2016

KÕRGEM MATEMAATIKA II

III OSA

DIFERENTSIAALVÕRRANDID

LOENGUKONSPEKT

ELLA PUMAN

TARTU ÜLIKOOL | Matemaatika ja statistika instituut

SISUKORD

VI ptk Harilikud diferentsiaalvõrrandid 108

6.1. Sissejuhatus 108
6.2. Diferentsiaalvõrrandi mõiste, Cauchy ülesanne 109
6.2.1. Cauchy ülesande lahendamine astmeridade abil 111
6.3. Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid 112
6.3.1. Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid 112
6.3.1.1. Eralduvate muutujatega võrrandid keemias 114
6.3.2. Homogeensed diferentsiaalvõrrandid 118
6.3.2.1. Homogeensed funktsioonid 118
6.3.2.2. Homogeensed diferentsiaalvõrrandid 119
6.3.3. Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist 122
6.3.4. Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid 124
6.3.4.1. Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid keemias 127
6.3.5. Bernoulli diferentsiaalvõrrand 129
6.3.6. Eksaktne diferentsiaalvõrrand 130
6.4. Numbrilised meetodid 133
6.4.1. Euleri meetod 133
6.4.2. Runge-Kutta meetodid 135
6.5. Teist järku diferentsiaalvõrrandid 137
6.5.1. Konstantsete kordajatega lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid 137
6.5.2. Konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid 141
6.5.3. Teist järku võrrandid füüsikas. Mehaanilised võnkumised 143
6.5.3.1. Vabavõnkumised 144
6.5.3.2. Sundvõnkumised 145
6.5.3.3. Soojuse levimine vardas 146
6.5.4. Lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid 147
6.5.5. Lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid 149
6.5.6. Spetsiaalsed lineaarsed võrrandid 150
6.6. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid 154
6.6.1. Kõrgemat järku lineaarsed võrrandid 157
6.7. Diferentsiaalvõrrandite süsteemid 165
6.7.1. Ühele võrrandile taandamise meetod 167
6.7.2. Integreeruvate kombinatsioonide meetod 169

VII ptk Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid 172

7.1. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi mõiste 172
7.2. Cauchy ülesanne 174
7.3. Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid 176
7.4. Diferentsiaalvõrrandite süsteem kahest osatuletistega võrrandist 181

Kirjandus 182

VI PTK HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

6.1. SISSEJUHATUS

Tehniliste ülesannete matemaatiline analüüs koosneb kolmest etapist:
1) ülesande tingimuste esitamine matemaatika keeles,
2) matemaatilise ülesande lahendamine,
3) saadud tulemuste tõlgendamine.

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ kirjeldab mingi nähtuse kvantitatiivset külge. Sageli ei ole nähtuse vaatlemisel võimalik kindlaks teha x ja y vahelist sõltuvust, kuid saame määrata suuruste $x, y, y', y'', \ldots$ vahelise seose, ehk saame koostada diferentsiaalvõrrandi. Saadud seosest muutujate x, y ja tuletiste vahel on vaja tuletada otsene seos x ja y vahel ehk sõltuvus $y = f(x)$ ehk tuleb **integreerida diferentsiaalvõrrand.**

Näide 6.1. Mingilt kõrguselt visatakse alla keha, mille mass on m. Leida seaduspärasus, mille järgi muutub keha langemiskiirus $v = f(t)$, kui kehale mõjub peale raskusjõu veel õhutakistus, mis on võrdeline kiirusega (võrdetegur on k).
Newtoni II seaduse põhjal

$$F = m\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = a,$$

a on liikuva keha kiirendus (kiiruse tuletis aja järgi), F on kehale liikumise suunas mõjuv jõud. See jõud koosneb kahest komponendist: raskusjõust mg ja õhutakistusest $-kv$, see on keha liikumisele vastassuunaline

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \tag{1}$$

kus $v = f(t)$ on otsitav funktsioon. Saime seose otsitava funktsiooni ja tema tuletise vahel ehk diferentsiaalvõrrandi funktsiooni v suhtes. See väljendab mõningat tüüpi langevarjude langemise seadust. Lahendada diferentsiaalvõrrand, tähendab leida selline funktsioon $v = f(t)$, mis samaselt rahuldab diferentsiaalvõrrandit. Selliseid funktsioone on lõpmata palju. Osutub, et antud diferentsiaalvõrrandit rahuldab funktsioon

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \tag{2}$$

kus C on mistahes arv (integreerimiskonstant). Kontrollime lahendi õigsust, leides lahendist (2) tuletise ja asendades võrrandisse (1) eraldi vasakule ja paremale poolele.

$$\frac{dv}{dt} = Ce^{-\frac{k}{m}t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right), \qquad v.p. \quad m\frac{dv}{dt} = m \cdot Ce^{-\frac{k}{m}t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) = -Cke^{-\frac{k}{m}t},$$

$$p.p. \quad mg - kv = mg - k\left(Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = -Cke^{-\frac{k}{m}t}.$$

Parem pool ja vasak pool on võrdsed, järelikult avaldis (2) rahuldab võrrandit (1).
Milline neist funktsioonidest annab otsitava seose v ja t vahel?

Selle leidmiseks kasutame lisatingimust: keha allaviskamisel anti talle algkiirus v_0. Siis funktsioon v võrrandis (2) peab rahuldama algtingimust. Liikumise alghetkel aeg $t = 0$ ja kiirus $v(0) = v_0$. Asendame mõlemad suurused valemisse (2) ja avaldame C

$$v_0 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} + \frac{mg}{k} = C + \frac{mg}{k} \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Seega konstant C on leitud ja sõltuvus v ja t vahel avaldub kujul

$$\boldsymbol{v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}}.$$

6.2. DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE, CAUCHY ÜLESANNE

Definitsioon. **Diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Näited diferentsiaalvõrrandite kohta:

$$y' = 2x - 1, \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{8}{x^3}y = 0,$$

kus otsitavaks on funktsioon $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Definitsioon. **Harilikeks diferentsiaalvõrranditeks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitav funktsioon $\boldsymbol{y = f(x)}$ sõltub ühest argumendist $\boldsymbol{x}$.

Definitsioon. **Osatuletistega diferentsiaalvõrranditeks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitavaks on mitme muutuja funktsioon ja võrrand sisaldab osatuletisi.

Definitsioon. **Diferentsiaalvõrrandi järguks** nimetatakse temas sisalduvate tuletiste kõrgeimat järku.
Hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkuju on järgmine

$$\boldsymbol{\Phi\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}.$$

Esimest järku hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$\boldsymbol{\Phi(x, y, y') = 0}.$$

Definitsioon. **Diferentsiaalvõrrandi lahendiks** nimetatakse sellist funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.

Definitsioon. **Diferentsiaalvõrrandi integraalkõveraks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendile $y = y(x)$ vastavat joont xy-tasandil.

Näide 6.2. Olgu antud diferentsiaalvõrrand

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Näitame, et funktsioon $y = 2x + x^2$ on antud diferentsiaalvõrrandi lahend. Selleks võtame lahendist esimese ja teise tuletise ning asendame need esialgsesse võrrandisse.

$$y' = 2 + 2x, \qquad y'' = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{2}{x}(2 + 2x) + \frac{2}{x^2}(2x + x^2) = 2 - \frac{4}{x} - 4 + \frac{4}{x} + 2 = 0.$$

Näide 6.3. Olgu antud diferentsiaalvõrrand

$$y' = 2x - 1.$$

Lahendiks on $y = x^2 - x$, aga ka funktsioonid $y = x^2 - x + C$, kus C on suvaline konstant.

Definitsioon. **Diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks** ehk üldintegraaliks nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendit, mis sisaldab suvalist konstanti $\boldsymbol{C}$. Võrrandi üldlahendis sisalduvate suvaliste konstantide arv on võrdne võrrandi järguga.
n –järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on funktsioon, mis sisaldab $\boldsymbol{n}$ suvalist konstanti

$$\boldsymbol{y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n),}$$

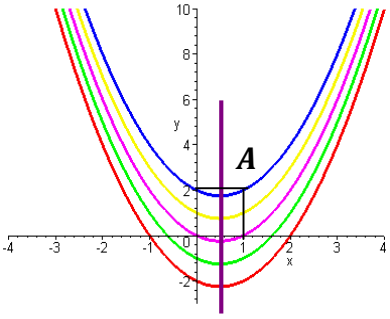
ilmutamata kujul $\boldsymbol{\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0}$.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x - 1$ üldlahendiks on $y = x^2 - x + C$. Nende paraboolide haripunktid asuvad sirgel $x = 1/2$. Üldlahend esitab paraboolide parve. Näiteks, kui

$$C = 1, \quad x = \frac{1}{2}, \ y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4},$$

$$C = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \ y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4},$$

$$C = -1, \quad x = \frac{1}{2}, \ y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}.$$



Et leida selle parve hulgast niisugune, mis läbib punkti $A(1; 2)$, tuleb määrata konstant C:

$$2 = 1 - 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Punkti $A(1; 2)$ läbib integraalkõver $y = x^2 - x + 2$.

Diferentsiaalvõrrandi erilahendiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendit, mis on saadud üldlahendist konstantidele arvuliste väärtuse andmisel. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendist saame erilahendi, kui rahuldame **algtingimuse $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$**, kus **$\boldsymbol{x_0, y_0}$ on etteantud arvud**. Kuna $\boldsymbol{n}$-järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab n suvalist konstanti, siis on konstantide määramiseks vaja **$\boldsymbol{n}$ algtingimust**.

Definitsioon. **Cauchy ülesandeks** nimetatakse **ülesannet**, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{\Phi\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$$

lahend $\boldsymbol{y}$, mis rahuldab **algtingimusi**

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.}$$

Algtingimusi nimetatakse ka **Cauchy tingimusteks**. Algtingimusi võib esitada ka teisiti.
Esimest järku hariliku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne on ülesanne, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ selline lahend, mis argumendi väärtusel $x = x_0$ omandab väärtuse $y = y_0$ ehk rahuldab algtingimust

$$y(x_0) = y_0.$$

Teoreem 6.1. Cauchy teoreem. Olgu $f(x, y)$ ja $\partial f(x, y)/\partial y$ määratud ja pidevad muutujate x, y piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on Cauchy ülesandel

$$y' = f(x, y), \ \ y(x_0) = y_0$$

parajasti üks lahend $y = y(x)$.

6.2.1. CAUCHY ÜLESANDE LAHENDAMINE ASTMERIDADE ABIL

Kui funktsioon $f(x,y)$ on antud analüütiliselt muutujate x, y piirkonnas D, siis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on funktsioon arendatav astmeritta

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j,$$

mis koondub punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses. Sellisele funktsioonile vastava diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x,y)$ lahend on samuti arendatav astmeritta iga x_0 korral määramispiirkonnast $y(x)$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k,$$

mis koondub punkti x_0 teatavas ümbruses. Rea kordajad c_k avalduvad kujul

$$c_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Näide 6.4. Olgu antud Cauchy ülesanne

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Lahendame ülesande astmeridade abil. Võrrandi diferentseerimisel saame, arvestades, et funktsioon y on sõltuv argumendist x

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y'' = 2x + 2yy', \qquad y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$
$$y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''',$$
$$y^{V} = 6(y'')^2 + 6y'y''' + 2y'y''' + 2yy^{IV} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV},$$
$$y^{VI} = 12y''y''' + 8y''y''' + 8y'y^{IV} + 2y'y^{IV} + 2yy^{V} = 20y''y''' + 10y'y^{IV} + 2yy^{V},$$
$$y^{VII} = 20(y''')^2 + 30y''y^{IV} + 12y'^{y^V} + 2yy^{VI}.$$

Siit arvutame

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2,$$
$$y^{IV}(0) = 0, \qquad y^{V}(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 0, \quad y^{VII}(0) = 80.$$

Seega ülesande $y' = x^2 + y^2, \ y(0) = 0$ lähislahendiks võib võtta funktsiooni

$$y = \frac{2}{3!}x^3 + \frac{80}{7!}x^7 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7.$$

6.3. ESIMEST JÄRKU HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

6.3.1. ERALDATUD JA ERALDUVATE MUUTUJATEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul $f(x)dx + g(y)dy = 0$, kus dx ja dy on vastavalt muutujate x ja y diferentsiaalid ja $f(x)$ ja $g(y)$ on antud funktsioonid.

Definitsioon. **Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$\boldsymbol{f(x)dx + g(y)dy = 0},$$

milles dx kordaja $f(x)$ sõltub ainult muutujast x ja dy kordaja $g(y)$ sõltub ainult muutujast y.

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$

$$\boldsymbol{\int f(x)dx + \int g(y)dy = C},$$

kus C on suvaline konstant. Üldlahend avaldatakse kujul $\boldsymbol{y = F(x, C)}$.
Kui võrrand on antud kujul $\boldsymbol{y' \cdot g(y) + f(x) = 0}$, siis lahendamisel esimese sammuna asendame

$$\boldsymbol{y' = \frac{dy}{dx}}$$

ja korrutame võrrandi läbi diferentsiaaliga $\boldsymbol{dx}$.

Definitsioon. **Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$\boldsymbol{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0}. \qquad (3)$$

Võrrandis (3) on funktsioonid $f_1(x), f_2(x)$ argumendi x funktsioonid, $g_1(y), g_2(y)$ argumendi y funktsioonid. Diferentsiaalvõrrandi **lahendamiseks peame muutujad eraldama**. Selleks jagame võrrandi (3) mõlemaid pooli järgmise avaldisega (tuleb jagada läbi nende funktsioonide korrutisega, mis sisaldavad teist muutujat, kui diferentsiaal) $\quad |: \boldsymbol{g_1(y) \cdot f_2(x)}$

$$\boldsymbol{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0}.$$

Integreerime liikmeti, saame võrrandi (3) **üldlahendi**

$$\boldsymbol{\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C}.$$

Näide 6.5. Leida diferentsiaalvõrrandi üldlahend (ehk lahendada diferentsiaalvõrrand) $e^y \cdot y' = 2x + 1$.

Kõigepealt asendame tuletise diferentsiaalide jagatisega, siis korrutame läbi diferentsiaaliga dx . Tegemist on eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiga, üldlahendi saamiseks integreerime võrrandit. Lahenduskäik on järgmine:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad e^y\frac{dy}{dx} = 2x + 1, \quad |\cdot dx \quad e^y dy = (2x + 1)dx.$$

$$\int e^y dy = \int (2x + 1)dx, \qquad e^y = x^2 + x + C. \quad |\ln$$

Selleks, et avaldada üldlahendis muutuja y, võtame mõlemast võrrandi poolest naturaallogaritmi.

$$y = \ln(x^2 + x + C).$$

Kontrollime vastuse õigsust, leides üldlahendist tuletise ja asendades esialgsesse võrrandisse:

$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x+C}, \qquad e^{\ln(x^2+x+C)}\frac{2x+1}{x^2+x+C} = (x^2+x+C)\frac{2x+1}{x^2+x+C} = 2x+1.$$

Näide 6.6. Leida järgmise eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$\frac{x}{1+y^2}dx + 2y(2+x^2)dy = 0.$$

Võrrandi lahendamiseks peame kõigepealt muutujad eraldama. Antud võrrandis on diferentsiaali dx kordajaks muutujat y sisaldav funktsioon kujul $1/(1+y^2)$ ja diferentsiaali dy kordajaks on muutujat x sisaldav funktsioon kujul $(2+x^2)$. Muutujate eraldamiseks peame võrrandit läbi jagama mõlema funktsiooniga.

$$\frac{x}{1+y^2}dx + 2y(2+x^2)dy = 0, \quad \Big|:\frac{2+x^2}{1+y^2} \qquad \frac{x}{2+x^2}dx + 2y(1+y^2)dy = 0,$$

$$\int \frac{x}{2+x^2}dx + \int 2y(1+y^2)dy = C, \quad \text{m.v. } u = 2+x^2, \quad du = 2x\,dx, \quad \frac{du}{2} = x\,dx,$$

$$\int \frac{du}{2u} + 2\int y dy + 2\int y^3 dy = C, \qquad \frac{1}{2}\ln|2+x^2| + y^2 + \frac{2}{4}y^4 = C, \quad |\cdot 2$$

$$\ln|2+x^2| + 2y^2 + y^4 = 2C, \qquad C_1 = 2C, \qquad \ln|2+x^2| + 2y^2(1+y^2) = C_1.$$

Näide 6.7. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y \cdot y' = x \cdot e^{x+y}$ algtingimusel $y(0) = -1$.

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \qquad y \cdot y' = x \cdot e^x \cdot e^y, \qquad y \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot e^x \cdot e^y. \quad |\cdot dx$$

$$y\,dy = x \cdot e^x \cdot e^y\,dx, \quad |: e^y \quad \frac{y}{e^y}dy = x \cdot e^x\,dx, \qquad y \cdot e^{-y}\,dy = x \cdot e^x\,dx.$$

$$\int y \cdot e^{-y}\,dy - \int x \cdot e^x\,dx = C.$$

Mõlemad integraalid integreerime ositi.

$$\int y \cdot e^{-y}\,dy = -e^{-y}y + \int e^{-y}\,dy = -e^{-y}y - e^{-y}, \quad \int x \cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x,$$

$$-e^{-y}y - e^{-y} - xe^x + e^x = C, \qquad -e^{-y}(y+1) - e^x(x-1) = C.$$

Erilahendi saamiseks kasutame rajatingimust, et üldlahendist avaldada C väärtus.

$$y(0) = -1: \quad -e^{-(-1)}(-1+1) - e^0(0-1) = C \qquad \Rightarrow \qquad C = 1.$$

Erilahend:

$$-e^{-y}(y+1) - e^x(x-1) = 1.$$

Näide 6.8. Leida järgmise diferentsiaalvõrrandi $y' = y^2 + 1$ erilahend algtingimusel $y(0) = 1$.

$$y' = y^2 + 1, \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 + 1, \qquad dy = (y^2+1)dx, \quad |: y^2+1 \qquad \frac{dy}{y^2+1} = dx.$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} - \int dx = C, \quad \arctan y - x = C, \qquad \arctan y = x + C.$$

Seega võrrandi üldlahendiks on

$$y = \tan(x + C).$$

Erilahendi saamiseks avaldame konstandi C algtingimusest järgnevalt:

$$y(0) = 1: \quad \arctan 1 - 0 = C, \qquad C = \frac{\pi}{4}.$$

Saime võrrandi erilahendi

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

6.3.1.1. ERALDUVATE MUUTUJATEGA VÕRRANDID KEEMIAS

Keemilise reaktsiooni võib kirja panna üldise valemiga kujul

$$\boldsymbol{aA + bB + \ \ldots = pP + qQ + \ \ldots},$$

kus suurtähtedega $A, B, \ldots$ on tähistatud keemilise reaktsiooni lähteaineid (reagente) ja paremal pool võrdusmärki tähistavad tähed $P, Q, \ldots$ keemilise reaktsiooni käigus tekkivaid produkte. Väiksed tähed $a, b, \ldots$ ja $p, q, \ldots$ tähistavad vastava keemilise aine molekulide arvu. Seega tähendab võrrand, et lähteainet A võetakse a molekuli ning lähteainet B võetakse b molekuli, keemilise reaktsiooni tulemusena tekib p molekuli ainet P ning q molekuli ainet Q. Vaatame näiteks keemilist reaktsiooni

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O,$$

siin reageerib 2 molekuli vesinikku ja üks molekul hapnikku ning reaktsiooni tulemuseks on kaks molekuli vett.
Termodünaamikas ja kineetikas kirjutatakse üldine keemiline reaktsioon kujul

$$\boldsymbol{0 = \sum_B \nu_B B},$$

kus võetakse summa üle kõigi ainete. Nii lähteainete kui ka saaduste jaoks on molekulide arvud määratud kordajaga ν_B, kusjuures lähteainel ja saadusel on erinev märk. Seega saame antud valemi kirjutada kujul

$$0 = -aA - bB + pP + qQ + \ \ldots = \nu_A A + \nu_B B + \nu_P P + \nu_Q Q + \ \ldots$$

Keemilise reaktsiooni vesiniku ja hapniku jaoks võime kirjutada kujul

$$0 = -2H_2 - O_2 + 2H_2O.$$

Keemilise reaktsiooni kiirus.

Olgu n_{A0} algne ainehulk aine A jaoks ajahetkel $t = 0$ ning olgu n_A ainehulk ajahetkel t. Reaktsiooni hulka aja t jooksul antuna reaktsioonimäära ξ kaudu järgmiselt

$$n_A = n_{A0} + \nu_A \xi.$$

Reaktsiooniulatus r saadakse reaktsioonimäära muutumise kiirusest aja järgi ehk

$$r = \frac{d\xi}{dt}.$$

See kiirus on esitatav ka ainehulga muutumise kiirusena iga aine jaoks, kui leiame tuletise n_A avaldisest ja arvestame, et n_{A0} ja ν_A on konstandid:

$$\frac{dn_A}{dt} = \nu_A \frac{d\xi}{dt}.$$

Seega saame avaldada:

$$r = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_A}\frac{dn_A}{dt}.$$

Füüsikalises keemias kasutatakse ainehulga asemel reaktsiooni kiiruse avaldamisel aine kontsentratsiooni, mis tähistatakse nurksulgudega: aine A kontsentratsioon ruumala V jaoks on esitatav:

$$[A] = \frac{n_A}{V}.$$

Siis reaktsiooni kiiruse aine A kontsentratsiooni jaoks saame:

$$v = \frac{r}{V} = \frac{1}{\nu_A}\frac{d[A]}{dt}.$$

Üldise keemilise reaktsiooni jaoks võime kirjutada reaktsiooni kiiruse järgmiselt:

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt} = \ \ldots$$

Keemilise reaktsiooni kiiruse vesiniku ja hapniku näite jaoks saame kirjutada kujul

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[H_2]}{dt} = -\frac{d[O_2]}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[H_2O]}{dt}.$$

Keemilise reaktsiooni toimumise mehhanism on üldiselt keeruline, meie vaatleme ainult lihtsamaid reaktsioone, mille kiirus sõltub ainult lähteainete kogustest, sellise reaktsiooni kiirus on avaldatav järgmiselt:

$$v = k[A]^{\alpha}[B]^{\beta} \ldots,$$

kus k on reaktsiooni kiiruskonstant ja suurused $\alpha, \beta, \ldots$ defineerivad reaktsiooni järgu. Konstant α annab reaktsiooni järgu vastavalt läheaine A kogusele, konstant β annab reaktsiooni järgu vastavalt läheaine B kogusele jne. Summa $\alpha + \beta + \ \ldots$ annab kogu reaktsiooni järgu.
Näiteks kui reageerib üks molekul lähteainet A, siis on tegemist esimest järku reaktsiooniga, kui reageerib kaks molekuli lähteainet A, siis on tegemist teist järku reaktsiooniga. Kui reaktsioonis osaleb kaks lähteainet $A + B$, mida mõlemat on üks molekul, siis reaktsiooni järgu annab nende ainete molekulide summa ehk tegemist on teist järku reaktsiooniga.

Esimest järku keemilise reaktsiooni kiirus, kui reageerib üks molekul lähteainet A:

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A].$$

Lihtsuse mõttes tähistame aine A kontsentratsiooni $[A]$ ajahetkel t muutujaga x,

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad \Big| : x$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -k, \quad \Big| \cdot dt$$

$$\frac{dx}{x} = -kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\ln|x| = -kt + C,$$

järelikult

$$x = Ce^{-k\cdot t}.$$

Leiame C väärtuse, olgu alghetkel $t = 0$ aine kontsentratsioon võrdne konstandiga: $x(0) = x_0$, siis

$$x_0 = Ce^{-k\cdot 0} = C.$$

Siit saame, et

$$C = x_0.$$

Seega saab aine A kontsentratsiooni arvutada igal ajahetkel kahaneva eksponentfunktsiooni kaudu:

$$x = x_0e^{-kt}, \;\; [A] = [A]_0e^{-kt}.$$

Teist järku keemilise reaktsiooni kiirus, kui reageerib kaks molekuli lähteainet A:

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

ehk

$$\frac{dx}{dt} = -2kx^2, \qquad \Big| : x^2$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = -2k, \qquad \Big| \cdot (-dt\,)$$

$$-\frac{dx}{x^2} = 2kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\frac{1}{x} = 2kt + C.$$

Leiame C väärtuse algtingimusest: olgu alghetkel $t = 0$ aine kontsentratsioon võrdne konstandiga $x(0) = x_0$, siis

$$\frac{1}{x_0} = 0 + C.$$

Siit saame, et $C = 1/x_0$ ja

$$\frac{1}{x} = 2kt + \frac{1}{x_0}.$$

Seega saab aine A kontsentratsiooni arvutada igal ajahetkel järgmiselt:

$$x = \frac{x_0}{1 + 2ktx_0}, \quad [A] = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}.$$

Teist järku keemilise reaktsiooni $A + B \rightarrow$ saadused jaoks reaktsiooni **kiirus** avaldub:

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B].$$

Olgu algtingimused lähteainete esialgsete kontsentratsioonide jaoks järgmised: $[A]_0 = a, [B]_0 = b$. Siis ajahetkel t on ainete kontsentratsioonid vastavalt $[A] = a - x, [B] = b - x$ ja vastav reaktsiooni kiirus on

$$-\frac{d(a-x)}{dt}=\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x).$$

Lahendus sõltub algtingimustest. Vaatame kõigepealt juhtu, kus $a=b$.

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)^2, \qquad \Big| : \frac{(a-x)^2}{dt}$$

$$\frac{dx}{(a-x)^2}=kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\frac{1}{a-x}=kt+C.$$

Leiame C väärtuse algtingimusest, ajahetkel $t=0$ on aine A kontsentratsioon $a-x$ võrdne $[A]_0=a$, sest $x(0)=0$

$$\frac{1}{a}=0+C.$$

Seega

$$\frac{1}{a-x}=kt+\frac{1}{a}.$$

Aine A kontsentratsiooni saame arvutada igal ajahetkel järgmiselt:

$$a-x=\frac{a}{1+akt}, \quad [A]=\frac{[A]_0}{1+kt[A]_0}.$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $a\neq b$. Siis

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x), \qquad \Big| : \frac{(a-x)(b-x)}{dt}$$

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt.$$

Integreerimiseks peame lahutama murru osamurdude summaks ja leidma määramata kordajad:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{A(b-x)+B(a-x)}{(a-x)(b-x)}.$$

Saame asendades $x=b$ ja $x=a$ leida kordajad A ja B:

$$A=\frac{1}{b-a}, B=\frac{1}{a-b}.$$

Saime

$$\frac{dx}{(a-x)(b-a)}+\frac{dx}{(a-b)(b-x)}=kdt.$$

Integreerime mõlemat võrrandi poolt, saame

$$-\frac{1}{b-a}\ln(a-x)-\frac{1}{a-b}\ln(b-x)=kt+C,$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{b-x}{a-x}\right)=kt+C,$$

Algtingimusest $x(0) = 0$, saame

$$C = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Seega üldlahend on kujul

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{b-x}{a-x}\right) = kt + \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

ehk

$$\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{a(b-x)}{b(a-x)}\right) = kt, \qquad \frac{1}{[B]_0 - [A]_0}\ln\left(\frac{[A]_0[B]}{[B]_0[A]}\right) = kt.$$

6.3.2. HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

6.3.2.1. HOMOGEENSED FUNKTSIOONID

Olgu D mingi piirkond xy- tasandil, mis koos iga punktiga $(x, y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$.

Definitsioon. Sellises piirkonnas määratud funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse ***k*-astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x, y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus

$$\boldsymbol{f(tx, ty) = t^k f(x, y)},$$

kus k on reaalarv ja $t > 0$.
Üldjuhul, n-muutuja funktsiooni korral, k-astme homogeenseks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kui kehtib võrdus

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kõikide $x_1, x_2, \dots, x_n$ väärtuste ja iga t väärtuse korral.

Näide 6.9. Leida järgmiste homogeensete funktsioonide jaoks aste k.

a) $f(x, y) = ax + by$; $\quad f(tx, ty) = atx + bty = t(ax + by) = tf(x, y)$.

Antud funktsioon on esimese astme homogeenne funktsioon ehk $k = 1$.

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

$$f(tx, ty, tz) = (tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2 = t^2(x^2 + y^2 + z^2) = t^2 f(x, y, z).$$

Tegemist on teise astme homogeense funktsiooniga ehk $k = 2$.

c) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^4 - y^4}$; $\quad f(tx, ty) = \dfrac{tx + ty}{(tx)^4 - (ty)^4} = \dfrac{t(x + y)}{t^4(x^4 - y^4)} = t^{-3} f(x, y)$.

Tegemist on (-3). astme homogeense funktsiooniga, $k = -3$.

Euleri teoreem. Kui funktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on k-astme homogeenne funktsioon, siis

$$\boldsymbol{x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_n f'_{x_n} = kf(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Näide 6.10. Näidata Euleri teoreemi väite kehtivust homogeense funktsiooni $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ jaoks.

$k = 2$. $\quad f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y, \quad f'_z = 2z, \qquad xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2f(x, y, z)$.

Näide 6.11. Näidata Euleri teoreemi väite kehtivust, kui

$$f(x,y)=\frac{x}{y}.$$

$$f(tx,ty)=\frac{tx}{ty}=t^0\frac{x}{y}.$$

0. järku ehk $k=0$, siis saame

$$f'_x=\frac{1}{y},\quad f'_y=-\frac{x}{y^2},\qquad xf'_x+yf'_y=\frac{x}{y}-y\frac{x}{y^2}=0f(x,y,z).$$

Näide 6.12. Näidata Euleri teoreemi väite kehtivust, kui

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^4-y^4},\qquad k=-3.$$

$$f'_x=\frac{x^4-y^4-4x^3(x+y)}{(x^4-y^4)^2},\quad f'_y=\frac{x^4-y^4-4y^3(x+y)}{(x^4-y^4)^2},$$

$$xf'_x+yf'_y=x\frac{x^4-y^4-4x^3(x+y)}{(x^4-y^4)^2}-y\frac{x^4-y^4-4y^3(x+y)}{(x^4-y^4)^2}=$$

$$=\frac{x^5-xy^4-4x^4(x+y)-yx^4+y^5+4y^4(x+y)}{(x^4-y^4)^2}=\frac{-3(x+y)(x^4-y^4)}{(x^4-y^4)^2}=-3f(x,y,z).$$

6.3.2.2. HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon. **Homogeenseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse diferentsiaalvõrrandit $\boldsymbol{y'=f(x,y)}$, kui $f(x,y)$ on **0-astme homogeenne funktsioon**:

$$f(tx,ty)=f(x,y),t>0.$$

Homogeenne diferentsiaalvõrrand on esitatav kujul

$$\boldsymbol{y'=f\left(\frac{y}{x}\right)},\tag{4}$$

kus $f(y/x)$ sõltub muutujate y ja x suhtest.
Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks **taandub** võrrand

$$\boldsymbol{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0},$$

kus $\boldsymbol{P(x,y),Q(x,y)}$ on ühe ja sama astme homogeensed funktsioonid. Selleks tuleks võrrandit **läbi jagada** argumendi $\boldsymbol{x}$ sellise astmega $\boldsymbol{x^\alpha}$, mis on võrdne võrrandis oleva argumendi $\boldsymbol{y}$ **kõrgeima astmega**.

Homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamine üldkujul. Homogeenne diferentsiaalvõrrand taandub eralduvate muutujatega võrrandiks, kui teha järgmine **muutuja vahetus**

$$\boldsymbol{\frac{y}{x}=z},\qquad \boldsymbol{y=zx},$$

kus $\boldsymbol{z=z(x)}$ on argumendi $\boldsymbol{x}$ funktsioon.
Muutuja vahetusega peame leidma uue muutuja **diferentsiaali**, selleks leiame tuletise argumendi x järgi

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.}$$

Asendame saadud seose võrrandisse (4), saame võrrandi uue muutuja $z = z(x)$ kaudu järgmiselt:

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Saadud diferentsiaalvõrrand on muutuja z suhtes eralduvate muutujatega võrrand, lahendades saame

$$xdz = (f(z) - z)dx, \quad |: x\,(f(z) - z) \qquad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C.}$$

Kui teostame integreerimise ja asendame otsitava z tagasi suhtega y/x, jõuame esialgse diferentsiaalvõrrandi üldlahendini. Kuna tegemist on jagatisega, siis **valem ei kehti juhul $f(z) - z = 0$** ehk $f(z) = z$. Vaatleme seda juhtu eraldi

$$f(z) = z, \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}.$$

Tegemist on eralduvate muutujatega võrrandiga, esialgne võrrand saab kuju

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad dy = \frac{y}{x}dx, \quad |: y \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C.$$

Juhul, kui kõikides liikmetes esineb naturaallogaritm, on mõistlik võtta naturaallogaritm ka integreerimiskonstandist, sellega asendame konstandi teise konstandiga $\ln C$, $C > 0$. Järgnevalt saame kasutada naturaallogaritmi omadusi ja teisendada summa korrutiseks või vahe jagatiseks. Edasi tuleks mõlemad võrrandi pooled tõsta arvu e astmeks (võib kirjutada kujul $\uparrow e$), et avaldada otsitav funktsioon y.

$$\boldsymbol{\ln|y| = \ln|xC|, \uparrow e \quad e^{\ln|y|} = e^{\ln|xC|}, \quad y = Cx.}$$

Näide 6.13. Leida homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \text{m. v.} \quad \frac{y}{x} = z, \quad y = zx, \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

$$z + x\frac{dz}{dx} = z - z^2, \quad zdx + xdz = (z - z^2)dx, \quad xdz = (z - z^2 - z)dx, \quad |: xz^2$$

$$\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dx}{x} = C, \quad -\frac{1}{z} + \ln|x| = \ln C, \quad |\cdot(-1)$$

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln C, \qquad \frac{x}{y} = \ln|xC|, \qquad y = \frac{x}{\ln|xC|}.$$

Näide 6.14. Leida diferentsiaalvõrrandi $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$ erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(1) = 2$.

$$(y^2 - x^2)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad |: x^2dx \qquad \frac{y^2 - x^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{y^2}{x^2} - 1 - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\text{m. v.} \quad \frac{y}{x} = z, \quad y = zx, \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}, \qquad z^2 - 1 - 2z\left(z + x\frac{dz}{dx}\right) = 0, \quad |\cdot dx$$

$$(-z^2-1)dx-2zxdz=0, \quad \Big|: \ -(z^2+1)x \qquad \frac{dx}{x}-\frac{2z}{-(z^2+1)}dz=0,$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2z}{z^2+1}dz=C, \qquad \text{m.v.} \ \ u=z^2+1 \quad du=2zdz$$

$$\ln|x|+\ln|z^2+1|=\ln C, \qquad \ln|x(z^2+1)|=\ln C, \quad \uparrow e \quad x(z^2+1)=C,$$

$$x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=C, \qquad \left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C}{x}-1, \quad |x^2 \quad y^2=Cx-x^2, \quad y(1)=2: \ 2^2=C-1, \ \ C=5.$$

$$y^2=5x-x^2.$$

6.3.3. DIFERENTSIAALVÕRRAND, MIS SISALDAB MURDLINEAARSET AVALDIST

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$\boldsymbol{y' = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right).}$$

Kui $a_3 = b_3 = 0$, siis on tegemist homogeense diferentsiaalvõrrandiga. Võrrandit,

$$y' = g(x, y)$$

kus $g(x, y)$ on kas murdlineaarne avaldis x ja y suhtes või selle funktsioon

$$g(x, y) = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right),$$

saab **taandada homogeenseks võrrandiks** (või eralduvate muutujatega võrrandiks) muutuja vahetusega, see oleneb determinandi D väärtusest:

$$\boldsymbol{D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,} \quad \text{m. v.} \quad \boldsymbol{x = X + u \quad y = Y + v,}$$

$$\boldsymbol{D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0,} \quad \text{m. v.} \quad \boldsymbol{z = a_1x + a_2y.}$$

Kui $D \neq 0$, muutuja vahetuses sisalduvad konstandid $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ tuleb määrata nii, et muutujatele $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ üle minnes on vabaliikmed saadavas murdlineaarses avaldises võrdsed nulliga. Selleks tuleb lahendada lineaarne võrrandisüsteem tundmatute konstantide u ja v suhtes:

$$\begin{cases} a_1u + a_2v + a_3 = 0 \\ b_1u + b_2v + b_3 = 0 \end{cases}$$

Seega funktsiooni F argument peale muutuja vahetust on kujul

$$\frac{a_1X + a_2Y}{b_1X + b_2Y}.$$

Kui $D = 0$, ei saa u, v üheselt määrata ja kasutatakse muutuja vahetust $z = a_1x + a_2y$. Peale muutuja vahetust saame eralduvate muutujatega võrrandi.

Näide 6.15. Leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab tingimust $y(0) = -2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{-2x + y + 2}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{m. v.} \quad z = 2x - y, \quad z' = 2 - y', \quad \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}.$$

$$2 - \frac{dz}{dx} = \frac{z + 1}{-z + 2}, \quad \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{z + 1}{-z + 2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-2z + 4 - z - 1}{-z + 2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-3z + 3}{2 - z}. \quad |\cdot dx$$

$$dz = \frac{-3z + 3}{2 - z}dx, \quad |: \frac{-3z + 3}{2 - z} \qquad \frac{2 - z}{3(1 - z)}dz = dx, \qquad \int \frac{2 - z}{3(1 - z)}dz = \int dx.$$

$$\int \frac{1 - z + 1}{3(1 - z)}dz = \int dx, \qquad \frac{1}{3}\int \frac{1 - z}{1 - z}dz + \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1 - z} = \int dx, \qquad \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}\ln|1 - z| = x + C. \quad |\cdot 3$$

$$z-\ln|1-z|=3x+C, \qquad z=2x-y, \qquad 2x-y-\ln|1-2x+y|=3x+C.$$

$$y(0)=-2:\ 2\cdot 0+2-\ln|1-2\cdot 0-2|=3\cdot 0+C, \qquad C=2-\ln|-1|=2.$$

$$2x-y-\ln|1-2x+y|=3x+2, \qquad -x-y-\ln|1-2x+y|-2=0,$$

$$x+y+\ln|1-2x+y|+2=0.$$

Näide 6.16. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y'=\frac{x-y}{x+y-3}+1.$$

Viime võrrandi paremal pool oleva murru ühisele nimetajale, saame

$$y'=\frac{x-y+x+y-3}{x+y-3}=\frac{2x-3}{x+y-3}.$$

Teeme muutuja vahetuse vastavalt determinandi väärtusele

$$D=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0, \qquad \text{m.v. } x=X+u, \quad y=Y+v, \quad dx=dX, \ dy=dY.$$

$$Y'=\frac{2X+2u-3}{X+u+Y+v-3}, \qquad \begin{cases}2u-3=0\\ u+v-3=0\end{cases} \Rightarrow\ u=\frac{3}{2}, \quad v=3-u=\frac{3}{2}.$$

Saadud võrrand on homogeenne diferentsiaalvõrrand kujul:

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X}{X+Y}=\frac{2X}{X\left(1+\frac{Y}{X}\right)}, \qquad m.v. \ \ \frac{Y}{X}=z, \qquad \frac{dY}{dX}=z+X\frac{dz.}{dX}$$

$$z+X\frac{dz}{dX}=\frac{2}{1+z}, \qquad |\cdot dX \qquad zdX+Xdz=\frac{2}{1+z}dX, \quad Xdz=\left(\frac{2}{1+z}-z\right)dX,$$

$$Xdz=-\left(\frac{z^2+z-2}{1+z}\right)dX, \quad \left|:X\left(\frac{z^2+z-2}{1+z}\right)\right. \qquad \frac{1+z}{z^2+z-2}dz=-\frac{dX}{X},$$

$$\int\frac{1+z}{z^2+z-2}dz=-\int\frac{dX}{X}, \qquad z^2+z-2=(z+2)(z-1),$$

$$\int\frac{1+z}{z^2+z-2}dz=\int\frac{A}{z+2}dz+\int\frac{B}{z-1}, \qquad 1+z=A(z-1)+B(z+2), \quad A=\frac{1}{3}, \qquad B=\frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z+2}+\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z-1}=-\int\frac{dX}{X}, \qquad \frac{1}{3}\ln|z+2|+\frac{2}{3}\ln|z-1|=-\ln|X|+\ln C, \quad |\cdot 3$$

$$\ln|z+2|+2\ln|z-1|=-3\ln|X|+\ln C, \qquad \ln|(z+2)(z-1)^2|=\ln\left|\frac{C}{X^3}\right|, \qquad |\uparrow e$$

$$(z+2)(z-1)^2=\frac{C}{X^3}, \qquad \left(\frac{Y}{X}+2\right)\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2=\frac{C}{X^3}, \qquad \left(\frac{Y+2X}{X}\right)\left(\frac{Y-X}{X}\right)^2=\frac{C}{X^3},$$

$$\frac{(Y+2X)(Y-X)^2}{X^3}=\frac{C}{X^3}, \qquad (Y+2X)(Y-X)^2=C, \qquad x=X+\frac{3}{2}, \quad y=Y+\frac{3}{2}.$$

$$\left(y-\frac{3}{2}+2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)\left(y-\frac{3}{2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2=C.$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on kujul

$$\left(y + 2x - \frac{9}{2}\right)(y - x)^2 = C.$$

6.3.4. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon. **Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.

Lineaarses diferentsiaalvõrrandis on nii otsitav funktsioon kui ka otsitava funktsiooni tuletis esimeses astmes.

Hariliku esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi **üldkujuks** on

$$\boldsymbol{P_0(x)y' + P_1(x)y = Q(x),}$$

kus $P_0(x), P_1(x)$ ja $Q(x)$ on antud funktsioonid ja $y = y(x)$ on otsitav.

Teoreem 6.2. Olgu võrrandi $P_0(x)y' + P_1(x)y = Q(x)$ kordajad $P_0(x), P_1(x)$ ja $Q(x)$ pidevad funktsioonid vahemikus (a, b), kusjuures $P_0(x) \neq 0$ kõigi $x \in (a, b)$ korral. Olgu $x_0 \in (a, b)$ ja $y_0 \in (-\infty, \infty)$ mingid etteantud arvud. Siis on võrrandil $P_0(x)y' + P_1(x)y = Q(x)$ olemas parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust $y(x_0) = y_0$.

Kui kordaja $P_0(x)$ erineb nullist, saab võrrandi sellega läbi jagada, tulemuseks on lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand kujul

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),} \tag{5}$$

kus $P(x), Q(x)$ on funktsioonid, mis sõltuvad muutujast x. Funktsiooni $Q(x)$ nimetatakse võrrandi vabaliikmeks. Kui $\boldsymbol{Q(x) \equiv 0}$, siis nimetatakse võrrandit (5) lineaarseks **homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks**. Siin omab sõna "homogeenne" teistsugust tähendust (võrrelda võib homogeensete ja mittehomogeensete lineaarvõrrandisüsteemidega). Võrrandi (5) lahendamiseks vaatame kahte erinevat meetodit.

1. Muutuja vahetusega lahendus

Muutuja vahetus on kahe argumendi x funktsiooni u ja v korrutis:

$$\boldsymbol{y = uv,} \quad u = u(x), v = v(x).$$

Leiame tuletise

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.} \tag{6}$$

Asendame võrrandisse (5) ja toome muutuja v sulgude ette:

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

$$v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) + u\frac{dv}{dx} = Q(x).$$

Funktsioonide u ja v kohta pole midagi eeldatud.
Nõuame, et sulgudes olev avaldis võrduks nulliga, siis saame kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0, \tag{7}$$

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x). \tag{8}$$

Võrrand (7) on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand $u = u(x)$ suhtes. Eraldame muutujad

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx, \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx, \qquad \boldsymbol{u = e^{-\int P(x)dx}}. \tag{9}$$

Asendame saadud u avaldise võrrandisse (8), saame

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x), \qquad \frac{dv}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \qquad \boldsymbol{v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C}.$$

Me otsime lahendit kujul $\boldsymbol{y = u \cdot v}$, seega lahend on

$$\boldsymbol{y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right)}.$$

Võrrandi praktilisel lahendamisel võib korrata iga kord seda mõttekäiku.

2. **Konstandi varieerimise meetod**.

Kõigepealt lahendatakse vastav homogeenne võrrand:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0}.$$

See on eralduvate muutujatega võrrand:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \qquad \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C, \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx, \qquad \frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx},$$

$$\boldsymbol{y_h = Ce^{-\int P(x)dx}}. \tag{10}$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (5) lahendit otsime kujul (10), kus konstanti C loeme argumendi $\boldsymbol{x}$ funktsiooniks. Seega

$$\boldsymbol{y = C(x)e^{-\int P(x)dx}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\,e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}\big(-P(x)\big).$$

Asendame y ja dy/dx mittehomogeensesse diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$\frac{dC(x)}{dx}\,e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot\big(-P(x)\big) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \qquad C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C.$$

Asendame saadud $C(x)$ avaldise lahendisse (10), saame

$$\boldsymbol{y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}}.$$

Saime lineaarse võrrandi üldlahendi jaoks sama valemi.

Näide 6.17. Lahendada võrrand $y' + y = x$.

1) vastav lineaarne homogeenne võrrand on kujul $y' + y = 0$, mille lahendamisel saame

$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad \frac{dy}{y} + dx = 0, \qquad \ln|y| + x = \ln C, \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x, \quad \frac{y}{C} = e^{-x}, \quad y_h = Ce^{-x}.$$

2) erilahendit otsime kujul $y_h = C(x)e^{-x}$. Asendades y_h esialgsesse võrrandisse $y' + y = x$, saame

$$y'_h = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}, \qquad C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = x, \qquad C'(x)e^{-x} = x, \qquad C'(x) = xe^{x},$$

$$C(x) = \int xe^{x}\, dx = e^{x}(x-1) + C_1, \qquad y = (e^{x}(x-1) + C_1)e^{-x} = x - 1 + C_1e^{-x}.$$

Lahendamiseks võib ka kohe funktsioonid asendada lahendivalemisse. Selles ülesandes

$$P(x) = 1, Q(x) = x,$$

Seega

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C\right)e^{-\int P(x)dx} = \left(\int xe^{\int dx}\, dx + C\right)e^{-\int dx} = \left(\int xe^{x}\, dx + C\right)e^{-x} =$$

$$= (e^{x}(x-1) + C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Näide 6.18. Lahendada lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}\,.$$

Lahendame võrrandi muutuja vahetusega:

$$y = uv, \qquad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Asendame võrrandisse, saame

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}uv = x\sqrt{x^2+1}, \qquad v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}\cdot u\right) + u\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2+1},$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}u = 0, \qquad \frac{du}{u} = \frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \ln|u| = \ln|x^2+1|, \quad u = x^2+1.$$

$$(x^2+1)\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2+1}, \qquad dv = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}dx, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx, \quad v = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Lahendiks on u ja v korrutis, seega $y = uv = (x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1} + C\right)$.

Märkus. Mõned diferentsiaalvõrrandid kujul

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

mis on mittelineaarsed ühe muutuja suhtes, võivad osutuda lineaarseks teise muutuja suhtes. Siis võib vaadelda näiteks sõltumatu muutuja osas suurust y, siis $dy \neq 0$ ning jagades võrrandit suurusega dy, jõuame lineaarse võrrandini, kus otsitavaks on funktsioon $x = x(y)$.

Näide 6.19. Lahendada võrrand $dx - (x\cos(y) + 2\sin(2y))dy = 0$.

Jagame võrrandit suurusega dy, saame lineaarse võrrandi kujul

$$\frac{dx}{dy} - (\cos(y))x = \sin(2y).$$

Lahendamiseks asendame funktsioonid lahendivalemisse. Selles ülesandes

$$P(y) = -\cos(y), Q(y) = \sin(2y),$$

seega

$$x = \left(\int Q(y) \cdot e^{\int P(y)dy}\, dy + C\right) e^{-\int P(y)dy} = \left(\int \sin(2y) \cdot e^{\int -\cos(y)dy}\, dy + C\right) e^{-\int -\cos(y)dy} =$$

$$= \left(\int \sin(2y) \cdot e^{-\sin(y)}\, dy + C\right) e^{\sin(y)}.$$

Leiame integraali

$$\int \sin(2y) \cdot e^{-\sin(y)}\, dy.$$

Selleks teeme muutuja vahetuse $t = \sin(y), dt = \cos(y)\, dy$. Kuna $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$, saame peale muutuja vahetust ja ositi integreerimist

$$\int \sin(2y) \cdot e^{-\sin(y)}\, dy = 2\int t \cdot e^{-t}\, dt = 2(-te^{-t}) + 2\int e^{-t}\, dt = -2te^{-t} - 2e^{-t} =$$

$$= -2\sin(y)\, e^{-\sin(y)} - 2e^{-\sin(y)} + C_1,$$

kus C_1 on suvaline konstant, mille võtame $C_1 = 0$, sest lahendivalemis on konstant C juba olemas. Asendame saadud tulemuse lahendivalemisse, saame võrrandi lahendiks järgmise avaldise

$$x = \left(-2\sin(y)\, e^{-\sin(y)} - 2e^{-\sin(y)} + C\right) e^{\sin(y)} = Ce^{\sin(y)} - 2(1 + \sin(y)).$$

6.3.4.1. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID KEEMIAS

Enamus keemilisi reaktsioone toimuvad mitmes elementaarses järgus ja nende kirjeldus protsessi kiiruse kohta hõlmab esimest järku diferentsiaalvõrrandit. Esimest järku protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

Aine A koosneb alghetkel $(t = 0)$ a molekulist ehk $[A]_0 = a$ ja tema kontsentratsioon ajahetkel t on $a - x$ ehk $[A] = a - x$. Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema molekulide arv alghetkel on 0: $[B]_0 = 0$ ja ajahetkel t on molekulide arv y ehk $[B] = y$. Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema molekulide arv alghetkel on 0: $[C]_0 = 0$ ja ajahetkel t on $x - y$: $[C] = x - y$. Sellist protsessi saab modelleerida kahe esimest järku diferentsiaalvõrrandiga, millest esimene on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand ja teine on lineaarne.

$$\begin{cases} \frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] \\ \frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B] \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x) \\ \frac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2 y \end{cases}$$

Lahendades esimese võrrandi süsteemist, saame

$$a - x = ae^{-k_1 t},$$

seejärel asendame saadud suuruse teise võrrandisse, saame muutuja y suhtes lineaarse võrrandi:

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}. \tag{11}$$

Lahendame selle võrrandi konstandi varieerimise meetodil. Lahendamiseks peame eeldama, et $k_1 \neq k_2$. Kõigepealt lahendame võrrandile (11) vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = 0, \qquad \Big| \cdot \frac{dt}{y} \tag{12}$$

$$\frac{dy}{y} = -k_2 dt.$$

Integreerides saame:

$$\ln|y| = -k_2 t + C_1.$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi (12) üldlahendiks on sellisel juhul

$$y = C_1 e^{-k_2 t}. \tag{13}$$

Otsime nüüd esialgse diferentsiaalvõrrandi (11) lahendit kujul

$$y = C_2(t) e^{-k_2 t},$$

asendame konstandi C_1 uue otsitava funktsiooniga muutujast t. See lahend peab rahuldama ka diferentsiaalvõrrandit (11). Asendame lahendi võrrandisse (11) ja teeme järgmised teisendused:

$$\frac{d(C_2(t)e^{-k_2 t})}{dt} + k_2 C_2(t) e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$\frac{d\big(C_2(t)\big)}{dt} e^{-k_2 t} - k_2 C_2(t) e^{-k_2 t} + k_2 C_2(t) e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$\frac{d(C_2(t))}{dt} e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$\frac{d(C_2(t))}{dt} = k_1 a e^{(k_2 - k_1)t}.$$

Integreerides saame:

$$C_2(t) = \frac{a k_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + C_3,$$

kus C_3 on integreerimiskonstant.
Asendame saadud $C_2(t)$ võrrandisse (13), saame diferentsiaalvõrrandi (11) lahendi kujul:

$$y = \left(\frac{a k_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + C_3\right) e^{-k_2 t}. \tag{14}$$

Leiame C_3 väärtuse kasutades algtingimust $y(0) = 0$, saame:

$$C_3 = -\frac{a k_1}{k_2 - k_1}.$$

Asendame saadud konstandi C_3 väärtuse võrrandisse (14) ja saame lahendiks:

$$y = \frac{a k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Lahendist on näha, miks pidime eeldama, et $k_1 \neq k_2$. Kui $k_1 = k_2$, saame lahendiks $y = [A]_0 k_1 t e^{-k_1 t}$. Saime ainete A, B ja C kontsentratsioonid ajahetkel t:

$$\begin{cases} [A] = [A]_0 e^{-k_1 t}, \\ [B] = \begin{cases} \dfrac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), & k_1 \neq k_2, \\ [A]_0 k_1 t e^{-k_1 t}, & k_1 = k_2, \end{cases} \\ [C] = [A]_0 - [A] - [B]. \end{cases}$$

6.3.5. BERNOULLI DIFERENTSIAALVÕRRAND

Definitsioon. **Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^a, \tag{15}$$

kus P ja Q on teadaolevad argumendi x funktsioonid, mis on pidevad vahemikus (c, d) ning a on mingi **reaalarv**. Eeldame, et $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest siis on tegemist lineaarse võrrandiga).

Bernoulli võrrand on **teisendatav lineaarseks võrrandiks muutuja vahetusega** $z = y^{1-a}$, seejuures eeldame, et $y \neq 0$.

Lahendamiseks **korrutame** võrrandit (15) suurusega y^{-a} ja teeme muutuja vahetuse:

$$\frac{dy}{dx}y^{-a} + P(x)y^{1-a} = Q(x), \qquad z = y^{1-a}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}y^{-a} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{1-a}.$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{1-a} + P(x)z = Q(x), \qquad \frac{dz}{dx} + (1-a)P(x)z = (1-a)Q(x).$$

Saime z suhtes lineaarse võrrandi. Kui $a > 0$, siis on võrrandi lahendiks ka $y = 0$.

Näide 6.20. Lahendada Bernoulli võrrand $y' - 2xy = 2x^3y^2$.

Jagame võrrandit suurusega $|: y^2$, saame

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3, \quad a = 2, \quad z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}, \quad -z' - 2xz = 2x^3, \quad z' + 2xz = -2x^3.$$

Saime lineaarse diferentsiaalvõrrandi, mille üldlahendiks on

$$z = \left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

$$z = \left(\int (-2x^3)\cdot e^{x^2}dx + C\right)\cdot e^{-x^2} = \left(-x^2e^{x^2} + e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}, \quad y = \frac{1}{1 - x^2 + Ce^{-x^2}}.$$

Lisaks sellele rahuldab võrrandit konstantne funktsioon $y = 0$, mida ei ole võimalik saada üldlahendist konstandi C mitte mingil konkreetsel väärtusel.

Näide 6.21. Lahendada võrrand $x^2(x-1)y' - y^2 - x(x-2)y = 0$.

Jagame võrrandit suurusega $|: x^2(x-1)y^2$

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{x(x-2)}{yx^2(x-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)},\qquad a=2,\quad z=y^{1-2}=\frac{1}{y},\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

$$z'-\frac{x-2}{x(x-1)}z=\frac{1}{x^2(x-1)},\qquad z=\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx},$$

$$z=\left(\int \frac{1}{x^2(x-1)}\cdot e^{\int -\frac{x-2}{x(x-1)}dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int -\frac{x-2}{x(x-1)}dx},\qquad \int -\frac{x-2}{x(x-1)}dx=\int \frac{A}{x}dx+\int \frac{B}{x-1}dx,$$

$$-\frac{x-2}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1},\qquad -(x-2)=A(x-1)+Bx,\qquad A=-2,\quad B=1.$$

$$\int -\frac{x-2}{x(x-1)}dx=\int \frac{-2}{x}dx+\int \frac{1}{x-1}dx=-2\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\frac{x-1}{x^2},\qquad e^{\ln\frac{x-1}{x^2}}=\frac{x-1}{x^2}.$$

$$z=\left(\int \frac{1}{x^2(x-1)}\cdot\frac{x-1}{x^2}dx+C\right)\cdot\frac{x^2}{x-1}=\left(-\frac{1}{3x^3}+C\right)\cdot\frac{x^2}{x-1},\qquad y=\frac{x^2}{1+C(x-1)}.$$

Näide 6.22. Lahendada võrrand $3x^2dx-(x^3+y+1)dy=0$.

Jagame võrrandit kõigepealt suurusega dy, saame võrrandi

$$3x^2\frac{dx}{dy}-x^3-y-1=0,$$

Jagame võrrandit suurusega $3x^2$, saame

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{3}x=\frac{y+1}{3}x^{-2}.$$

Tegemist on Bernoulli võrrandiga, kus $x=x(y)$ on otsitav funktsioon ja $a=-2$. Lineaarse võrrandi saamiseks teeme muutuja vahetuse

$$z=x^{1-(-2)}=x^3\ ,\qquad \frac{dz}{dx}=3x^2\frac{dx}{dy}.$$

Lineaarne võrrand on kujul

$$z'-z=y+1.$$

Lineaarse võrrandi lahendiks saame funktsiooni

$$z=Ce^y-y-2,$$

Asendame muutuja z avaldisega x^2, saame ülesande lahendiks funktsiooni

$$x=(Ce^y-y-2)^{\frac{1}{3}}.$$

6.3.6. EKSAKTNE DIFERENTSIAALVÕRRAND

Definitsioon. Diferentsiaalvõrrandit kujul $\boldsymbol{M(x,y)dx+N(x,y)dy=0}$ nimetatakse **eksaktseks** ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $\boldsymbol{u(x,y)}$, nii et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:

$$\boldsymbol{M(x,y)dx+N(x,y)dy=du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.}\qquad (16)$$

Kui teadaolevad funktsioonid M ja N ning nende osatuletised $\partial M/\partial y$ ja $\partial N/\partial x$ on pidevad muutujate x, y mingis piirkonnas D, siis **võrrandi eksaktsuseks piirkonnas D on tarvilik ja piisav**, et iga $(x, y) \in D$ korral **kehtib võrdus**

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Eksaktse võrrandi võib kirjutada ka kujul $du(x, y) = 0$, millest

$$u(x, y) = C.$$

Saadud võrdus määrab eksaktse võrrandi **üldlahendi** muutujate x, y piirkonnas, milles $M^2(x, y)dx + N^2(x, y)dy \neq 0$. Eksaktse võrrandi mistahes lahend on saadav üldlahendist konstandi C mingil konkreetsel väärtusel (konstant C saab omada ainult niisuguseid väärtusi, mis kuuluvad funktsiooni $u(x, y)$ väärtuste piirkonda). Funktsiooni $u(x, y)$ leidmiseks on mitmeid meetodeid. Vaatleme lähemalt neist kahte.

1) Lähtume võrdusest (16) ja leiame funktsiooni $u(x, y)$ järgmise võrrandisüsteemi abil:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Kõigepealt integreerime esimese võrduse mõlemaid pooli muutuja x järgi, kusjuures loeme muutuja y konstantseks.

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y), \tag{17}$$

kus $C(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y. Valime $C(y)$ nii, et oleks täidetud ka teine pool seosest:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Selleks diferentseerime võrduse (17) mõlemal poolel olevat avaldist muutuja y järgi ja võrdsustame tulemuse funktsiooniga $N(x, y)$.
Saadavast võrrandist leiame $C(y)$ ja seejärel võrduse (17) abil kirjutame välja funktsiooni $u(x, y)$.

2) Lähtume valemist

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$$

või valemist

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy.$$

Arvud x_0 ja y_0 võib valida vabalt, kuid nii, et punkt (x_0, y_0) kuuluks muutujate x, y piirkonda, milles funktsioonid M, N, $\partial M/\partial y$ ja $\partial N/\partial x$ on pidevad.

Näide 6.23. Lahendada võrrand $\underbrace{(x^3 + xy^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2y + y^3)}_{N}\,dy = 0.$

Antud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2) = 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3) = 2xy.$$

Järelikult $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=du(x,y)$. Üheaegselt peavad kehtima võrdused

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3+xy^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+y^3,$$

loeme y parameetriks ja integreerime x järgi

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)=\int(x^3+xy^2)dx+C(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+C(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+C(y)\right)=x^2y+y^3,\ \ x^2y+C'(y)=x^2y+y^3,\ \ \ C'(y)=y^3,\ \ C(y)=\frac{y^4}{4}+C_1,\ \ C_1=0.$$

$$u(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4},\qquad \frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C.$$

Näide 6.24. Lahendada võrrand $\underbrace{(x+2y)}_{N}\,dy+\underbrace{(y+3x^2)}_{M}\,dx=0.$

Kontrollime eksaktsuse tingimust:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y+3x^2)=1,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)=1.$$

Võrrandi lahend avaldub kujul

$$u(x,y)=\int(x+2y)dy+C(x)=yx+y^2+C(x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(yx+y^2+C(x)\big)=y+3x^2,\ \ \ y+C'(x)=y+3x^2,\qquad C(x)=x^3,$$

$u(x,y)=yx+y^2+x^3$. Üldlahendiks on $yx+y^2+x^3=C$.

6.4. NUMBRILISED MEETODID

Analüütiline lahendus on alati parem kui numbriline, sest analüütilist lahendit saame kasutada mistahes sõltumatu muutuja numbriliste väärtuste korral, numbriline lahend arvutatakse tabelina konkreetsete muutuja väärtuste korral.

6.4.1. EULERI MEETOD

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{18}$$

mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, otsitavaks funktsiooniks on $y = y(x)$. Võrrandi (18) parem pool $f(x, y)$ olgu pidev muutujate x, y piirkonnas D ning arvud x_0 ja y_0 olgu sellised, et $(x_0, y_0) \in D$.

Tahame teada funktsiooni väärtust punktis $x = b$, seega võtame lõigu $[x_0, b]$ ja jaotame n võrdseks osaks

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b, x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Tähistame vahed

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = h.$$

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Olgu mingi funktsioon $y = \varphi(x)$ võrrandi (18) mingi ligikaudne lahend ja

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n).$$

Tähistame

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Asendame võrrandi (18) tuletise igas punktis $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ lõplike vahede suhtega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad \Delta y = f(x, y)\Delta x.$$

Kui $x = x_0$, siis

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0), \quad \Delta y_0 = f(x_0, y_0)\Delta x, \quad y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h, \quad \mathbf{y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.}$$

Teada on y_0, x_0, h. Kui $x = x_1$, siis

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = f(x_1, y_1), \quad \Delta y_1 = f(x_1, y_1)\Delta x, \quad y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h, \quad \mathbf{y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.}$$

Teada on y_1, x_1, h. Analoogiliselt leiame $\mathbf{y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h, \dots, y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.}$

Saime valemi diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks **Euleri meetodil**

$$\mathbf{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.}$$

Seega on lahendi ligikaudsed väärtused punktides $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ leitud. Ühendame koordinaattasandil punktid $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Saame integraalkõvera ligikaudse kujutisena murdjoone. Seda murdjoont nimetatakse **Euleri murdjooneks**. Mida väiksemad sammud me teeme, seda lähedasem on Euleri murdjoon integraalkõverale.

Ülesannet võib lahendada ka **graafiliselt**, konstrueerides Euleri murdjoone. Joonistame punkti $M_0(x_0, y_0)$ läbiva joonelemendi, see on joon tõusuga $f(x_0, y_0)$. Liigume mööda joont argumendi x kasvavate väärtuste suunas punktist M_0 paremale punktini $M_1(x_1, y_1)$. Kordame sama tegevust: joonistame punkti $M_1(x_1, y_1)$ läbiva joonelemendi ja liigume selle sihis paremale järgmise punktini $M_2(x_2, y_2)$ jne.

Näide 6.25. Leida võrrandi $y' = y + x$ ligikaudne lahend kohal $x = 1$, mis rahuldaks algtingimust $y(0) = 1$.

Jaotame lõigu [0,1] kümneks osaks. $x_k = 0; 0{,}1; \dots; 1, \quad h = 0.1, \quad f(x, y) = y + x.$

$$\frac{dy}{dx} = y + x, \quad y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

x_k	y_k	$f(x_k, y_k) = x_k + y_k$	$f(x_k, y_k)h = (x_k + y_k)h$	$y_{k+1} = y_k + (x_k + y_k)h$
0	1	1	0.1	1.1
0.1	1.1	1.2	0.12	1.22
0.2	1.22	1.42	0.142	1.362
0.3	1.362	1.662	0.1662	1.5282
0.4	1.5282	1.9282	0.1928	1.721
0.5	1.721	2.221	0.2221	1.9431
0.6	1.9431	2.5431	0.2543	2.1974
0.7	2.1974	2.8974	0.2897	2.4871
0.8	2.4871	3.2871	0.3287	2.8158
0.9	2.8158	3.7158	0.37158	3.1874
1.0	**3.1874** Ligikaudne lahend $y(1) \approx 3,1874$			

Täpse lahendi (analüütilise lahendi) saamiseks lahendamine võrrandi $y' = y + x$. Tegemist on lineaarse võrrandiga, mille lahendame muutuja vahetusega.

$$y = uv \;\; y' = u'v + v'u, \qquad u'v + v'u = uv + x \;\; v(u' - u) + uv' = x.$$

Lahendame kahes osas: 1) $(u' - u) = 0$, 2) $uv' = x$,

$$1) \;\; (u' - u) = 0, \quad \frac{du}{dx} = u, \quad du = udx, \quad \frac{du}{u} = dx, \quad \ln|u| = x, \quad u = e^x.$$

$$2) \; uv' = x, \quad v'e^x = x, \quad \frac{dv}{dx}e^x = x, \quad dv = xe^{-x}dx, \qquad \int dv = \int xe^{-x}dx\,.$$

Ositi $u = x, \; dv = e^{-x}dx, \quad du = dx, \quad v = -e^{-x}$.

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx \;\; v = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x + 1) + C,$$

$$y = uv = e^x \cdot [(-e^{-x})(x + 1) + C] = -x - 1 + Ce^x,$$

$$y(0) = 1\text{:} \;\; 1 = -0 - 1 + Ce^0, \qquad C = 2.$$

Üldlahend: $y = -x - 1 + Ce^x$, erilahend $y = -x - 1 + 2e^x$.

Arvutame nüüd erilahendi väärtuse kohal $x = 1$: $y(1) = -1 - 1 + 2e^1 = 2e - 2 = 3{,}43656$.

Ligikaudne lahend on täpsem, kui suurendame osalõikude arvu, sellisel juhul on mõistlikum kasutada tabelarvutusprogrammide abi, et vältida arvutusvigade tekkimist.

6.4.2. RUNGE-KUTTA MEETODID

Meetodid on algoritmide pere harilike diferentsiaalvõrrandite (ja harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemide) ilmutatud või ilmutamata ligikaudse lahendi numbriliseks leidmiseks algtingimustega ülesande korral. Nad põhinevad iteratsioonil. Meetodi algse kuju töötas välja Saksa matemaatik Carl Runge aastal 1895 ning seda üldistas Martin Wilhelm Kutta aastal 1901. Kõige suurema täpsusega on 4. järku klassikaline Runge-Kutta meetod, see meetod on nii laialt levinud, et seda nimetatakse sageli lihtsalt **Runge-Kutta meetodiks**.
Olgu meil Cauchy ülesanne

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 .$$

Siis funktsiooni väärtus järgmises punktis arvutatakse järgmise valemi järgi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3),$$

h on sammu suurus x järgi.

Näide 6.26. Leida võrrandi $y' = y + x$ ligikaudne lahend Runge-Kutta meetodiga kohal $x = 1$, mis rahuldaks algtingimust $y(0) = 1$.

Jaotame lõigu [0,1] viieks osaks: $x_k = 0; 0{,}2; \ldots; 1$, $h = 0.2$, $f(x,y) = y + x$.

$$\frac{dy}{dx} = y + x, \quad y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n, \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}k_1,$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) = x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}k_2, \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) = x_n + h + y_n + hk_3.$$

x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\cdot \cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
0	1	1	1,2	1,22	1,444	1,2428
0,2	1,2428	1,4428	1,68708	1,711508	1,9851016	1,583636
0,4	1,583636	1,983636	2,281999512	2,311835871	2,646003094	2,044212913
0,6	2,044213	2,644213	3,008634204	3,045076333	3,453228179	2,651041652
0,8	2,651042	3,451042	3,896145817	3,940656233	4,439172898	3,436502273
1,0	**3,436502** Ligikaudne lahend $y(1) \approx 3,436502$					

Täpne lahend oli $y = -x - 1 + 2e^x$, $(1) = 2e - 2 = 3{,}43656$. Kuna tegemist oli täpsema arvutusmeetodiga, on lahend ka poole vähema osalõikude arvu korral täpsem.

Arvutustabeli võib teha kasutades ka mõnda tabelarvutusprogrammi (Microsoft Excel või muud). Tuleb kirja panna valemid esimese rea jaoks ja teises reas valem, mis viitab esimese rea viimasele veerule (y_{n+1}), ülejäänud valemid tuleb kopeerida soovitud arvu kordi.

0	**1**	**1**	**1,2**	**1,22**	**1,444**	**1,2428**
0,2	**1,2428**	1,4428	1,68708	1,711508	1,985102	1,583636
0,4	1,583636	1,983636	2,282	2,311836	2,646003	2,044213
0,6	2,044213	2,644213	3,008634	3,045076	3,453228	2,651042
0,8	2,651042	3,451042	3,896146	3,940656	4,439173	3,436502
1	3,436502					

6.5. TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

6.5.1. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Konstantsete kordajatega lineaarseks homogeenseks teist järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0}, \tag{19}$$

kus a, b on konstandid.

Teoreem 6.3.
Lineaarse homogeense võrrandi (19) erilahendite summa on samuti selle võrrandi lahend.

Teoreem 6.4.
Kui $\boldsymbol{y_1(x)}$ on lineaarse homogeense võrrandi (19) lahend, siis on lahendiks ka $\boldsymbol{Cy_1(x)}$, kus C on suvaline konstant.

Järeldus.
Kui $\boldsymbol{y_1(x)}$ ja $\boldsymbol{y_2(x)}$ on lineaarse homogeense võrrandi (19) lahendid, siis on lahendiks ka nende erilahendite lineaarne kombinatsioon $\boldsymbol{y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)}$. Kui $\boldsymbol{y_1(x)}$ ja $\boldsymbol{y_2(x)}$ on lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis on $\boldsymbol{y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)}$ võrrandi (19) üldlahendiks.

Kaht funktsiooni $\boldsymbol{y_1(x)}$ ja $\boldsymbol{y_2(x)}$ nimetatakse **lineaarselt sõltuvateks** , kui leiduvad mingid nullist erinevad reaalarvud C_1 ja C_2 nii, et kehtib samasus $\boldsymbol{C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0}$.
Kaht funktsiooni $\boldsymbol{y_1(x)}$ ja $\boldsymbol{y_2(x)}$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuteks** , kui $\boldsymbol{C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0}$ kehtib vaid $C_1 = C_2 = 0$ korral. Kahe lineaarselt sõltuva funktsiooni suhe on konstantne

$$\boldsymbol{\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{C_2}{C_1} = C}.$$

Võrrandi (19) lahendit on loomulik otsida selliste funktsioonide seast, mille tuletised on sarnased lähetefunktsiooniga, nii et pärast võrrandisse asendamist võiksid kõik liikmed välja koonduda. Üheks selliseks funktsiooniks on

$$y = e^{kx},$$

kus k on parameeter. Leiame selle funktsiooni tuletised:

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}.$$

Kui funktsioon on võrrandi lahendiks, siis võrrandisse asendamisel peame saama samasuse, seega

$$k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} \equiv 0$$

ehk

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) \equiv 0.$$

Kuna $e^{kx} \neq 0$, siis samasuse kehtimiseks peab olema null teine tegur:

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Saime ruutvõrrandi, mille lahendid avalduvad kujul

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Definitsioon. Diferentsiaalvõrrandile (19) vastavaks **karakteristlikuks võrrandiks** nimetatakse ruutvõrrandit

$$\boldsymbol{k^2 + ak + b = 0}.$$

Diferentsiaalvõrrandi (19) üldlahendi leidmisel tuleb vaadelda 3 eri juhtu vastavalt karakteristliku võrrandi lahenditele:

1) reaalsed ja erinevad,
2) reaalsed ja võrdsed,
3) komplekssed.

1) Reaalsed ja erinevad karakteristliku võrrandi lahendid.

Olgu võrrandi $\boldsymbol{k^2 + ak + b = 0}$ lahendid $\boldsymbol{k_1, k_2}$. Diferentsiaalvõrrandi (19) erilahendid on

$$\boldsymbol{y_1 = e^{k_1 x}} \text{ ja } \boldsymbol{y_2 = e^{k_2 x}}.$$

Kontrollime, kas erilahendid rahuldavad võrrandit:

$$(e^{k_1 x})' = k_1 e^{k_1 x}, \quad (e^{k_2 x})' = k_2 e^{k_2 x}, \quad (e^{k_1 x})'' = k_1^2 e^{k_1 x}, \quad (e^{k_2 x})'' = k_2^2 e^{k_2 x},$$

$$(e^{k_1 x})'' + a(e^{k_1 x})' + be^{k_1 x} = k_1^2 e^{k_1 x} + ak_1 e^{k_1 x} + be^{k_1 x} = e^{k_1 x}(k_1^2 + ak_1 + b) = 0.$$

Erilahend rahuldab võrrandit, sest $k_1^2 + ak_1 + b = 0$, sest k_1 on karakteristliku võrrandi $k^2 + ak + b = 0$ lahend. Samasuguse tulemuse saame teise erilahendi jaoks:

$$(e^{k_2 x})'' + a(e^{k_2 x})' + be^{k_2 x} = k_2^2 e^{k_2 x} + ak_2 e^{k_2 x} + be^{k_2 x} = e^{k_2 x}(k_2^2 + ak_2 + b) = 0.$$

Seega

$$(e^{k_1 x})'' + a(e^{k_1 x})' + be^{k_1 x} = 0\,, \quad (e^{k_2 x})'' + a(e^{k_2 x})' + be^{k_2 x} = 0,$$

sõltumata x väärtustest. Järelikult on $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ võrrandi (19) erilahendid. Leiame $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ suhte

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{k_1 x - k_2 x} \neq \text{const}.$$

Kuna funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud, siis **diferentsiaalvõrrandi (19) üldlahend** on esitatav kujul

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}},$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

2) Reaalsed ja võrdsed karakteristliku võrrandi lahendid.

$$\boldsymbol{k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}; \quad a^2 - 4b = 0},$$

siis diferentsiaalvõrrandi (19) üldlahendiks on funktsioonide (erilahendite)

$$\boldsymbol{y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}}$$

lineaarne kombinatsioon. Üldlahend on

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 xe^{-\frac{a}{2}x} = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}}.$$

Näitame, et y_1 ja y_2 rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (19):

$$\left(e^{-\frac{a}{2}x}\right)' = -\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}, \qquad \left(e^{-\frac{a}{2}x}\right)'' = \frac{1}{4}a^2 e^{-\frac{a}{2}x},$$

$$\frac{1}{4}a^2e^{-\frac{a}{2}x}+a\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\right)+be^{-\frac{a}{2}x}=e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b\right)=e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{a}{2}x}(a^2-4b)=0,$$

$$\left(xe^{-\frac{a}{2}x}\right)'=e^{-\frac{a}{2}x}-\frac{a}{2}xe^{-\frac{a}{2}x}\quad\left(xe^{-\frac{a}{2}x}\right)''=-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}+\frac{a^2}{4}xe^{-\frac{a}{2}x}=e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}x-a\right),$$

$$e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}x-a\right)+a\left(e^{-\frac{a}{2}x}-\frac{a}{2}xe^{-\frac{a}{2}x}\right)+bxe^{-\frac{a}{2}x}=e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}x-a+a-\frac{a^2}{2}x+bx\right)=$$
$$=e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a^2}{4}x+bx\right)=-\frac{1}{4}xe^{-\frac{a}{2}x}(a^2-4b)=0.$$

Eelduse kohaselt $a^2-4b=0$, järelikult erilahendid

$$y_1=e^{-\frac{a}{2}x},y_2=xe^{-\frac{a}{2}x}.$$

rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (19). Vaatame, kas nad on lineaarselt sõltumatud

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{e^{-\frac{a}{2}x}}{xe^{-\frac{a}{2}x}}=\frac{1}{x}\neq\text{const.}$$

Kuna funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud, siis diferentsiaalvõrrandi (19) üldlahend on esitatav kujul

$$\boldsymbol{y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{a}{2}x}.}$$

3) Kompleksed karakteristliku võrrandi lahendid.

Kompleksse lahendite korral peab ruutvõrrandi lahendivalemi ruutjuure alune avaldis olema negatiivne

$$\boldsymbol{a^2-4b<0,}$$

$$k_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}=-\frac{a}{2}\pm\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\cdot\sqrt{4b-a^2}.$$

Tähistame

$$\boldsymbol{\alpha=-\frac{a}{2},\qquad\beta=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2},}\qquad k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta.$$

Avaldame a ja b

$$\boldsymbol{a=-2\alpha,}\qquad\beta^2=\frac{1}{4}(4b-a^2),\ \ b=\beta^2+\frac{1}{4}a^2=\beta^2+\frac{1}{4}\cdot4\alpha^2=\beta^2+\alpha^2,$$

$$\boldsymbol{b=\beta^2+\alpha^2.}$$

Diferentsiaalvõrrandi (19) erilahendid on

$$\boldsymbol{y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,}\qquad\boldsymbol{y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x.}$$

Näitame erilahendite kehtivust. Leiame tuletised

$$\frac{dy_1}{dx}=\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x),$$

$$\frac{dy_2}{dx}=\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x=e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x),$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \alpha e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - \alpha\beta\sin\beta x - \alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x),$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \alpha e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) + e^{\alpha x}(\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + \alpha\beta\cos\beta x + \alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x).$$

Asetame funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ võrrandisse (19), asendame $a = -2\alpha, b = \beta^2 + \alpha^2$.

$$e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) + ae^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + be^{\alpha x}\cos\beta x =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x + a(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + b\cos\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b) + \sin\beta x(-2\alpha\beta - a\beta)\big) =$$
$$= e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2) + \sin\beta x(-2\alpha\beta + 2\alpha\beta)\big) = 0.$$

$$e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x) + ae^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) + be^{\alpha x}\sin\beta x =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x + a(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) + b\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(2\alpha\beta + a\beta) + \sin\beta x(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)\big) =$$
$$= e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(2\alpha\beta - 2\alpha\beta) + \sin\beta x(\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2)\big) = 0.$$

Järelikult funktsioonid $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ on diferentsiaalvõrrandi (19) lahendid. Vaatame, kas nad on lineaarselt sõltumatud

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \cot\beta x \neq \text{const}.$$

Kuna funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud, siis diferentsiaalvõrrandi (19) üldlahend on esitatav kujul

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).}$$

Näide 6.27. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Karakteristlik võrrand $k^2 + 4k + 3 = 0,\ k_1 = -3,\ k_2 = -1$. Lahendid on reaalsed ja erinevad, seega on üldlahend

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}.$$

Näide 6.28. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Karakteristlik võrrand on $k^2 + 6k + 9 = 0,\ k_1 = k_2 = -3$.
Lahendid on võrdsed, seega on üldlahend

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{a}{2}x} = (C_1 + C_2x)e^{-3x}.$$

Näide 6.29. Lahendada diferentsiaalvõrrand $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Karakteristlik võrrand $k^2 + 6k + 13 = 0,\ k_1 = -3 + 2i,\ k_2 = -3 - 2i$. Lahendid on kompleksed, seega on üldlahend $\alpha = -3, \beta = 2$:

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

6.5.2. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Konstantsete kordajatega lineaarse mittehomogeense teist järku diferentsiaalvõrrandi üldkuju:

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = F(x),} \qquad (20)$$

kus a, b on konstandid ja $F(x)$ on argumendi x funktsioon.
Võrrandi (20) üldlahend on esitatav kujul

$$\boldsymbol{y = y_* + Y},$$

kus y_* on vastava homogeense võrrandi

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0}$$

üldlahend ja Y on võrrandi (20) mingi erilahend. Erilahendit tuleb otsida sarnaselt funktsiooni $\boldsymbol{F(x)}$ kujule.

1) $F(x)$ on konstant $F(x) = C$.

Esitame erilahendi samuti konstandi kujul $\boldsymbol{Y = C_0}$. Kuna tegemist on konstandiga, siis tuletised $Y' = Y'' = 0$ ja võrrandisse (20) asendades saame

$$bC_0 = C, \quad C_0 = \frac{C}{b}, \qquad \boldsymbol{Y = \frac{C}{b}}.$$

Kui võrrandis (20) $\boldsymbol{b = 0}$, siis tuleb erilahendit otsida kujul $\boldsymbol{Y = C_0 x}$. Tuletised $Y' = C_0,\ Y'' = 0$.

$$aC_0 = C, \quad C_0 = \frac{C}{a}, \qquad \boldsymbol{Y = \frac{C}{a}x}.$$

2) $F(x)$ on polünoom.

Võrrandi (20) erilahendit otsitakse **sama astme polünoomina**, näiteks kui $F(x) = px^2 + qx + r$, kus p, q ja r on etteantud. Otsime erilahendit kujul $\boldsymbol{Y = Ax^2 + Bx + C}$. Tuleb määrata konstandid A, B ja C nii, et Y oleks võrrandi (20) erilahend. Selleks leiame tuletised $Y' = 2Ax + B, Y'' = 2A$. Asendame võrrandisse (20), saame:

$$2A + a(2Ax + B) + b(Ax^2 + Bx + C\ ) = px^2 + qx + r.$$

Korrastame vasakul pool võrdusmärki olevad liikmed:

$$Abx^2 + x(2Aa + Bb) + 2A + aB + bC = px^2 + qx + r.$$

Arvestame, et x sama astmete kordajad peavad olema võrdsed mõlemal pool võrdusmärki.

$$x^2: \quad Ab = p, \quad A = \frac{p}{b}, \qquad x: \ 2Aa + Bb = q, \quad B = \left(q - \frac{2ap}{b}\right)\frac{1}{b},$$

$$x^0: \quad 2A + aB + bC = r, \qquad C = \frac{1}{b}\left[r - \frac{2p}{b} - \frac{a}{b}\left(q - \frac{2ap}{b}\right)\right].$$

Kui võrrandis (20) $\boldsymbol{b = 0}$, siis tuleb erilahendit otsida kujul $\boldsymbol{Y = x(Ax^2 + Bx + C)}$.

3) Eksponentkujul $F(x) = pe^{nx}$.

Erilahendit otsime kujul $\boldsymbol{Y = Ae^{nx}}$. Leiame tuletised $Y' = Ane^{nx}, Y'' = An^2e^{nx}$ ja asendame võrrandisse.

$$An^2e^{nx} + aAne^{nx} + bAe^{nx} = pe^{nx} \quad |:e^{nx} \qquad A(n^2 + an + b) = p, \quad A = \frac{p}{n^2 + an + b}.$$

Kui $\boldsymbol{n^2 + an + b = 0}$ ehk $\boldsymbol{n}$ on karakteristliku võrrandi lahend, siis otsime üldlahendit järgnevalt: kui n on ühekordne lahend, siis $\boldsymbol{Y = Axe^{nx}}$; kui n on kahekordne lahend, siis $\boldsymbol{Y = Ax^2e^{nx}}$.

4) Trigonomeetrilisel kujul: $\boldsymbol{F(x) = \sin \omega x}$, $\boldsymbol{F(x) = \cos \omega x}$, $\boldsymbol{F(x) = p \sin \omega x + q \cos \omega x}$.

Erilahendit otsime alati ühesugusel kujul $\boldsymbol{Y = A\sin \omega x + B\cos \omega x}$.
Olgu $F(x) = \sin \omega x$. Leiame tuletised ja asendame võrrandisse:

$$Y' = A\omega\cos \omega x - B\omega\sin \omega x, \qquad Y'' = -A\omega^2\sin \omega x - B\omega^2\cos \omega x,$$

$$-A\omega^2\sin \omega x - B\omega^2\cos \omega x + a(A\omega\cos \omega x - B\omega\sin \omega x) + b(A\sin \omega x + B\cos \omega x) = \sin \omega x.$$

Võrdsustame $\sin \omega x$ ja $\cos \omega x$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki, saame võrrandisüsteemi kordajate A ja B leidmiseks:

$$\begin{cases} -A\omega^2 - aB\omega + bA = 1 \\ -B\omega^2 + aA\omega + bB = 0 \end{cases}.$$

Kui võrrandis (20) $\boldsymbol{a = 0}$, siis otsitakse erilahendit kujul $\boldsymbol{Y = x(A\sin \omega x + B\cos \omega x)}$.

Märkused.
1. Kui (20) paremal pool esineb eespool vaadeldud funktsioonide summa, siis erilahendi saame, kui otsime teda samade funktsioonide summana.
2. Ülalkirjeldatud meetod sobib ka juhul, kui võrrandi (20) parem pool osutub korrutiseks, siis otsitakse erilahendit korrutise kujul.

Näide 6.30. Leida võrrandi $y'' + 2y' - 8y = 2x + 1$ üldlahend.

Alguses leiame homogeense võrrandi üldlahendi

$$k^2 + 2k - 8 = 0, \quad k_1 = -4, \qquad k_2 = 2, \quad y_* = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}.$$

Erilahendit otsime antud ülesande paremal pool asuva funktsiooni kujuga samasugusel kujul.

$$Y = Ax + B, Y' = A, Y'' = 0, \quad 2A - 8Ax - 8B = 2x + 1,$$

$$x: \quad -8A = 2, \quad A = -\frac{1}{4}, \qquad x^0: \quad 2A - 8B = 1, \quad B = -\frac{3}{16},$$

$$Y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}, \qquad y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

Näide 6.31. Leida võrrandi $y'' - 2y' = x^2 + 4x$ üldlahend.

Vastava homogeense võrrandi üldlahend

$$k^2 - 2k = 0, \quad k_1 = 0, \qquad k_2 = 2, \quad y_* = C_1 + C_2e^{2x}.$$

Erilahendit otsime kujul $(b = 0)$ $Y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$.

$$Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, Y'' = 6Ax + 2B: \quad 6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 4x.$$

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2 + 4x, \qquad x^2: \; -6A = 1, \quad A = -\frac{1}{6},$$

$$x: \; 6A - 4B = 4, \qquad B = -\frac{5}{4}, \qquad x^0: \; 2B - 2C = 0, \qquad C = -\frac{5}{4},$$

$$Y = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x,$$

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x.$$

Näide 6.32. Leida diferentsiaalvõrrandi $y'' + 3y' - 10y = 16e^{3x}$ üldlahend.

Vastava homogeense võrrandi üldlahend

$$k^2 + 3k - 10 = 0, \quad k_1 = -5, \qquad k_2 = 2, \quad y_* = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x}.$$

Erilahendit otsime kujul $Y = Ae^{3x}$, $Y' = 3Ae^{3x}$, $Y'' = 9Ae^{3x}$.

$$9Ae^{3x} + 3 \cdot 3Ae^{3x} - 10Ae^{3x} = 16e^{3x}, \qquad 8A = 16, \quad A = 2.$$

$$Y = 2e^{3x}, \qquad y = C_1e^{-5x} + C_2e^{2x} + 2e^{3x}.$$

Näide 6.33. Leida võrrandi $y'' + 4y = 12\cos 2x$ üldlahend.

Vastava homogeense võrrandi üldlahend $k^2 + 4 = 0$, $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$, $y_* = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.
Erilahendit otsime kujul $Y = x(A\sin 2x + B\cos 2x)$, sest $a = 0$.

$$Y' = A\sin 2x + B\cos 2x + x(2A\cos 2x - 2B\sin 2x)$$

$$Y'' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + x(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) =$$

$$= 4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4Ax\sin 2x - 4Bx\cos 2x$$

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4Ax\sin 2x - 4Bx\cos 2x + 4(Ax\sin 2x + Bx\cos 2x) = 12\cos 2x$$

$$\cos 2x(4A - 4Bx + 4Bx) + \sin 2x(-4B - 4Ax + 4Ax) = 12\cos 2x$$

$$\cos 2x: \quad 4A = 12 \quad A = 3 \qquad \sin 2x: \quad -4B = 0 \quad B = 0$$

$$Y = 3x\sin 2x, \qquad y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 3x\sin 2x.$$

6.5.3. TEIST JÄRKU VÕRRANDID FÜÜSIKAS. MEHAANILISED VÕNKUMISED

Olgu koormus massiga m elastsel vedrul, mis on kinnitatud mingis punktis A. Koormuse kõrvalekallet tasakaaluasendi suhtes tähistame y. Kõrvalekallet alla loeme positiivseks ja üles negatiivseks. Tasakaaluasendis koormus on tasakaalus vedru elastsusega. Oletame, et jõud F_1, mis püüab koormust viia tasakaaluasendisse on võrdeline siirdega y:

$$F_1 = -ky, \quad k = \text{const}, k > 0,$$

k on vedru jäikus. Koormuse liikumist takistab vastupanujõud F_2, mis on suunatud liikumise vastassuunas ja on võrdeline massi liikumise kiirusega

$$F_2 = -\lambda v = -\lambda\frac{dy}{dt}, \quad \lambda = \text{const}, \qquad \lambda > 0.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$ma = F_1 + F_2, \quad a = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}, \quad \lambda > 0, k > 0.$$

Saime II järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}.} \tag{21}$$

Võrrandit (21) nimetatakse vabavõnkumiste võrrandiks.
Oletame, et vedru alumine punkt A liigub vertikaalselt vastavalt seadusele $z = \varphi(t)$. Vedru alumine ots on kinnitatud rulli külge, mis koos vedru ja koormusega liigub mööda konarusi. Sellisel juhul on taastav jõud

$$F_1 = -ky - k\varphi(t),$$

ning takistav jõud

$$F_2 = -\lambda v - \lambda\varphi'(t) = -\lambda y' - \lambda\varphi'(t).$$

Võrrandi (21) asemel saame

$$my'' = -ky - k\varphi(t) - \lambda y' - \lambda\varphi'(t), \qquad my'' + \lambda y' + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t),$$

$$\boldsymbol{y'' + p\,y' + qy = f(t), \quad f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m}, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}.} \tag{22}$$

Võrrandit (22) nimetatakse sundvõnkumiste võrrandiks.

6.5.3.1. VABAVÕNKUMISED

Vabavõnkumiste võrrand, kus otsitav funktsioon on $\boldsymbol{y = y(t)}$

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}.} \tag{23}$$

Lahendame võrrandi, moodustame karakteristliku võrrandi ja analüüsime võimalikke lahendeid.

$$k^2 + pk + q = 0, \quad k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Lahend sõltub karakteristliku võrrandi lahendist:

1. Kui $p^2/4 > q$, siis lahendid on reaalsed ja negatiivsed ning üldlahend

$$\boldsymbol{y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \qquad k_1 < 0, k_2 < 0.}$$

Järelikult $y \to 0$, kui $t \to \infty$, järelikult võnkumist ei teki, kuna takistavad jõud on suured võrreldes vedru elastsuskoefitsendiga k.

2. Kui $p^2/4 = q, k_1 = k_2 = -p/2$, siis üldlahend $\boldsymbol{y = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{p}{2}t}}$, siis $y \to 0$, kui $t \to \infty$, ainult mitte nii kiiresti.

3. Olgu $p = 0$, takistusjõud puudub, siis $k^2 + q = 0$, $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$, $\beta = \sqrt{q}$.
Üldlahend

$$\boldsymbol{y = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t.}$$

Tähistame $\boldsymbol{C_1 = A\sin\varphi_0, C_2 = A\cos\varphi_0}$, kus A, φ_0 on suvalised, avaldame A, φ_0.

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctan\frac{C_1}{C_2},$$

$$y = A\sin\varphi_0\cos\beta t + A\cos\varphi_0\sin\beta t = A\sin(\varphi_0 + \beta t),$$

$$\boldsymbol{y = A\sin(\varphi_0 + \beta t).}$$

Sellist võnkumist nimetatakse harmooniliseks võnkumiseks. Integraalkõveraks on sinusoidid. Võnkeperioodiks nimetatakse ajavahemikku T, mille jooksul siinuse argument muutub suuruse 2π võrra. Antud juhul

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Võnkesageduseks nimetatakse võngete arvu aja 2π jooksul. Antud juhul on sagedus β.
Võnkeamplituudiks nimetatakse suurimat hälvet tasakaaluasendist. Suurim hälve tasakaaluasendist on A.
Suurust $\boldsymbol{\varphi_0}$ nimetatakse algfaasiks.

6.5.3.2. SUNDVÕNKUMISED

Vaatame võrrandit

$$\boldsymbol{y'' + p\,y' + qy = f(t),} \quad \boldsymbol{f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m},} \quad \boldsymbol{p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}.} \tag{24}$$

Praktikas on sage juhtum, kus võnkeid põhjustav välisjõud on perioodiline ja muutub vastavalt seadusele

$$f(t) = a\sin\omega t, \qquad y'' + p\,y' + qy = a\sin\omega t, \qquad p \neq 0, \qquad \frac{p^2}{4} < q,$$

q vedru jäikus, p vedru takistus, võrdeline kiirusega. Karakteristliku võrrandi lahendid on siis kompleksed

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad k_1 = \alpha + i\beta,$$

$$k_2 = \alpha - i\beta, \qquad k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q}.$$

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t).}$$

Tähistame $C_1 = A\sin\varphi_0, C_2 = A\cos\varphi_0$,

$$\boldsymbol{y = Ae^{\alpha t}(\sin\varphi_0\cos\beta t + \cos\varphi_0\sin\beta t) = Ae^{\alpha t}\sin(\varphi_0 + \beta t).}$$

Mittehomogeense võrrandi erilahendit otsime kujul

$$\boldsymbol{Y = N\sin\omega t + M\cos\omega t,} \quad Y' = N\omega\cos\omega t - M\omega\sin\omega t, \quad Y'' = -N\omega^2\sin\omega t - M\omega^2\cos\omega t$$

$$-N\omega^2\sin\omega t - M\omega^2\cos\omega t + p(N\omega\cos\omega t - M\omega\sin\omega t) + q(N\sin\omega t + M\cos\omega t) = a\sin\omega t$$

$$\sin\omega t: \quad -N\omega^2 - pM\omega + qN = a, \qquad \cos\omega t: \quad -M\omega^2 + pN\omega + qM = 0,$$

$$M = \frac{-ap\omega}{(\omega^2 - q)^2 + p^2\omega^2}, \qquad N = \frac{a(q - \omega^2)}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Uued konstandid A_*, φ_*, $M = A_*\sin\varphi_*$, $N = A_*\cos\varphi_*$.

$$A_* = \sqrt{M^2 + N^2} = \sqrt{\frac{a^2p^2\omega^2 + a^2(q - \omega^2)^2}{[(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2]^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}},$$

$$\varphi_* = \arctan\frac{M}{N},$$

$$Y = N\sin\omega t + M\cos\omega t = A_*\cos\varphi_*\sin\omega t + A_*\sin\varphi_*\cos\omega t =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2\,(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_*).$$

Üldlahend

$$\boldsymbol{y = Ae^{\alpha t}\sin\,(\varphi_0 + \beta t) + \frac{a}{\sqrt{a^2\,(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_*).}$$

Esimene liidetav kujutab sumbuvat võnkumist, aja t kasvades see liige kahaneb ja teise liidetava osatähtsus suureneb. Teine liidetav määrab sundvõnkumise. Võngete sagedus ω on võrdne välisjõu $f(t)$ sagedusega. Sundvõnkumiste amplituud on seda suurem, mida väiksem on p ja mida lähemal on suuruse ω^2 väärtus q väärtusele.

6.5.3.3. SOOJUSE LEVIMINE VARDAS

Horisontaalselt paigutatud metallvarras on paigutatud otstega tugedele. Tugede vaheline kaugus on L. Vasakus otsas on konstantne temperatuur t_1. Parem tugi hoiab konstantset temperatuuri $t_2 < t_1$. Varda materjal on soojusjuhtivusega λ. Varda ristlõikepindala on A ja ristlõike ümbermõõt on P. Soojuse äraandmise koefitsient varda pinnalt ümbritsevasse keskkonda on konstantne

$$\alpha\ \left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{grad}}\right), \quad \alpha = \frac{\lambda}{t_s - t}.$$

Ümbritseva keskkonna temperatuur on t_s.
Ülesanne: leida seos varda suvalise punkti temperatuuri ja kauguse vahel soojemast otsast.
Oletame et varras on nii peenike, et temperatuur on ristlõike ulatuses konstantne, siis on $t = t(x)$, x on kaugus. Võtame elementaarlõigu kaugusel x pikkusega dx. Soojushulk, mis läbib aja $d\tau$ jooksul varda ristlõiget kaugusel x, on võrdne

$$-\lambda A \frac{dt}{dx} d\tau.$$

Soojushulk, mis läbib aja $d\tau$ jooksul varda ristlõiget kaugusel $x + dx$, on võrdne

$$-\lambda A \left(\frac{dt}{dx} + \frac{d^2t}{dx^2} dx\right) d\tau.$$

Varda piirkond, mis ristlõigete vahel x ja $x + dx$ saab ajavahemiku $d\tau$ jooksul soojushulga, mis on võrdne nende soojushulkade vahega

$$\lambda A \frac{d^2t}{dx^2} dx d\tau.$$

Sama aja jooksul soojuskadu sellelt vardaosalt $\alpha P dx(t - t_s)d\tau$.
Kuna vaadeldav protsess on statsionaarne, siis

$$\lambda A \frac{d^2t}{dx^2} dx d\tau = \alpha P dx(t - t_s)d\tau,$$

millest

$$\boldsymbol{\frac{d^2t}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda A}(t - t_s) = 0.}$$

Saime II järku konstantsete kordajatega lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi.

6.5.4. LINEAARSED HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne homogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand üldkujul on

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

kus p_1, p_2 on pidevad funktsioonid.

Kui on teada lineaarse homogeense võrrandi kaks lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x)$, siis selle võrrandi **üldlahendiks** on

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x). \tag{25}$$

Võrrandi erilahendi saame üldlahendist konstantide C_1, C_2 sobiva fikseerimise teel.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.
Lineaarse homogeense võrrandi saab lahendada nii, et leiame kõigepealt selle võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit ja kirjutame vastuse kujul (25) selleks üldine meetod puudub. Sellepärast tuleb võrrandi lahendamiseks sageli kasutada **järgu alandamise võtet**. Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis võime võrrandi järku alandada võrrandi lineaarsust säilitades. Seda saame teha kahe asendusega: esiteks asendame võrrandis $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$

$$y = y_1 \cdot z$$

ning siis alandame võrrandi järku asendusega

$$z' = u, \quad z = z(x), u = u(x).$$

Kui peame lahendama **teist järku võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$**, mille jaoks teame ühte lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis on mugavam kasutada **valemit** (**Liouville'i- Ostrogradski valem**):

$$y_2' \cdot y_1 - y_1' \cdot y_2 = C \cdot e^{-\int p_1(x)dx},$$

kus y_1 ja y_2 on teist järku lineaarse võrrandi mistahes kaks lahendit. Vaatleme lahendit y_1 kui teadaolevat erilahendit ja leiame valemist erilahendi y_2. Punktis 6.6.1 on näidatud, et Liouville'i-Ostrogradski valemist leitav teine erilahend y_2 avaldub valemiga

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx.$$

Näide 6.34. Lahendada diferentsiaalvõrrand $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Võrrandi kordajateks on polünoomid:

$$p_0(x) = x^2 + 1, \; p_1(x) = -2x, p_2(x) = 2.$$

On vaja leida üks võrrandi lahend, et saaks Liouville'i-Ostrogradski valemit kasutada. Selleks tuleb proovida kordajatega sarnaseid funktsioone, alustades kõige lihtsamast $p_2(x) = 2$ ehk proovime $y_1(x) = C$, asendame võrrandisse, saame $y_1 = 0$, seega see lahend ei sobi, võtame järgmise:

$$p_1(x) = -2: \;\; y_1(x) = Ax + B, \; y_1' = A, y_1'' = 0.$$

$$-2Ax + 2Ax + 2B = 0, \quad B = 0.$$

Otsitavaks erilahendiks sobib $y_1(x) = Ax$, kus A on suvaline konstant. Võtame erilahendiks $y_1(x) = x$.
Lahendame võrrandi kõigepealt Liouville'-Ostrogradski valemi abil

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0, \qquad y' \cdot y_1 - y_1' \cdot y = C \cdot e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Valemi järgi leiame erilahendi y

$$p_1(x) = -\frac{2x}{x^2+1}, \qquad y'x - y = C \cdot e^{-\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}.$$

Saime esimest järku lineaarse võrrandi.

$$y' - \frac{y}{x} = C \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right).$$

$$y = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left(\int C \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right)e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + C_0\right) = e^{\ln|x|}\left(\int C \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right)e^{-\ln|x|}dx + C_0\right) =$$

$$= x\left(C\int\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\frac{1}{x}dx + C_0\right) = x\left(C\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx + C_0\right) = x\left(C\left(x-\frac{1}{x}\right) + C_0\right) = C(x^2-1).$$

Tulemuseks on teine võrrandi erilahend, mille lineaarne kombinatsioon esimesena leitud lahendiga annab meile võrrandi üldlahendi.

$$y_1 = x, y_2 = (x^2-1), \qquad y = C_1(x^2-1) + C_2x.$$

Lahendame sama ülesande erilahendi $y_1 = x$ korral, kasutades **järgu alandamise võtet $y = y_1z, z' = u$.** Siis $y = xz$ ja tuletised on kujul

$$y' = z + xz', y'' = 2z' + xz''.$$

Diferentsiaalvõrrand saab peale asendust kuju

$$(x^2+1)(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + 2xz = 0,$$

millest saame

$$(x^3+x)z'' + 2z' = 0.$$

Teise sammuna teeme asenduse $z' = u, z'' = u'$, saame

$$(x^3+x)u' + 2u = 0,$$

saime esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi. Võrrandi järk on alandatud ning saadud madalamat järku võrrand on samuti lineaarne. See ongi lineaarsuse säilitamine. Kuna tegemist on lineaarse homogeense võrrandiga, saame selle lahendada muutujate eraldamise teel:

$$\frac{du}{u} = \frac{-2dx}{x^3+x}.$$

Integreerimiseks peame võrrandi paremal pool asuva murru teisendama osamurdude summaks:

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}$$

Konstandid A, B ja C leiame, asendades võrrandisse

$$-2 = x^2(A+B) + Cx + A$$

argumendi väärtuseks $x = 0$, siis $A = -2$. Edasi võrdsustades x^2 kordajad vasakul ja paremal pool võrdusmärki, saame seose $A + B = 0$, sest vasakul pool vastav liige puudub, see tähendabki, et ruutliikme kordaja on võrdne nulliga. Asendades juba leitud kordaja $A = -2$, saame $B = 2$. Viimaks kordaja C leidmiseks võrdsustame x kordajad mõlemal pool võrdusmärki, tulemuseks $C = 0$. Kokkuvõttes oleme saanud

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Integreerime võrrandit

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-2dx}{x^3+x} = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx,$$

$$\ln|u| = -2\ln|x| + \ln|x^2+1| + \ln C,$$

$$u = C\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right).$$

Lõpuks asendame $u = z'$ ja leiame z avaldise

$$z' = C_1\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right),$$

$$z = \int C_1\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx = C_1\int 1\,dx + C_1\int \frac{1}{x^2}dx = C_1x + \frac{C_1}{x} + C_2,$$

Kuna $yx = z$, siis

$$\frac{y}{x} = C_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + C_2, \qquad y = C_1(x^2+1) + C_2x.$$

6.5.5. LINEAARSED MITTEHOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Vaatleme lineaarset mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit

$$\boldsymbol{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x).}$$

Kui on teada homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ kaks lineaarselt sõltumatut lahendit $y_* = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ja mittehomogeense võrrandi üks erilahend Y, siis üldlahend avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = Y + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).} \tag{26}$$

Võrrandi (26) mistahes lahend on saadav üldlahendist konstantide C_1, C_2 väärtuste fikseerimisel.

Erilahendi leidmine konstantide varieerimise meetodiga.
Kui on leitud lineaarse homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ kaks lineaarselt sõltumatut lahendit, siis erilahendit $Y(x)$ otsitakse kujul

$$Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Homogeense võrrandi üldlahendisse (20) asendame suvalised konstandid C_1, C_2 funktsioonidega $C_1(x), C_2(x)$. Funktsiooonid $C_1(x), C_2(x)$ määratakse nii, et $Y(x)$ rahuldaks mittehomogeenset võrrandit. Funktsioonide $C_1(x), C_2(x)$ leidmiseks peab lahendama süsteemi

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).} \end{cases} \tag{27}$$

See on suuruste $C_1'(x), C_2'(x)$ suhtes lineaarne mittehomogeenne võrrandisüsteem. Süsteem on üheselt lahenduv:

$$C_i'(x) = g_i(x), i = 1,2 \quad C_i(x) = \int g_i(x)\,dx + \overline{C_i}\ , i = 1,2.$$

Kuna meid huvitab ainult üks erilahend, siis võime võtta $\overline{C_1} = \overline{C_2} = 0$.

$$C_i(x) = \int g_i(x)\,dx.$$

Näide 6.35. Lahendada diferentsiaalvõrrand $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2$.

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = x^2+1.$$

Vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand on juba lahendatud eelmises näites (näide 6.34), lahendiks on

$$y_* = C_1(x^2-1) + C_2x.$$

Järelikult antud võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$y = Y(x) + C_1(x^2-1) + C_2x.$$

Leiame erilahendi $Y(x)$ süsteemist (26) $Y(x) = C_1(x)(x^2-1) + C_2(x)x$,

$$y_1 = x^2-1, y_2 = x, y_1' = 2x, y_2' = 1.$$

Süsteemist (27)

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1'(x^2-1) + C_2'x = 0, \\ 2xC_1' + C_2' = x^2+1. \end{cases}$$

Leiame suurused C_1' ja C_2':

$$C_2' = -C_1'\frac{x^2-1}{x}.$$

Asendame selle süsteemi teise võrrandisse, saame

$$2xC_1' - C_1'\frac{x^2-1}{x} = x^2+1, \qquad C_1'(2x^2 - x^2 + 1) = (x^2+1)x, \quad C_1'(x^2+1) = (x^2+1)x.$$

$$C_1' = x, \qquad C_2' = -C_1'\frac{(x^2-1)}{x} = -(x^2-1) = 1-x^2.$$

Integreerime

$$C_1(x) = \frac{x^2}{2} + \overline{C_1}, \qquad C_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \overline{C_2},$$

kus $\overline{C_1}$ ja $\overline{C_2}$ konstandid. Piisab ühest erilahendist, võtame $\overline{C_1}$=$\overline{C_2} = 0$. Saime

$$C_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad C_2(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$

Erilahend avaldub kujul

$$Y(x) = \frac{x^2}{2}(x^2-1) + x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Üldlahend

$$y = C_1(x^2-1) + C_2x + \frac{x^2(x^2-1)}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

6.5.6. SPETSIAALSED LINEAARSED VÕRRANDID

1. **Legendre võrrand** on lineaarne võrrand kujul

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0,$$

kus l on reaalarv.

Legendre võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$\boldsymbol{y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)},$$

kus a_0 ja a_1 on konstandid ja y_1 sisaldab ainult paarisarvulisi muutuja x astmeid ja y_2 sisaldab ainult paarituarvulisi muutuja x astmeid. Kui l on paarisarv, siis $a_1 = 0$ ja kui l on paaritu, siis $a_0 = 0$. Loodusteadustes pakuvad huvi sellised võrrandi lahendid, mis asuvad vahemikus $-1 \le x \le 1$. Selle võrrandi erilahenditeks on l astme polünoomid, mida nimetatakse Legendre polünoomideks:

$$P_l(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l-1)}{l!}\left\{x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \ \ldots\right\}$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Legendre polünoomide vahel kehtib rekursiivne seos:

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0,$$

ette andes $P_0(x) = 1$ ja $P_1(x) = x$, saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid.
Kui $l = 1$, siis

$$2P_2 - 3xP_1 + P_0 = 0, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3xP_1 - P_0) = \frac{1}{2}(3x^2-1).$$

Kui $l = 2$, siis $3P_3 - 5xP_2 + 2P_1 = 0$,

$$P_3(x) = \frac{1}{3}(5xP_2 - 2P_1) = \frac{1}{3}\left(5x\frac{1}{2}(3x^2-1) - 2x\right) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

Näide 6.36. Näitame, et $P_3(x)$ on Legendre võrrandi lahend $l = 3$ korral, $(1-x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$.

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \quad P_3'(x) = \frac{1}{2}(15x^2-3) = \frac{3}{2}(5x^2-1), \quad P_3''(x) = \frac{1}{2}(30x) = 15x,$$

$$(1-x^2)15x - 2x\frac{3}{2}(5x^2-1) + 12\frac{1}{2}(5x^3-3x) = 15x - 15x^3 - 15x^3 + 3x + 30x^3 - 18x = 0.$$

Legendre polünoomid on vahemikus $-1 \le x \le 1$ ortogonaalsed:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,dx = 0, \quad l \ne l'.$$

Näide 6.37. Näitame, et $P_1(x)$ on ortogonaalne $P_2(x)$ja $P_3(x)$ suhtes.

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_3(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{5x^5}{5} - \frac{3x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\big(1 - 1 - (-1) + (-1)\big) = 0.$$

2. **Hermite võrrand** on lineaarne võrrand kujul

$$\boldsymbol{y'' - 2xy' + 2ny = 0},$$

kus n on reaalarv. Võrrandi üldlahend on kujul

$$\boldsymbol{y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)},$$

kus a_0 ja a_1 on konstandid ja y_1 sisaldab ainult paarisarvulisi muutuja x astmeid ja y_2 sisaldab ainult paarituarvulisi muutuja x astmeid. Kui n on paarisarv, siis $a_1 = 0$ ja kui n on paaritu, siis $a_0 = 0$. Selle võrrandi erilahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Hermite polünoomideks

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \ \ldots$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Kehtib ka rekursiivne seos

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

ette andes $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid.

Hermite funktsioonid

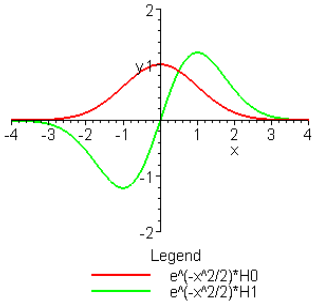
$$y_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

on lahendiks diferentsiaalvõrrandile, mis on kujul

$$y'' + (1 - x^2 + 2n)y = 0,$$

lahendamiseks tuleb teha muutuja vahetus

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} v(x).$$



Hermite funktsioonid on ortogonaalsed. Nad on seotud kvantum-mehaanika ülesannetega ja ka Schrödingeri võrrandiga.

3. **Laguerre võrrand** on lineaarne võrrand kujul

$$\boldsymbol{xy'' + (1 - x)y' + ny = 0},$$

kus n on reaalarv. Selle võrrandi erilahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse **Laguerre polünoomideks**

$$\boldsymbol{L_n(x) = (-1)^n \left[x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \ \ldots + (-1)^n n! \right]}.$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 2 - 4x + x^2, \quad L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3.$$

Kehtib järgmine rekursiivne seos

$$L_{n+1}(x) - (1 - 2n - x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0,$$

millest saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid, andes ette $L_0(x) = 1$ ja $L_1(x) = 1 - x$.

4. **Besseli võrrand** on lineaarne võrrand kujul

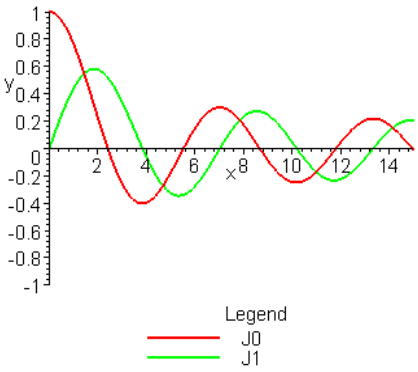
$$\boldsymbol{x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0},$$

kus n on reaalarv. Kasutatakse membraanide vibratsioonide leidmisel ja ka Schrödingeri võrrandi lahendamisel ringis ning sfääril. Selle võrrandi erilahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse **Besseli funktsioonideks, I liiki**

$$\boldsymbol{J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}.$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ \ldots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \ \ldots$$



Suurte x väärtuste korral kehtib

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Besseli funktsioon $J_{n+1/2}(x)$ jaoks

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

Kehtib ka rekursiivne seos

$$J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0.$$

Kasutusel on sfäärilised Besseli funktsioonid järguga n

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \qquad n \geq 0.$$

Sfäärilised Neumanni funktsioonid avalduvad järgmiselt:

$$\eta_n(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x), \qquad n \geq 0.$$

6.6. KÕRGEMAT JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Olgu võrrandis kõige kõrgem tuletise järk n, siis on **n-järku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks**

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}.$$

Definitsioon. Olgu funktsioon $F = F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_n)$ määratud muutujate $x, y, y_1, y_2, \dots, y_n$ piirkonnas G. Vahemikus (a, b) määratud funktsiooni $y = y(x)$ nimetatakse võrrandi $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ **lahendiks** selles vahemikus, kui

1) funktsioon $y(x)$ on n korda pidevalt diferentseeruv vahemikus (a, b);
2) iga $x \in (a, b)$ korral punkt koordinaatidega $(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ kuulub funktsiooni F määramispiirkonda G;
3) funktsiooni $y(x)$ asetamisel võrrandisse $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ otsitava y kohale saame samasuse $x \in (a, b)$ suhtes:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \text{ iga } x \in (a, b) \text{ korral.}$$

Siis öeldakse ka, et funktsioon $y = y(x)$ rahuldab võrrandit vahemikus (a, b).

Definitsioon. Võrrandit kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)} \tag{28}$$

nimetatakse n-järku hariliku diferentsiaalvõrrandi **normaalkujuks**.

Võrrandi lahendi all mõistame funktsiooni, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatu muutuja suhtes.

Definitsioon. Normaalkujulise n-järku diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** nimetatakse võrrandi (28) lahendit

$$\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)},$$

kus $C_1, C_2, \dots, C_n$ on suvalised konstandid.

Suvalised konstandid võib määrata **algtingimustest**

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}}. \tag{29}$$

Kui $n > 2$, siis võivad n-järku diferentsiaalvõrrandiga kaasneda ka tingimused, mis seovad otsitava funktsiooni $y = y(x)$ ja tema tuletiste väärtusi integreerimislõigu $[a, b]$ rajapunktides $x = a$ ja $x = b$. Niisuguseid tingimusi nimetatakse **rajatingimusteks**, diferentsiaalvõrrandit koos rajatingimustega aga **rajaülesandeks**.

Teoreem 6.6. Cauchy teoreem. Olgu funktsioon $f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ pidev muutujate $x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ järgi, mis olgu samuti pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel (28), (29) olemas parajasti **üks lahend $y = y(x)$**.

Definitsioon. Normaalkujulise **n**-järku diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** piirkonnas **D** nimetatakse seost

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

kus $C_1, C_2, \dots, C_n$ on suvalised konstandid, mille puhul iga $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in D$ jaoks leiduvad konstantide väärtused nii, et neile väärtustele vastav lahend rahuldab algtingimusi (29).

Definitsioon. Normaalkujulise **n**-järku diferentsiaalvõrrandi **erilahendiks** nimetatakse lahendit, mis saadakse üldlahendist konstantide $C_1, C_2, \dots, C_n$ konkreetsete väärtuste korral.

Näide 6.38. Lahendada võrrand $y^{(n)} = f(x)$.

Leiame üldlahendi algtingimustel $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Integreerime võrrandi mõlemat poolt, saame

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

kus x_0 on argumendi mistahes fikseeritud väärtus ja C_1 on integreerimiskonstant. Integreerime veelkord,

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Jätkame protsessi, saame

$$y = \int_{x_0}^{x} \dots \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n\,.$$

Kui meil on algtingimused

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

siis saame

$$C_n = y_0, C_{n-1} = y_1, C_{n-2} = y_2, \dots, C_1 = y_{n-1}.$$

Näide 6.39. Lahendada võrrand $y''' = e^{kx+1}$, kus k on mingi nullist erinev reaalarv.

Integreerime võrrandi mõlemaid pooli muutuja x järgi, saame

$$y'' = \frac{1}{k} e^{kx+1} + C,$$

kus C on suvaline konstant. Integreerides veel kaks korda, saame lahendi avaldiseks

$$y = \frac{1}{k^3} e^{kx+1} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

kus C_1, C_2 ja C_3on suvalised konstandid.

Diferentsiaalvõrrand kujul

$$\boldsymbol{F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, .., y^{(n)}\right) = 0,}$$

on lahendatav järgu alandamise teel muutuja vahetusega

$$\boldsymbol{y^{(k)} = z,}$$

lugedes suuruse z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$. Uue otsitava funktsiooni kaudu saadud diferentsiaalvõrrand on $n - k$- järku

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Näide 6.40. Lahendada võrrand $y^{(4)} = \sqrt{y'''}$.

Alandame võrrandi järku asendusega

$$y''' = z,$$

lugedes suuruse z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$. Siis saame diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\sqrt{z} = z'$$

ehk esimest järku eralduvate muutujatega võrrandi, lahendame selle võrrandi

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{z},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = dx,$$

$$2\sqrt{z} = x + C_1 \text{ ehk } 4z = (x + C_1)^2.$$

Kuna muutujate eraldamisel jagades läbi suurusega $\sqrt{z}$ eeldame, et $\sqrt{z} \neq 0$, seetõttu võrrandi lahendiks on ka $z = 0$. Asendame tagasi z avaldise, saame võrrandi

$$y''' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$

mille lahendamiseks integreerime kolm korda järjest, saame

$$y'' = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}(x + C_1)^4 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{240}(x + C_1)^5 + \frac{x^2}{2}C_2 + C_3 x + C_4.$$

Lahendades võrrandist $z = 0$ saadava võrrandi $y''' = 0$, saame lisaks üldlahendi kujul

$$y = C_5 x^2 + C_6 x + C_7.$$

Võrrand kujul

$$\boldsymbol{F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0, \qquad n \geq 2,}$$

mis ei sisalda sõltumatut muutujat x, on lahendatav järgu alandamise teel muutuja vahetusega

$$\boldsymbol{y' = z,}$$

kus $z = z(y)$ on muutuja y funktsioon, mitte argumendi x funktsioon. Siis

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z,$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(z'z)}{dx} = \frac{d(z'z)}{dy}\frac{dy}{dx} = z''z^2 + (z')^2 z.$$

Järgnevate tuletistega säilib saadud seaduspärasus: iga järgmine y tuletis sisaldab uue muutuja z tuletisi, alates esimest järku tuletisest kuni ühe võrra väiksema järguni: $y^{(k)}$ sisaldab uue muutuja z tuletisi $z', z'', \dots, z^{(k-1)}$, $2 \leq k \leq n$.

Näide 6.41. Lahendada võrrand $y'^2 + yy'' = 0$.

Alandame võrrandi järku asendusega

$$y' = z,$$

lugedes suuruse z muutuja y funktsiooniks $z = z(y)$. Siis $y'' = z'z$ ja diferentsiaalvõrrand saab kuju

$$z^2 + yz'z = 0$$

ehk

$$\frac{dz}{dy}zy = -z^2$$

$$\frac{z}{z^2}dz = -\frac{1}{y}dy.$$

Lahendame saadud esimest järku võrrandi, saame

$$\ln|z| = -\ln|y| + \ln C_1,$$

$$|z| = \frac{C_1}{|y|}.$$

Asendame $z = y'$, saame esimest järku võrrandi

$$y' = \frac{C_1}{y},$$

mille lahendiks on

$$y^2 = C_1x + C_2.$$

6.6.1. KÕRGEMAT JÄRKU LINEAARSED VÕRRANDID

Lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand üldkujul on

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,} \qquad (30)$$

kus $\boldsymbol{p_1(x), \ldots, p_n(x)}$ on pidevad funktsioonid. Seda võrrandit nimetatakse **lineaarseks homogeenseks n-järku diferentsiaalvõrrandiks.**

Wronski determinant.

Vaatleme algul kahte funktsiooni $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$, mis on pidevalt diferentseeruvad ning lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b). Siis leiduvad arvud $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, millest vähemalt üks on nullist erinev, et iga $x \in (a, b)$ korral kehtiks võrdus

$$k_1y_1(x) + k_2y_2(x) \equiv 0.$$

Diferentseerime saadud võrdust, saame

$$k_1y_1'(x) + k_2y_2'(x) \equiv 0.$$

Neid kahte samasust võime vaadelda lineaarse homogeense võrrandisüsteemina suuruste k_1 ja k_2 suhtes. Süsteemi determinant võrdub nulliga, kui tegemist on lineaarselt sõltuvate funktsioonidega ehk iga $x \in (a, b)$ korral

$$W(x) = 0,$$

kus

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2' - y_1'y_2.$$

Determinanti $W(x)$ nimetatakse funktsioonide y_1 ja y_2 **Wronski determinandiks**.
Funktsioonide y_1 ja y_2 Wronski determinandi võrdumine nulliga on tarvilikuks tingimuseks nende funktsioonide lineaarseks sõltuvuseks antud vahemikus.

Definitsioon. Olgu $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ vahemikus (a, b) määratud ja $n-1$ korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Determinanti

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nimetatakse funktsioonide $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ **Wronski determinandiks** ehk wronskiaaniks (punktis x).

Wronski determinanti tähistatakse ka $W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, kus argument näitab, millitest funktsioonidest on Wronski determinant võetud.

Teoreem 6.7. Olgu $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ vahemikus (a, b) määratud ja $n-1$ korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Kui funktsioonid $y_1, y_2, \dots, y_n$ on **lineaarselt sõltuvad** vahemikus (a, b), siis nende funktsioonide **Wronski determinant $W(x)$ on võrdne nulliga** iga $x \in (a, b)$ korral.

Vastupidine väide üldiselt ei kehti: Wronski determinant võib võrduda nulliga, kuid funktsioonid võivad olla lineaarselt sõltumatud antud piirkonnas.

Näide 6.42. Funktsioonid

$$y_1(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

ja

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$$

on lineaarselt sõltumatud vahemikus $(-\infty, \infty)$, kuid nende funktsioonide Wronski determinant $W(x)$ on võrdne nulliga iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral.
Kui arvutame funktsioonidest Wronski determinandi, saame $x < 0$ korral

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ja ka $x \geq 0$ korral

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 0 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Samas tingimusest

$$0 = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = \begin{cases} k_1 x^3, x < 0, \\ k_2 x^3, x \geq 0 \end{cases}$$

järeldub, et $k_1 = k_2 = 0$ ehk funktsioonid y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud.

Teoreem 6.8. Kui lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (30) lahendid $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ on vahemikus **lineaarselt sõltumatud**, siis nende funktsioonide **Wronski determinant $W(x)$ on nullist erinev** iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon. Öeldakse, et n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (30) mis tahes n lineaarselt sõltumatut lahendit moodustavad selle võrrandi **lahendite fundamentaalsüsteemi**.

Teoreem 6.9. Olgu lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (30) kordajad pidevad funktsioonid vahemikus (a, b). Olgu $\boldsymbol{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)}$ võrrandi lahendite fundamentaalsüsteem, siis võrrandi (30) **üldlahend** avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x).} \tag{31}$$

Üldlahendiga on määratud ära võrrandi (30) kõik lahendid, st võrrandi (30) mistahes lahendi saame üldlahendist konstantide $C_1, C_2, \dots, C_n$ sobiva fikseerimise teel.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.
Lineaarse homogeense võrrandi saab lahendada nii, et leiame kõigepealt selle võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit ja kirjutame vastuse kujul (31), selleks üldine meetod puudub. Sellepärast tuleb võrrandi lahendamiseks sageli kasutada üldist **järgu alandamise võtet**.
Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis võime võrrandi järku alandada võrrandi lineaarsust säilitades. Seda saame teha kahe asendusega: esiteks asendame võrrandis

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

$$\boldsymbol{y = y_1 \cdot z,}$$

ning siis alandame võrrandi järku asendusega

$$\boldsymbol{z' = u,} \quad z = z(x), u = u(x).$$

Liouville'i-Ostrogradski valem.

Olgu $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ mingid pidevad funktsioonid, kui $a < x < b$, ning oletame, et funktsioonid $y_1(x)$, $y_2(x), \dots, y_n(x)$ moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0}$$

jaoks. Siis funktsioonide $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ Wronski determinant $W(x)$ on vahemikus (a, b) nullist erinev iga $x \in (a, b)$ korral.
Siis võrrandist

$$W' + p_1(x)W = 0$$

saame Wronski determinandi W jaoks avaldise, mida nimetatakse **Liouville'i-Ostrogradski valemiks** (mõnikord ka Abeli valemiks)

$$\boldsymbol{W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx},} \qquad \boldsymbol{a < x < b,}$$

kus C on suvaline konstant, mis ei saa olla null.

Kuigi võrrandi (30) lahendite fundamentaalsüsteem $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sõltub selle võrrandi kõigist kordajatest $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$, sõltub lahendite Wronski determinant $W(x)$ ainult kordajast $p_1(x)$.
Vaatame Liouville'i-Ostrogradski valemini jõudmise mõttekäiku $n = 2$ korral, siis on lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand kujul

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Olgu $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ vaadeldava võrrandi mingid kaks lahendit, mis on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b). Siis iga $x \in (a, b)$ korral

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0$$

ja

$$y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0.$$

Korrutades esimest võrdust suurusega $(-y_2(x))$ ja teist võrdust suurusega $y_1(x)$ ning liites tulemused, saame:

$$-y_1''(x)y_2(x) + y_2''(x)y_1(x) + p_1(x)\big(y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) = 0.$$

Siin $p_1(x)$ kordaja on võrdne lahendite $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ Wronski determinandiga

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

esimese kahe liikme vahe aga on Wronski determinandi tuletis $W'(x)$

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Seega iga $x \in (a,b)$ korral kehtib võrdus $W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$. Selle võrrandi lahendiks saame Liouville'i-Ostrogradski valemi. Rakendades Liouville'i-Ostrogradski valemit $C = 1$ korral, saame

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int p_1(x)dx}.$$

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Saime esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi teise erilahendi y_2 leidmiseks. Jagame mõlemad võrrandi pooled läbi suurusega $\big(y_1(x)\big)^2$, esitame võrrandi kujul

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2}.$$

Integreerides mõlemaid võrrandi pooli saame

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2}dx + C,$$

võttes $C = 0$, saame avaldada otsitava funktsiooni

$$\boldsymbol{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2}dx.}$$

Lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x).}$$

Kui on teada lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

jaoks n lineaarselt sõltumatut lahendit

$$y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ \ldots + C_ny_n(x)$$

ja mittehomogeense võrrandi üks **erilahend Y**, siis **mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend** avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = Y + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ \ldots + C_ny_n(x)} \qquad (32)$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi mistahes lahend on saadav üldlahendist (32) konstantide $C_1, C_2, \ldots, C_n$ väärtuste fikseerimisel.

Erilahendi *Y* leidmine konstantide varieerimise meetodiga.

Erilahendit $Y(x)$ otsitakse järgmisel kujul

$$Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ ... + C_n(x)y_n(x),$$

homogeense võrrandi üldlahendisse (31) asendame suvalised konstandid $C_1, C_2, \dots, C_n$ funktsioonidega $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Funktsiooonid $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ määratakse nii, et $Y(x)$ rahuldaks mittehomogeenset võrrandit. See on ainult üks tingimus n funktsiooni määramiseks. Puuduvad tingimused võime vabalt ette anda, need anname ette nii, et lahendi $y_*(x)$ tuletised kuni järguni $n-1$ oleksid võimalikult lihtsa kujuga.

Diferentseerime $Y(x)$ avaldist, saame

$$Y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ ... + C_n'(x)y_n(x) +$$
$$+C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \ ... + C_n(x)y_n'(x).$$

Esimese vabalt valitud tingimusena nõuame, et viimase avaldise paremal pool olev esimene summa oleks võrdne nulliga:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ ... + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Siis

$$Y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \ ... + C_n(x)y_n'(x),$$

mille diferentseerimisel saame

$$Y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ ... + C_n'(x)y_n'(x) +$$
$$+C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \ ... + C_n(x)y_n''(x).$$

Teise tingimusena nõuame, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Siis

$$Y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \ ... + C_n(x)y_n''(x).$$

Sarnaselt diferentseerime edasi ja toome sisse uued lisatingimused kuni saame

$$Y^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$
$$+C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \ ... + C_n(x)y_n^{(n)}(x).$$

Nüüd kasutame tingimust, et $Y(x)$ peab rahuldama mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit. Selleks asendame Y esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse, kust saame

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k^{(n)}(x) + p_1(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ ...$$
$$... + p_n(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x) = f(x).$$

Kirjutame võrduse ümber

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left(y_k^{(n)}(x) + p_1(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ ... + p_n(x)y_k(x)\right) = f(x).$$

Kuna y_k on võrrandi lahend ($k = 1, 2, \dots, n$), siis sulgudes olev funktsioon on nullfunktsioon. Järelikult on Y võrrandi lahendiks, kui kehtib tingimus

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Võttes kokku kõik sisse toodud tingimused ja viimase võrduse, saame funktsioonide $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).} \end{cases} \tag{33}$$

See on suuruste $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ suhtes lineaarne mittehomogeenne võrrandisüsteem n võrrandi ja n tundmatuga. Süsteem on üheselt lahenduv. Süsteemi lahendamisel avaldame kõigepealt tuletised $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ ja siis funktsioonide avaldised saame integreerimisel:

$$C_i'(x) = g_i(x), i = 1,2, \dots, n, \qquad C_i(x) = \int g_i(x)\,dx + \overline{C_i}\ , i = 1,2, \dots, n.$$

Kuna meid huvitab ainult üks erilahend, siis võime võtta $\overline{C_1} = \overline{C_2} = \ \dots = \overline{C_n} = 0$.

$$C_i(x) = \int g_i(x)\,dx.$$

Kõrgemat järku lineaarse konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),} \tag{34}$$

kus $\boldsymbol{a_1, \dots, a_n}$ on konstandid ja $f(x)$ antud vabaliige ja $y = y(x)$ otsitav funktsioon. Võrrand on erijuht võrrandist (30).

Võrrandi lahendamiseks tuleb lahendada kõigepealt **vastav homogeenne võrrand** kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0,} \tag{35}$$

selleks koostame karakteristliku võrrandi

$$\boldsymbol{k^n + a_1k^{n-1} + \ \dots + a_{n-1}k + a_n = 0} \tag{36}$$

ja leiame lahendina karakteristlikud väärtused $k_1, \dots, k_n$.

Definitsioon. Võrrandit (36)

$$\boldsymbol{k^n + a_1k^{n-1} + \ \dots + a_{n-1}k + a_n = 0}$$

nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (35) **karakteristlikuks võrrandiks**, võrrandi (36) lahendeid nimetatakse **karakteristlikeks väärtusteks**. Võrrandi (36) vasakul poolel olevat polünoomi

$$\boldsymbol{P(k) = k^n + a_1k^{n-1} + \ \dots + a_{n-1}k + a_n}$$

nimetatakse võrrandi (35) **karakteristlikuks polünoomiks.**

Karakteristlike väärtuste iseloomule vastavalt (reaalsed või kompleksed, kordsed) kirjutame välja võrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid $y_1, \dots, y_n$ ja nende lineaarkombinatsioonina ka võrrandi üldlahendi.

a) igale **reaalsele ühekordsele** karakteristlikule väärtusele k_i vastab erilahend kujul

$$\boldsymbol{y_i = e^{k_ix}};$$

b) igale **m-kordsele reaalsele** karakteristlikule väärtusele k_i vastab m erilahendit kujul

$$e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{k_1 x};$$

c) igale kompleksete karakteristlike väärtuste paarile $k_{j,l} = \alpha \pm i\beta$ vastab kaks reaalset erilahendit kujul

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

d) igale **m-kordsele kompleksete** karakteristlike väärtuste paarile $k_{j,l} = \alpha \pm i\beta$ vastab $2m$ reaalset erilahendit kujul

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x\, e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Teoreem 6.10. Kui funktsioon $y = u + iv$ on lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi kompleksseks lahendiks, siis selle reaalosa u ja imaginaarosa kordaja v on samuti võrrandi lahendiks.

Teoreem 6.11. Kui konstantsete kordajatega lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (35) karakteristlikud väärtused $k_1, \dots, k_n$ on paarikaupa erinevad, siis funktsioonid $y_i = e^{k_i x}$ moodustavad diferentsiaalvõrrandi (35) lahendite fundamentaalsüsteemi ja seega tema üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x},$$

kus $-\infty < x < \infty$ ja $C_1, C_2, \dots, C_n$ on suvalised konstandid.

Teoreem kehtib ka kompleksarvuliste karakteristlike väärtuste korral $k_j = \alpha + i\beta, k_l = \alpha - i\beta$, kuid sellisel juhul vastab kompleksetele lahenditele kaks reaalset lahendit, milleks on kompleksse lahendi reaalosa ja imaginaarosa kordaja. Näiteks kui

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ja

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

siis sellest, et y_1 on võrrandi kompleksseks lahendiks, järeldub teoreemist 6.10, et ka lahendi reaalosa $Re(y_1) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ja imaginaarosa kordaja $Im(y_1) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ on selle võrrandi lahenditeks. Seega kompleksetele lahenditele y_1 ja y_2 vastab kaks reaalset lahendit kujul

$$\tilde{y}_1 = Re(y_1) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad \tilde{y}_2 = Im(y_1) = e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Näide 6.43. Leida üldlahend võrrandile

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on kujul

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0$$

ning karakteristlikud väärtused on

$$k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3.$$

Võrrandi erilahendid on

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{3x}$$

ja võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Näide 6.44. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on kujul

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0$$

ja selle lahendid on

$$k_1 = -1, k_2 = k_3 = 1.$$

Võrrandi erilahendid on

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x, y_3 = xe^x$$

ja võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

Näide 6.45. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^{(7)} - 2y^{(6)} + 2y^{(5)} - 4y^{(4)} + y''' - 2y'' = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on kujul

$$k^7 - 2k^6 + 2k^5 - 4k^4 + k^3 - 2k^2 = k^2(k-2)(k^2+1)^2 = 0$$

ja selle lahendid on

$$k_1 = k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = k_5 = i, k_6 = k_7 = -i.$$

Võrrandi erilahendid on

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^{2x}, y_4 = \cos x\,, y_5 = x\cos x\,, y_6 = \sin x\,, y_7 = x\sin x.$$

ja võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + (C_4 + C_5 x)\cos x + (C_6 + C_7 x)\sin x.$$

Mittehomogeense võrrandi lahend avaldub vastava homogeense võrrandi lahendi ja ühe mittehomogeense võrrandi erilahendi summana:

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1 + \ \ldots + C_n y_n + Y},$$

kus Y on mittehomogeense võrrandi üks erilahend.

Näide 6.46. Leida erilahend võrrandile

$$y''' - y'' = e^x.$$

Kuna vastava karakteristliku võrrandi $k^3 - k^2 = 0$ lahendid on $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 0$, siis vastava homogeense võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

Seega üks karakteristliku võrrandi lahenditest $k_1 = 1$ on võrdne arvu e^x astmes oleva argumendi x kordajaga. Seetõttu otsime erilahendit kujul

$$Y = Axe^x,$$

siis

$$Y' = Ae^x + Axe^x, \qquad Y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x,$$

$$Y''' = 2Ae^x + Ae^x + Axe^x = 3Ae^x + Axe^x.$$

Tundmatu kordaja A määramiseks asetame võrrandisse otsitava y tuletiste asemele vastavad Y tuletiste avaldised. Saame

$$3Ae^x + Axe^x - 2Ae^x - Axe^x = e^x$$

ehk

$$Ae^x = e^x.$$

Siit saame, et $A = 1$ ja otsitavaks erilahendiks on

$$Y = xe^x.$$

6.7. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMID

Paljude ülesannete lahendamisel tuleb leida funktsioonid $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, mis rahuldavad diferentsiaalvõrrandite süsteemi argumendi x, otsitavate funktsioonide $y_1, y_2, \dots, y_n$ ning nende tuletiste suhtes. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkujus võib olla otsitavate funktsioonide kõrgemat järku tuletisi. Kõrgemat järku tuletised on võimalik uute muutujate sissetoomise teel asendada temaga samaväärse normaalkujulise süsteemiga.

Definitsioon. **Normaalkujuliseks süsteemiks** (normaalsüsteemiks) nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi, kus võrrandite vasakuteks poolteks on otsitavate funktsioonide esimest järku tuletised, paremad pooled aga tuletisi ei sisalda:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \tag{37}$$

kus $F_k(x, y_1, \dots, y_n)$ on antud funktsioonid $k = 1, 2, \dots, n$, $y_k = y_k(x)$ on **otsitavad funktsioonid**.

Näide 6.47. Leida järgmise süsteemi normaalkuju

$$\begin{cases} y' - 2zz' = 0, \\ \sin x + y'' - z^2 = 0. \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist suuruse y'' ja esimesest suuruse z', saame süsteemi kujul

$$\begin{cases} z' = \dfrac{y'}{2z}, \\ y'' = z^2 - \sin x\,. \end{cases}$$

Võtame kasutusele uue funktsiooni

$$w = y',$$

saame süsteemi asendada kolmandat järku normaalkujulise süsteemiga otsitavate y, z ja w suhtes:

$$\begin{cases} y' = w, \\ z' = \dfrac{w}{2z}, \\ w' = z^2 - \sin x\,. \end{cases}$$

Normaalsüsteemi järguks nimetatakse normaalsüsteemis sisalduvate võrrandite arvu. Süsteem (37) on n-järku.

Definitsioon. Normaalsüsteemi (37) **lahendiks** vahemikus (a, b) nimetatakse suvalist kogumit n funktsioonist $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, mis on määratud ja pidevalt diferentseeruvad vahemikus (a, b), kui ta muudab samasuseks süsteemi (37) iga võrrandi iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon. Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (37) jaoks **Cauchy ülesanne** seisneb järgnevas: leida süsteemi lahendite hulgast niisugune $\boldsymbol{y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)}$, mis rahuldab tingimusi

$$\boldsymbol{y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0},$$

kui $x = x_0$, kus $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ on ette antud arvud ehk algväärtused

$$\boldsymbol{y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0}.$$

Arv x_0 on sõltumatu muutuja x algväärtus. **Algtingimused** on kujul $\boldsymbol{y_k(x_0) = y_k^0,\ k = 1, 2, \dots, n}$.

Definitsioon. Normaalsüsteemi (37) **üldlahendiks** (piirkonnas $\boldsymbol{D}$) nimetatakse n suvalisest konstandist $C_1, C_2, \dots, C_n$ sõltuvat süsteemi lahendit

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = f_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)} \\ \boldsymbol{y_2 = f_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{y_n = f_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)} \end{cases} \tag{38}$$

millel on järgmine omadus: iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ leiduvad sellised konstantide väärtused $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, et vastav lahend (integraalkõver) (35) kulgeb läbi mainitud punkti, st rahuldab tingimusi

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = f_1(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)} \\ \boldsymbol{y_2 = f_2(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{y_n = f_n(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)} \end{cases}$$

Üldlahendist (38) konstantide $C_1, C_2, \dots, C_n$ väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse süsteemi (37) **erilahenditeks**.

Näide 6.48. Näidata, et järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y \end{cases}$$

lahendiks on

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}, \end{cases}$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Leiame lahenditest tuletised (võrrandite vasakud pooled) ja näitame, et need on võrdsed võrrandite paremate pooltega.

$$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x},$$

$$y - z = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x},$$

$$z' = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x},$$

$$z - 4y = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x}.$$

Järelikult funktsioonid y ja z on tõepoolest süsteemi lahendid konstantide C_1 ja C_2 mis tahes väärtuste korral.

Mõnikord ei sõltu süsteemis olevad võrrandid teistest muutujatest, siis on võimalik lahendada võrrandid eraldi diferentsiaalvõrranditena. Järgnevas näites koosneb süsteem kahest teineteisest sõltumatust diferentsiaalvõrrandist ja süsteemi lahendamine taandub kahe eraldi võrrandi lahendamisele.

Näide 6.49. Leida järgmise normaalsüsteemi erilahend

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \end{cases}$$

algtingimustel $y(1) = 2$ ja $z(1) = 3$.
Tegemist on sellise süsteemiga, mille mõlemad võrrandid on eraldi lahendatavad, nad ei sõltu teisest muutujast. Kõigepealt korrutame mõlemat võrrandit suurusega dx ja seejärel jagame esimest võrrandit suurusega y ja teist võrrandit suurusega z, saame

$$\begin{cases} \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}. \end{cases}$$

Integreerides mõlemaid võrrandeid, saame

$$\begin{cases} \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \\ \ln|z| = \ln|x| + \ln C_2. \end{cases}$$

Üldlahend avaldub järgmiselt

$$\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 x. \end{cases}$$

Erilahendi saamiseks rakendame rajatingimusi, saame konstantide C_1 ja C_2 väärtused järgmiselt:

$$C_1 = 2, C_2 = 3.$$

Seega erilahendiks on

$$y = 2x, z = 3x.$$

6.7.1. ÜHELE VÕRRANDILE TAANDAMISE MEETOD

Diferentsiaalvõrrandite süsteemide üks põhilisi lahendusmeetodeid seisneb nende taandamises ühele kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandile. Lahendades selle võrrandi, leiame ühe otsitavatest funktsioonidest. Ülejäänud otsitavad funktsioonid leiame lähtesüsteemi võrrandite ja süsteemi teisendamise käigus saadud seoste abil. Kuna diferentsiaalvõrrandite süsteemi ühele kõrgemat järku võrrandile taandamisel on põhilisteks operatsioonideks võrrandite diferentseerimine ja muutujate elimineerimine, nimetatakse ühele muutujale taandamise meetodit tihti ka **elimineerimismeetodiks**.

Näide 6.50. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y' = z, \qquad z' = y,$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Diferentseerime esimest võrrandit, saame $y'' = z'$ ja asendame teise võrrandisse, saame teist järku diferentsiaalvõrrandi kujul

$$y'' = y,$$

üldlahendiks saame

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Esimesest võrrandist saame otsitava funktsiooni z:

$$z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Näide 6.51. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y - 2zz' = 0, \qquad \sin x + y'' - z^2 = 0,$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Diferentseerime teist võrrandit, saame $\cos x + y''' - 2zz' = 0$ ja elimineerime korrutise $2zz'$, liites võrrandid kokku, saame kolmandat järku konstantsete kordajatega lineaarse võrrandi

$$y''' - y = -\cos x,$$

mille üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + Y,$$

kus Y on võrrandi erilahend ja $\{y_1, y_2, y_3\}$ vastava homogeense võrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid. Vastava homogeense võrrandi $y''' - y = 0$ karakteristlik võrrand on kujul $k^3 - 1 = 0$, karakteristliku võrrandi lahenditeks on

$$k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

seega homogeense võrrandi üldlahendiks on

$$y_* = C_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Mittehomogeense võrrandi erilahendit otsime samal kujul funktsiooniga $(-\cos x)$, ehk trigonomeetriliste funktsioonide summana:

$$Y = A \sin x + B \cos x \,, Y' = A \cos x - B \sin x,$$

$$Y'' = -A \sin x - B \cos x \,, Y''' = -A \cos x + B \sin x.$$

Asendame erilahendi võrrandisse, saame:

$$-A \cos x + B \sin x - A \sin x - B \cos x = -\cos x.$$

Konstantide A ja B määramiseks peavad $\sin x$ ja $\cos x$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki olema võrdsed, siit saame kaks võrrandit:

$$-A - B = -1, \qquad B - A = 0,$$

ehk

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

Saime erilahendiks

$$Y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

ja üldlahendiks

$$y = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + C_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Nüüd on vaja leida teine otsitav funktsioon z, selleks kasutame teist võrrandit ja leiame üldlahendist y teise tuletise:

$$z^2 = \sin x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C_1 e^x + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{3}{4}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{4}C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

6.7.2. INTEGREERUVATE KOMBINATSIOONIDE MEETOD

Teiseks meetodiks, mida sageli kasutatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamisel, on **integreeruvate kombinatsioonide meetod** ehk **kombineerimismeetod**. See meetod seisneb süsteemi võrrandite teisendamisel kujule, millest on lihtne leida võrrandeid kujul $\varphi(x, y_1, .., y_n) = C$. Süsteemi võrrandite teisendamisel kasutatakse sageli järgmiseid võtteid: liidetakse võrrandid omavahel, lahutatakse ühest võrrandist teine. Nendele võtetele võib lisaks kasutada ka võrrandite läbikorrutamist sobivate funktsioonidega enne liitmist või lahutamist, et oleks võimalik integreerida.

Näide 6.52. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y, \end{cases}$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.
Tegemist on ülesandes 6.50 oleva süsteemiga, mille lahendasime elimineerimismeetodil. Lahendame sama ülesande teisel meetodil. Liites antud võrrandite vasakud ja paremad pooled, saame

$$y' + z' = z + y$$

ehk

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z.$$

See ongi üheks integreeruvaks kombinatsiooniks, mille lahendamiseks teeme asenduse $u = y + z$ ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$u' = u,$$

mille lahendiks on $u = C_1 e^x$, edasi asendades u avaldise

$$y + z = C_1 e^x$$

ja avaldades integreerimiskonstandi, saame

$$C_1 = e^{-x}(y + z).$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks lahutame süsteemi esimesest võrrandist teise:

$$y' - z' = z - y$$

ehk

$$\frac{d(y-z)}{dx} = -(y - z).$$

See ongi üheks integreeruvaks kombinatsiooniks, mille lahendamiseks teeme asenduse $u = y - z$ ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$u' = -u,$$

mille lahendiks on $u = C_2 e^{-x}$, edasi asendades u avaldise

$$y - z = C_2 e^{-x}$$

ja avaldades integreerimiskonstandi, saame

$$C_2 = e^x (y - z).$$

Süsteemi üldlahendi võib esitada kujul

$$\begin{cases} e^{-x}(y + z) = C_1, \\ e^x (y - z) = C_2. \end{cases}$$

Kui avaldada saadud seostest otsitavad funktsioonid y ja z, saame süsteemi üldlahendi kujul:

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Saime sama tulemuse, mis ülesandes 6.50.

Näide 6.53. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1, \end{cases}$$

kus $x = x(t), y = y(t)$ ja $z = z(t)$ on otsitavad funktsioonid.
Lahutame süsteemi esimesest võrrandist teise, saame

$$\frac{d(x - y)}{dt} = 0,$$

millest integreerimisel saame

$$x - y = C_1.$$

Asendades saadud avaldise süsteemi teise ja kolmandasse võrrandisse, saame teist järku süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{C_1}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = C_1 + 1. \end{cases}$$

Selle süsteemi teisest võrrandist saame integreerides avaldada z:

$$z = t + C_1 t + C_2.$$

Asendades saadud avaldise uue süsteemi esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{t + C_1 t + C_2 - t} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}.$$

Saadud võrrandi lahendamisel saame

$$y = \ln|C_1 t + C_2| + C_3.$$

Süsteemi üldlahend on kujul

$$\begin{cases} x = \ln|C_1 t + C_2| + C_1 + C_3, \\ y = \ln|C_1 t + C_2| + C_3, \\ z = t(1 + C_1) + C_2. \end{cases}$$

VII PTK OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

7.1. OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE

Definitsioon. Võrrandit, mis seob otsitavat mitme muutuja funktsiooni tema osatuletistega ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse **osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks**.
Kahe sõltumatu muutuja x ja y korral on **esimest järku** osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks

$$\boldsymbol{F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0},$$

kus $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon.

Tähistades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Olgu funktsioon $F(x, y, u, p, q)$ määratud muutujate x, y, u, p, q piirkonnas G.

Definitsioon. Osatuletisega diferentsiaalvõrrandi **lahendiks** muutujate x, y piirkonnas D nimetatakse sellist funktsiooni $\boldsymbol{u = u(x, y)}$, kui ta on pidevalt diferentseeruv ning

$$\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) \in G$$

ja

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0$$

iga $(x, y) \in D$ korral, ehk mis sellesse võrrandisse asetatuna muudab võrrandi samasuseks.
Oluline erinevus harilike ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite vahel seisneb selles, et harilike diferentsiaalvõrrandite üldlahendites sisaldusid suvalised konstandid, osatuletistega diferentsiaalvõrrandites aga suvalised funktsioonid. Seega võrrandi **lahend $\boldsymbol{u = u(x, y)}$** võib sõltuda ühest suvalisest funktsioonist.

Näide 7.1. Võrrandi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

üheks lahendiks on funktsioon $u = x + y$, kuna tema osatuletised on

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 1 = 0,$$

ehk saame samasuse $0 \equiv 0$.

Näide 7.2. Lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Integreerime võrrandit argumendi x järgi, nagu harilikku diferentsiaalvõrrandit, saame $u = C$. Kuna u on kahe muutuja funktsioon, siis C ei sõltu argumendist x, aga võib sõltuda argumendist y, võrrand on ikka rahuldatud. Võrrandi üldlahendiks on suvaline funktsioon argumendist y:

$$u = C(y).$$

Näide 7.3. Lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$$

Vaatleme muutujat x parameetrina ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dy}=-\frac{1}{x},\qquad \ln|u|=-\frac{y}{x}+\ln|C(x)|,\quad u=C(x)e^{-\frac{y}{x}}.$$

Selle võrrandi lahendis olev integreerimiskonstant võib sõltuda argumendist x. Kontrollime lahendit, asendades selle esialgsesse võrrandisse:

$$x\frac{\partial\left(C(x)e^{-\frac{y}{x}}\right)}{\partial y}+C(x)e^{-\frac{y}{x}}=0,\qquad x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot C(x)e^{-\frac{y}{x}}+C(x)e^{-\frac{y}{x}}=0.$$

Geomeetriliselt vastab võrrandile $u=u(x,y)$ pind ruumis, seda pinda nimetatakse **integraalpinnaks**. Kuna üldlahendis on suvalised funktsioonid, sisaldab võrrand lõpmata palju integraalpindu.

Definitsioon. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **järguks** nimetatakse võrrandis leiduvat kõrgeimat osatuletise järku.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$\boldsymbol{F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=0}.$$

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab kaht suvalist funktsiooni.
Loodusteadustes kasutatavad teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandid:

a) **Lainevõrrand**, mis kirjeldab laine levikut, näiteks pillikeele võnkumist, on kujul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

kus α on konstant. Pillikeele jaoks on $\alpha^2=T/\varrho$, kus T tähistab keele otstes mõjuvat tõmbejõudu ja ϱ lineaarset tihedust ehk massi pikkusühiku kohta.

b) **Difusioonivõrrand**, mis on kujul

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kus otsitav funktsioon $u=u(x,t)$ võib tähistada näiteks gaasi kontsentratsiooni või osarõhku, mis muutub ajas. Konstant D tähistab difusioonikordajat.

Näide 7.4. Lahendada teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$$

Kirjutame antud võrrandi kujul

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Kõigepealt integreerime argumendi x järgi (nagu harilikku diferentsiaalvõrrandit), seejärel integreerime argumendi y järgi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C(y), \qquad u = \int C(y)\,dy + C_2(x).$$

Kuna integreerisime muutuja y järgi, võib integreerimiskonstant sõltuda suvalisest argumendi x funktsioonist. Tähistades

$$\int C(y)\,dy \doteq C_1(y),$$

saame üldlahendi, mis sisaldab kaht suvalist funktsiooni

$$u = C_1(y) + C_2(x).$$

Seega teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend sõltub kahest suvalisest funktsioonist. Kui järk on kõrgem, siis samuti suvaliste funktsioonide arv, millest üldlahend sõltub, on võrdne võrrandi järguga.

7.2. CAUCHY ÜLESANNE

Cauchy ülesanne osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks on järgmine: **leida integraalpind, mis läbib etteantud kõverat**. Selle kõvera võrrandid võivad olla antud ristkoordinaatides

$$\begin{cases} \boldsymbol{F(x,y,z) = 0} \\ \boldsymbol{G(x,y,z) = 0} \end{cases}$$

või parameetrilisel kujul: leida integraalpind, mis läbib etteantud kõverat

$$\boldsymbol{x = \varphi(t), y = \psi(t), u = \chi(t),}$$

kus parameeter t muutub mingis vahemikus (t_1, t_2). Tuleb leida selline võrrandi lahend, mille korral

$$\boldsymbol{\Phi\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big) \equiv 0.}$$

Kui etteantud kõver asub mingil tasandil $x = x_0$ või $y = y_0$, kus x_0 ja y_0 on mingid etteantud arvud

$$x = x_0, u = \chi(y)$$

või

$$y = y_0, u = \psi(x),$$

siis algtingimuse saab kirjutada vastavalt

$$\boldsymbol{u(x_0, y) = \chi(y),}$$

või

$$\boldsymbol{u(x, y_0) = \psi(x).}$$

Näide 7.5. Lahendada Cauchy ülesanne

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \qquad u(x,1) = x^2.$$

Üldlahendi leidsime näites 7.3, algtingimusest asendame üldlahendisse vastavad suurused, saame

$$u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}, \quad x^2 = C(x)e^{-\frac{1}{x}}, \quad C(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}},$$

$$u = x^2 e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{y}{x}} = x^2 e^{\frac{1-y}{x}}.$$

Näide 7.6. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy, \qquad u|_{x^2+y^2=1} = 1.$$

Loeme parameetriks argumendi y ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{du}{dx} = xy, \qquad u = y \cdot \frac{x^2}{2} + C(y),$$

Üldlahendis $C(y)$ on muutuja y funktsioon. Leiame $C(y)$ nii, et oleks rahuldatud antud tingimus

$$1 = y \cdot \frac{1-y^2}{2} + C(y), \quad C(y) = 1 - \frac{y(1-y^2)}{2},$$

seega otsitav lahend Cauchy ülesandele on

$$u = y \cdot \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{y(1-y^2)}{2}.$$

Näide 7.7. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \qquad u(1,y) = y^2.$$

Integreerime argumendi x järgi, üldlahend on

$$u(x,y) = xy + C(y), u(1,y) = 1y + C(y), y + C(y) = y^2.$$

Avaldame $C(y)$: $C(y) = y^2 - y$. Erilahend on

$$u(x,y) = xy + y^2 - y.$$

Näide 7.8. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \;\; u\left(\frac{1}{y}, y\right) = y.$$

Jagame suurusega u ja integreerime x järgi

$$\frac{\partial u}{u} = \partial x, \qquad \ln|u| = x + \ln C(y), \qquad u(x,y) = C(y)e^x.$$

Erilahend $C(y)e^{\frac{1}{y}} = y$; $C(y) = ye^{\frac{1}{y}}$. Üldlahend on: $u(x,y) = ye^{\frac{1}{y}}e^x = ye^{x-\frac{1}{y}}$.

Cauchy ülesanne ei ole alati lahenduv: võib juhtuda, et läbi etteantud kõvera ei lähe ükski integraalpindadest. Samas võib läbi lähtekõvera minna rohkem kui üks integraalpindadest.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmiseks peab olema teada ka otsitava funktsiooni u esimest järku osatuletiste väärtus lähtekõvera punktides, sest vaja on teada kahe suvalise funktsiooni väärtust $C_1(x), C_2(y)$.

Näide 7.9. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \;\; u(1,y) = y^2; \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = y.$$

Integreerime argumendi x järgi kaks korda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y), \qquad u = \int C_1(y)\,dx + C_2(y) = xC_1(y) + C_2(y).$$

Erilahendi saamiseks teisest tingimusest, asendades eelnevasse võrrandisse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y), \qquad C_1(y) = y$$

ja esimesest tingimusest saame asendades üldlahendisse $x = 1, u = y^2$:

$$1 \cdot C_1(y) + C_2(y) = y^2; \quad y + C_2(y) = y^2; \quad C_2(y) = y^2 - y.$$

Erilahend $u(x,y) = xy + y^2 - y$.

7.3. LINEAARSED OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y).} \tag{39}$$

Kvaasilineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{p(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y,u).}$$

Lineaarse homogeense esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.} \tag{40}$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb lahendada temaga sümmeetriline harilik diferentsiaalvõrrand

$$\boldsymbol{\frac{dx}{p(x,y)} = \frac{dy}{q(x,y)}.} \tag{41}$$

Osutub, et osatuletistega diferentsiaalvõrrandi (40) ja võrrandi (41) lahendamise ülesanded on ekvivalentsed. Sellise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi lahendi $\psi(x,y) = C$ korral osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** on $\boldsymbol{u = \psi(x,y)}$.

Kui otsitav funktsioon on **kolme muutuja funktsioon**

$$\boldsymbol{p(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + r(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,} \tag{42}$$

tuleb lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks lahendada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\boldsymbol{\frac{dx}{p(x,y,z)} = \frac{dy}{q(x,y,z)} = \frac{dz}{r(x,y,z)}.} \tag{43}$$

Sellise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi lahendi $\psi(x,y,z) = C$ korral osatuletistega diferentsiaalvõrrandi erilahendiks on $u = \psi(x,y,z)$.

Lause 7.1. Kui valem $\psi(x,y,z) = C$ esitab diferentsiaalvõrrandite süsteemi (43) lahendit (integraali), siis funktsioon

$$\boldsymbol{u = \psi(x,y,z)}$$

on diferentsiaalvõrrandi (42) üheks erilahendiks.

Tõestus. Olgu $\psi(x,y,z)=C$ süsteemi (43) lahend. Diferentseerime lahendit:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=0. \tag{44}$$

Süsteemis (43) tähistame suhte

$$\frac{dx}{p(x,y,z)}=\frac{dy}{q(x,y,z)}=\frac{dz}{r(x,y,z)}=\lambda,$$

siis

$$dx=\lambda p, dy=\lambda q, dz=\lambda r.$$

Asetame need võrrandisse (44), seejärel jagame läbi liikmega λ, saame

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}p+\frac{\partial\psi}{\partial y}q+\frac{\partial\psi}{\partial z}r=0.$$

Tulemuseks saime võrrandi (42), kus otsitava u asemel on funktsioon ψ. See aga tähendab, et funktsioon ψ rahuldab võrrandit (42), mistõttu on võrrandi üheks erilahendiks.

■

Kehtib ka vastupidine väide: Kui $\psi=\psi(x,y,z)$ on võrrandi (42) erilahend, siis $\psi(x,y,z)=C$ on süsteemi (43) lahend.

Lause 7.2. Kui $\psi_1(x,y,z)=C_1$ ja $\psi_2(x,y,z)=C_2$ on kaks lahendit (integraali) vastavale harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile (43), siis

$$\boldsymbol{u=\varphi(\psi_1,\psi_2)}$$

ehk suvaline funktsioon funktsioonidest ψ_1 ja ψ_2 rahuldab vastavat osatuletistega diferentsiaalvõrrandit (42).

Tõestus. Arvutame osatuletised funktsioonist $u=\varphi(\psi_1,\psi_2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial z},$$

seejärel asetame saadud osatuletised võrrandisse (42). Saame

$$\left(p(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+r(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}+$$

$$+\left(p(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+r(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\equiv 0.$$

Tulemus on samaselt null, sest lause 7.1 põhjal on mõlemad sulgudes olevad avaldised on samaselt nullid. Seega on võrrandi (42) lahendiks funktsioon

$$u=\varphi(\psi_1,\psi_2).$$

■

Saadud lahend on võrrandi (42) üldlahend, kui funktsioonid $\psi_1(x,y,z)=C_1$ ja $\psi_2(x,y,z)=C_2$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 7.10. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Vastav harilik diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Lahendamiseks korrutame võrrandit suurusega xy, saame

$$xdx = -ydy, \quad \frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C}{2}, \qquad x^2 + y^2 = C.$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend on suvaline funktsioon leitud lahendi vasakust poolest

$$u = \psi(x^2 + y^2).$$

Näide 7.11. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|x| = \ln|y| + \ln C_1, \quad x = C_1 y, \qquad \frac{x}{y} = C_1.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}, \quad \ln|x| = \ln|z| + \ln C_2, \quad x = C_2 z, \qquad \frac{x}{z} = C_2.$$

Seega

$$\psi_1 = \frac{x}{y}, \psi_2 = \frac{x}{z},$$

üldlahend on

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).$$

Kui tundmatuks on n muutuja funktsioon $\boldsymbol{u(x_1, x_2, \dots, x_n)}$, siis esimest järku lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamine toimub analoogiliselt. Võrrand on kujul

$$\boldsymbol{p_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + p_n(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0} \tag{45}$$

ja temale vastav harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem on kujul

$$\boldsymbol{\frac{dx_1}{p_1(x,y,z)} = \frac{dx_2}{p_2(x,y,z)} = \dots = \frac{dx_n}{p_n(x,y,z)}.}$$

Süsteem sisaldab $n-1$ sõltumatut võrrandit, järelikult saame leida süsteemile $n-1$ sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1,$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1}.$$

Võrrandi (45) üldlahend on suvaline funktsioon, mis sõltub leitud lahenditest:

$$u = \varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n).$$

Kvaasilineaarse mittehomogeense võrrandi kujul

$$\boldsymbol{p(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y,u)}$$

lahendamise saab viia lineaarse homogeense võrrandi lahendamisele. Kuna võrrandi kordajad p, q ja r võivad sõltuda ka otsitavast funktsioonist u, on võrrand kvaasilineaarne. Võrrandi lahendit otsime ilmutamata kujul

$$V(x,y,u) = 0,$$

otsitavaks on funktsioon kujul V. Leiame funktsioonist V osatuletised argumentide x ja y järgi (ilmutamata funktsiooni tuletise valemi põhjal)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

ning asetame võrrandisse (39):

$$p(x,y,u)\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\right) + q(x,y,u)\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\right) + r(x,y,u) = 0.$$

Korrutame suurusega $-\partial V/\partial u$, saame

$$p(x,y,u)\frac{\partial V}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial V}{\partial y} + r(x,y,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Tulemuseks on lineaarne homogeenne osatuletistega diferentsiaalvõrrand funktsiooni V suhtes. Moodustame võrrandile **vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi**:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{p(x,y,u)} = \frac{dy}{q(x,y,u)} = \frac{du}{r(x,y,u)}}.$$

Sellele süsteemile saame leida kaks sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x,y,u) = C_1,$$
$$\psi_2(x,y,u) = C_2.$$

Võrrandi üldlahend on

$$V = \varphi(\psi_1, \psi_2),$$

kus φ on suvaline funktsioon. Seega esialgse võrrandi (39) lahendiks on funktsioon

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0.$$

Samal meetodil saab lahendada **kvaasilineaarset homogeenset võrrandit**, sellisel juhul tekib süsteemi viimases võrrandis nulliga jagamine. Saame süsteemi kahe võrrandiga, millest teine võrrand on $du = 0$, mille lahend on $u = C_1$ (näide 7.13).

Näide 7.12. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = xy.$$

Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy}.$$

Saime harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi kahe võrrandiga, millest lahendame kõigepealt esimese:

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$y = C_1 x, \text{ kust } x = y/C_1.$$

Teise võrrandi lahendamisel saame

$$\frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{udu}{xy},$$

$$dy = \frac{udu}{x}.$$

Asendame argumendi x esimeses süsteemis saadud avaldisega

$$dy = \frac{C_1 udu}{y},$$

$$ydy = C_1 udu,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 \frac{u^2}{2} + \frac{C_2}{2},$$

$$y^2 = C_1 u^2 + C_2.$$

Viimaks on vaja leitud lahendid viia kujule $\psi_1(x, y, z) = C_1$ ja $\psi_2(x, y, z) = C_2$, et suvalised konstandid oleksid mõlemal juhul paremal pool võrdusmärki:

$$\frac{y}{x} = C_1, \qquad y\left(y - \frac{u^2}{x}\right) = C_2.$$

Üldlahendiks on

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, y\left(y - \frac{u^2}{x}\right)\right) = 0.$$

Näide 7.13. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

lahend, mis läbib sirget $x = y = u$.

Siin on tegemist kvaasilineaarse võrrandiga, mis on homogeenne. Selle võrrandi lahendamiseks saame kasutada antud meetodit. Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on kujul

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{0},$$

millest saame süsteemi kahe võrrandiga. Kui nimetajas on null, siis võrdsustame lugeja nulliga.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{-1}, du = 0.$$

Teisest võrrandist saame leida otsitava funktsiooni u avaldise:

$$u = C_1,$$

asendame esimesse võrrandisse ja lahendame, saame

$$C_1 y = -x + C_2,$$

asendades esimesena saadud C_1 avaldise, saame võrrandi paremale poole konstandi

$$uy + x = C_2.$$

Võrrandi üldlahendiks on

$$\varphi(u, uy + x) = 0.$$

Erilahendi leidmiseks asendame üldlahendisse $y = u$ ja $z = u$, saame

$$C_1 = u,\ C_2 = u^2 + u.$$

Seega

$$C_2 = C_1(1 + C_1).$$

Sellest saame avaldada erilahendi

$$uy + x = u(1 + u).$$

7.4. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEM KAHEST OSATULETISTEGA VÕRRANDIST

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkuju:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, u) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = g(x, y, u) \end{cases}$$

Otsitav funktsioon $u = u(x, y)$, funktsioonid f ja g olgu pidevalt diferentseeruvad mingis muutujate x, y, u piirkonnas D.

Teoreem 7.1. Süsteem on täielikult integreeruv parajasti siis, kui piirkonnas D kehtib samasus

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} g \equiv \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} f.$$

Sellisel juhul on süsteemil üks lahend, mis läbib etteantud punkti.

Järeldus. Kui on täidetud samasuse tingimus, siis on süsteemil olemas **ühest parameetrist sõltuv lahendite parv $u = u(x, y, b)$**, kus b on parameeter.

Näide 7.14. Lahendada süsteem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ax + y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{y}{a}.$$

Integreerumise tingimus on täidetud:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} g \equiv 1 \equiv \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} f,$$

$$\frac{du}{dx} = ax + y, \quad u = \frac{ax^2}{2} + yx + C(y),$$

$$\frac{du}{dy}: \; x + C'(y) = x + \frac{y}{a}, \quad C'(y) = \frac{y}{a}, \; C(y) = \frac{y^2}{2a} + b.$$

$$u = \frac{ax^2}{2} + yx + \frac{y^2}{2a} + b = \frac{1}{2a}(y + ax)^2 + b.$$

KIRJANDUS

1. Arvet Pedas, Gennadi Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid : teooria, näiteid, ülesandeid. Tartu : Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011.
2. Peep Miidla. Diferentsiaalvõrrandite õppematerjalid: http://math.ut.ee/~peepm/dv/
3. Lembit Roots. Valitud küsimusi kõrgemast matemaatikast. 1, [Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid] : õppevahend Tartu Riikliku Ülikooli keemiaosakonna üliõpilastele, Tartu Riiklik Ülikool, teoreetilise mehaanika kateeder, 1981.
4. Erich Steiner. The Chemistry Maths Book, Oxford University Press, 2008. https://syaifulhamzah.files.wordpress.com/2013/08/erich_steiner-the-chemistry-maths-book-second.pdf
5. Thomas' Calculus. 12th edition. https://archive.org/details/Pearson.Thomas.Calculus.12th.Edition.0321587995