_{yy}(\Delta y)^2 = d^2 f(x,y).$$

Analoogiliselt

$$\varphi'''(t) = d^3 f(x,y) \ \dots \ \ \varphi^{(n)}(t) = d^n f(x,y),$$
$$\varphi(0) = f(a,b), \quad \varphi'(0) = df(a,b), \qquad \varphi''(0) = d^2 f(a,b), \dots, \varphi^{(n)}(0) = d^n f(a,b).$$

Asendame võrrandisse (25) $t = 1$ korral

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{df(a,b)}{1!} + \frac{d^2 f(a,b)}{2!} + \ \dots + \frac{d^{(n)} f(a,b)}{n!}.$$

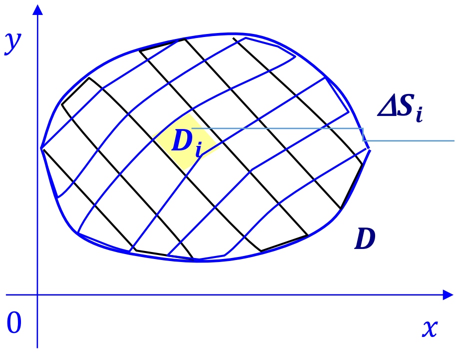
$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y + \frac{1}{2}f''_{xx}(a,b)(\Delta x)^2 + f''_{xy}(a,b)\Delta x \Delta y$$
$$+ \frac{1}{2}f''_{yy}(a,b)(\Delta y)^2 + \ \dots$$

V PTK. KORDSED INTEGRAALID

5.1. KAHEKORDNE INTEGRAAL

Olgu funktsioon $f(x,y)$ määratud kinnises tõkestatud piirkonnas D. Olgu piirkond D jaotatud n osapiirkonnaks D_i pindaladega ΔS_i ning olgu igas osapiirkonnas D_i valitud punkt (x_i, y_i). Moodustame summa

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$



Definitsioon 5.1.
Summat $\boldsymbol{I_n}$ nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ **integraalsummaks** piirkonnas D.
Kui piirkonna igas punktis $f(x,y) \geq 0$, siis integraalsumma kujutab selliste kõversilindrite ruumalade summat, mille põhjapindala on ΔS_i ja kõrgus on funktsiooni väärtus punktis (x_i, y_i) ehk $f(x_i, y_i)$. Osapiirkondadeks jaotamine toimub suvalisel viisil, see tähendab, et igal osapiirkonnal on oma diameeter. Osapiirkonna diameeter on selle piirkonna suurim punktidevaheline kaugus. Tähistame suurima osapiirkondade diameetri tähega

$$\boldsymbol{\lambda = \max(d_i)}.$$

Definitsioon 5.2.

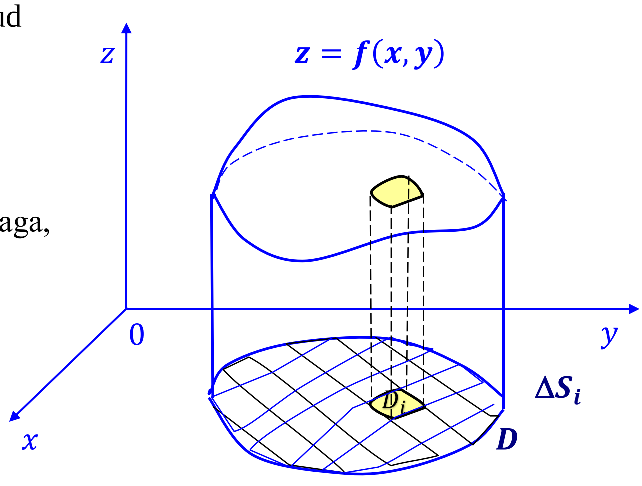
Funktsiooni $f(x,y)$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna D nimetatakse tema integraalsumma piirväärtust, kui suurim osapiirkondade diameeter $\lambda \to 0$, kui see piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu piirkonna D osadeks jaotamise viisist ega punktide (x_i, y_i) valikust

$$\iint_D f(x,y)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus, siis funktsiooni nimetatakse **integreeruvaks** piirkonnas D. Kui funktsioon $f(x,y)$ on pidev kinnises piirkonnas, siis piirväärtus eksisteerib. Piirkonda D nimetatakse integreeruvuspiirkonnaks.
Kõversilinder on ruumiline kujund, mis alt on piiratud piirkonnaga D, ülalt pinnaga $z = f(x,y)$ ja külgedelt püstsilindrilise pinnaga.

Kahekordse integraali geomeetriline tõlgendus.
Kahekordne integraal funktsioonist $f(x,y) \geq 0$ üle piirkonna D on võrdne kõverjoonelise silindri ruumalaga, kui silinder on pealt piiratud pinnaga $z = f(x,y)$ ja alt pinnaga D

$$V = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$



Integreerimispiirkonna D **pindala** avaldub valemiga

$$\boldsymbol{S = \iint_D dxdy.}$$

5.2. KAHEKORDSE INTEGRAALI OMADUSED JA ARVUTAMINE

Kahekordse integraali omadused on analoogilised määratud integraali omadustega.

1. Kui funktsioonid $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ on integreeruvad piirkonnas D, siis on integreeruv ka nende **summa ja vahe**.

$$\boldsymbol{\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dS = \iint_D f(x,y)\, dS \pm \iint_D g(x,y)\, dS.}$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt kirjutame

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i,y_i) \pm g(x_i,y_i)]\Delta S_i =$$

Kõigepealt kasutame summa omadust, mille põhjal moodustame summad mõlemast liikmest ja hiljem piirväärtuse omaduse põhjal kirjutame piirväärtuse summast piirväärtuste summana lahti.

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)\Delta S_i\right] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)\Delta S_i =$$

Selle tulemusena saime kahekordse integraali definitsiooni põhjal kahe integraali summa (vahe)

$$= \iint_D f(x,y)\, dS \pm \iint_D g(x,y)\, dS.$$

▪

2. **Konstantse** kordaja võib tuua integraali märgi ette

$$\boldsymbol{\iint_D c\cdot f(x,y)\, dS = c\iint_D f(x,y)\, dS.}$$

Tõestus on sarnane eelmisega.

3. **Aditiivsus**. Integreerimispiirkonda D võib jaotada osadeks D_1 ja D_2, millel pole ühiseid sisepunkte: $D = D_1 \cup D_2$

$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\, dS = \iint_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint_{D_2} f(x,y)\, dS.}$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt ei tohi piirväärtus sõltuda osapiirkondadeks jaotamise viisist, seega võime valida üheks jaotuseks piirkondade D_1 ja D_2 ühise rajajoone. Jaotades piirkonda D edasi suvalisel viisil, tekivad piirkondade D_1 ja D_2 suvalised jaotused osapiirkondadeks. Jaotame integraalsumma kaheks liidetavaks. Esimesse liidetavasse võtame need korrutised, mis sisaldavad piirkonna D_1 osapiirkondi, ja teisse need korrutised, mis sisaldavad piirkonna D_2 osapiirkondi, tähistame need vastavalt

$$\sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i\,, \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Kui λ on piirkonna D kõigi osapiirkondade suurim diameeter, siis sellest, et $\lambda \to 0$ järeldub, et ka piirkondade D_1 ja D_2 osapiirkondade suurimad diameetrid lähenevad nullile. Järelikult kui võtame võrduse

$$\sum_{D} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

mõlemalt poolt piirväärtuse suurima diameetri lähenemisel nullile, saame omaduse väite

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{D} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

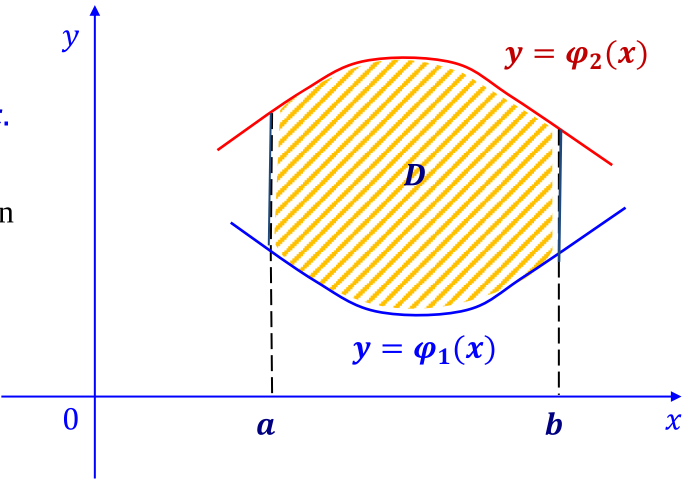
$$\iint_D f(x,y)\, dS = \iint_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint_{D_2} f(x,y)\, dS.$$

4. **Monotoonsus**. Kui funktsioonid $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ on integreeruvad piirkonnas D, ja kehtib $f(x,y) \le g(x,y)$ iga $(x,y) \in D$ korral, siis

$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\, dS \le \iint_D g(x,y)\, dS.}$$

Kahekordse integraali **arvutamine** lihtsamatel juhtudel taandub kahe määratud integraali arvutamisele.
Kui integreerimispiirkond on antud võrratustega $\boldsymbol{D = \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}}$, siis

$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\right] dx.}$$



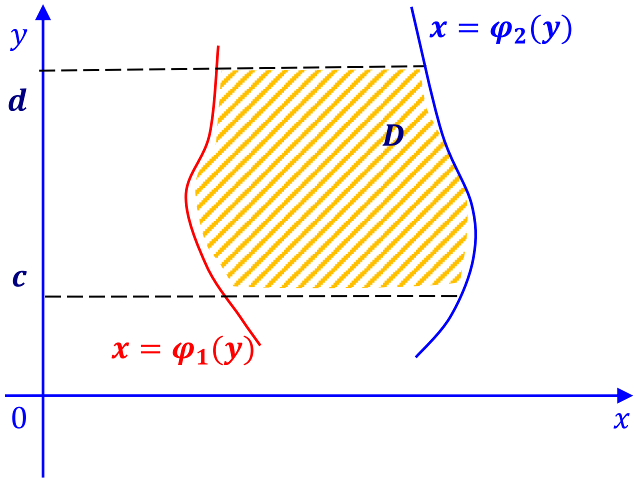
Kõigepealt leitakse sisemise integraali algfunktsioon

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy,$$

kus integreerimisel argumendi y järgi käsitletakse argumenti x konstandina.

Edasi leitakse saadud algfunktsioonist integraal argumendi x järgi

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b F(x) dx.$$



Kui $\boldsymbol{D = \{c \le y \le d,\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}}$, siis

$$\iint_D \boldsymbol{f(x,y)\,dxdy} = \int_c^d \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \boldsymbol{f(x,y)\,dx}\right] \boldsymbol{dy}.$$

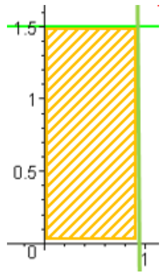
Kui integreerimispiirkond D on keerulisema kujuga, kui ülaltoodud lihtsamatel juhtudel, siis jagatakse piirkond lihtsamateks osadeks

$$D = \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Integraal on sel juhul summa integraalidest üle osapiirkondade

$$\iint_D \boldsymbol{f(x,y)\,dxdy} = \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \boldsymbol{f(x,y)\,dxdy}.$$

Näide 5.1. Arvutada



$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy,$$

kus D on piiratud sirgetega $x = 0, x = 1, y = 0, y = 3/2$.

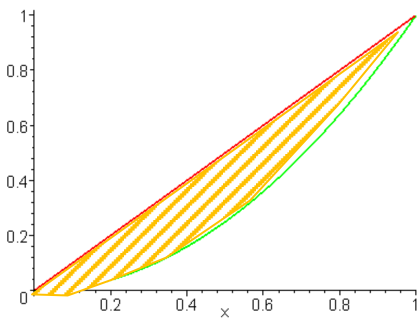
$$\iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{3}{2}} (4 - x^2 - y^2)\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}\right] dx = \int_0^1 \left[\left(4 \cdot \frac{3}{2} - x^2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(6 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}\right)\right] dx =$$

$$= \left(\frac{39}{8}x - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{35}{8}.$$

Näide 5.2. Leida xy-tasandil asetseva kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega $y = x$ ja $y = x^2$.



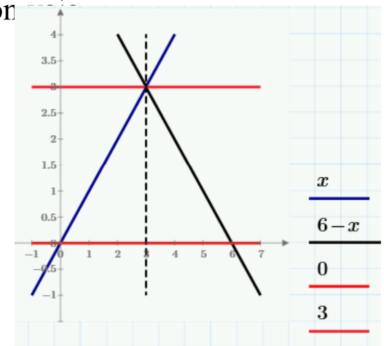
$$S = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} dy\right] dx = \int_0^1 \left[y\big|_{x^2}^{x}\right] dx = \int_0^1 [x - x^2]\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Näide 5.3. Vahetada integreerimisjärjekord integraalis

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x,y)\,dx.$$

Integreerimispiirkond on määratud järgmiselt: $D = \{(x,y): 0 \le y \le 3, y \le x \le 6-y\}$. Kanname joonisele vastavad sirged. Integreerimisjärjekorra muutmiseks on vaja esitada argument x piirkonnas $[a,b]$ ja argument y funktsioonina argumendist x. Jooniselt näeme, et argument x muutub lõigus $[0,6]$ aga argumendi y jaoks saame $0 \le y \le \varphi(x)$, kusjuures



$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 3 \\ 6-x, & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

Seega peame integreerimispiirkonna jagama kaheks osaks sirgega $x = 3$

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x,y)\,dx = \int_0^3 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x,y)\,dy.$$

5.3. MUUTUJA VAHETUS KAHEKORDSES INTEGRAALIS

Kui funktsioonid $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$ koos oma esimest järku osatuletistega on mingis uv-tasandi lõplikus kinnises piirkonnas D' pidevad ja määravad üksühese vastavuse piirkonna D' ja xy-tasandi piirkonna D punktide vahel ning kui **jakobiaan**

$$\boldsymbol{J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0}, \text{kui } \boldsymbol{(u,v) \in D'}.$$

Siis **muutuja vahetuse valem** on

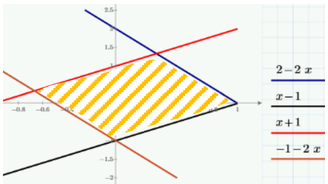
$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J(u,v)|\,dudv.}$$

$$\boldsymbol{|J(u,v)| \cdot |J(x,y)| = 1, \qquad |J(u,v)| = \frac{1}{|J(x,y)|}.}$$

Näide 5.4. Leida kahekordne integraal funktsioonist

$$f(x,y) = (2x+y-2)^2,$$

kui integreerimispiirkond on antud valemiga



$$D = \{(x,y): -1 \le x-y \le 1, -1 \le 2x+y \le 2\}.$$

Arvutuste lihtsustamiseks teeme järgmise muutuja vahetuse

$$u = x-y, v = 2x+y, \quad (u,v) \in D'.$$

Integreerimispiirkond D' on ristkülik

$$D' = \{(u,v): -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 2\}$$

Jakobiaan on kujul

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3.$$

Järelikult $J(u,v)=1/J(x,y)=1/3$.
Integreeritav funktsioon uutes muutujates on $(2x+y-2)^2=(v-2)^2$. Oleme saanud kahekordse integraali

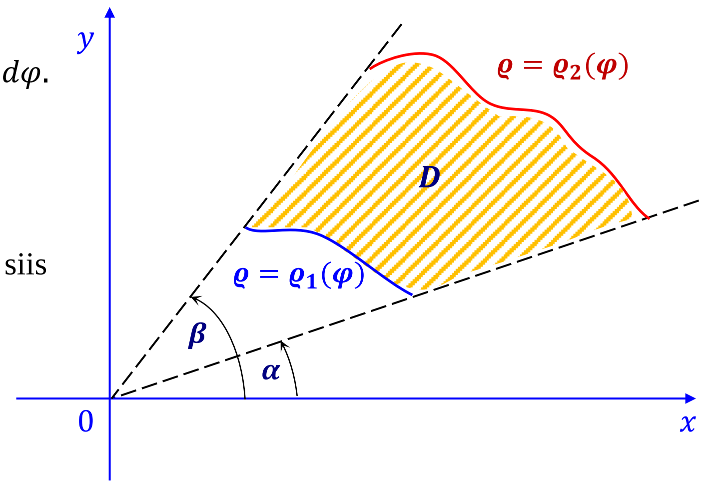
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{2}(v-2)^2\frac{1}{3}dvdu=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{(v-2)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}du=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}9\,du=6.$$

5.4. KAHEKORDNE INTEGRAAL POLAARKOORDINAATIDES

Polaarkoordinaatide kasutamine on õigustatud siis, kui integreerimispiirkonnaks on ring või selle osa, samuti on teatud joonte esitus polaarkoordinaatides lihtsam kui ristkoordinaatides. Üleminekul polaarkoordinaatidele kasutame seoseid $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$, kus ϱ on polaarraadius ja φ polaarnurk, siis muutuja vahetusele vastav jakobiaan on

$$|J(\varrho,\varphi)|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varrho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\varrho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix}=\varrho\cos^2\varphi+\varrho\sin^2\varphi=\varrho(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$$
$$=\varrho.$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(\varrho\,cos\,\varphi,\varrho\,sin\,\varphi)\varrho\,d\varrho d\varphi.$$

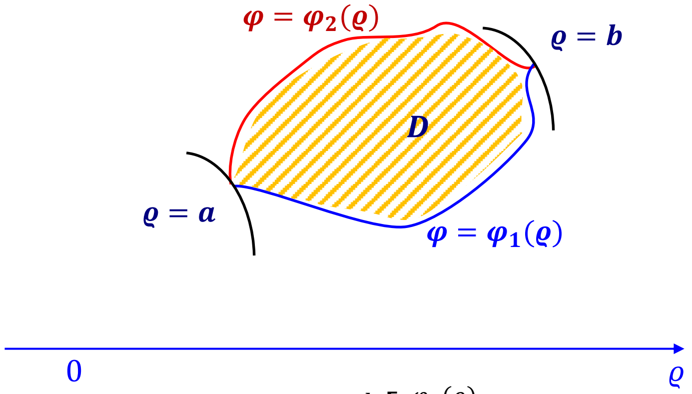


Kui piirkond Δ on antud võrratustega

$\Delta=\{(\varphi,\varrho)\colon \alpha\le\varphi\le\beta;\ \varrho_1(\varphi)\le\varrho\le\varrho_2(\varphi)\}$, siis

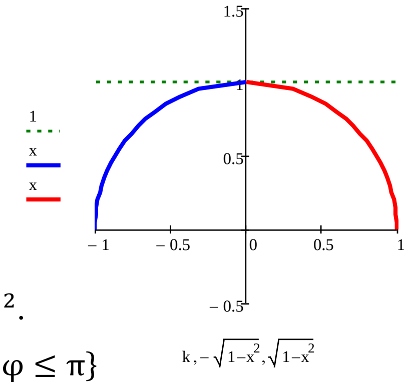
$$\iint_\Delta f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho d\varphi=\int_\alpha^\beta\left[\int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)\varrho\,d\varrho\right]d\varphi.$$

Kui piirkond Δ on antud võrratustega $\Delta=\{(\varphi,\varrho)\colon a\le\varrho\le b;\ \varphi_1(\varrho)\le\varphi\le\varphi_2(\varrho)\}$, siis



$$\iint\limits_{\Delta} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varrho d\varphi = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(\varrho)}^{\varphi_2(\varrho)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varphi \right] d\varrho$$

Näide 5.5. Arvutada kahekordne integraal üleminekuga polaarkoordinaatidele, kui integreerimispiirkond D on antud võrratustega



$$D = \left\{(x, y) \colon 0 \le y \le 1;\ -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\},$$

$$\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

Integreerimispiirkonnaks on pool ringi. Polaarkoordinaatides

$x = \varrho\cos\varphi, y = \varrho\sin\varphi$ ja $x^2 + y^2 = \varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi = \varrho^2$.

Uueks integreerimispiirkonnaks on $\Delta = \{(\varphi, \varrho) \colon 0 \le \varrho \le 1;\ 0 \le \varphi \le \pi\}$

$$\iint\limits_D \sqrt[3]{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^\pi \left[\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho \right] d\varphi = \int\limits_0^\pi \left[\int\limits_0^1 \varrho^{\frac{5}{3}}\, d\varrho \right] d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left[\frac{\varrho^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} \right]_0^1 d\varphi = \int\limits_0^\pi \frac{3}{8} d\varphi = \frac{3}{8}\varphi\Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

Näide 5.6. Arvutada kahekordne integraal üleminekuga polaarkoordinaatidele, kui integreerimispiirkond D on antud võrratustega $D = \left\{(x, y) \colon 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$,

$$\iint\limits_D (x^2 + 2xy)\, dy\, dx.$$

Integreerimispiirkonnaks on veerand ringi. Polaarkoordinaatides

$$x^2 + 2xy = \varrho^2\cos^2\varphi + 2\varrho^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

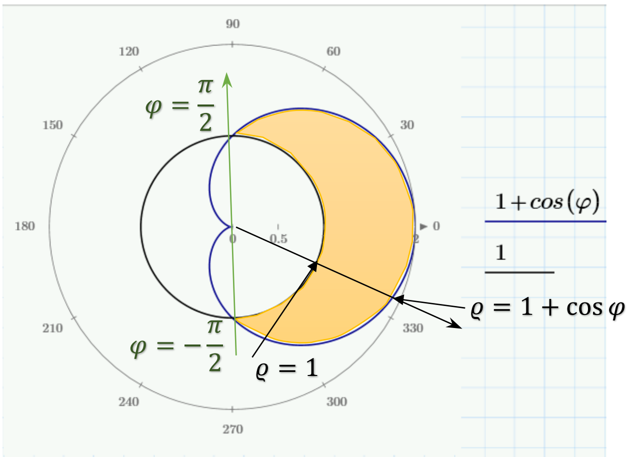
Uueks integreerimispiirkonnaks on $\Delta = \{(\varphi, \varrho) \colon 0 \le \varrho \le 1;\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}$. Saame integraali arvutada polaarkoordinaatides järgmiselt

$$\iint\limits_D (x^2 + 2xy)\, dy\, dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\varrho^2\cos^2\varphi + 2\varrho^2\sin\varphi\cos\varphi)\, \varrho\, d\varphi \right] d\varrho =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 (\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\,\cos\varphi)\, d\varphi \right] d\varrho = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3 \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \sin 2\varphi \right) d\varphi \right] d\varrho =$$

$$= \int_0^1 \varrho^3 \left(\frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varrho = \frac{1}{2}\int_0^1 \varrho^3 \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varrho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \varrho^3 \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) d\varrho = \frac{\varrho^4}{4}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi + 2}{16}.$$



Vaatame nüüd polaarkoordinaatidele üleminekut natuke keerukama integreerimispiirkonna jaoks. Kui integreerimispiirkond asub väljaspool ringi raadiusega $\varrho = 1$ ja seespool kardiodi $\varrho = 1 + \cos\varphi$ (joonis), siis polaarraadiuse algus on ringjoon raadiusega 1. Välimine raadius on aga antud seosega $1 + \cos\varphi$, kokkuvõttes raadius muutub piirkonnas

$$1 \le \varrho \le 1 + \cos\varphi.$$

Polaarnurga jaoks vaatame piirkonna alumist punkti, kus nurk on võrdne $-\pi/2$ ja ülemist punkti, kus nurk on võrdne $\pi/2$. Seega muutub polaarnurk piirkonnas

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Integreerimisrajad kahekordses integraalis on

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{1+\cos\varphi} f(\varrho,\varphi)\varrho\, d\varrho.$$

Kui funktsioon $f(\varrho,\varphi) = 1$, siis integraal annab integreerimispiirkonna pindala.

5.5. KAHEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSED

Tasandilise kujundi mass.

Olgu aine mass Δm piirkonna D osapiirkonnas ΔS. See tähendab, et piirkond D on kaetud mingi ainega nii, et piirkonna iga osapiirkonna pindala ΔS jaoks tuleb teatud hulk Δm seda ainet. Suhet $\Delta m/\Delta S$ nimetatakse aine keskmiseks pindtiheduseks (mass pindalaühiku kohta). Osapiirkonna suuruse vähendamisel punktiks piirväärtuse kaudu, saame defineerida aine pindtiheduse.

Aine pindtihedus punktis $P(x,y)$ on piirväärtus keskmisest pindtihedusest

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \varrho(x,y).$$

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\varrho(x,y)$, kus $(x,y) \in D$. **Tasandilise kujundi D mass** avaldub siis kahekordse integraalina üle piirkonna D:

$$\boldsymbol{m_D = \iint\limits_D \varrho(x,y)\, dxdy}.$$

Näide 5.7. Määrata ümmarguse plaadi mass, kui plaadi raadius on 4 ja aine pindtihedus plaadi igas punktis on võrdne selle punkti kaugusega plaadi keskpunktist.

Pindtihedus kauguse kaudu ja integreerimispiirkond avalduvad järgmiselt

$$\varrho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, D = \{(x,y): x^2+y^2 \le 4^2\}.$$

Kuna tegemist on ringjoonega, siis läheme üle polaarkoordinaatidele. Polaarraadiust tähistame tähega r, et pindtihedusega mitte segi ajada. Integreerimispiirkond polaarkoordinaatides $D = \{(r,\varphi): 0 \le r \le 4, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, pindtihedus avaldub polaarkoordinaatides järgmiselt

$$\varrho(x,y) = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r, \qquad J(r,\varphi) = r.$$

Seega plaadi mass on

$$m = \iint\limits_D \varrho(x,y)\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^4 r^2\, drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\bigg|_0^4 = \int\limits_0^{2\pi}\frac{64}{3}d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\,|_0^{2\pi} = \frac{128}{3}\pi.$$

Tasandilise kujundi inertsmoment. Masspunkti M inertsimoment punkti 0 suhtes $I_0 = mr^2$, kus m on mass ja r punktide 0 ja M vaheline kaugus.

Inertsimoment koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes homogeense piirkonna jaoks, kus pindtihedus on kõikjal 1, avaldub järgmiste valemitega:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\, dxdy\,; \qquad I_y = \iint\limits_D x^2\, dxdy\,; \quad I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdy.$$

Mittehomogeense materjali korral tuleb korrutada vastav avaldis pindtihedusega

$$I_x = \iint\limits_D \varrho(x,y)y^2\, dxdy\,; \qquad I_y = \iint\limits_D \varrho(x,y)x^2\, dxdy\,, \qquad I_0 = \iint\limits_D \varrho(x,y)(x^2+y^2)\, dxdy.$$

Näide 5.8. Arvutada joontega $y^2 = 1-x, x = 0, y = 0$ piiratud tasandilise kujundi inertsmoment y telje suhtes, kui pindtihedus igas punktis võrdub selle punkti ordinaadiga y.

$$I_y = \iint\limits_D yx^2\, dxdy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dy\right)dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{24}.$$

Tasandilise kujundi massikese. Kui tasandilise kujundi D pindtihedus on $\varrho(x,y)$, siis tasandilise kujundi massikeskme (x_c, y_c) koordinaadid saab arvutada valemitest

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m_D}\displaystyle\iint\limits_D x\,\varrho(x,y)\, dxdy \\ y_c = \dfrac{1}{m_D}\displaystyle\iint\limits_D y\,\varrho(x,y)\, dxdy \end{cases}$$

Avaldisi

$$M_y = \iint\limits_D x\,\varrho(x,y)\,dxdy, \qquad M_x = \iint\limits_D y\,\varrho(x,y)\,dxdy$$

nimetatakse tasandilise kujundi **staatilisteks momentideks** vastavalt y ja x telje suhtes.

5.6. KOLMEKORDNE INTEGRAAL

Olgu ruumis antud mingi piirkond V, mis on piiratud kinnise pinnaga S. Oletame, et selles piirkonnas V ja pinnal S on defineeritud mingi pidev funktsioon $f(x,y,z)$. Olgu piirkond V jaotatud n osapiirkonnaks V_i ruumaladega ΔV_i. Valime igas osapiirkonnas mingi punkti P_i ja tähistame $f(P_i)$ funktsiooni f väärtust selles punktis. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i.$$

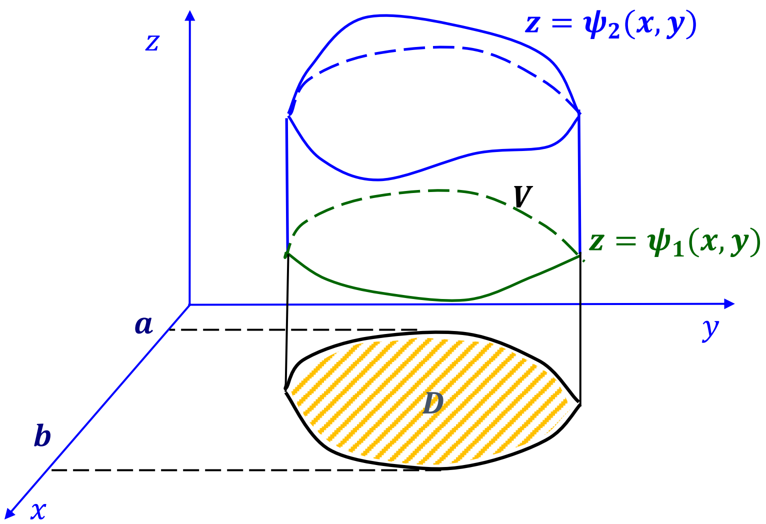
Suurendame osapiirkondade arvu nii, et nende suurim läbimõõt läheneks nullile. Tähistame suurima osapiirkondade läbimõõdu

$$\lambda = \max(d_i).$$

Definitsioon 5.3.

Piirväärtust, mis ei sõltu piirkonna V jaotusviisist ja punktide P_i valikust nimetatakse **kolmekordseks integraaliks**

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(P)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i.$$



Kui integreerimispiirkond V on alt piiratud pinnaga $z = \psi_1(x,y)$ ja ülalt pinnaga $z = \psi_2(x,y)$, kusjuures nendel pindadel on z-teljega paralleelsete sirgetega ainult üks ühine punkt, ja kui piirkonna V projektsioon xy-tasandil rahuldab kahekordse integraali integreerimispiirkonna kõiki tingimusi, kusjuures

$$a \le x \le b, \qquad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$$

siis on kolmekordne integraal avaldatav kujul

$$\iiint_V \boldsymbol{f(x,y,z)\,dxdydz} = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} \boldsymbol{f(x,y,z)dz} \right] \boldsymbol{dy} \right] \boldsymbol{dx}.$$

Kolmekordse integraali arvutamiseks vaadeldakse algul muutujaid x ja y konstantidena ja avaldatakse määratud integraal integreerimismuutuja z järgi, siis arvutatakse kahekordne integraal.

$$\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x,y); \qquad \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\,dy \right] dx.$$

Kui kahekordse integraali korral on võimalik kasutada kaht erinevat integreerimisjärjekorda, siis kolmekordse integraali korral on erinevaid integreerimisjärjekordi 6.

Näide 5.9. Arvutada järgmine kolmekordne integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{x}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz \right] dy \right] dx.$$

Arvutamist alustame kõige sisemisest integraalist, saadud tulemuse viime keskmise integraali alla ja lõpuks keskmise integraali väärtuse integreerime esimese integraali sees argumendi x järgi.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz = y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} = y(1-\sin x).$$

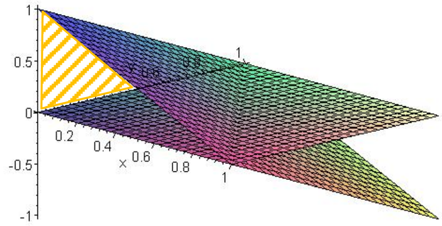
$$\int_0^{\sqrt{x}} y\cdot(1-\sin x)\,dy = (1-\sin x)\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy = (1-\sin x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}(1-\sin x).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}(1-\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx}_{\text{ositi}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{2} - (-x\cos x + \sin x) \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right).$$

Näide 5.10. Leida integraal

$$\iiint\limits_V \frac{3x}{1-x-y}\,dx\,dy\,dz,$$



kui piirkond V on piiratud pindadega

$$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1; \quad x,y,z$$

Leiame vajalikud rajad antud pindade võrranditest.

$$z=0, z=1-x$$

$$\int_0^{1-x-y} \frac{3x}{1-x-y}\,dz = \frac{3x}{1-x-y}\cdot z\Big|_0^{1-x-y} = 3x,$$

$$\int_0^{1-x} 3x\,dy = 3xy\Big|_0^{1-x} = 3x(1-x) = 3(x-x^2), \quad \int_0^1 3(x-x^2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2}-x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Kolmekordse integraali omadused on analoogilised kahekordse integraali omadustega.

1. Kui funktsioonid $f(x,y,z)$ ja $g(x,y,z)$ on integreeruvad piirkonnas V, siis on integreeruv ka nende **summa ja vahe**.

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\,dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dV.$$

2. **Konstantse kordaja** võib tuua integraali märgi ette

$$\iiint\limits_V c\cdot f(x,y)\,dV = c\iiint\limits_V f(x,y)\,dV.$$

3. Integreerimispiirkonda V võib **jaotada osadeks** V_1 ja V_2, millel pole ühiseid sisepunkte: $V = V_1 \cup V_2$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV.$$

5.7. MUUTUJATE VAHETUS KOLMEKORDSES INTEGRAALIS

Vaatame teisendust

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}, \qquad (u,v,w)\in V',$$

mis teisendab uvw-ruumis asetseva kinnise piirkonna V' xyz-ruumis asetsevaks piirkonnaks V. Kui teisendus on üksühene ja kui funktsioonidel x, y ja z on olemas esimest järku osatuletised piirkonnas V' ning kui teisenduse jakobiaan

$$\boldsymbol{J(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}, \text{kui } \ \boldsymbol{(u,v,w) \in V'}.$$

Siis **muutujate vahetuse valem** on kujul

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz} = \iiint\limits_{V'} \boldsymbol{f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|\, du\, dv\, dw}.$$

Kuna jakobiaani ja pöördteisenduse jakobiaani korrutis on 1, saame leida teisenduse jakobiaani pöördteisenduse jakobiaani kaudu

$$\boldsymbol{J(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{J(u,v,w)}},$$

$$\boldsymbol{|J(u,v,w)|} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{|J(x,y,z)|}}.$$

Tüüpilised asendused praktikas on üleminek silinderkoordinaatidele, elliptilistele silinderkoordinaatidele, sfäärkoordinaatidele, ellipsoidkoordinaatidele ja üldistele ellipsoidkoordinaatidele. Tutvume neist kahe tähtsamaga.

Näide 5.11. Leida ellipsoidi ruumala.

Ellipsoidi valem on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ruumala arvutamiseks teeme järgmise muutujate vahetuse

$$x = au, \qquad u = \frac{x}{a}, \qquad u \in [-1, 1],$$

$$y = bv, \qquad v = \frac{y}{b}, \quad v \in [-1, 1],$$

$$z = cw, \qquad w = \frac{z}{c}, \quad w \in [-1, 1].$$

Muutujate vahetuse jakobiaan on

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

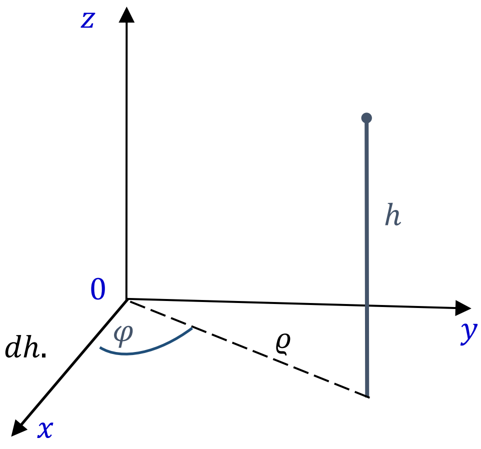
Ellipsoidi võrrand uutes muutujates on $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ ja ruumala arvutamise valem

$$\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} abc\, dw = \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} abc(w)|_{-1}^{1} dv = \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} 2abcdv$$

$$= \int_{-1}^{1} 2abc(v)|_{-1}^{1} du = 8abc.$$

Silindrilised koordinaadid. Tegemist on muutuja vahetusega kujul

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$



Teisenduse jakobiaan on

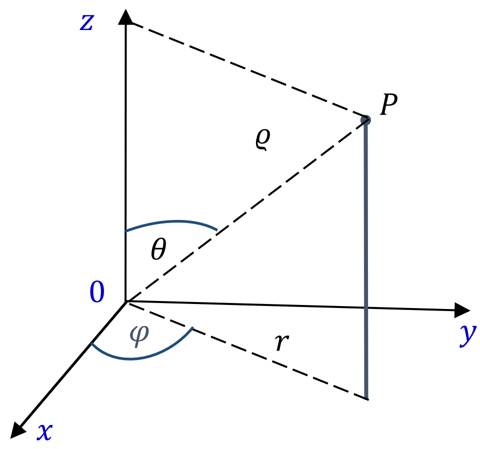
$$J(\varrho,\varphi,h) = \begin{vmatrix} x'_\varrho & x'_\varphi & x'_h \\ y'_\varrho & y'_\varphi & y'_h \\ z'_\varrho & z'_\varphi & z'_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(\varrho\cos\varphi\,,\varrho\sin\varphi\,,h)\varrho\;d\varrho\;d\varphi\;dh.$$

Sfäärilised koordinaadid. Sfäärilisi koordinaate kasutatakse, kui integreerimispiirkond on sfäär või selle osa. Lisaks võtame uue nurga z-telje suhtes, mille tähistame kreeka tähega θ. Muutuja vahetus on järgmisel kujul

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$



Muutuja vahetuse jakobiaan

$$J(\varrho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\varrho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\varrho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\varrho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \varrho\cos\varphi\cos\theta & -\varrho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \varrho\sin\varphi\cos\theta & \varrho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -\varrho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$|J| = \varrho^2\sin\theta.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(\varrho\cos\varphi\sin\theta\,,\varrho\sin\varphi\sin\theta\,,\varrho\cos\theta)\;\varrho^2\sin\theta\;d\varrho\;d\varphi\;d\theta.$$

Uus nurk muutub vahemikus $0 \le \theta \le \pi$.

Näide 5.12. Leida integraal sfääriliste koordinaatide kaudu

$$\iiint\limits_V xz\;dxdydz\,, x^2+y^2+z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

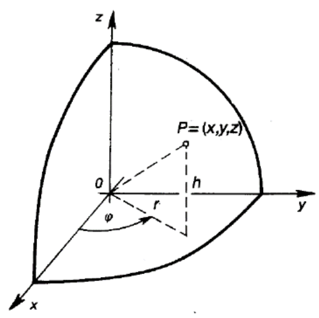
Integreeritav funktsioon sfäärilistes koordinaatides on

$$xz = \varrho^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,, \qquad J(\varrho,\varphi,\theta) = \varrho^2\sin\theta.$$

Kuna

$$x^2+y^2+z^2 = \varrho^2,$$

siis integreerimispiirkonnaks võrrandiks saame $\varrho^2 = 1$.



Integreerimispiirkond sfäärilistes koordinaatides on seega

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varrho \le 1.$$

Arvutame kolmekordse integraali uues piirkonnas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 \varrho^4 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta = \ \dots = \frac{1}{15}.$$

5.8. KOLMEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSED

1. **Aine mass**.

Kui eeldada, et piirkonnas V on $f(x,y,z) \ge 0$, siis võime seda funktsiooni tõlgendada aine tihedusena ϱ punktis $(x,y,z) \in V$. Siis ühe punkti P_i fikseerimine osapiirkonnas V_i ruumalaga ΔV_i tähendab seda, et kogu osapiirkonnas on aine tihedus loetud konstantseks ehk võrdseks aine tihedusega selles väljavalitud punktis. Sellisel juhul korrutis $f(P_i)\Delta V_i$ on tihedus korda osapiirkonna ruumala ehk ligikaudu osapiirkonna mass. Ligikaudu sellepärast, et osapiirkonnas muutuv tihedus on loetud konstantseks. Integraalsumma tähendab sellisel juhul ligikaudu kogu piirkonna V massi. Piirprotsess $\lambda \to 0$ tähendab seda, et kõikide osapiirkondade diameetrid kahanevad. Järelikult hakkab aine tihedus ühes suvaliselt väljavalitud punktis üha täpsemalt iseloomustama tihedust kogu osapiirkonnas. Tõlgendades integreeritavat funktsiooni $f(x,y,z)$ aine tihedusena, tähendab kolmekordne integraal piirkonna V massi. Olgu jäiga keha E ruumala V ja aine tihedus kehas muutuv ehk $\varrho = \varrho(x,y,z)$, kus (x,y,z). Lõpmata väikse ruumala dV korral loeme tiheduse konstantseks ja mass $dm = \varrho(x,y,z)dV$ ja järelikult

$$m_E = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i = \iiint_V \varrho(x,y,z)\,dxdydz.$$

2. **Piirkonna V ruumala**.

Kui piirkond V on täidetud ainega, mille tihedus igas punktis $\varrho(x,y,z) = 1$, siis piirkonna V mass ja ruumala on arvuliselt võrdsed, seega piirkonna V ruumala on arvutatav järgmise kolmekordse integraali abil

$$\boldsymbol{V = \iiint_V dx\,dydz.}$$

3. **Massikeskme koordinaadid ja inertsimoment**.

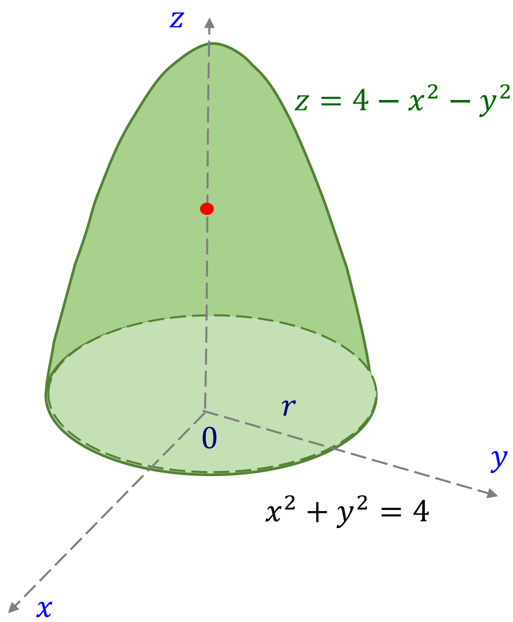
Materiaalse keha E massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$x_c = \frac{1}{m_E}\iiint_V x\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz; \quad y_c = \frac{1}{m_E}\iiint_V y\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$z_c = \frac{1}{m_E}\iiint_V z\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz,$$

kus m_E on keha mass.

Näide 5.13. Leida massikese kehale, mis on homogeensest materjalist tihedusega $\varrho = \text{const.}$ Keha on alt piiratud ringjoonega $x^2 + y^2 \le 4$ ja ülevalt piirab keha paraboloid $z = 4 - x^2 - y^2$.



Rajad: $0 \le z \le 4 - x^2 - y^2$, siis $-2 \le x \le 2$ ja $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Et tegemist on sümmeetrilise kujundiga x telje suhtes, on massikeskme koordinaadid

$$x_c = y_c = 0.$$

$$m_E = \varrho \iiint_E dxdydz = \varrho \iint_E dxdy \int_0^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \varrho \iint_E (4 - x^2 - y^2) dxdy =$$

Edasi on mõistlik üle minna polaarkoordinaatidele, sest integreerimispiirkond on ring. Ringjoone puhul $0 \le \varphi \le 2\pi$ ja $0 \le r \le 2$.
Siis $4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - r^2$ ja $J(r, \varphi) = r$.

$$= \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - r^2)\, r dr = \varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \varrho \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{16}{4}\right) d\varphi = \varrho \int_0^{2\pi} 4\, d\varphi = 4\varrho\varphi$$
$$= 8\varrho\pi\,.$$

Nüüd arvutame massikeskme koordinaadi z_c üleminekuga polaarkoordinaatidele.

$$z_c = \frac{1}{m_D} \iiint_D z\varrho\, dxdydz = \frac{1}{8\varrho\pi}\ \varrho \iint_E dxdy \int_0^{4-x^2-y^2z} zdz = \frac{1}{16\pi} \iint_E (4 - x^2 - y^2)^2 dxdy$$
$$=$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - \varrho^2)^2\, \varrho d\varrho = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 16\varrho - 8\varrho^3 + \varrho^5\, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{16\varrho^2}{2} - \frac{8\varrho^4}{4} + \frac{\varrho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left(32 - 32 + \frac{64}{6}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{32}{3}\, d\varphi = \frac{1}{16\pi} \frac{64}{3} \pi = \frac{4}{3}.$$

Saime keha massikeskme koordinaatidega

$$C = \left(0, 0, \frac{4}{3}\right).$$

Materiaalse piirkonna inertsimoment koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes avalduvad

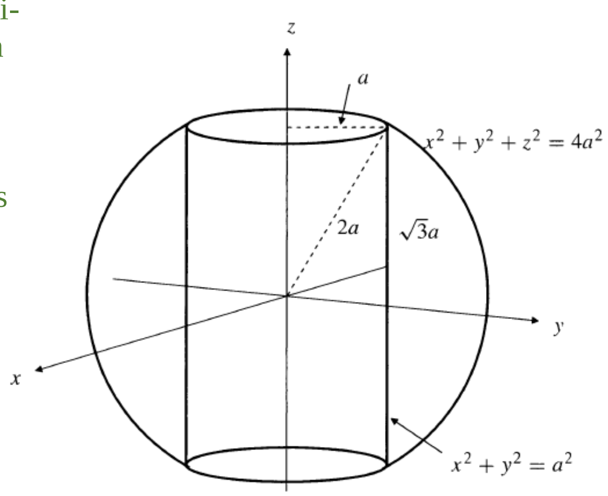
$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz; \qquad I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz;$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz; \; I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz.$$

Näide 5.14. Avaldada materiaalse piirkonna R inertsimoment z-telje suhtes, kui piirkonda V täitev aine on tihedusega δ ja piirkond R asub sfääri

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

sees ning väljaspool silindrit $x^2 + y^2 = a^2$ (vt joonis



Inertsimoment z-telje suhtes piirkonnas V on

$$I = \iiint\limits_R (x^2 + y^2)\delta\, dV.$$

Teeme muutujate vahetuse, minnes üle silindrilistele koordinaatidele

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi\,, \\ z = h \end{cases} \qquad J(\varrho,\varphi) = \varrho.$$

Sfääri ja silindri võrrandid silindrilistes koordinaatides on

$$h^2 = 4a^2 - \varrho^2, \varrho^2 = a^2.$$

Integreerimipiirkonnaks saame

$$V = \left\{(\varrho,\varphi,h) : a \le \varrho \le 2a, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\;\; 0 \le h \le \sqrt{4a^2 - \varrho^2}\right\},$$

seetõttu saame inertsimomenti avaldise kujul

$$I = \iiint\limits_R (x^2 + y^2)\delta\, dxdydz = 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} d\varrho \int_0^{\sqrt{4a^2-\varrho^2}} \varrho^2 \varrho\, dh.$$

Integreerime kõigepealt muutuja h järgi, saame

$$I = 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} \left((\varrho^3 h)\Big|_0^{\sqrt{4a^2-\varrho^2}} \right) d\varrho = 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} \left(\varrho^3 \sqrt{4a^2 - \varrho^2} \right) d\varrho =$$

Muutuja ϱ järgi integreerimiseks teeme muutuja vahetuse

$$u = 4a^2 - \varrho^2,\;\; \varrho^2 = 4a^2 - u, du = -2\varrho d\varrho, -\frac{du}{2} = \varrho d\varrho.$$

Uued rajad on $\varrho = a, u = 3a^2$; $\varrho = 2a, u = 0$.

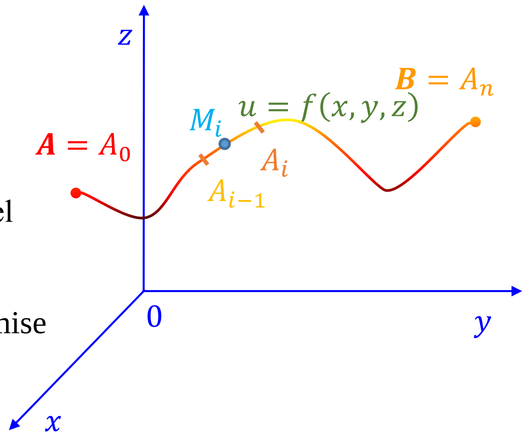
$$= 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{3a^2}^{0} -\frac{1}{2}(4a^2 - u)\sqrt{u}du = 2\delta \int_0^{2\pi} \left(-2\,a^2 \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} \Big|_{3a^2}^{0} \right) d\varphi =$$

$$= 2\delta \int_0^{2\pi} \left(a^2 \frac{4}{3} (3a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} (3a^2)^{\frac{5}{2}} \right) d\varphi = 2\delta a^5 \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{11}{5} d\varphi = \frac{22}{5} \sqrt{3} \delta a^5 2\pi = \frac{44}{5} \sqrt{3} \delta a^5 \pi.$$

5.9. ESIMEST LIIKI JOONINTEGRAAL*

Olgu antud funktsioon $u = f(x, y, z)$, mis on määratud kaarel AB. Jaotame kaare AB n elementaarkaareks $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \dots, n$; $A_0 = A, A_n = B$. Olgu Δs_i kaare $A_{k-1}A_k$ pikkus. Valime igal kaaretükil vabalt punkti $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Funktsiooni **integraalsummaks** piki joont AB nimetatakse summat

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$



Olgu suurim elementaarkaarte pikkustest $\lambda = \max \Delta s_i$.
Leiame piirväärtuse maksimaalse elementaarkaare lähenemisel nullile.

Definitsioon 5.4.
Kui piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu joone AB osadeks jaotamise viisist ja punktide M_i valikust, siis nimetatakse seda **esimest liiki joonintegraaliks** üle kaare AB funktsioonist u

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

Kui on tegemist pideva funktsiooniga $f(x, y, z)$, siis piirväärtus eksisteerib. Integreerimisteed AB märgitakse ka ühe tähega L. Joon AB võib olla ka kinnine, siis $A = B$.

Joonintegraali omadused:

1. Joonintegraal ei sõltu integreerimissuunast:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{BA} f(x, y, z)\, ds.$$

2. Kui funktsioonid $f(x, y, z)$ ja $g(x, y, z)$ on integreeruvad joonel AB, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe

$$\int_{AB} [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]\, ds = \int_{AB} f(x, y, z)\, ds \pm \int_{AB} g(x, y, z)\, ds.$$

3. Konstantse kordaja võib tuua integraali märgi ette

$$\int_{AB} c\, f(x, y, z)\, ds = c \int_{AB} f(x, y, z)\, ds.$$

4. Kui AB koosneb kaartest AC ja CB ja funktsioon $f(x, y, z)$ on integreeruv joonel AB, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{AC} f(x, y, z)\, ds + \int_{CB} f(x, y, z)\, ds.$$

Joonintegraali arvutamine.

Kui joon on esitatud parameetriliste võrranditega, siis kaare pikkuse diferentsiaal avaldub

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Joonintegraali saame kirjutada määratud integraalina üle parameetri t.

a) Olgu ruumiline kõver AB esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \quad A = (x, y, z)|_{t=\alpha}, \quad B = (x, y, z)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

b) Tasandiline kõver. Kui joon AB asub xy tasandil, siis funktsioon $f(x, y)$ on avaldatav parameetrilise võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0, \quad A = (x, y)|_{t=\alpha}, \quad B = (x, y)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Näide 5.15. Leida joonintegraal järgmistel tingimustel:

$$\int_{AB} x^2 y\, ds, \quad AB: x^2 + y^2 = 4, y \ge 0.$$

Tegemist on ringjoone ülemise osaga, raadiusega 2, mille parameetrilised võrrandid on:

$$x(t) = 2\cos t, \qquad y(t) = 2\sin t, \qquad t \in [0, \pi] \quad x'(t) = -2\sin t, \qquad y'(t) = 2\cos t,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} 4\cos^2 t \cdot 2\sin t\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt =$$

$$= \int_0^{\pi} 8\cos^2 t \sin t \sqrt{4\,\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}}\, dt = \int_0^{\pi} 16\cos^2 t \sin t dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} -16\, u^2 dt = -16\frac{u^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{32}{3}.$$

c) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b, \qquad \int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Näide 5.16. Leida joonintegraal

$$\int_{AB} xy^2\,ds,\quad AB\colon y = 2x, A = (0,0), B = (2,4),\quad y(x) = 2x,\qquad y'(x) = 2, x \in [0,2].$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_0^2 x(2x)^2\sqrt{1+2^2}dx = 4\sqrt{5}\int_0^2 x^3dx = 4\sqrt{5}\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 16\sqrt{5}.$$

d) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$x = x(y),\qquad c \le y \le d,\qquad \int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}dy.$$

e) Tasandiline kõver polaarkoordinaatides. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$r = r(\varphi),\qquad \alpha \le \varphi \le \beta,\qquad \int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi.$$

Joonintegraali rakendused:

1. **Kõvera mass ja massikeskme koordinaadid.** On antud ruumiline kõver AB, millel aine tihedus on jaotunud funktsiooni $p = p(x,y,z)$ järgi. Siis materiaalse kaare mass avaldub

$$m = \int_{AB} p(x,y,z)\,ds.$$

Massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad massi kaudu järgmiselt:

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{AB} x\,p(x,y,z)\,ds,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_{AB} y\,p(x,y,z)\,ds,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_{AB} z\,p(x,y,z)\,ds.$$

2. **Muutuva jõu töö.** Kui punkt P liigub piki ruumilist joont punktist A punkti B. Punktile P rakendatud jõud, mis punkti P liikumisel muutub nii suuruse kui sihi poolest

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Töö, mida teeb jõud punkti P liikumisel piki joont avaldub järgmiselt

$$W = \int_{AB} (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz).$$

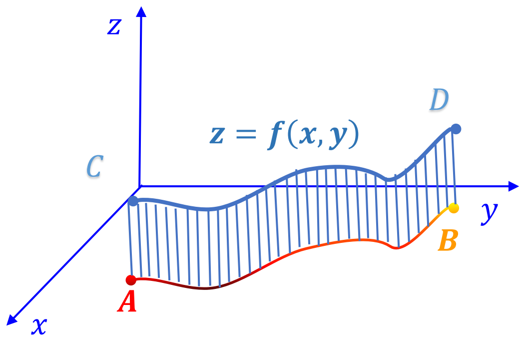
3. **Joone kaare pikkus.** Kui ruumis on antud sile joon AB, siis tema pikkus avaldub valemiga

$$l_{AB} = \int_{AB} ds.$$

4. **Silinderpinna pindala**. Olgu funktsioon $f(x,y) \geq 0$ pidev xy tasandil asetseval siledal joonel AB. Vaatame vertikaalset silinderpinda $ABCD$, mille alumine serv on joon AB ja ülemine serv on funktsiooni f graafik $z = f(x,y)$. Pinna $ABCD$ pindala S_{ABCD} avaldub valemiga

$$\boldsymbol{S_{ABCD} = \int_{AB} f(x,y)ds.}$$

Saadud valem annab **esimest liiki joonintegraali geomeetrilise tähenduse**.



5.10. TEIST LIIKI JOONINTEGRAAL*

Olgu antud funktsioon $u = f(x,y,z)$, mis on määratud kaarel AB. Jaotame kaare AB n elementaarkaareks $A_{i-1}A_i$, $i = 1,\ldots,n$; $A_0 = A, A_n = B$. Olgu Δs_i kaare $A_{k-1}A_k$ pikkus. Valime igal kaaretükil vabalt punkti $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Tähistame osakaare $A_{i-1}A_i$ projektsioonid koordinaattelgedele:

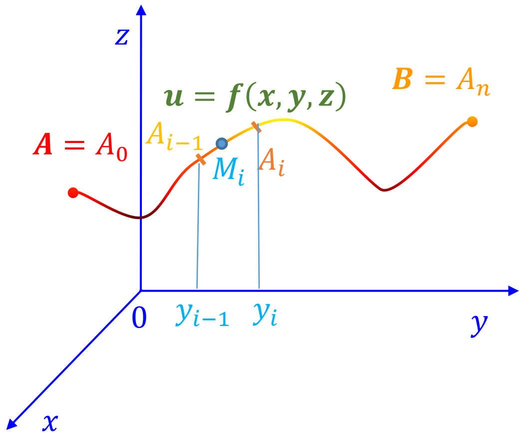
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ja $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Moodustame integraalsummad

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i,$$



Definitsioon 5.5.

Kui integraalsumma piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu joone AB osadeks jaotamise viisist ja punktide M_i valikust, siis nimetatakse seda piirväärtust **funktsiooni f teist liiki joonintegraaliks** üle kaare AB **projektsioonide järgi x teljele**

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i.$$

Samal viisil saab defineerida **teist liiki joonintegraalid projektsioonide järgi y ja z teljele**:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i\,;$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dz = \lim_{\max \Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i.$$

Definitsioon 5.6.

Olgu joonel AB defineeritud kolm funktsiooni: $p = P(x,y,z), q = Q(x,y,z)$ ja $r = R(x,y,z)$, siis **funktsiooni f teist liiki joonintegraaliks** üle kaare AB nimetatakse integraali

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + \int_{AB} Q(x,y,z)\,dy + \int_{AB} R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Teist liiki joonintegraali omadused:

1. Teist liiki joonintegraal **sõltub integreerimissuunast**:

$$\int_{AB} P\,dx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

2. Kui funktsioonid $P_1(x,y,z)$ ja $P_2(x,y,z)$ on integreeruvad joonel AB, siis on integreeruv ka nende **summa ja vahe**

$$\int_{AB} [P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)]\,dx = \int_{AB} P_1(x,y,z)\,dx \pm \int_{AB} P_2(x,y,z)\,dx.$$

3. **Konstantse kordaja** võib tuua integraali märgi ette

$$\int_{AB} c \cdot P(x,y,z)\,dx = c \cdot \int_{AB} P(x,y,z)\,dx.$$

4. Kui AB koosneb kaartest AC ja CB, siis teist liiki joonintegraal avaldub

$$\int_{AB} P\,dx + Qdy + Rdz = \int_{AC} P\,dx + Qdy + Rdz + \int_{CB} P\,dx + Qdy + Rdz.$$

Teist liiki joonintegraali arvutamine.

a) Olgu ruumiline kõver AB esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \quad A = (x, y, z)|_{t=\alpha}, \ B = (x, y, z)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t)\} dt.$$

b) Tasandiline kõver. Kui joon AB asub xy tasandil, siis funktsioon $f(x, y)$ on avaldatav parameetrilise võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0, \quad A = (x, y)|_{t=\alpha}, \ B = (x, y)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big) x'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big) y'(t)\, dt.$$

c) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b, \qquad \int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_{a}^{b} f\big(x, y(x)\big) dx.$$

d) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \qquad c \le y \le d, \quad \int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_{c}^{d} f(x(y), y) dy.$$

e) Tasandiline kõver polaarkoordinaatides. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$r = r(\varphi), \qquad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)(r' \cos\varphi - r \sin\varphi) d\varphi,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(r'\cos\varphi + r\sin\varphi)d\varphi.$$

Kui kinnine joon AB asub xy-tasandil, on tegu integraaliga

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy,$$

siis loetakse integreerimistee **positiivseks suunaks** sellist suunda, et z-telje poolt vaadatuna jääb joone poolt piiratud ala vasakule (joon läbitakse vastupäeva, kellaosuti liikumise vastassuunas).

Teist liiki joonintegraali rakendused:

1. **Tasandilise kujundi pindala arvutamine**. Olgu xy-tasandil asetseva kujundi D rajajoon Γ tükiti sile. Siis kujundi D pindala S_D avaldub valemitega

$$S_D = \int_L x\,dy,$$

$$S_D = -\int_L y\,dx,$$

$$S_D = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx.$$

2. **Muutuva jõu töö arvutamine**. Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punkti B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimel, kus $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ ja $R(x,y,z)$ on pidevad funktsioonid joonel AB. Siis jõu $\vec{F}$ töö W on arvutatav valemiga

$$W = m\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Greeni valem. Eksisteerigu pidevatel kahe muutuja funktsioonidel $p = P(x,y)$ ja $q = Q(x,y)$ pidevad osatuletised

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$$

tõkestatud kinnises piirkonnas D, mille rajajoon Γ on tükiti sile. Siis

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Gamma Pdx + Qdy.$$

5.11. PINDINTEGRAAL

Olgu funktsioon $F(x,y,z)$ pidev sileda pinna $z = z(x,y)$ mingi tüki D punktides. Jaotame pinnatüki n osapiirkonnaks D_i diameetriga d_i ja pindalaga ΔS_i ning valime igas osapiirkonnas punkti (x_i, y_i, z_i).
Tähistame suurima diameetri osapiirkondadel $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{max}\, \boldsymbol{d_i}$.

Definitsioon 5.7.
Pindintegraal pindala järgi üle pinnatüki D defineeritakse järgmiselt

$$\iint_D \boldsymbol{F(x,y,z)\,dS} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i}.$$

Pindintegraali saab teisendada kahekordseks integraaliks, asendades $z = z(x,y)$ ning võttes pinna diferentsiaaliks

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Integreerimispinnaks tuleb pinna D projektsioon xy tasapinnale D_{xy}. Saame

$$\iint_D F(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} F\big(x,y,z(x,y)\big)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dxdy.$$

Pindintegraal projektsiooni järgi on defineeritud läbi osapiirkonna D_i projektsiooni xy tasapinnale, mille pindala on ΔS_i

$$\iint_D F(x,y,z)\,dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i.$$

Pindintegraali projektsiooni järgi saab teisendada kahekordseks integraaliks üle pinna D projektsiooni D_{xy}

$$\iint_D F(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xy}} F\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy.$$

Analoogiliselt defineeritakse pindintegraalid projektsiooni järgi xz ja yz tasanditele.

$$\iint_D F(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xz}} F(x,y(x,z),z)\,dxdz, \qquad \iint_D F(x,y,z)\,dxdy$$
$$= \iint_{D_{yz}} F(x(y,z),y,z)\,dydz.$$

KIRJANDUS

1. Elmar Reimers. Matemaatilise analüüsi praktikum II. Tallinn, 1988.
   https://drive.google.com/file/d/0BwtuAJRdWlyMS2s0ZzctTGdsS0U/view
2. L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2009.
3. N. S. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus II. Tallinn, 1983.
4. Erich Steiner. The Chemistry Maths Book, Oxford University Press, 2008.
   https://syaifulhamzah.files.wordpress.com/2013/08/erich_steiner-the-chemistry-maths-book-second.pdf
5. Thomas’ Calculus. 12th edition.
   https://archive.org/details/Pearson.Thomas.Calculus.12th.Edition.0321587995