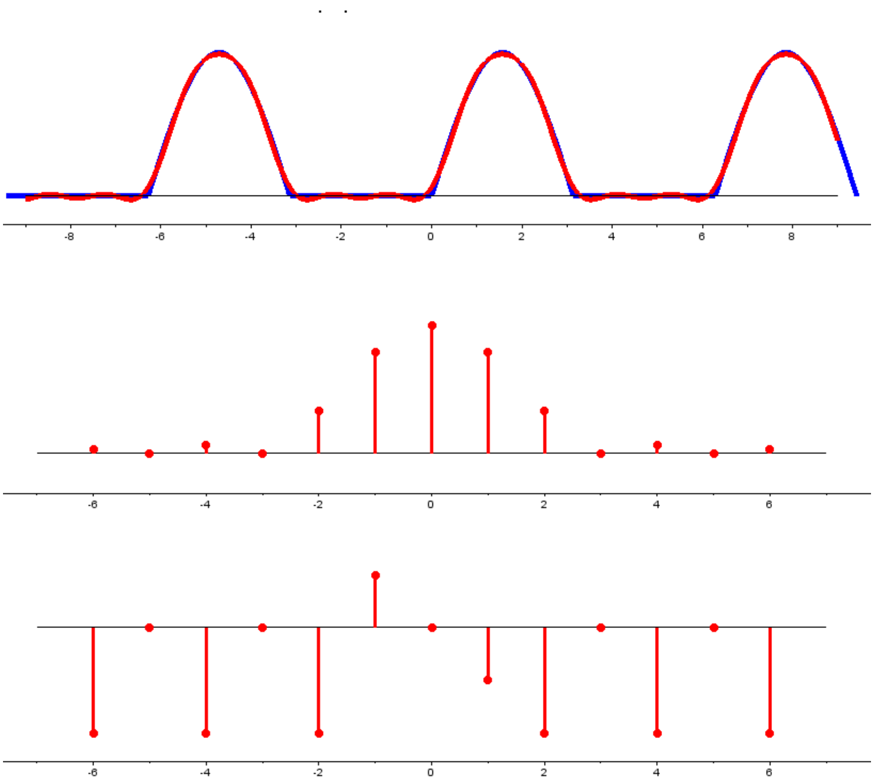
MTMM.00.341
Kõrgem matemaatika 2



2016

Ülesannete kogu

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
(Const)' &=& 0 & (\sin x)' &=& \cos x & (\arcsin x)' &=& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(x^\alpha)' &=& \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0 & (\cos x)' &=& -\sin x & (\arccos x)' &=& -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(e^x)' &=& e^x & (\tan x)' &=& \dfrac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' &=& \dfrac{1}{1+x^2} \\
(a^x)' &=& a^x \ln a & (\cot x)' &=& -\dfrac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' &=& -\dfrac{1}{1+x^2} \\
(\ln|x|)' &=& \dfrac{1}{x} & & & & & &
\end{array}
$$

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0\,dx = C$

(2) $\int dx = x + C$

(3) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \ (a \neq -1)$

(4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(5) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(6) $\int e^x\,dx = e^x + C$

(7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(8) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(10) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(12) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(13) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

(14) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

(15) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$

(16) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

Sisukord

Praktikum 1

Vektorruum ja lineaarne sõltumatus

1.1 Vektorruum

Definitsioon 1.1

*Mittetühja hulka V nimetatakse **vektorruumiks** üle reaalarvude $\mathbb{R}$, kui on defineeritud kujutused $V \times V \to V$, $(a,b) \mapsto a+b$, ja $\mathbb{R} \times V \to V$, $(k,a) \mapsto ka$, nii et*

VR1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ *iga* $a,b,c \in V$ *korral;*

VR2. *leidub element* $\theta \in V$ *nii, et iga* $a \in V$ *korral* $a+\theta = a = \theta + a$*;*

VR3. *iga elemendi* $a \in V$ *korral leidub element* $-a \in V$ *nii, et* $a+(-a) = \theta = (-a)+a$*;*

VR4. $a+b = b+a$ *iga* $a,b \in V$ *korral;*

VR5. $k(a+b) = ka+kb$ *iga* $a,b \in V$ *ja* $k \in \mathbb{R}$ *korral;*

VR6. $(k+l)a = ka+la$ *iga* $a \in V$ *ja* $k,l \in \mathbb{R}$ *korral;*

VR7. $(kl)a = k(la)$ *iga* $a \in V$ *ja* $k,l \in \mathbb{R}$ *korral;*

VR8. $1a = a$ *iga* $a \in V$ *korral.*

Ülesanne 1.1. **Olgu a vektorruumi element ja $k \in \mathbb{R}$ skalaar. Tõestage, et $ka = 0$ parajasti siis, kui $k = 0$ või $a = 0$.**

Ülesanne 1.2. **Olgu a, b vektorruumi elemendid ja $k, l \in \mathbb{R}$ skalaarid. Tõestage, et $ka + lb = la + kb$ parajasti siis, kui $k = l$ või $a = b$.**

Ülesanne 1.3. **Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid arvude liitmise ja korrutamise suhtes?**

(a) $\mathbb{N}$

(b) $\mathbb{Z}$

(c) $\mathbb{Q}$

(d) $\mathbb{R}$

(e) $\mathbb{C}$

(f) $\mathbb{R}^+$

Ülesanne 1.4. **Defineerime hulgal $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \colon r > 0\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega**

$$\begin{aligned} r \oplus s &= rs, \quad r,s \in \mathbb{R}^+ \\ k \otimes r &= r^k, \quad k \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Tõestage, et selliste tehete suhtes on hulk $\mathbb{R}^+$ vektorruum.

Ülesanne 1.5. **Defineerime hulgal $\mathbb{R}^n = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega**

$$\begin{aligned} (a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n) &= (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n), \\ k(a_1,\ldots,a_n) &= (ka_1,\ldots,ka_n), \ k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tõestage, et selliste (n.ö. komponenthaaval defineeritud) tehete suhtes on hulk $\mathbb{R}^n$ vektorruum.

Ülesanne 1.6. **Defineerime hulgal $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega**

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2),\\ k(a_1, a_2) &= (ka_1, a_2),\end{aligned}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$. **Kas V on vektorruum?**

Ülesanne 1.7. **Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid maatriksite liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes.**

- **(a)** kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk;
- **(b)** kõigi n-ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk;
- **(c)** kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk;
- **(d)** $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
- **(e)** $\mathrm{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- **(f)** $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$;
- **(g)** $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;
- **(h)** $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$;
- **(i)** $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Ülesanne 1.8. **Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktiviisiliselt. Tehke kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid:**

- **(a)** hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$;
- **(b)** kõigi ülimalt n. astme polünoomfunktsioonide hulk $\mathbb{R}_n[x]$;
- **(c)** kõigi n-astme polünoomfunktsioonide hulk;
- **(d)** lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}$;
- **(e)** lõigul $[a, b]$ k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk $C^{(k)}_{[a,b]}$, kus $k = 0, 1, \ldots$;
- **(f)** lõigul $[a, b]$ integreeruvate funktsioonide hulk.

1.2 Lineaarne sõltumatus

Definitsioon 1.2

*Vektorruumi V vektorite süsteemi $a_1, a_2, \ldots, a_s$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui mis tahes $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{R}$ korral võrdusest*

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_s a_s = 0$$

järeldub, et

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0.$$

*Vektorite süsteemi nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks**, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.*

Ülesanne 1.9. **Olgu a, b, c vektorruumi V vektorid. Kui vektorruumi elemendid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, kas siis ka vektorruumi elemendid $a + b$, $b + c$ ja $c + a$ on lineaarselt sõltumatud?**

Ülesanne 1.10. **Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (k, 1, 0)$, $a_2 = (1, k, 1)$ ja $a_3 = (0, 1, k)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?**

Ülesanne 1.11. **Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (1, k, k^2)$, $a_2 = (1, l, l^2)$ ja $a_3 = (1, m, m^2)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?**

Ülesanne 1.12. **Näidake, et vektorruumi V vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga:**

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (5, 3, 1)$, $a_3 = (-15, -2, 21)$;

(b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $f_1(x) = x^2 + 5$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$, $f_3(x) = x^2 + 16x + 13$;

(c) $V = \mathbb{C}$, $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$;

(d) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = 1$.

Ülesanne 1.13. **Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V on lineaarselt sõltumatud:**

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 4, 2)$;

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (x, y, 3)$, $a_2 = (2, x - y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 6$, $y \neq \frac{9}{2}$;

(c) $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ülesanne 1.14. **Uurige, kas järgmised vektorite süsteemid funktsioonide vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on lineaarselt sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga:**

(a) $x + 2$, $x - 2$;

(b) $6x + 9$, $8x + 12$;

(c) 1, $(x - 1)^2$, $x - 1$;

(d) $4 - x$, $2x + 3$, $6x + 8$;

(e) $x^2 + 2x$, $3x^2 - 1$, $x + 4$;

(f) $\sin x$, $\cos x$;

(g) $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$;

(h) x^2, $x|x|$.

Ülesanne 1.15. $< * >$ **Leidke hulgast $\{(0, 0)\}$ erinevad pärisalamhulgad S_1, S_2 ja S_3 vektorruumis $\mathbb{R}^2$ nii, et**

(a) $S_1 + S_1 \subsetneq S_1$ (pole võrdne!),

(b) $S_2 \subsetneq S_2 + S_2$ (pole võrdne!),

(c) $S_3 + S_3 = S_3$.

Praktikum 2

Vektorruumi alamruum ja vektorite koordinaadid

2.1 Alamruum

Definitsioon 2.1

*Vektorruumi V mittetühja alamhulka U nimetatakse vektorruumi V **alamruumiks**, kui*

AR1. *iga $a, b \in U$ korral $a + b \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V liitmise suhtes);*

AR2. *iga $a \in U$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral $ka \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V skalaariga korrutamise suhtes);*

Definitsioon 2.2

*Vektorruumi V elementide $a_1, a_2, \dots, a_s$ **lineaarseks katteks** nimetatakse hulka*

$$L(a_1, a_2, \dots, a_s) = \{k_1 a_1 + \dots + k_s a_s \mid k_1, \dots, k_s \in \mathbb{R}\}.$$

Ülesanne 2.1. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi $\mathbb{R}^4$ alamruumid:

(a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

(b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

(d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}$.

Ülesanne 2.2. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V alamruumid.

(a) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk;

(b) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga paralleelsete vabavektorite hulk;

(c) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega ortogonaalsete vabavektorite hulk;

(d) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk;

(e) $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

(f) $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$;

(g) $V = \mathbb{R}^5$, $\{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

(h) $V = \mathbb{R}^5$, $\{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 2\}$;

(i) $V = \mathbb{R}^5$, $\{(a,b,c,d,e) \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R}, a+e = b+d\}$.

Ülesanne 2.3. **Leidke vektorruumi $\mathbb{R}^4$ vektorite $a_1, \dots, a_s$ lineaarne kate, kui**

(a) $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$;

(b) $a_1 = (1,2,1,2)$, $a_2 = (2,1,2,1)$, $a_3 = (0,3,0,3)$, $a_4 = (1,1,1,1)$;

(c) $a_1 = (1,1,1,2)$, $a_2 = (2,0,1,1)$, $a_3 = (4,2,3,5)$, $a_4 = (0,2,1,3)$.

Ülesanne 2.4. **Olgu V vektorruum. Kas vektorruumil V on mittetriviaalseid lõplikke alamruume?**

2.2 Baas ja vektori koordinaadid

Definitsioon 2.3

*Vektorruumi V vektorite süsteemi M nimetatakse **moodustajate süsteemiks**, kui vektorruumi V iga vektor avaldub süsteemi M kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.*

Definitsioon 2.4

*Vektorruumi **baasiks** nimetatakse selle vektorruumi lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.*

Definitsioon 2.5

*Olgu V vektorruum, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tema baas ja $a \in V$. Kui $a = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n$, siis skalaare $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ nimetatakse vektori a **koordinaatideks** baasi e suhtes.*

Ülesanne 2.5. **Leidke vektorruumi $\mathbb{C}$ vektori $-5+4i$ koordinaadid baasi $e = \{-1+2i, 2+i\}$ suhtes.**

Ülesanne 2.6. **Tooge näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$**

(a) baasist;

(b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas;

(c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas;

(d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem.

Ülesanne 2.7. **Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ vektorite $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi**

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

suhtes.

Ülesanne 2.8. **Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baasid ning leidke vektori $a = (3,7,13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:**

(a) $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$;

(b) $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1)$;

(c) $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,2,3)$, $a_3 = (1,4,9)$.

Ülesanne 2.9. **On antud vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $e_1 = (2,1,-3)$, $e_2 = (3,2,-5)$ ja $e_3 = (1,-1,1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $a = (6,2,-7)$ koordinaadid sellel baasil.**

Ülesanne 2.10. **Leidke üleminekumaatriks vektorruumi V baasilt $\{e_1, \dots, e_n\}$ baasile $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ja leidke vektori a koordinaadid nende baaside suhtes, kui**

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,2,1)$, $e_2 = (2,3,3)$, $e_3 = (3,7,1)$ $e'_1 = (3,1,4)$, $e'_2 = (5,2,1)$, $e'_3 = (1,1,-6)$, $a = (9,4,-1)$;

(b) $V = \mathbb{C}$, $e_1 = 1-i$, $e_2 = 1+i$, $e'_1 = 2$, $e'_2 = 2i$, $a = 2+2i$;

(c) $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$e'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,
$a = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Ülesanne 2.11. **Olgu $\{e_1, e_2, e_3\}$ 3-mõõtmelise vektorruumi V baas. Tõestage, et ka vektorite süsteem $e'_1 = 5e_1 - e_2 - 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2$, $e'_3 = -2e_1 + e_2 + e_3$ on selle vektorruumi baas ning leidke vektori $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ koordinaadid selle baasi suhtes.**

Ülesanne 2.12. $< * >$ **Olgu V n-mõõtmeline vektorruum. Olgu antud r-mõõtmeline alamruum $W \subset V$, kusjuures $r < n$. Tõestage, et $W = Y$, kus**

$$Y = \bigcap \{U \colon U \text{ on } V \text{ alamruum}, \dim U = n-1,\ W \subset U\}.$$

Näpunäide: **Sisalduvuse $W \supset Y$ tõestamisel näidake, et elemendi $v \in Y \setminus W$ olemasolu viib vastuoluni.**

Ülesanne 2.13. $< * >$ **Vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorid f_1 ja f_2 on sellised, et iga $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ korral funktsioon $c_1 f_1 + c_2 f_2$ säilitab märki, st.**

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \ \ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \geq 0 \quad \vee \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \leq 0).$$

Tõestage, et vektorite süsteem f_1, f_2 on lineaarselt sõltuv.

Praktikum 3

Vektorid. Vektorite skalaarkorrutis

3.1 Vektorite skalaarkorrutis

Definitsioon 3.1

Olgu $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1), \vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$ *ja* $\varphi = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ *vektorite* $\vec{x}$ *ja* $\vec{y}$ *vaheline nurk.*
Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in E$ ***skalaarkorrutiseks*** *nimetatakse arvu*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Vektori $\vec{x}$ **pikkus**:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Ülesanne 3.1. **Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.**

(a) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 6, \varphi = 2\pi/3$

(b) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = 4$

(c) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 12, |\vec{a} - \vec{b}| = 10$

(d) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$

(e) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

(f) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

Ülesanne 3.2. **Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.**

(a) $\vec{a} = (2; -3), \vec{b} = (4; 2)$

(b) $\vec{a} = (2; -3; 1), \vec{b} = (4; 2; -5)$

(c) $\vec{a} = (7; -4; 2), \vec{b} = (3; 1)$

(d) $\vec{a} = (0; 0; 0), \vec{b} = (-2; 6)$

Ülesanne 3.3. **Arvutage skalaarkorrutis $\vec{a} \cdot \vec{b}$.**

(a) $\vec{a} = (\alpha - 1; \beta - 1; \gamma - 1), \vec{b} = (\beta + 1; \gamma + 1; \alpha + 1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(b) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, kus $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid

Ülesanne 3.4. **Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad $60°$. Leidke vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pikkus, kui $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ ja $|\vec{c}| = 6$.**

Ülesanne 3.5. **Jõud $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$, mis mõjuvad $120°$ nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leidke resultantjõu $\vec{R}$ arvväärtus $|\vec{R}|$, kui $|\vec{P}| = 7$ ja $|\vec{Q}| = 4$.**

Ülesanne 3.6. **Leidke koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest $A(1; 1)$ ja $B(3; 7)$ võrdsel kaugusel.**

Ülesanne 3.7. **Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x; y)$ koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsetel kaugustel punktidest $A(7; -3)$ ja $B(-2; 1)$?**

Ülesanne 3.8. Näidake, et vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = \sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ sobivad mingi ruudu külgedeks, kui $\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

3.2 Vektorite vaheline nurk

Vektorite vahelise nurga koosinus avaldub skalaarkorrutise valemi kaudu:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Ülesanne 3.9. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke vektorite $\vec{CA}$ ja $\vec{CB}$ vaheline nurk.

(a) $A(5;3), B(4;8), C(2;4)$

(b) $A(-2;6;7), B(-4;5;5), C(-3;0;2)$

(c) $A(2;-1;4), B(1;-6;8), C(0;-2;6)$

(d) $A(0;4;-3), B(2;5;3), C(5;1;1)$

Ülesanne 3.10. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke, millised kahest antud vektorist on risti, kollineaarsed, moodustavad teravnurga või nürinurga.

(a) $\vec{a} = (2;-7); \vec{b} = (5;2)$

(b) $\vec{a} = (4;16;-12); \vec{b} = (-6;-24;18)$

(c) $\vec{a} = (2;1;-8); \vec{b} = (7;2;2)$

(d) $\vec{a} = (5;-3;2); \vec{b} = (1;3;4)$

Ülesanne 3.11. Milline on ühikvektorite $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ vaheline nurk, kui vektorid $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ on risti?

Ülesanne 3.12. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ ja $C(3;-2;1)$. Leidke tipu B juures olev sisenurk.

Ülesanne 3.13. $< * >$ **Tõestage, et suvalise kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in E_3$ jaoks kehtib samasus**

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 2(|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2).$$

Mis on selle samasuse geomeetriline tähendus?

Praktikum 4

Vektorite vektorkorrutis ja segakorrutis

4.1 Vektorite vektorkorrutis

Definitsioon 4.1

*Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in E_3$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{x} \times \vec{y} \in E_3$, mis on määratud tingimustega:*

$$1)\ |\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}),$$

$$2)\ (\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x},\ (\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y},$$

$$3)\ \textit{kolmik } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\} \textit{ on parema käe kolmik.}$$

Vektorkorrutise arvutamise valem

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right),$$

kus $\vec{x} = (x_1; y_1; z_1), \vec{y} = (x_2; y_2; z_2)$.
Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud **rööpküliku pindala** $S_{\vec{x},\vec{y}} = |\vec{x} \times \vec{y}|$.

Ülesanne 4.1. **Arvutage $|\vec{a} \times \vec{b}|$.**

(a) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$

(b) $|\vec{a}| = 7,\ |\vec{b}| = 5,\ \vec{a} \cdot \vec{b} = -21$

(c) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 6,\ \vec{b} = -2\vec{a}$

(d) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Ülesanne 4.2. **Olgu $\vec{a} = (2; -3; 1), \vec{b} = (5; 1; -2), \vec{c} = (0; 0)$. Leidke vektorid $\vec{a} \times \vec{b}$, $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 5\vec{b})$, $\vec{c} \times \vec{a}$.**

Ülesanne 4.3. **Millisel arvu α väärtusel on vektorid $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ ja $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kollineaarsed, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed?**

Kolmnurga ABC **pindala** on võrdne poolega küljevektorite vektorkorrutise pikkusest

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2},$$

kus $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$.

Ülesanne 4.4. **Leidke vektorkorrutise abil kolmnurga ABC pindala.**

(a) $A(4; 1; -4), B(6; 3; 7), C(2; 3; 1)$

(b) $A(0; 5; -1), B(1; 2; 1), C(-3; 4; -5)$

(c) $A(2; 3; 1), B(4; 5; 1), C(3; 4; 1)$

(d) $< * >$ $A(-1; 2), B(2; -1;), C(-3; 1)$

Ülesanne 4.5. **Leidke vektoreile $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ ehitatud kolmnurga pindala, kui $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 6$ ja $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$.**

Ülesanne 4.6. **Näidake, et vektorid $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sobivad mingi kuubi servadeks ning leidke selle kuubi kolmandat serva määrav vektor, kui $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ on ristuvad ühikvektorid.**

Ülesanne 4.7. **Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{a} = (2; 3; -1)$ ja $\vec{b} = (1; -1; 3)$ ning moodustab esimese baasivektoriga $\vec{i}$ nürinurga. Leidke vektori $\vec{x}$ koordinaadid teades, et $|\vec{x}| = \sqrt{138}$.**

Ülesanne 4.8. **On antud vektorid $\vec{a} = (11; 10; 2)$ ja $\vec{b} = (4; 0; 3)$. Leidke ühikvektor $\vec{c}$, mis on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning on suunatud nii, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parema käe kolmik.**

4.2 Kolme vektori segakorrutis

Definitsioon 4.2

Vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ ***segakorrutiseks*** *$\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ nimetatakse arvu $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$.*

Vektorite $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3), \vec{y} = (y_1; y_2; y_3), \vec{z} = (z_1; z_2; z_3)$ segakorrutise arvutamise valem

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud **rööptahuka ja tetraeedri ruumalad** avalduvad vastavalt valemitega

$$V_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} = |\vec{x}\vec{y}\vec{z}|, \quad V_{tetr(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \frac{1}{6}|\vec{x}\vec{y}\vec{z}|.$$

Ülesanne 4.9. **Vektorite kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on vasaku käe kolmik. Arvutage $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.**

(a) $\vec{a} = (-3; 4; -7), \vec{b} = (1; 2; 5), \vec{c} = (1; -4; 5)$

(b) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 3,\ |\vec{c}| = 5,\ \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b},\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$

(c) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ |\vec{c}| = 3$ ning vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on paarikaupa risti

Ülesanne 4.10. **Tetraeedri tipud on $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ ja $D(4; 1; 3)$. Leidke selle tetraeedri ruumala ja tipust D tõmmatud kõrgus.**

Ülesanne 4.11. **Tetraeedri ruumala $V = 5$ ja kolm tippu on $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$ ja $C(2; -1; 3)$. Leidke y-teljel asuva neljanda tipu D koordinaadid.**

Ülesanne 4.12. **Tõestage, et punktid $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ ja $D(2; 1; 3)$ asetsevad samal tasandil.**

Ülesanne 4.13. $< * >$ **Tõestage, et suvalise kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E_3$ korral**

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}).$$

Praktikum 5

Sirge ja tasand ruumis

5.1 Tasandi võrrand

Definitsioon 5.1

Tasandi π ***üldvõrrandiks*** *nimetatakse tasandi võrrandit kujul*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}),$$

kui $\vec{n} = (A; B; C)$ *on selle tasandi normaalvektor.*

$X(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow$ koordinaadid x, y, z rahuldavad tasandi võrrandit.
$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, kui $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ on tasandiga π paralleelsed mittekollineaarsed vektorid.
Tasandite π_1 ja π_2 vaheline nurk

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|},$$

kus $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ on vastavalt tasandite π_1 ja π_2 normaalvektorid.
Punkti $P(p_1; p_2; p_3)$ kaugus tasandist π

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ülesanne 5.1. **Koostage tasandi π võrrand.**

(a) tasand π on paralleelne x-teljega ning läbib punkte $A(3; -1; 1)$ ja $B(4; -6; -1)$

(b) tasand π on paralleelne y-teljega ning läbib punkte $C(3; 4; 0)$ ja $D(7; 5; -3)$

(c) tasand π on paralleelne z-teljega ning läbib punkte $E(-1; -2; -3)$ ja $F(1; 3; 4)$

Ülesanne 5.2. **Koostage punkte A, B, ja C läbiva tasandi võrrand.**

(a) $A(0; 0; 0)$, $B(1; 4; 0)$, $C(3; -2; 1)$

(b) $A(-3; 6; -7)$, $B(-1; 7; -6)$, $C(-7; 3; -8)$

(c) $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$

Ülesanne 5.3. **Koostage tasandi π võrrand.**

(a) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (2; 3; -5)$ ning tema aplikaatlõik on 6

(b) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (-1; 4; 7)$ ning tema ordinaatlõik on 3

(c) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (4; -1; -3)$ ning tema abstsisslõik on -5

Ülesanne 5.4. Kontrollige, kas tasanditel $5x-z+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$ ja $3x+4y+5z-3=0$ on ühiseid punkte.

Ülesanne 5.5. Arvutage järgmiste tasandite vahelised nurgad.

(a) $\pi_1\colon\ -2x+4y-z+5=0$ ja $\pi_2\colon 7x+3y-2z+1=0$

(b) xz-tasand ja $\pi\colon 3y-3z+5=0$

(c) $\pi_1\colon 6x-3y+12z-23=0$ ja $\pi_2\colon 10x-5y+20z-1=0$

Ülesanne 5.6. Leidke tasandi $Ax+By+Cz+D=0$ ja koordinaattasandite vahelised nurgad.

Ülesanne 5.7. Leidke tasand, mis läbib tasandite $3x-2y+z-3=0$ ja $x-2z=0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $x-2y+z+5=0$.

Ülesanne 5.8. Leidke tasand, mis läbib tasandite $x+5y+z=0$ ja $x-z+4=0$ lõikesirget ning moodustab tasandiga $x-4y-8z+12=0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

Ülesanne 5.9. Arvutage punkti P kaugus tasandist π.

(a) $P(1;2;1)$ ja $\pi\colon x+2y+2z-10=0$

(b) P on koordinaatide alguspunkt ja $\pi\colon 15x-10y+6z-190=0$

Ülesanne 5.10. On antud punktid $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ ja $D(4;1;3)$. Leidke vektoritele $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ja $\vec{AD}$ ehitatud rööptahuka tipust D tõmmatud kõrgus.

5.2 Sirge võrrandid ruumis

Definitsioon 5.2

Sirge kanoonilisteks võrranditeks *nimetatakse sirge s võrrandeid kujul*

$$\frac{x-a_1}{s_1}=\frac{y-a_2}{s_2}=\frac{z-a_3}{s_3},$$

kus sirge s läbib punkti $A(a_1,a_2,a_3)$ ja sirge sihivektor on $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$.

$X(x;y;z)\in s \Leftrightarrow\ x,y,z$ rahuldavad sirge võrrandeid.
Sirge s ja tasandi π vaheline nurk:

$$\sin\angle(s,\pi)=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|},$$

kus $\vec{s}$ ja $\vec{n}$ on vastavalt sirge s sihivektor ja tasandi π normaalvektor.
Kahe mitteparalleelse tasandi π_1 ja π_2 ühisosaks on sirge

$$\begin{cases}\pi_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Ülesanne 5.11. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(2;1;3), B(2;4;-5), C(0;4;-5)$. Koostage selle kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid.

Ülesanne 5.12. Koostage punkti $P(-3;4;-7)$ läbiva sirge s kanoonilised võrrandid.

(a) sirge s on paralleelne x-teljega

(b) sirge s sihivektor on $\vec{s} = (3;-2;4)$

(c) sirge s on paralleelne sirgega $t\colon \dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{8}$

(d) sirge s on paralleelne z-teljega

Ülesanne 5.13. Koostage sirge s kanoonilised võrrandid, kui sirge s läbib punkti $P(2;3;4)$ ja on paralleelne sirgega $\begin{cases} 3x+7y-2z+4=0 \\ 2x-6y+7z-13=0 \end{cases}$.

Ülesanne 5.14. Leidke tasandi $2x-3y+4z-5=0$ ja xz-tasandi lõikesirgel kõik need punktid, mis asuvad tasandist $2x+y-z+3=0$ kaugusel $\sqrt{6}$ ühikut.

Ülesanne 5.15. Leidke sirge ja tasandi vaheline nurk. Juhul, kui sirge ja tasand lõikuvad, leidke ka nende lõikepunkt.

(a) $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}, \quad 3x+5y-z-2=0$

(b) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}, \quad 3x-3y+2z-5=0$

(c) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0 \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}, \quad 5x-z-4=0$

Ülesanne 5.16. $<*>$ **Koostage sirgeid** $s\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-2}{3}$ **ja** $t\colon \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+3}{-6}$ **läbiva tasandi võrrand.**

Praktikum 6

Arvread

6.1 Arvread

Definitsioon 6.1

Arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *nimetatakse koonduvaks, kui tema osasummade jada* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *koondub, s.t. kui eksisteerib lõplik piirväärtus*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = S.$$

Arvu S *nimetatakse rea* $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ *summaks. Arvrida, mis ei koondu, nimetatakse hajuvaks.*

Lause 6.1

Koondumise tarvilik tingimus (arvrea hajumise tunnus). *Kui*

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| \neq 0, \tag{6.1}$$

siis rida $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *hajub.*

Ülesanne 6.1. **Leidke järgmiste ridade osasummade jadad (S_n) ja summad S.**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$

Ülesanne 6.2. **Leidke read, mille osasummad on järgmised.**

(a) $S_n = \ln(n+2)$

(b) $S_n = \frac{n+3}{n+1}$

(c) $S_n = \frac{1}{n+1}$

(d) $S_n = n+1$

(e) $S_n = \frac{n^2}{n^2+2}$;

(f) $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Ülesanne 6.3. **Näidake hajuvuse tunnuse abil, et järgmised arvread hajuvad.**

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n)^{-1/n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Ülesanne 6.4. $<*>$ **Leidke rea** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **osasummade jadad (S_m) ja summa.**

6.2 Geomeetriline rida

Geomeetriline rida,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Koondub, kui $|q| < 1$ ja hajub muul juhul.

Ülesanne 6.5. Tehke kindlaks, kas järgmised geomeetrilised read koonduvad või hajuvad. Koondumise korral leidke rea summa S.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{n-3}}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{7^n}\right)$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4+2^n}{4^{n+2}}$

Ülesanne 6.6. Pall kukub 2 meetri kõrguselt ja põrkab igal põrgatusel $\frac{2}{5}$ kõrgusele tagasi (võrreldes oma viimase kõrgusega).

Leidke palli poolt läbitud vertikaalne vahemaa.

Ülesanne 6.7. Esitage lõpmatu perioodiline kümnendmurd $7.(36)$ hariliku murruna (kahe täisarvu jagatisena).

Ülesanne 6.8. (IT) Kahendsüsteemi arv teisendatakse kümnendsüsteemi arvuks järgmise valemi abil:

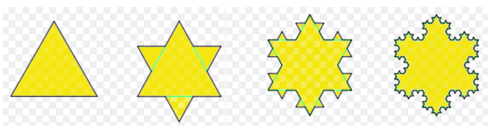
$$b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots |_2 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \ldots.$$

Esitage kahendarv $1,101010\ldots|_2$ ühe kümnendsüsteemi murruna (ratsionaalarvuna).

Ülesanne 6.9. (F) 2008. aasta alguse seisuga olid maailma naftavarud hinnanguliselt 1950 miljardit barrelit.

2008. aasta jooksul tarvitati ära u. 29.3 miljardit barrelit. Arvestades, et iga aastaga on naftatoodang tõusnud 1 %, siis nende andmete põhjal, mitu aastat naftat jätkub?

Ülesanne 6.10. (M) Koch'i lumehelbeke saadakse võrdkülgsest kolmnurgast (küljega a) nii, et igal sammul jagatakse iga külg kolmeks võrdseks osaks ja "kleebitakse"keskmisele osale uus võrdkülgne kolmnurk.



Näidake, et helbekese ümbermõõt on tõkestamata, kuid pindala on tõkestatud. Leidke see pindala.

Ülesanne 6.11. $< * >$ Tudeng alustab ühikast teekonda loengusse. Kui ta on läbinud $\frac{3}{4}$ teekonnast, otsustab ta ümber mõelda, keerab otsa ringi ja alustab teekonda tagasi ühika suunas.

Läbinud $\frac{3}{4}$ tagasiteest, keerab ta ringi ja liigub nüüd loengusse. Siis jälle keerab otsa ringi ja liigub ühika poole. Kui selline liikumine jätkub (keerates alati $\frac{3}{4}$ läbitud teel otsa ringi ja liikudes vastassuunas), siis millisesse kahte punkti tuleks rajada ööklubi, et tudengi tegevus muutuks mingilgi moel mõttekaks? Kui ühikas on punktis A ja loeng punktis B ning vahepealne muutuv punkt $P \in (A, B)$, siis $\frac{3}{4}$ tuleb võtta alati kas lõigust $[A, P]$ või $[P, B]$.

6.3 Harmooniline rida ja integraaltunnus

Lause 6.2

Üldine harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots \tag{6.2}$$

koondub, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

Definitsioon 6.2

Positiivseks arvreaks nimetatakse rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, kus $u_n \geq 0$ iga $n = 0, 1, 2, \dots$ korral.

Lause 6.3

Rea koonduvuse integraaltunnus. *Kui positiivse rea $\sum u_n$ korral $u_n = f(n)$ ja f on pidev monotoonselt kahanev funktsioon piirkonnas $[a, \infty)$, siis vaadeldav rida ja päratu integraal $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ koonduvad (hajuvad) samaaegselt.*

Ülesanne 6.12. Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-0.9}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$ (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(-4)^{n+1}}$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{6^n}$

Ülesanne 6.13. Uurige järgmiste ridade koonduvust integraaltunnuse abil.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$ (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n^2+1)}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)}$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

Ülesanne 6.14. Näidake, et kehtib võrratuste ahel

$$\ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \ln(n) + 1.$$

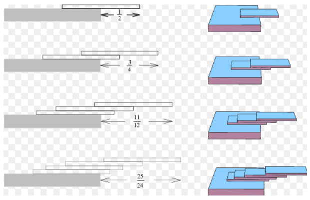
Kasutades toodud ahelat, hinnake harmoonilise rea osasummade suurust $n = 1000$, $n = 1000000$ ja $n = 1000000000$ korral. Mitu rea liiget on vaja, et harmoonilise rea osasumma $S_n > 100$?

Ülesanne 6.15. $< * >$ **Tudeng sai kontrolltöös 1 punkti 10-st (10%). Iga järeltöö maksimaalset punktide arvu suurendatakse 10 võrra.**

Tudengi eelmise töö saadud punktid kantakse üle protsentides tehtava töö maksimaalsest võimalikust. Kui tudeng saab igas töös 1 punkti juurde, siis mitu järeltööd läheb vaja, et tudeng saaks lõpuks kokku 50% järeltöö punktidest? Kas on võimalik kogusummana saada ka täispunktid?

Selgituseks: II töös on tudengil ees 2 punkti 20-st (10%), ta saab ühe juurde ja kokku $2+1=3$. III töös on tudengil ees $\frac{3}{20}\cdot 30 = \frac{9}{2}$ p. 30-st (15%), ta saab ühe juurde ja kokku $\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$ jne.

Ülesanne 6.16. Paigutame n kaarti järgmiselt: ülalt teine kaart toetab ülemist poole pealt, ülalt kolmas kaart eelmist 3/4 pealt,



neljas kaart eelmist 5/6 pealt (üldiselt $(2n-1)/(2n)$ pealt) jne. Teoreetiliselt jääb selline kaardipakk tasakaalu. Kui kaugele lauast on võimalik n kaartist koosneva paki ülemist äärt viia? Proovige kodus järgi! Lihtsam on paigutada kergeid õhukesi plaate, kui näiteks raskeid raamatuid (joonis: `http://mathworld.wolfram.com/`).

6.4 Positiivsete arvridade võrdluslause

Lause 6.4

Võrdluslause 1. *Kui positiivsete arvridade $\sum u_n$ ja $\sum v_n$ korral mingist indeksist k alates kehtib võrratus*

$$u_n \le v_n, \qquad \text{iga indeksi } n > k \text{ korral },$$

siis rea $\sum v_n$ koonduvusest järeldub $\sum u_n$ koonduvus ja rea $\sum u_n$ hajuvusest järeldub $\sum v_n$ hajuvus.

Definitsioon 6.3

Suurusi u ja v nimetatakse ekvivalentseteks mingis protsessis, kui leidub lõplik piirväärtus $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ samas protsessis. Viimast märgitakse kujul $u_n \sim v_n$.

Lause 6.5

Võrdluslause 2. *Kui $u_n \sim c\,v_n$ mingi konstandi $c>0$ korral protsessis $n\to\infty$, siis mõlemad read $\sum u_n$ ja $\sum v_n$ koonduvad või hajuvad üheaegselt.*

Ülesanne 6.17. Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{9n-1}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^3+3}}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^3$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^{4/3}}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{5^n}\right)$

Ülesanne 6.18. (M) Olgu $u_n>0$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 u_n = 0$. Näidake, et siis rida $\sum u_n$ koondub.

Ülesanne 6.19. (M) Näidake, et rida $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^q(n)}{n^p}$ koondub iga $-\infty < q < \infty$ ja $p>1$ korral.

Praktikum 7

Arvridade koondumine

7.1 Absoluutne koonduvus

Definitsioon 7.1

Rida $\sum u_n$ nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui rida $\sum |u_n|$ koondub.

Omadus 7.1

D'Alembert'i tunnus:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|,$$

rida koondub absoluutselt, kui $D < 1$. Rida hajub, kui $D > 1$. Kui $D = 1$, siis tunnus ei tööta.

Omadus 7.2

Cauchy tunnus:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|},$$

rida koondub absoluutselt, kui $C < 1$. Rida hajub, kui $C > 1$. Kui $C = 1$, siis tunnus ei tööta.

Ülesanne 7.1. **Uurige d'Alembert'i tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n\, n}{5^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n+1}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-e)^n}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$

(j) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln(n)}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+3)!}{n!5^{2n}}$

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n3^n}{(2n+1)\ln(n)}$

Ülesanne 7.2. **Uurige Cauchy tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.**

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+5)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-5}{4n+2}\right)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1.5^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n\sqrt{n}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n)}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Ülesanne 7.3. (M) $<*>$ **Uurige rea** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$ **koonduvust.**

Ülesanne 7.4. (M) $<*>$ **Milliste b väärtuste korral on rida koonduv,**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(b+1)(b+2)\cdots(b+k)}?$$

7.2 Tingimisi koondumine

Definitsioon 7.2

Rida, mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt, nimetatakse tingimisi koonduvaks.

Lause 7.1

Leibniz'i tunnus *Kui* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *jaoks on täidetud tingimused*

1. $u_n \geq u_{n+1} > 0$ *(üldliikmete jada on monotoonselt kahanev);*
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

siis vahelduvate märkidega rida koondub,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n \cdot u_n + \ldots. \tag{7.1}$$

Ülesanne 7.5. Uurige järgmiste ridade koonduvust.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+3}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-0.99)^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{\ln(n^2)}$

Ülesanne 7.6. Millised järgmistest ridadest on absoluutselt koonduvad, millised on tingimisi koonduvad ja millised on hajuvad?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(\pi n+\frac{1}{n}\right)$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n3^n}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n\arcsin\frac{\pi}{4n}$

Ülesanne 7.7. (M) < ∗ > Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum_k(-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub.

Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast $\sum_k(-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub.

Ülesanne 7.8. (M) < ∗ > Leidke kõik a väärtused, mille korral rida koondub ning kõik need a väärtused, mille korral rida koondub absoluutselt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}.$$

Praktikum 8

Astmeread ja Fourier' read

8.1 Astmeread, koonduvusraadius

Definitsioon 8.1

Astmereaks nimetatakse rida, mille liikmeteks on funktsioonid f_n, kus $f_n(x) = a_n\, x^n$, s.t. rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \dots \tag{8.1}$$

või üldisemalt rida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x-c)^n = a_0 + a_1\, (x-c) + a_2\, (x-c)^2 + \dots . \tag{8.2}$$

Definitsioon 8.2

Astmerea (8.1) koonduvuspiirkond X ja absoluutse koonduvuse piirkond A defineeritakse järgnevalt:

$$X = \left\{ x_0 \ : \ \text{arvrida} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n \ \text{koondub} \right\} \tag{8.3}$$

ja

$$A = \left\{ x_0 \ : \ \text{arvrida} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n \ \text{koondub absoluutselt} \right\}. \tag{8.4}$$

Teoreem 8.1

Cauchy-Hadamard'i teoreem. *Kui $R > 0$, siis astmerida $\sum a_n x^n$ koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$ ja hajub hulkade ühendis $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Juhul $R = 0$ koondub ta vaid punktis $x = 0$.*

Definitsioon 8.3

Arvu R nimetatakse astmerea koonduvusraadiuseks, vahemikku $(-R, R)$ astmerea (8.1) koonduvusvahemikuks.

Lause 8.1

Kui eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ või $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ siis koonduvusraadiust R saab leida vastavalt järgmiste valemite abil:

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{või} \qquad R = \frac{1}{C} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{8.5}$$

Ülesanne 8.1. Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond X ja absoluutse koondumise piirkond A.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+3}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}5^n(x-1)^n$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2}{n-1}x^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n}(x-4)^n$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(4x+1)^n$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)!\,x^n$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{2n+1}}{n!}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x-3)^n$

(l) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^n$

8.2 Astmeritta arendamine

Lause 8.2

Kui $x \in (-R, R)$, siis astmerea summa $S(x) = \sum a_n x^n$ on pidev funktsioon punktis x, kusjuures astmerida võib liikmeti diferentseerida punktis x ja iga osalõigu $[a, b] \subset (-R, R)$ korral võib astmerida liikmeti integreerida.

Ülesanne 8.2. Arendage järgmised funktsioonid astmeritta.

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(b) $f(x) = \frac{x}{1-x^3}$

(c) $f(x) = \ln(1+x)$

(d) $F(x) = \int \arctan(x^2)\,dx$

Ülesanne 8.3. Avaldise $\frac{1}{(1-x^2)}$ ritta arendamiseks diferentseerige rida

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

Rakendades tööstuses statistilist kvaliteedikontrolli, valitakse tooteid liinilt juhuslikult. Jagame iga toote "terveks" ja "praagiks". Kui toode on "terve" tõenäosusega p ja "praak" tõenäosusega $q = 1 - p$, siis tõenäosus, et "praak" toode esineb esmalt alles n. valiku korral, on $p^{n-1}q$. Selliselt valitud toodete arvu (kuni esimese "praagini") keskmine on $\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}q$. Arvutage see summa, eeldades et $0 < p < 1$. Sama teooria kehtib näiteks kahe täringu korraga viskamisel. Siis summa 7 tõenäosus on $p = 1/6$. Arvutage keskmine vajaminev visete arv, et 7 tuleks esimest korda.

Ülesanne 8.4. Kuidas leida rea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ summat?

Selleks avaldage $\frac{1}{1-x}$ geomeetrilise rea kaudu, seejärel diferentseerige võrrandi mõlemat poolt, korrutage võrrandi pooled läbi muutujaga x. Seejärel diferentseerige veelkord ning korrutage mõlemad pooled muutujaga x. Kui omistada $x = \frac{1}{2}$, siis millise tulemuse saate?

Ülesanne 8.5. Arendades tundmatu lahendi $y = y(x)$ astmeritta, leidke Cauchy ülesande $y' = 2y$, $y(0) = 1$, lahend.

Ülesanne 8.6. Arendades tundmatu lahendi $y = y(x)$ astmeritta, leidke Cauchy ülesande $y' - y = x$, $y(0) = 1$, lahend.

8.3 Taylor'i read

Definitsioon 8.4

Kui iga $x \in X = (c - R, c + R)$ *korral*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n, \tag{8.6}$$

s.t. funktsioon f *on vaadeldava astmerea summa, siis öeldakse, et funktsioon* f *on vahemikus* X *arendatud astmereaks. Sel juhul astmerea kordajad* a_n *avalduvad valemitega*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8.7}$$

kusjuures $0! = 1$ *ja* $f^{(0)}(c) = f(c)$.

Definitsioon 8.5

Rida (8.6), *mille kordajad* a_n *on antud valemitega* (8.7), *nimetatakse funktsiooni* f *Taylor'i reaks, erijuhul* $c = 0$ *korral Maclaurin'i reaks.*

Ülesanne 8.7. Arendage järgmised funktsioonid Taylor'i ritta punktis $c = 0$.

(a) xe^{2x} **(c)** $\dfrac{1}{1+x^3}$ **(e)** $e^x + \dfrac{1}{1+x}$ **(g)** $\cos \dfrac{x^2}{\sqrt{3}}$

(b) $\dfrac{1}{1-3x}$ **(d)** $\ln(1+x^2)$ **(f)** $\cos x - \sin x$ **(h)** $e^{\pi x/2}$

Ülesanne 8.8. Arendage integraalimärgi all olev avaldis Taylor'i ritta (astmeritta) ning integreerides liikmeti, arvutage nende integraalide väärtused täpsusega 10^{-8}.

(a) $\int\limits_0^{0.2} \sin(x^2)\, dx$ **(c)** $\int\limits_0^{0.1} \sqrt{1+x^4}\, dx$ **(e)** $\int\limits_0^{0.5} \dfrac{\arctan(x)}{x}\, dx$

(b) $\int\limits_0^{0.1} \dfrac{\sin(x)}{x}\, dx$ **(d)** $\int\limits_0^{0.5} e^{-x^3}\, dx$ **(f)** $\int\limits_0^{1} x \sin(x^3)\, dx$

Ülesanne 8.9. Arendades siinuse Taylor'i ritta, leidke kõik a ja b väärtused, mille korral

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{x^3} + \frac{2a}{x^2} - b \right) = 0.$$

Ülesanne 8.10. Näidake, et funktsiooni $f(x) = \arctan(x)$ Taylor'i rida hajub iga $|x| > 1$ korral.

Ülesanne 8.11. (M) $< * >$ Funktsiooni f Maclaurin'i rida avaldub seosega

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}.$$

Leidke $f^{(k)}(0)$ kõigi $k \in \mathbb{N}$ jaoks.

8.4 Fourier' read

2π-perioodiline funktsioon f,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big],$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$2L$-perioodiline funktsioon f, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2L$,

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \Big],$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(n\omega x)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(n\omega x)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

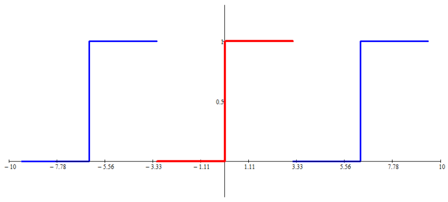
Teoreem 8.2

Dirichlet' teoreem. *Kui funktsioon f on tükiti sile vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$, kusjuures*

1. $S(x) = f(x)$ *funktsiooni f pidevuspunktides;*
2. $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ *funktsiooni f katkevuspunktides;*
3. $S(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$;
4. $S(\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)]$.

Ülesanne 8.12. Leidke 2π-perioodilise ruutlaine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , -\pi < x \le 0 \\ 1 & , 0 < x \le \pi \end{array} \right\}.$$



Ülesanne 8.13. Astmeridades võisime tuletise võtta liikmeti.

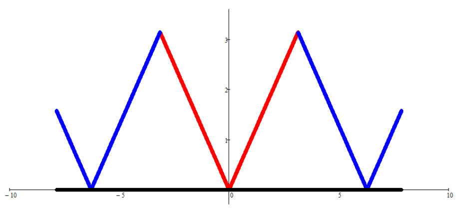
Osutub, et Fourier' ridade korral see enam alati läbi ei lähe. Veenduge, et

$$2x = 4\sin(x) - \frac{4}{2}\sin(2x) + \frac{4}{3}\sin(3x) - \frac{4}{4}\sin(4x) + \ldots, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Võtke mõlemast poolest tuletis x-järgi ja veenduge, et punktis $x = 0$ saadud võrdus ei kehti.

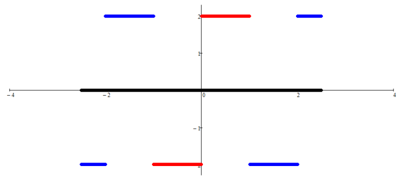
Ülesanne 8.14. Leike 2π-perioodilise kolmnurkse laine $f(x) = |x|$ Fourier' rida

ja uurige selle koonduvust, $x \in [-\pi, \pi]$.



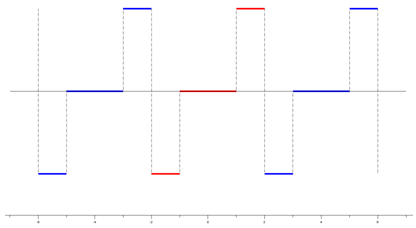
Ülesanne 8.15. **Leidke 2-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui**

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2 & , -1 < x \leq 0 \\ 2 & , 0 < x \leq 1 \end{array} \right\}.$$



Ülesanne 8.16. **Leidke 4-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui**

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & , -2 < x < -1 \\ 0 & , -1 < x < 1 \\ 1 & , 1 < x < 2 \end{array} \right\}.$$



Ülesanne 8.17. $< * >$ **Leidke 2-perioodilise laine $f(x) = x^2$ Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, $x \in [-1, 1]$.**

Kasutades argumendi väärtust $x = 1$, näidake, et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

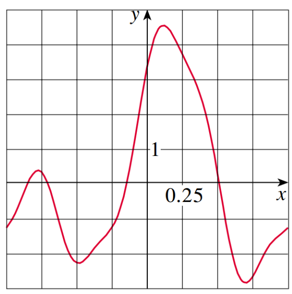
Ülesanne 8.18. (F) **Dirac'i deltafunktsioon defineeritakse selliselt, et see on nullist erinev ainult nullpunktis ning täidetud on tingimus**

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\,dx = f(0), \quad a < 0 < b,$$

iga pideva "heade omadustega" funktsiooni f korral. Veenduge, et $\delta(x)$ jaoks kehtivad lõigus $[-\pi, \pi]$ seosed $a_n = 1/\pi$ ja $b_n = 0$. NB! Tegelikult $\delta(x)$ ei ole matemaatilises mõttes funktsioon, vaid selle üldistus: distributsioon. Füüsikas kasutatakse seda ideaalse punktmassi, punktlaengu jne modelleerimiseks. Sisuliselt on tegemist lõpmatult kitsa ja lõpmatult pika "piigiga".

Ülesanne 8.19. $< * >$ **Joonisel on toodud teatud signaal ühe perioodi jaoks.**

Kasutades integraalide ligikaudseks leidmiseks trapetsmeetodit, arvutage selle signaali Fourier' kordajad a_0, a_1, a_2 ja b_1, b_2. Kirjutage välja Fourier' osasumma $S_2(x)$ ning koostage selle joonis.



Ülesanne 8.20. (M) $< * >$ **Näidake, et trigonomeetriline rida $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ on koonduv lõigus $[0, 2\pi]$, kuid see ei osutu Fourier' reaks.**

Praktikum 9

Kontrolltöö nr. 1

1. Vektorruumid. Vektorite lineaarne sõltumatus

1.1. Vektorruum
1.2. Vektorruumi alamruum
1.3. Lineaarne sõltumatus
1.4. Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid

2. Vektorid

2.1. Vektori moodustamine kahest punktist, vektori pikkus
2.2. Vektorite skalaarkorrutis, vektorite vaheline nurk
2.3. Vektorite vektorkorrutis, rööpküliku ja kolmnurga pindala
2.4. Vektorite segakorrutis, kolmele vektorile ehitatud rööptahuka ja nelitahuka ruumala

3. Sirge ja tasand ruumis

3.1. Tasandi võrrand, tasandite vaheline nurk, punkti kaugus tasandist
3.2. Sirge võrrand, sirge ja tasandi vaheline nurk

4. Arvread

4.1. Arvrea osasummad
4.2. Arvrea koondumine (hajumine)
4.3. Geomeetrilise rea koondumise tingimus
4.4. Harmoonilise rea koondumise tingimus
4.3. Positiivsed arvread, võrdluslaused
4.5. D'Alembert'i, Cauchy ja Leibniz'i koonduvustunnused.

Praktikum 10

Mitme muutuja funktsioonid

10.1 Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond

Definitsioon 10.1

*Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Kui igale punktile $P = (x_1, ..., x_m)$ hulgast $\mathcal{D}$ on eeskirja f abil vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv u, siis öeldakse, et hulgal $\mathcal{D}$ on määratud **m muutuja funktsioon** ja kirjutatakse*

$$u = f(x_1, ..., x_m) \quad \forall (x_1, ..., x_m) \in \mathcal{D}$$

või

$$u = f(P) \quad \forall P \in \mathcal{D}.$$

*Hulka $\mathcal{D}$ nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**. Funktsiooni f **graafikuks** nimetatakse hulka*

$$Gr(f) = \{Q = (x_1, .., x_m, u) \colon P = (x_1, ..., x_m) \in \mathcal{D}, u = f(P)\}.$$

Kaks m muutuja funktsiooni $u = f(x_1, ..., x_m)$ ja $u = g(x_1, ..., x_m)$ osutuvad samadeks funktsioonideks, kui neil mõlemal on üks ja sama määramispiirkond $\mathcal{D}$ ja samad vastavuse eeskirjad.

Ülesanne 10.1. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad $\mathcal{D}$ ja joonistage need.

(a) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

(c) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$;

(d) $f(x, y) = \ln(x + y)$;

(e) $f(x, y) = \ln(x + y) + \frac{1}{\ln x}$;

(f) $f(x, y) = 3 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

(g) $f(x, y) = x + \mathrm{e} + \arccos y$;

(h) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$;

(j) $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + \sin x$;

(k) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;

(l) $f(x, y) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+y)}$;

(m) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2-2)} + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$;

(n) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2+y^2-2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

(o) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$;

(p) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2 - 3)$;

(q) $f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x^2 + y^2)}$;

(r) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$;

(s) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$;

(t) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y} + \sqrt{4 - |x - 4|} + \sqrt{16 - (y - 4)^2}$.

Ülesanne 10.2. **Millistes järgmistes paarides on samad funktsioonid ja millistes erinevad?**

(a) $f(x,y) = |xy|$,
$g(x,y) = xy \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y$;

(b) $f(x,y) = \ln x + \ln y$, $g(x,y) = \ln(xy)$;

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 y}$, $g(x,y) = x\sqrt{y}$;

(d) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2y^2}$, $g(x,y) = \frac{1}{xy}$;

(e) $f(x,y) = \ln(x^2|y|)$,
$g(x,y) = 2\ln|xy|$;

(f) $f(x,y) = \ln(x^2 y)$,
$g(x,y) = 2\ln(|x|\sqrt{y})$;

(g) $f(x,y) = |xy|$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{\ln|xy|}$.

Ülesanne 10.3. **Määrake määramispiirkonnad $\mathcal{D}$ nii, et järgmistes paarides oleksid samad funktsioonid.**

(a) $f(x,y) = \ln x^2 + \ln y$,
$g(x,y) = 2\ln x + \ln y$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$, $g(x,y) = \sqrt{xy}$;

(c) $f(x,y) = xy\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$, $g(x,y) = xy\mathrm{e}^{xy}$.

Ülesanne 10.4. **Arvutage järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A, B ja C.**

(a) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2xy}$, $A = (2,1)$;

(b) $f(x,y) = \frac{\arctan(x-y)}{\arctan(y-x)}$, $B = (2,1)$;

(c) $f(x,y) = \ln(\sin x \cos y)$, $C = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Ülesanne 10.5. **Joonistage järgmiste funktsioonide graafikud.**

(a) $f(x,y) = 1 - x - y$, kus $0 \le y \le x \le 1$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, kus $f(x,y) \le 4$;

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, kus $|x| \le 1$, $|y| \le 1$;

(d) $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$, kus $f(x,y) \ge 0$.

Ülesanne 10.6. **Leidke $f(y,x)$, $f(-x,-y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ ja $\frac{1}{f(x,y)}$, kui $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2xy}$.**

Ülesanne 10.7. **Leidke $f\left(1, \frac{1}{y}\right)$ ja $f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right)$, kui $f(x,y) = x + \frac{1}{y}$.**

Ülesanne 10.8. **Leidke järgmiste kolme muutuja funktsioonide määramispiirkonnad E.**

(a) $f(x,y,z) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$;

(b) $f(x,y,z) = \sqrt{x(z^2+1)} - \sqrt{ye^z}$;

(c) $f(x,y,z) = \ln(xy) + \ln z$;

(d) $f(x,y,z) = \arcsin x - \arccos(yz)$;

(e) $f(x,y,z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$;

(f) $f(x,y,z) = \frac{1}{3 + \cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z}$.

Ülesanne 10.9. **Arvutage järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A, B ja C.**

(a) $f(x,y,z) = \frac{\arctan(x+y+z)}{\arctan(x-y-z)}$, $A = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

(b) $f(x,y) = u^w + w^{u+v}$, $u(x,y) = x + y$, $v(x,y) = x - y$, $w(x,y) = xy$, $B = (-1, 2)$;

(c) $f(x,y,z) = \sin(uv) + \cos(vw)$, $u(x) = \arcsin x$, $v(y) = \ln y$, $w(z) = \arccos z$, $C = (1, \mathrm{e}, -1)$.

Ülesanne 10.10. **Inimese kehapindala (m^2) arvutamiseks kasutatakse sageli Du Bois' valemit**

$$A(w,h) = 0.007184w^{0.425}h^{0.725},$$

kus w on isiku kaal kilogrammides ja h on pikkus sentimeetrites.

Leidke 180 cm pikkuse ja 85 kg kaaluva inimese (ligikaudne) kehapindala.

Ülesanne 10.11. **Loomade populatsiooni suuruse hindamiseks märgistatakse mõned kinni püütud isendid enne uuesti vabastamist.**

Pärast märgistatud loomade segunemist populatsiooniga, püütakse kinni järgmine grupp loomi, milles loendatakse märgistatud isendite hulk. Kui T on märgistatud loomade arv ja S on teise grupi suurus, milles on t märgistatud looma, siis populatsiooni suurus hinnatakse seosest

$$P(T,S,t) = \frac{TS}{t}.$$

Hinnake metskitse populatsiooni suurust, kui märgistati 45 metskitse ja teises grupis oli 3 märgistatud isendit 100st.

Ülesanne 10.12. **Hästi soojustatud mitte-higistava imetaja hapnikutarve hinnatakse valemist**

$$f(t_b, t_a, w) = 2.5(t_b - t_a)w^{-0.67}$$

kus t_b ja t_a on vastavalt looma kehatemperatuur ja t_a õhutemperatuur (mõlema ühik on °C) ja w on looma kaal kilogrammides.

Leidke 40 kg kaaluva looma hapnikutarve, kui tema kehatemperatuur on 35 °C ja õhutemperatuur on 5 kraadi.

Ülesanne 10.13. **Riigi rahvaarv ja jõukus mõjutavad tema edukust Olümpiamängudel.**

Kui p on riigi rahvaarv ja d on sisemajanduse kogutoodang elaniku kohta, siis seos

$$f(p,d) = 0.0062 \ln p + 0.0064 \ln d - 0.0652$$

on osutunud üsna täpseks võidetavate medalite osakaalu ennustamiseks. Ennustage Eesti võidetavate medalite osakaal, kui rahvaarv on 1311870 ja SKT elaniku kohta on 26355 $.

Ülesanne 10.14. **Veenduge, et järgmised funktsioonid on elementaarfunktsioonid ja leidke nende graafikud.**

(a) $w = z + \sqrt{xy}$;

(b) $w = \frac{\sqrt{x}}{y^2} + \ln(z+1)$;

(c) $w = \frac{2+z}{x^2+y^2}$;

(d) $w = \frac{x^2+y^2}{z\ln(x^2+y^2+1)}$.

Ülesanne 10.15. **Leidke funktsioon $f(x,y,z)$, kui**

(a) $f(x, yz, z) = \ln x + y - z$;

(b) $f(x+y, x-y, z) = xy + y^2 + z^2$.

Ülesanne 10.16. **Leidke funktsioonid f ja g, kui**

(a) $g(x,y,z) = f(1+\sqrt{x}, y) + \sqrt{2z}$ ja $g(x,y,1) = x - y$;

(b) $g(x, y, z) = f(\sqrt{x}, e^y) + \sqrt{yz}$ ja $g(x, y, 0) = 2x + y$.

10.2 Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ning olgu $A = (a_1, ..., a_m)$ hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt (igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Definitsioon 10.2

Kui argumendi $P = (x_1, ..., x_m)$ tõkestamatu lähenemine punktile A toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(P)$ tõkestamatu lähenemise arvule c, siis ütleme, et funktsiooni f piirväärtus protsessis $P \to A$ on arv c ja märgime seda

$$\lim_{P \to A} f(P) = c$$

või

$$\lim_{x_1,...,x_m \to a_1,...,a_m} f(x_1, ..., x_m) = c.$$

Kui funktsioonil $u = f(P)$ on punktile A mööda kahte erinevat lähenemisteed erinevad piirväärtused, siis piirväärtust $\lim\limits_{P \to A} f(P)$ ei leidu.

Kõik ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse omadused – piirväärtuse monotoonsus, ühesus, aritmeetika, lause tõkestatud ja hääbuva suuruse korrutisest ning keskmise muutuja omadus – on põhimõtteliste muutusteta ümber kirjutatavad mitme muutuja juhule.

Definitsioon 10.3

*Funktsiooni $u = f(P)$ nimetatakse **pidevaks** punktis A, kui*

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

*Vastasel korral nimetatakse funktsiooni **katkevaks** punktis A.*

Ülesanne 10.17. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} x^2y$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (2x + 3y)$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x + \sin \pi x}{y}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \sin x}{x}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1 + xy} - 1}$;

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{2 + x^2 + y^2}$;

(i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}} \frac{x - \sqrt{y}}{x + \ln x}$;

(j) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}} \frac{\ln(xy)}{x \sin y}$;

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x + y}{x^2 + y^2}$;

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$;

(m) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{3}{xy}$;

(o) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{xy}{\tan xy}$;

(p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,10)} \dfrac{\sin 5x}{xy}$;

(q) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2+y^2}$;

(r) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)^{x^2y^2}$;

(s) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{y}$;

(t) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

(u) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Ülesanne 10.18. Näidake, et järgmised piirväärtused ei eksisteeri.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2+xy}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} \dfrac{x+y}{x+y^2}$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y-x^2}$.

Ülesanne 10.19. Näidake, et lähenedes punktile $(0,0)$ mööda sirget $y=kx$ võime võtta k valiku puhul funktsiooni $z=\frac{ax+by}{cx+dy}$ piirväärtuseks punktis $(0,0)$ saada mistahes etteantud arvu.

Ülesanne 10.20. Missugust sirget mööd tuleks läheneda punktile $(0,0)$, et funktsiooni $\frac{5x-y}{2x+3y}$ piirväärtus punktis $(0,0)$ võrduks arvuga 1?

Ülesanne 10.21. Millist tingimust peavad rahuldama positiivsed arvud m, n ja p, et eksisteeriks piirväärtus $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^my^n}{(x^2+p^2)^p}$? Põhjendage oma vastust.

Ülesanne 10.22. Leidke korduvad piirväärtused $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) =: A$ ja $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y) =: B$ järgmistest funktsioonidest märgitud punktis $P_0=(a,b)$.

(a) $f(x,y)=\frac{x+y^2}{x+y}$, $P_0=(0,0)$;

(b) $f(x,y)=\frac{\ln(1+x+y)}{x+\sin y}$, $P_0=(0,0)$;

(c) $f(x,y)=\sin\frac{x}{2x+y}$, $P_0=(\infty,\infty)$.

Ülesanne 10.23. Näidake, et järgmistel funktsioonidel leidub punktis $(0,0)$ piirväärtus, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ja $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ ei eksisteeri.

(a) $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$;

(b) $f(x,y)=(x-y)\cos\frac{1}{x}\sin\frac{\cos y}{2y}$.

Ülesanne 10.24. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

(a) $f(x,y)=\frac{xy}{\sin x+e^y}$;

(b) $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{\ln z}$;

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x^2+y^2=0;\end{cases}$

(d) $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{kui } x\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0.\end{cases}$

Ülesanne 10.25. Millised järgmistest funktsioonidest on punktis $\mathbf{A} = (0,0)$ pidevad, pidevad muutuja x või muutuja y järgi.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 1, & \text{kui } |x|+|y| = 0; \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|xy|}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases}$

Ülesanne 10.26. Leidke järgmiste funktsioonide katkevuspunktid.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{kui } x+y \neq 0, \\ -1, & \text{kui } x+y = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$;

(d) $f(x,y) = \sin\frac{1}{xy}$;

(e) $f(x,y,z) = \frac{1}{xyz}$;

(f) $f(x,y) = \frac{1}{\ln|1-x^2-y^2|}$.

Ülesanne 10.27. Kõrvaldage järgmistel funktsioonidel katkevus märgitud hulgas D, s.t. lisage funktsioonile f katkevuspunktides sellised väärtused, et f oleks pidev kogu hulgas D.

(a) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}, \quad D = \mathbb{R}^2$;

(b) $f(x,y) = \frac{\sin x + \cos y}{\ln|x+y|}$,

$D = \{(x,y) : |x+y| < 1\}$;

(c) $f(x,y) = \frac{e^{x-y}}{3+\cot^2(x-y)}, \quad D = \mathbb{R}^2$;

(d) $f(x,y) = \frac{2-\sqrt{12-x-2y}}{(x+2y)^2-64}$,

$D = \{(x,y) : -7 \leq x+2y \leq 12\}$.

Ülesanne 10.28. Uurige arvuti ja graafikapaketi abil funktsiooni $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ graafikut piirkonnas $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Kuidas te kirjeldaksite funktsiooni käitumist punkti $(0,0)$ ümbruses?

Ülesanne 10.29. $<*>$ **Tõestage, et funktsioon $f(x,y)$ on pidev lahtisel hulgal D, kui**

1° **$g(x) = f(x,y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral,**

2° **$h(y) = f(x,y)$ rahuldab Lipschitzi tingimust, s.o. leidub konstant $L > 0$, et**

$$|h(y) - h(y')| \leq L|y - y'|$$

suvaliste punktide $(x,y) \in D$ ja $(x,y') \in D$ korral.

Ülesanne 10.30. $<*>$ **Näidake, et piirväärtust** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x + y\sin\frac{1}{y}}{x+y}$ **ei eksisteeri.**

Praktikum 11

Esimest ja teist järku osatuletised

11.1 Esimest järku osatuletised

Definitsioon 11.1

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, ning $P = (x_1, ..., x_m)$ määramispiirkonna $\mathcal{D}$ sisepunkt. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_m) - f(x_1, ..., x_m)}{\Delta x_i}$$

*nimetatakse funktsiooni f **osatuletiseks muutuja x_i järgi** punktis P ja tähistatakse $f_{x_i}(x_1, ..., x_m)$ või $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_m)$.*

Funktsiooni $u = f(x_1, ..., x_m)$ osatuletise leidmisel muutuja x_i järgi kasutatakse ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirju, lugedes muutujad x_k, kus $k \neq i$, konstantideks.

Ülesanne 11.1. **Leidke definitsiooni kasutades järgmiste funktsioonide osatuletised.**

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$;

(c) $f(x, y) = y^2$;

(d) $f(x, y) = \ln(x^2 y)$;

(e) $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$;

(f) $f(x, y) = e^{2x+3y}$;

(g) $f(x, y, z) = xy^2 z$;

(h) $f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{z}$.

Ülesanne 11.2. **Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.**

(a) $f(x, y) = 3x - y^2$;

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

(c) $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x+3y}$;

(d) $f(x, y) = x^3 y + 2x$;

(e) $f(x, y, z) = x^3 y z^2 + 7y$;

(f) $f(x, y, z) = \ln(xz) + \ln(yz)$;

(g) $f(x, y) = (x + 2y)^5$

(h) $f(x, y) = \frac{2x}{y} + 4$;

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^4}$;

(j) $f(x, y) = \cos(4x - y)$;

(k) $f(x, y) = x \sin y$;

(l) $f(x, y) = \tan \frac{x}{y}$;

(m) $f(x, y) = \arctan \frac{1}{xy}$;

(n) $f(x, y) = x^y$;

(o) $f(x, y) = (x + y)^y$;

(p) $f(x, y) = (1 + xy)^{xy}$;

(q) $f(x, y) = x^{\sin y}$;

(r) $f(x, y, z) = x^2 + y^z$,

(s) $f(x, y, z, t) = \frac{x-y}{z-t}$,

(t) $f(x, y, z, t) = xy^2 z^3 t^4$.

Ülesanne 11.3. **Olgu antud** $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}$**. Arvutage** $\left. \dfrac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \right|_{\substack{x=2 \\ y=-3}}$.

Ülesanne 11.4. **Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.**

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{y}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2\arctan\frac{y}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2), & \Delta \neq 0, \\ 0, & \Delta = 0, \end{cases}$

kus $\Delta = x^2 + y^2$;

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & |x|+|y| = 0. \end{cases}$

Ülesanne 11.5. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} x^3y^3\sin\frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0; \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2\arctan\frac{y}{x} - y^2\arctan\frac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\frac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases}$

Ülesanne 11.6. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \textbf{kui } x = 0 \vee y = 0, \\ 1, & \textbf{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$ punktis $(0,0)$ osatuletised on olemas, kuid ta on katkev selles punktis.

Seega mitmemõõtmelisel juhul ei järeldu koheselt osatuletiste leidumisest funktsiooni pidevus, vastupidiselt ühemõõtmelisele juhule.

Ülesanne 11.7. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \textbf{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \textbf{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0,0)$ osatuletised $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$ eksisteerivad, kuid ta on katkev selles punktis.

Ülesanne 11.8. (Maj) Teatava Lõuna-Ameerika riigi tootmisfunktsiooniks on

$$f(x,y) = 20x^{3/4}y^{1/4},$$

kus x on tööjõud ja y kapital.

Leidke tööjõu ja kapitali piirtootlikused (st vastavate osatuletiste väärtused), kui kulutused tööjõule ja kapitalile on vastavalt 256 ja 16 ühikut. Kas riik peaks toodangu suurendamiseks antud olukorras suurendama kulutusi tööjõule või investeerima kapitali?

Ülesanne 11.9. (K) Ideaalse gaasi olekuvõrrand esitatakse lihtsamalt sageli kujul $PV = NkT$ või $E = \frac{3}{2}NkT$, kuid originaalis on see tegelikult kujul

$$E = \frac{3h^2N}{4\pi m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} e^{2S/(3Nk)-5/3}.$$

Kasutades teadmist, et $T = \frac{\partial E}{\partial S}$ ja $P = -\frac{\partial E}{\partial V}$, tuletage lihtsustatud valemid esialgsest. Siin k on Boltzmann'i konstant, h on Palnck'i konstant, m on ühe aatomi mass, $E = E(S,V,N)$ on siseenergia, S on entroopia, V on ruumala, P on rõhk, T on temperatuur.

Ülesanne 11.10. $<*>$ Näidake, et punkti $(0,0)$ ümbruses funktsioonil

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2\sin(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on olemas osatuletised f_x ja f_y, mis katkevad punktis $(0,0)$, kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv selles punktis $(0,0)$. Näidake, et puntki $(0,0)$ ümbruses funktsiooni

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

osatuletised g_x ja g_y eksisteerivad ja on tõkestamata (seega punkt $(0,0)$ on nende katkevuspunkt), kuid siiski funktsioon g on diferentseeruv selles punktis $(0,0)$.

11.2 Pinna puutujatasand ja normaal

Pinna $z = f(x,y)$ **puutujatasand** punktis $A = (a,b,f(a,b))$ avaldub võrrandiga

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b). \tag{11.1}$$

Pinna $z = f(x,y)$ **normaal** punktis $A = (a,b,f(a,b))$ avaldub parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a + tf_x(a,b), \\ y = b + tf_y(a,b), \\ z = f(a,b) - t. \end{cases} \tag{11.2}$$

Pinna $z = f(x,y)$ **normaal** punktis $A = (a,b,f(a,b))$ avaldub kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}. \tag{11.3}$$

Ülesanne 11.11. Leidke puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele märgitud punktis.

(a) $z = x\cos y - ye^x$ punktis $(0,0,0)$,

(b) $z = \ln(x^2+y^2)$ punktis $(1,0,0)$,

(c) $z = e^{-(x^2+y^2)}$ punktis $(0,0,1)$,

(d) $z = \sqrt{y-x}$ punktis $(1,2,1)$,

(e) $z = 4x^2+y^2$ punktis $(1,1,5)$,

(f) $z = x^2-y^2$ punktis, kus $x=-2$ ja $y=1$,

(g) $z = \frac{x}{x^2+y^2}$ punktis, kus $x=1$ ja $y=2$,

(h) $z = \sin(xy)$ punktis, kus $x=\pi/3$ ja $y=-1$,

(i) $z = \cos(x/y)$ punktis, kus $x=\pi$ ja $y=4$.

Ülesanne 11.12. Leidke järgmistel pindadel kõik punktid, kus puutujatasand on horisontaalne.

(a) $z = x^2-4xy-2y^2+12x-12y-1$,

(b) $z = 3xy-x^3-y^3$,

(c) $z = x^4-4xy+6y^2-2$,

(d) $z = xy+a^3x^{-1}+b^3y^{-1}$.

Ülesanne 11.13. Leidke punkti $P(3,0,0)$ kaugus hüperboolsest paraboloidist $z = x^2-y^2$.

11.3 Kõrgemat järku osatuletised

Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest, saame **teist järku osatuletised**

$$f_{x_ix_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(f_{x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Juhul $i \neq k$ nimetatakse seda teist järku osatuletist **segatuletiseks**. Veel kõrgemat järku osatuletised ja segatuletised defineeritakse analoogiliselt.

Teoreem 11.1

Kui m muutuja funktsiooni f segatuletised on pidevad mingis punktis, siis selles punktis kehtib võrdus

$$f_{x_i x_k} = f_{x_k x_i}, \quad \forall i,k \in \{1, ..., m\}.$$

Ülesanne 11.14. Leidke järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised.

(a) $f(x,y) = x^2 + y$;

(b) $f(x,y) = x^3y - y^3x$;

(c) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$;

(d) $f(x,y) = x\sin(x+y)$;

(e) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$;

(f) $f(x,y) = x^y$;

(g) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$;

(h) $f(x,y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$;

(i) $f(x,y,z) = xyz + \ln(x+y+z)$;

(j) $f(x,y,z) = \sin(1+xyz)$.

Ülesanne 11.15. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \textbf{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \textbf{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0,0)$ segatuletised f_{xy} ja f_{yx} eksisteerivad, kuid $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Ülesanne 11.16. Leidke järgmiste funktsioonide segaosatuletised f_{xy}.

(a) $f(x,y) = x^x + y\sin x$;

(b) $f(x,y) = x^{10}\cos x + y^2\ln x$;

(c) $f(x,y) = y\cos y + \mathrm{e}^{x+y}$.

Ülesanne 11.17. (F) Funktsiooni $z = f(x,y)$ nimetatakse harmooniliseks, kui ta rahuldab Laplace'i soojusjuhtivuse võrrandit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Analoogiliselt saab Laplace'i võrrandit vaadelda suurema arvu muutujate korral. Võrrandit kasutatakse näiteks temperatuuri jaotamise modelleerimiseks ruumis, vedelike voolamise, elektri- ja magnetväljade potentsiaali uurimisel jne. Harmoonilistel funktsioonidel on palju häid matemaatilisi omadusi. Näidake, et funktsioonid $e^{\omega x}\cos(\omega y)$ ja $e^{\omega x}\sin(\omega y)$ on harmoonilised funktsioonid suvalise reaalarvu ω korral.

Ülesanne 11.18. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised.

(a) $f(x,y) = x + x\ln(xy), \quad f_{xxy} = ?$;

(b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{xyz}, \quad f_{xyz} = ?$;

(c) $f(x,y) = y^2 + x^3\sin y + y^3\sin x, \quad f_{xxxyyy} = ?$.

Ülesanne 11.19. $<*>$ **Olgu**

$$f(x,y,u,v) = \frac{x^2 + e^y v}{3y^2 + \ln(2+u^2)}.$$

Millise osatuletiste võtmise järjekorraga saab kõige kiiremini leida $f_{uvxyvu}(x,y,u,v)$? Põhjendage. Leidke $f_{uvxyvu}(x,y,u,v)$.

Praktikum 12

Täisdiferentsiaal ja liitfunktsiooni osatuletised

12.1 Täisdiferentsiaal

Olgu
$$\Delta f = f(P_0) - f(P)$$
funktsiooni f **muut** punktide $P = (x_1, ...x_m)$ ja $P_0 = (x_1 + \Delta x_1, ..., x_m + \Delta x_m)$ vahel.

Definitsioon 12.1

*Funktsiooni f nimetatakse **diferentseeruvaks** punktis P_0, kui tema muut punkti P_0 ümbruses avaldub kujul*
$$\Delta f = f_{x_1}(P_0)\Delta x_1 + ... + f_{x_m}(P_0)\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_m \Delta x_m,$$
kus $\alpha_1, ..., \alpha_m \to 0$, kui $\Delta x_1, ..., \Delta x_m \to 0$.

Definitsioon 12.2

Avaldist
$$df(P_0) = f_{x_1}(P_0)\Delta x_1 + ... + f_{x_m}(P_0)\Delta x_m = f_{x_1}(P_0)dx_1 + ... + f_{x_m}(P_0)dx_m$$
*nimetatakse funktsiooni f **täisdiferentsiaaliks** punktis P_0. Erijuhul $z = f(x, y)$ on täisdiferentsiaal kujul*
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Lause 12.1

Kui funktsioonil $u = f(x_1, ..., x_m)$ on pidevad osatuletised punktis $P = (x_1, ..., x_m)$, siis see funktsioon on diferentseeruv punktis P.

Ülesanne 12.1. Leidke järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid.

(a) $f(x, y) = x + 3y$;

(b) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy$;

(c) $f(x, y) = xy$;

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$;

(e) $f(x, y) = e^{1+xy}$;

(f) $f(x, y) = -\cos(xy)$;

(g) $f(x, y) = y^x$;

(h) $f(x, y, z) = \tan(x - 2y + 3z)$;

(i) $f(x, y, z) = \cos(x^2yz)$;

(j) $f(x, y, z) = \exp(2x^2yz^2)$.

Ülesanne 12.2. Näidake, et funktsioon
$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$
on pidev punktis $(0, 0)$ ja omab osatuletisi $f_x(0, 0)$ ja $f_y(0, 0)$, kuid ei ole diferentseeruv selles punktis.

Ülesanne 12.3. Näidake, et funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \textbf{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \textbf{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev ja ta osatuletised f_x ja f_y on lõplikud, kuid funktsioon ei ole diferentseeruv punktis $(0,0)$.

Ülesanne 12.4. Arvutage funktsioonide muudud ja täisdiferentsiaalid etteantud väärtustel.

(a) $u = x^2 - 3xy + 2y^2$, kui $x = 6$, $y = 2$, $\Delta x = 0.3$, $\Delta y = 0.2$;

(b) $u = x^2 z - 2yz^2 + 3xyz$, kui $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$, $\Delta z = -0.2$.

Ülesanne 12.5. $<*>$ **Olgu $z = \ln(ax + by)$. Tõestage võrdused**

(a) $d^3 z = 2dz^3$

(b) $d^n z = (-1)^{n-1}(n-1)!dz^n$

kus $d^n z := d(d^{n-1}z)$ on n-ndat järku täisdiferentsiaal.

12.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine

Kui funktsiooni $u = f(x_1, ...x_m)$ argumentide muudud $\Delta x_1, ..., \Delta x_m$ on küllalt väikesed, siis

$$\Delta u \approx du$$

ehk

$$f(x_1 + \Delta x_1, ..., x_m + \Delta x_m) - f(x_1, ..., x_m) \approx f_{x_1}(x_1, ..., x_m)\Delta x_1 + ... + f_{x_m}(x_1, ..., x_m)\Delta x_m.$$

Erijuhul $z = f(x,y)$ on funktsiooni muut kujul

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \approx dz$$

Ülesanne 12.6. Leidke järgmiste funktsioonide ligikaudsed muudud argumendi märgitud muutuse korral.

(a) $u = 4x^2 - xy$, punktist $(1,2)$ punkti $(1.01, 2.02)$;

(b) $u = x^{2/3}y^{1/2}$, punktist $(8,9)$ punkti $(7.97, 9.03)$;

(c) $u = \frac{x}{x-y}$, punktist $(-3,-2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$;

(d) $u = 2xe^{-y}$, punktist $(-3,-2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$;

(e) $u = xe^{xy} - y^2$, punktist $(-1,0)$ punkti $(-0.97, 0.03)$;

(f) $u = \ln(xy)^{1/2}$, punktist $(5,10)$ punkti $(5.05, 9.95)$.

Ülesanne 12.7. Ristküliku küljepikkusteks mõõdetakse 100 m ja 150 m.

Mõõtmisel võidi eksida ühe meetriga. Milline on võimalik viga selle ristküliku pindala arvutamisel? Milline on viga pindala arvutamisel, kui mõõtmise viga on 0.5 m?

Ülesanne 12.8. Kahe linna elanike arv (tuhandetes) on vastavalt x ja y, telefonikõnede hulk päevas nende vahel avaldub kujul $12xy$.

Hinnake ühes päevas tehtavate telefonikõnede arvu kasvu, kui elanike arv linnades kasvab vastavalt 40 tuhandelt ja 60 tuhandelt 1000 inimese võrra mõlemas linnas.

Ülesanne 12.9. Püstsilindri kõrgust suurendatakse 12 sentimeetrilt 12.2 sentimeetrini ja põhja raadiust vähendatakse 8 sentimeetrilt 7.7 sentimeetrimi.

Hinnake selle silindri ruumala ja kogupindala muute.

Ülesanne 12.10. (Maj) Elektroonikafirma, mis toodab päevas x DVD-mängijat ja y Blu-Ray-mängijat, kasum (eurodes) avaldub funktsioonina $P(x, y)$.

Kui praegu toodab firma päevas 200 DVD-mängijat ja 300 Blu-Ray-mängijat, siis hinnake kasumi kasvu kui päevas toota viis DVD-mängijat ja neli Blu-Ray-mängijat rohkem.

(a) $P(x, y) = 2x^2 - 3xy + 3y^2$

(b) $P(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2$

Ülesanne 12.11. Risttahuka kujuline kinnine kast kaetakse värviga.

Hinnake kastil oleva värvi kogust, kui kasti küljepikkused on 1.2, 0.9 ja 0.6 meetrit ning värvikihi paksus on 1 mm.

Ülesanne 12.12. Hinnake risttahuka ruumala arvutamisel tehtavat viga, kui iga külje pikkuse mõõtmisel tehti viga 1%.

Ülesanne 12.13. (F) Tuulekülm on temperatuur, mida inimene õues olles tunneb ja sõltub õhutemperatuurist t (ühik °C) ning tuule kiirusest w (ühik km/h).

Tuulekülma arvutamiseks kasutatakse valemit $C(t, w) = 13.12 + 0.6215t - 11.37w^{0.16} + 0.3965tw^{0.16}$. Hinnake tajutava temperatuuri muutust, kui temperatuur langeb -10 kraadilt kaks kraadi ja tuule kiirus tõuseb 18 kilomeetrilt tunnis 21.6 kilomeetrini tunnis.

Ülesanne 12.14. (F) Vere kogus liitrites, mis pumbatakse läbi kopsude minutis arvutatakse valemist $C = \frac{x}{y-z}$, kus x on kopsudes omastatud hapniku kogus (milliliitrit minutis), y ja z on hapniku kontsentratsioon veres (ml hapniku liitri vere kohta) vastavalt vahetult pärast ja enne kopsude läbimist.

Tüüpilised mõõtetulemused on $x = 250$, $y = 160$ ja $z = 150$. Hinnake südame väljundi arvutamisel tehtavat viga, kui iga näitaja mõõtmisel võidi eksida viie ühikuga.

Ülesanne 12.15. (K) Ideaalse gaasi ühe mooli rõhk, ruumala ja temperatuur on seoses $PV = 8.31T$, kus P on rõhk kilopaskalites, V on ruumala liitrites ja T on temperatuur °K.

Hinnake rõhu muutust, kui mahtu suurendatakse 12 liitrilt 12.3 liitrile ja temperatuur väheneb 310 kraadilt 305 kraadini.

Ülesanne 12.16. (M) Neli suvalist postitiivset arvu, mis on väiksemad kui 50, ümardatakse kümnendikeni ja korrutatakse seejärel.

Hinnake sellest ümardamisest tulenevat viga korrutises.

12.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui $\Delta x_1, ..., \Delta x_m$ on küllalt väikesed, siis $f(P) \approx f(P_0) + df(P_0)$ ehk

$$f(x_1 + \Delta x_1, ..., x_m + \Delta x_m) \approx f(x_1, ..., x_m) + f_{x_1}(x_1, ..., x_m)\Delta x_1 + ... + f_{x_m}(x_1, ..., x_m)\Delta x_m.$$

Erijuhul kui $z = f(x, y)$, siis $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

Ülesanne 12.17. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $1.03^{4.05}$;

(b) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$;

(c) $2.01^3 - 0.97^2$;

(d) $1.04^{1.99} + \ln 1.02$;

(e) $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$;

(f) $\sqrt{125\sqrt[4]{17}}$;

(g) $(1 - \sqrt{10})(1 + \sqrt{24})$;

(h) $\sin(\frac{6}{7}\pi)\cos(\frac{1}{5}\pi)$.

Ülesanne 12.18. (Maj) Cobb'i-Douglas'i tootmisfunktsioon on kujul $Q(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$, kus K on kapitalikulud ja L on tööjõukulud.

On teada, et $Q(10000, 625) = 20000$. Leidke ligikaudu $Q(10010, 623)$ väärtus.

Ülesanne 12.19. (F) Päriselus ei ole meil paljude asjade kohta funktsionaalseid seoseid, kuid ka siis saab teatud väärtusi arvutada või lähendada.

Tehased toodavad soovitud paksusega lehtmetalli rulle valtsides neid suurte rullide vahel. Metalli lehe paksus sõltub valtside vahest, valtsirullide pöörlemise kiirusest ning metallli temperatuurist. Eeldame, et teatud metalli korral saame paksuse 4 mm temperatuuril 900° valtside vahega 4 mm ja -kiirusega 10 m/s. Katsed on näidanud, et kiiruse suurendamine 0.2 m/s võrra suurendab metalli lehe paksust 0.06 mm võrra ning temperatuuri tõus 10° võrra vähendab paksust 0.04 mm võrra. Hinnake ligikaudu metalli lehe paksust valtsimisel kiirusega 10.1 m/s ja temperatuuril 880 °.

12.4 Liitfunktsiooni osatuletised

Lause 12.2

Kui funktsioonidel $u_i = u_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ...m$, on lõplikud osatuletised muutujate $x_1, ..., x_n$ järgi punktis P ja funktsioon $z = f(u_1, ..., u_m)$ on diferentseeruv punktis $Q = (u_1(P), ..., u_m(P))$, siis liitfunktsiooni

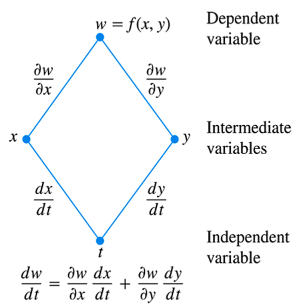
$$z = F(P) = f[u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_m(x_1, ..., x_n)]$$

lõplikud osatuletised punktis P avalduvad kujul

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \forall k = 1, ..., n. \tag{12.1}$$

Erijuhul $w = f(x, y)$, $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ avaldub tuletis kujul

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$



Ülesanne 12.20. Leidke järgmiste liitfunktsioonide tuletised.

(a) $z = \mathrm{e}^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = \frac{1}{3}\cos t$;

(b) $z = \ln(1 - xy)$, $x = t^2$, $y = t^3$;

(c) $u = xyz$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 2t$;

(d) $z = t^2 + x^2 + y^2$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$;

(e) $z = \tan(t + x^2 - y)$, $x = t^2$, $y = t^5$;

(f) $z = \arctan(xy)$, $y = \mathrm{e}^x$;

(g) $u = \mathrm{e}^x(y - z)$, $y = \sin x$, $z = \cos x$;

(h) $u = u(x, y, z)$, $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t + 1$;

(i) $z = f(x, y) = x^2 \ln y$, $x = 1 - t^2$, $y = \mathrm{e}^{\sin t}$.

Ülesanne 12.21. Leidke järgmiste liitfunktsioonide osatuletised.

(a) $z = u^2 v$, $u = x\cos y$, $v = x \sin y$;

(b) $z = u \ln v$, $u = \frac{1}{x+y}$, $v = \mathrm{e}^{x+y}$;

(c) $z = u\mathrm{e}^v$, $u = x^2$, $v = x \ln y$;

(d) $z = \operatorname{arccot} \frac{u}{v}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$;

(e) $w = u^v$, $u = x^2 + z^2$, $v = yz$;

(f) $w = xy\mathrm{e}^{uv}$, $u = \frac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$.

Ülesanne 12.22. Leidke osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$.

(a) $z = f(x) + g(y)$;

(b) $z = f(x + y)$;

(c) $z = f(x)g(y)$;

(d) $z = f(xy)$;

(e) $z = f(x/y)$.

Ülesanne 12.23. Soopart ujub ühikringjoonel $x = \cos(t)$ ja $y = \sin(t)$, kus t on aeg.

Vee temperatuur muutub seaduse $T(x, y) = x^2 e^y - xy^3$ alusel. Leidke temperatuuri muutumise kiirus $\frac{dT}{dt}$ ajahetkel t kahel erineval moel: kasutades liitfunktsiooni osatuletise leidmise reeglit ja eraldi ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise reeglit (asendades x ja y temperatuuri T avaldisse).

Ülesanne 12.24. Temperatuur punktis (x, y) on $T(x, y)$.

Putukas asub t sekundi möödumisel punktis $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 3 + \frac{1}{3}t$. Temperatuurifunktsioon rahuldab tingimusi $T_x(2, 4) = 4$ ja $T_y(2, 4) = 3$. Kui kiiresti tõuseb temperatuur putuka teekonnal 3 sekundi pärast?

Ülesanne 12.25. (F) Tähistame kääbusplaneet Pluuto atmosfääri rõhu $\rho = \rho(x, y, z)$ ruumipunktis (x, y, z).

Kosmoselaev liigub ajas t seaduse $(x(t), y(t), z(t))$ alusel. Esitage valem rõhu muutumise kiiruse $\frac{d\rho}{dt}$ leidmiseks.

Ülesanne 12.26. (F) Patarei tühjenemisel väheneb lihtsas vooluringis pinge V.

Takisti soojenemisel tõuseb takistus R aeglaselt. Kasutades Ohmi seadust ($V = IR$), leidke kuidas muutub voolutugevus I hetkel, kui $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s ja $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

Ülesanne 12.27. (K) Ühe mooli ideaalse gaasi rõhk ja temperatuur kasvavad vastavalt kiirusega 0.05 kPa/s ja 0.15 K/s.

Kasutades seost ülesandest 12.13, leidke kui kiiresti muutub ruumala, kui rõhk on 20 kPa ja temperatuur on 320 K.

Praktikum 13

Osatuletiste rakendusi

13.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

Definitsioon 13.1

*Öeldakse, et funktsioonil f on **lokaalne maksimum** punktis (a, b), kui leidub selle punkti ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et*

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

*Öeldakse, et funktsioonil f on **lokaalne miinimum** punktis (a, b), kui leidub selle punkti ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et*

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Definitsioon 13.2

*Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f_x = f_y = 0$ ja punkte, kus funktsiooni f mingi osatuletis ei ole lõplik või ei leidu, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**.*

Lause 13.1

Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv oma statsionaarses punktis (a, b). Tähistame

$$D = D(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 .$$

(a) Kui $D > 0$ ja $f_{xx}(a, b) > 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne miinimum.

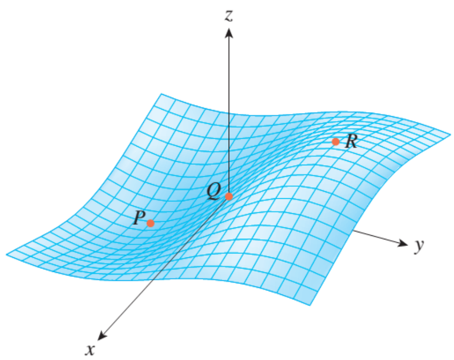
(b) Kui $D > 0$ ja $f_{xx}(a, b) < 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne maksimum.

(c) Kui $D < 0$, siis punktis (a, b) ei ole lokaalset ekstreemumit.

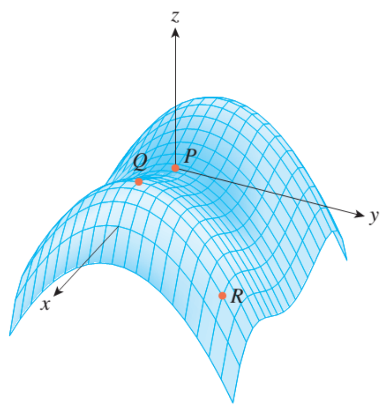
(d) Kui $D = 0$, siis ekstreemumi olemasolu jääb lahtiseks.

Ülesanne 13.1. **Klassifitseerige joonistel märgitud punktid.**

(a)



(b)



Ülesanne 13.2. **Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.**

(a) $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - y^2$;

(b) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$;

(c) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$;

(d) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

(e) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$;

(h) $f(x, y) = x^2 + y - 2\ln(xy)$.

(i) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \le x,\ y \le \pi\}$;

(j) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Ülesanne 13.3. $<*>$ **Funktsioon** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **on defineeritud võrdusega** $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$**. Leidke funktsiooni** f **kõik lokaalsed ekstreemumid. Leidke (koos põhjendusega!) funktsiooni** f **suurim ja vähim väärtus.**

13.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas

Ülesanne 13.4. Leidke toodud funktsioonide globaalsed ekstreemumid $\max f$ **ja** $\min f$**.**

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$;

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$;

(c) $f(x, y) = x - 2y - 1$, $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \le x,\ y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1\}$;

(d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $(x, y) \in \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\}$;

(e) $f(x, y) = (2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

Ülesanne 13.5. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$**,** $(x, y) \in \{(x, y) : -5 \le x \le 5,\ -1 \le y \le 1\}$ **on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.**

Ülesanne 13.6. Näidake, et funktsioonil $f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ **on lõpmata palju lokaalseid maksimume ja mitte ühtegi lokaalset miinimumi.**

Ülesanne 13.7. Alleelid A,B ja O määravad neli veregruppi: A (AA või AO), B (BB või BO), O (OO) ja AB. Hardy–Weinbergi seaduse kohaselt on kahte alleeli kandvate inimeste osakaal populatsioonis

$$P \approx 2pq + 2pr + 2rq,$$

kus p, q ja r on vastavalt A, B ja O osakaalud populatsioonis. Kasutades fakti, et $p + q + r = 1$, näidake, et P väärtus on kõige rohkem $\frac{2}{3}$.

Ülesanne 13.8. $<*>$ **Olgu antud kaks korda diferentseeruv funktsioon** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**.**

Tähistame iga punkti $u \in \mathbb{R}^2$ korral talle vastavat funktsiooni

$$\Phi_u(l_1, l_2) = f_{xx}(u) \cdot l_1^2 + 2f_{xy}(u) \cdot l_1 \cdot l_2 + f_{yy}(u) \cdot l_2^2.$$

Olgu iga u korral Φ_u *positiivselt määratud*, see tähendab, iga punkti u ja iga $(l_1, l_2) \ne 0$ korral $\Phi_u(l_1, l_2) > 0$, ehk iga u korral $f_{xx}(u) > 0$ ja $\begin{vmatrix} f_{xx}(u) & f_{xy}(u) \\ f_{xy}(u) & f_{yy}(u) \end{vmatrix} > 0$. Tõestage, et funktsioonil f on **ülimalt üks** statsionaarne punkt (see tähendab, punkt u, kus $f_x(u) = f_y(u) = 0$).

13.3 Optimiseerimine

Ülesanne 13.9. Jaotage arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

Ülesanne 13.10. Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leidke see, mille täispindala on minimaalne.

Ülesanne 13.11. Missuguste mõõtmete korral on antud ruumalaga V risttahuka kujulisel vannil vähim pindala?

Ülesanne 13.12. Leidke antud perimeetriga $2p$ ristkülik, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

Ülesanne 13.13. (Maj) Elektroonikafirma toodab kahte mudelit kõlareid: Tubli Tilluke ja Kindel Kõrge.

Mõlema kõlari nõudlus sõltub osaliselt teise kõlari hinnast. Kui üks on kallis, siis ostetakse rohkem teist mudelit. Olgu p_1 ja p_2 on vastavalt Tubli Tillukese ja Kindel Kõrge hind. Siis avalduvad Tubli Tillukese ja Kindel Kõrge nõudlused (st aastaga müüdavad hulgad) vastavalt kujul

$$q_1(p_1, p_2) = 100000 - 100p_1 + 10p_2 \quad \text{ja} \quad q_2(p_1, p_2) = 150000 + 10p_1 - 100p_2.$$

Leidke nende kõlarimudelite hinnad, mis annavad maksimaalse käibe.

Ülesanne 13.14. (Maj) Autotootja müüb ühte mudelit Ameerikas ja Euroopas erineva hinnaga. Ameerikas müüdavate autode hind (tuhandetes dollarites) on $p = 20 - 0.2x$ (kus $0 \le x \le 100$) ning Euroopas küsitakse hinda $q = 16 - 0.1y$ (kus $0 \le y \le 160$).

Siin x ja y on päevas müüdavate autode arv vastavalt Ameerikas ja Euroopas. Autotootja kulufunktsioon on $C = 20 + 4(x + y)$. Leidke autotootja tulufunktsioon (st käive miinus kulu). Mitu autot ja millise hinnaga tuleks kummalgi turul müüa, et teenida võimalikult suurt tulu?

Ülesanne 13.15. Laborikatsed näitasid, et x mg ravimi A ja y mg ravimi B koostoime avaldub funktsioonina $f(x, y) = xy - 2x^2 - y^2 + 100x + 60y$ (kus $0 \le x \le 55$, $0 \le y \le 60$).

Leidke mõlema ravimi kogused, mis tagavad suurima toime.

Ülesanne 13.16. Psühholoogilises eksperimendis osaleja, kes harjutab uut oskust x tundi ja puhkab y tundi, katse tulemused avalduvad funktsioonina $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 11x - 4y + 120$ (kus $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 4$).

Leidke harjutamiseks ja puhkamiseks kuluv aeg, mis tagab võimalikult kõrge katse tulemuse.

Ülesanne 13.17. Neli linna ühendavad ressursid soovides ehitada ühise telemasti.

Leidke selline punkt $A(x, y)$, kus masti kauguste summa linnadest oleks minimaalne, kui linnad asuvad punktides (-5, 0), (1, 7), (9, 0) ja (0, -8).

Ülesanne 13.18. (F) Koosnegu süsteem tasandil kolmest laengukandjast: elektrilisest dipoolist ja vabast osakesest. Asugu elektrilise dipooli osakesed punktides $(2, 0)$ ja $(-2, 0)$ ning olgu nende laengud vastavalt q ja $2q$.

Tasandil vabalt liikuva vaba laengukandja laeng olgu samuti q ning selle asukoht $X = (x, y)$. Potentsiaalne energia on

$$U(X) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1(X)} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_2(X)} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2},$$

kus $r_1(X) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ ja $r_2(X) = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ on vaba laengukandja kaugused dipooli osakestest. Leidke potentsiaalse energia ekstremaalsed väärtused, kui vaba osake asub piirkonnas $D = \{(x, y)\colon -2 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 4\}$. *Näpunäide. Esitage U funktsiooni* $V(X) = \frac{1}{r_1(X)} + \frac{2}{r_2(X)} + \frac{1}{2}$ *kaudu ja leidge funktsiooni V ekstremaalsed väärtused.*

13.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis

Valem 13.1

Kui võrrand $F(x, y) = 0$ määrab pideva funktsiooni $y = f(x)$, kusjuures F, F_x, F_y on pidevad punktis (x, y) ja $F_y(x, y) \neq 0$, siis

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \tag{13.1}$$

Ülesanne 13.19. Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised y'.

(a) $y + \sin y + e^x = 0$,

(b) $x + y = e^{x-y}$,

(c) $y^2 + 2xy - 2 = 0$,

(d) $x^2 - 2xy + y^4 = 4$,

(e) $1 + \ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x}$,

(f) $xe^y + ye^x - 2x^2y = 0$,

(g) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(a = const)$,

(h) $x \cos(xy) + y \cos x = 2$.

Ülesanne 13.20. Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y = y(x)$ tuletised märgitud punktis P.

(a) $x^3 - 2y^2 + xy = 0, \quad P = (1, 1)$,

(b) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0, \quad P = (-1, 1)$,

(c) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0, \quad P = (1, 2)$,

(d) $xe^y + \sin(xy) + y - \ln 2 = 0, \quad P = (0, \ln 2)$.

Ülesanne 13.21. Klaasist lääts lõigatakse välja kerast raadiusega r ruumalaga $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$. Siin h on kera segmendi kõrgus. Leidke $\frac{dr}{dh}$, kui $V = \frac{8\pi}{3}$.

13.5 Taylori valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *

Valem 13.2

Polünoomi

$$P_n(x, y) = \sum_{\substack{k \ge 0 \\ k+m \le n}} \sum_{m \ge 0} \frac{\partial^{k+m} f(a, b)}{\partial x^k \partial y^m} \frac{(x-a)^k}{k!} \frac{(y-b)^m}{m!} \tag{13.2}$$

ehk

$$\begin{aligned} P_n(x, y) = & f(A) + f_x(A)(x-a) + f_y(A)(y-b) + \\ & \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(A)(x-a)^2 + 2f_{xy}(A)(x-a)(y-b) + f_{yy}(A)(y-b)^2\right] + \cdots + \\ & \frac{1}{n!}\left[\binom{n}{0}\frac{\partial^n f(A)}{\partial x^n}(x-a)^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f(A)}{\partial x^{n-1}\partial y}(x-a)^{n-1}(y-b) + \ldots + \binom{n}{n}\frac{\partial^n f(A)}{\partial y^n}(y-b)^n\right] \end{aligned}$$

nimetatakse funktsiooni f n-astme ***Taylori polünoomiks*** *P_n punktis $A = (a, b)$. Valemit*

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y) \tag{13.3}$$

nimetatakse funktsiooni f ***Taylori valemiks****, funktsiooni R_n aga Taylori valemi* ***jääkliikmeks****.*

Valem 13.3

Kui funktsioonil f on punkti (a,b) mingis ümbruses pidevad osatuletised vähemalt järguni $n+1$, siis funktsiooni f Taylori valemi (13.3) jääkliikmeks Lagrange'i kujul nimetatakse funktsiooni

$$R_n(x,y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[\binom{n+1}{0}\frac{\partial^{n+1} f(\alpha,\beta)}{\partial x^{n+1}}(x-a)^{n+1} + \binom{n+1}{1}\frac{\partial^{n+1} f(\alpha,\beta)}{\partial x^n \partial y}(x-a)^n(y-b)\right.$$
$$\left. + \dots + \binom{n+1}{n+1}\frac{\partial^{n+1} f(\alpha,\beta)}{\partial y^{n+1}}(y-b)^{n+1}\right], \quad kus \ \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{13.4}$$

ning punkt (α,β) asub punkte (x,y) ja (a,b) ühendaval sirgel. Erijuhul $n=2$, saame

$$R_2(x,y) = \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 f(\mathcal{A})}{\partial x^3}(x-a)^3 + 3\frac{\partial^3 f(\mathcal{A})}{\partial x^2 \partial y}(x-a)^2(y-b) + 3\frac{\partial^3 f(\mathcal{A})}{\partial x \partial y^2}(x-a)(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f(\mathcal{A})}{\partial y^3}(y-b)^3\right].$$

Ülesanne 13.22. Leidke järgmiste funktsioonide Taylori polünoomid punktis (a,b).

(a) $f(x,y) = (x+y)^3,\ n=3,\ (a,b) = (0,0)$,

(b) $f(x,y) = (x+y)^3,\ n=3,\ (a,b) = (1,1)$,

(c) $f(x,y) = \cos x \cos y,\ n=2,\ (a,b) = (0,0)$,

(d) $f(x,y) = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y^2},\ n=2,\ (a,b) = (1,3)$,

(e) $f(x,y) = y\ln x - \sin(xy),\ n=1,\ (a,b) = (1,\pi)$,

(f) $f(x,y) = \frac{1}{1+xy},\ n=3,\ (a,b) = (0,0)$,

(g) $f(x,y) = \tan(2x-y),\ n=2,\ (a,b) = (\pi/4,\pi/4)$,

(h) $f(x,y) = \cos(x^2y),\ n=2,\ (a,b) = (0,0)$,

(i) $f(x,y) = \sqrt{2+xy},\ n=2,\ (a,b) = (1,2)$,

(j) $f(\theta,v) = 1 - \cos\theta + \frac{1}{2}v^2,\ n=2,\ (a,b) = (\pi,0)$.

Ülesanne 13.23. Esitage funktsioon $f(x,y) = \arctan(xy)$ avaldiste $(x-1)$ ja $(y-1)$ astmete lineaarse kombinatsioonina kuni ruutliikmeteni.

Saadud avadist kasutades leidke $f(1.1, 0.8)$.

Ülesanne 13.24. Esitage polünoom $P(x,y) = x^2 + 3y^2 - 9x - 9y + 26$ avaldiste $(x-2)$ ja $(y-2)$ astete lineaarse kombinatsioonina.

Ülesanne 13.25. Leidke funktsiooni $f(x,y) = e^x \sin y$ kolmandat järku Taylori valem punktis $(a,b) = (0,0)$ jääkliikmega Lagrange'i kujul.

Ülesanne 13.26. Leidke funktsiooni $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 3x - 4y + 1$ esimest järku Taylori polünoom punktis $(a,b) = (-1,1)$. Hinnake absoluutset viga saadud ligikaudses avaldises, kui $|x+1| < 0.1$ ja $|y-1| < 0.1$.

Ülesanne 13.27. Leidke funktsiooni $f(x,y) = e^{x+2y}$ teist järku Taylori polünoom punktis $(a,b) = (0,0)$. Hinnake absoluutset viga saadud ligikaudses avaldises, kui $|x| \leq 0.1$ ja $|y| \leq 0.1$.

Ülesanne 13.28. $< * >$ **Näidake, et võrrandil $x + 2y + z + e^{2z} = 1$ leidub punkti $(0,0)$ ümbruses lahend kujul $z = f(x,y)$, kus $f(0,0) = 0$.**

Leidke selle lahendi Taylor'i teist järku polünoom (s.t. $n=2$ ja f esitub x ja y astmete kaudu).

Praktikum 14

Lagrange'i kordajate meetod. Funktsiooni tuletis antud suunas.

14.1 Lagrange'i kordajate meetod

Valem 14.1

*Funktsiooni $f(x, y, \dots)$ tingliku (lokaalse või globaalse) ekstreemumi leidmiseks lisatingimusel $g(x, y, \dots) = 0$ Lagrange'i kordajate meetodil moodustame **Lagrange'i funktsiooni***

$$\Phi(x, y, \dots, \lambda) = f(x, y, \dots) + \lambda g(x, y, \dots),$$

kus λ on mingi kordaja, ja lahendame süsteemi

$$\Phi_x = 0, \Phi_y = 0, \dots, \Phi_\lambda = g(x, y, \dots) = 0.$$

Ülesanne 14.1. **Leidke vähim kaugus nullpunktist** $(0, 0)$ **jooneni** $x^2 y = 16$.

Ülesanne 14.2. **Leidke vähim kaugus nullpunktist** $(0, 0, 0)$ **tasandini** $x + 2y + 2z = 3$.

Ülesanne 14.3. **Leidke Lagrange'i meetodiga järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud lisatingimustel.**

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y = 2;$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2};$

(c) $f(x, y) = 6 - 4x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 1;$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ $(x, y, z > 0);$

(e) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9;$

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + 2z = 6, \quad x - y = 0;$

(g) $f(x, y, z) = xy + xz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad y + z = 2.$

Ülesanne 14.4. (F) **Sõjalaevalt lastakse rakett välja horisontaalse algkiirusega** V_x **ja vertikaalse algkiirusega** V_y.

Raketi laskekaugus on $R(V_x, V_y) = \frac{2V_x V_y}{g}$, kus g on raskuskiirendus. Raketi kineetiline energia on fikseeritud: $\frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} = E$. Leidke raketi maksimaalne laskekaugus.

14.2 Gradient

Valem 14.2

*Igas punktis (x, y), kus leiduvad funktsiooni $f(x, y)$ esimest järku osatuletised, saame vaadelda funktsiooni f **gradienti***

$$\nabla f(x, y) = grad\ f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = (f_x(x, y), f_y(x, y)),$$

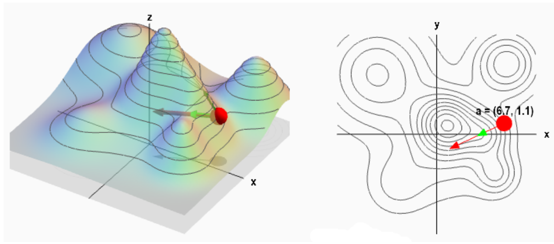
kus $i = (1, 0)$ ja $j = (0, 1)$.

Omadus 14.1

a) Gradient on igas punktis risti pinna nivoojoonega.

b) Gradient näitab pinna kiireima tõusu suunda ning suurima tõusu arvväärtus on $|\nabla f(x, y)|$.

c) Gradiendi vastandvektor $-\nabla f(x, y)$ näitab pinna kiireima languse suunda ning suurima languse arvväärtus on $|\nabla f(x, y)|$.



Joonis : http://mathinsight.org/

Ülesanne 14.5. Leidke funktsiooni gradient antud punktis.

(a) $f(x, y) = 3x^4 - 2x + y^2 - 5,\ P(1, -2);$

(b) $f(x, y) = \cos(x + y),\ P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2});$

(c) $f(x, y, z) = xy^2z^3,\ P(1, -1, -1);$

(d) $f(x, y, z) = (x + 2y - z)e^{xyz},\ P(1, -1, 0);$

(e) $f(x, y, z) = xye^z,\ P(e, e, -1);$

(f) $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy + 3,\ P(1, -1).$

Ülesanne 14.6. Leidke funktsiooni suurim kasvukiirus antud punktis.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2,\ P(2, -1);$

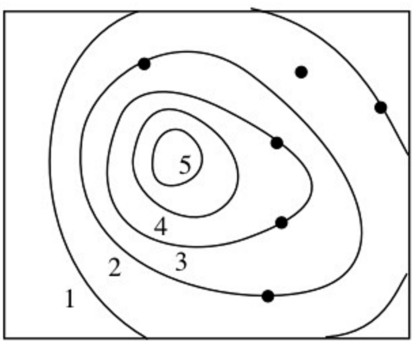
(b) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y},\ P(1, 1);$

(c) $f(x, y) = e^{xy},\ P(2, 0);$

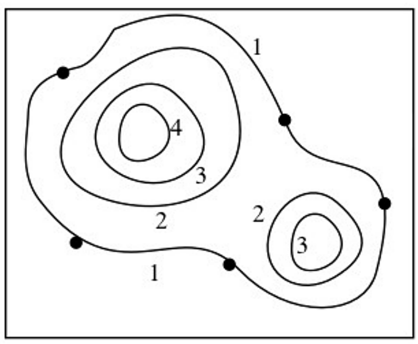
(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ P(1, -2).$

Ülesanne 14.7. Näidake gradiendi suunad kontuurkaardil märgitud punktides. Milline on kiireima tõusuga trajektoor igast märgitud punktist?

(a)



(b)



Ülesanne 14.8. (F) Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi $°C$) igas punktis xy-tasandil on $T(x, y) = x^2e^{-y}$. Millises suunas kasvab temperatuur punktis $(2, 1)$ kõige kiiremini?

Mis on see suurim kasvukiirus selles punktis?

14.3 Funktsiooni tuletis antud suunas

Definitsioon 14.1

Olgu $u = (\alpha, \beta)$ ühikvektor, s.t. $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Funktsiooni $f(x, y)$ ***tuletiseks punktis*** *(a, b)* ***suunas*** *u nimetatakse suurust*

$$D_u f(a, b) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h\alpha, b + h\beta) - f(a, b)}{h}.$$

Valem 14.3

Kui f on diferentseeruv punktis (a, b) ja $u = (\alpha, \beta)$ on ühikvektor, siis kehtib valem

$$D_u f(a, b) = u \cdot \nabla f(a, b) = \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b).$$

Ülesanne 14.9. Leidke funktsiooni $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ muutumiskiirus punktis $(0, 1)$ ja suunas u, kui

(a) $u = (1, 2)$;

(b) $u = (1, -2)$;

(c) $u = (3, 0)$;

(d) $u = (1, 1)$.

Ülesanne 14.10. Matkaja seisab mäe nõlval oja ääres ja uurib oma kaarti. Maastiku kõrgus (meetrites) igas punktis (x, y) on antud funktsiooniga

$$h(x, y) = \frac{20000}{3 + x^2 + 2y^2},$$

kus x ja y (kilomeetrites) on koordinaadid matkaja kaardil. Matkaja asub punktis $(3, 2)$. Millises suunas voolab ojas vesi punktis $(3, 2)$? Kui kiiresti laskub vesi allamäge matkaja asukohas?

Ülesanne 14.11. Millises suunas on punktis $(2, 0)$ funktsiooni $f(x, y) = xy$ muutumiskiirus -1? Kas on suundi, kus muutumiskiirus on -3 või -2?

Ülesanne 14.12. (F) Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi $°C$) igas punktis xy-tasandil on $T(x, y) = x^2 - 2y^2$. Mis suunas peab punktis $(2, -1)$ olev sipelgas liikuma, et võimalikult kiiresti maha jahtuda?

Ülesanne 14.13. (F) Temperatuur T metallkuulis on pöördvõrdelises seoses kera keskpunktist, milleks loeme punkti $(0, 0, 0)$. Temperatuur punktis $(1, 2, 2)$ on $120°C$.

(a) Leidke temperatuuri T muutumiskiirus punktis $(1, 2, 2)$ suunas $(2, 1, 3)$;

(b) Näidake, et mis tahes metallkuuli punktis suurim temperatuuri kasv leiab aset nullpunkti $(0, 0, 0)$ suunas.

Ülesanne 14.14. $< * >$ Leidke funktsiooni $f(x, y, z) = xy + z^2$ suurim ja vähim väärtus keral $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Ülesanne 14.15. $< * >$ Olgu α, β ja γ kolmnurga sisenurgad. Tõestage, et

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Milliste kolmnurkade puhul on tegemist võrdusega?

14.4 Vähimruutude meetod *

Valem 14.4

Olgu meil antud komplekt andmeid $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, kus $n \in \mathbb{N}$. ***Vähimruutude meetodiga*** *otsime sellist funktsiooni f, mis minimiseeriks funktsiooni*

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2.$$

Näiteks, kui soovime antud andmeid lähendada sirgega $f(x) = ax + b$, siis vähimruutude meetodiga tuleks minimiseerida funktsioon

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Ülesanne 14.16. Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

(a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$;

(b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$;

(c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$;

(d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

Ülesanne 14.17. Leidke parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

(a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$;

(b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$;

(c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$;

(d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$.

Ülesanne 14.18. Leidke eksponentsiaalne funktsioon $f(x) = ae^{bx}$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

(a) $(1, 16), (3, 17), (5, 18), (7, 20), (10, 22)$;

(b) $(2, 13), (4, 9), (6, 6), (8, 4), (10, 3)$.

Ülesanne 14.19. Firma toote müüginumbrid (miljonites eurodes) esimese viie aasta jooksul on antud tabelina.

Aasta	1	2	3	4	5
Müük	0,9	1,5	1,9	2,4	3,0

(a) Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud andmeid;

(b) Ennustage leitud sirge abil firma kuuenda aasta müüginumbrid.

Ülesanne 14.20. Viie tööstusrajooni piirkonnas viidi läbi uurimus, kus mõõdeti teatud heitgaasi keskmist kogust õhus ja hingamisteede haiguste keskmist arvu (100 000 inimese kohta).

Heitgaasi kogus	3,4	4,6	5,2	8,0	10,7
Haiguste arv	48	52	58	76	96

(a) Joonistage saadud andmed graafikule ja otsustage, mis tüüpi funktsioon võiks neid andmeid kõige paremini kirjeldada;

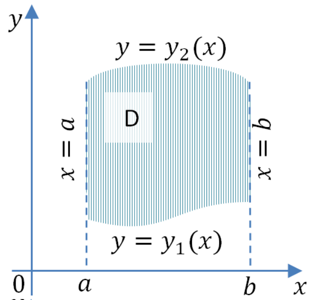
(b) Prognoosige vähimruutude meetodiga keskmist haiguste arvu piirkonnas, kus keskmine heitgaasi kogus on $7,3$ ühikut.

Praktikum 15

Kahekordse integraali arvutamine

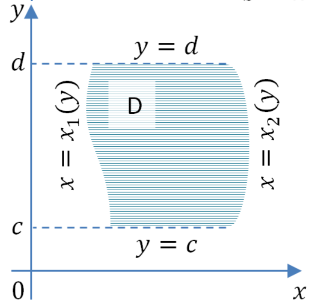
15.1 Kahekordse integraali arvutamine

Valem 15.1



Kui $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, *siis*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{15.1}$$



Kui $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, *siis*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{15.2}$$

Ülesanne 15.1. Joonistage järgmised integreerimispiirkonnad D ning asetage integreerimisrajad kahekordses integraalis valemite (15.1) ja (15.2) järgi.

(a) D on kolmnurk tippudega $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$;

(b) D on kolmnurk tippudega $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$;

(c) D on ristkülik tippudega $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$;

(d) D on ring $x^2 + y^2 \leq 1$;

(e) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 1$;

(f) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = x^3$.

Ülesanne 15.2. Muutke integreerimisjärjekord järgmistes integraalides.

(a) $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy;$

(b) $\displaystyle\int\limits_1^{\mathrm{e}} dx \int\limits_0^{\ln x} f(x,y)\,dy;$

(c) $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx;$

(d) $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)\,dy;$

(e) $\displaystyle\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)\,dy;$

(f) $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx;$

(g) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)\,dy;$

(h) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy;$

(i) $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{1+\sqrt{-x^2+4x-3}}^{3} f(x,y)\,dy.$

Ülesanne 15.3. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\iint\limits_D x\,dx\,dy$, kus D on kolmnurk tippudega $(0,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_D y\,dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $x=1$ ja $y=x^2$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=-x$, $y=0$ ja $x=\pi$;

(d) $\displaystyle\iint\limits_D \cos(x-y)\,dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $y=x$ ja $x=\pi$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_D \mathrm{e}^{x-y}\,dx\,dy$, kus D on ristkülik $D=[0,\ln 4]\times[0,\ln 2]$;

(f) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\ln x}{xy}\,dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=1$, $y=x$ ja $x=\mathrm{e}$;

(g) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{x}\,dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $y=\ln x$ ja $x=\mathrm{e}$;

(h) $\displaystyle\iint\limits_D x\sin(1+x^2)\cos(1+y^2)\,dx\,dy$, kus D on ristkülik $D=[-1,1]\times[-1,0]$;

(i) $\displaystyle\iint\limits_D (y-2x^2)\,dx\,dy$, kus D on piiratud kinnise joonega $|x|+|y|=1$;

(j) $\displaystyle\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=x$, $y=2x$ ja $x+y=2$.

Ülesanne 15.4. Määratud integraali arvutamine kahekordse integraali abil.

Arvutage integraal

$$\int\limits_0^2 (\arctan \pi x - \arctan x)\,dx,$$

esitades integraalialune funktsioon integraali kujul.

15.2 Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Valem 15.2

Kui $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, *kus* $(u,v) \in \Delta$, *siis*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,du\,dv, \tag{15.3}$$

kus $J(u,v)$ *on teisenduse jakobiaan,* $J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$.

Ülesanne 15.5. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\iint\limits_D (2x+y-2)^2\,dx\,dy$, kus $D = \{(x,y) : -1 \le x-y \le 1, -1 \le 2x+y \le 2\}$;

(b) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $x+y=1,\ x+y=2,\ 3x+4y=5$ ja $3x+4y=6$;

(c) $\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $y=x+1,\ y=x-3,\ y=-\frac{x}{3}+2$ ja $y=-\frac{x}{3}+4$;

(d) $\iint\limits_D dx\,dy$, kus D on piirkond, mis asub esimeses veerandis ja on piiratud joontega $xy=1$, $xy=4,\ y=2x$ ja $y=x$.

Ülesanne 15.6. < * > Kahekordset integraali kasutades leidke piirväärtus

$$\lim_{a,b\to\infty} \sum_{k=1}^{a} \sum_{n=1}^{b} \frac{1}{ab} \frac{n^2}{b^2} \sin\frac{kn}{ab} \qquad (a,b \in \mathbb{N}).$$

Ülesanne 15.7. < * > Leidke integraal

$$\iint_D y^2\,dx\,dy,$$

kus D on piiratud x-teljega ja tsükloidi $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ kaarega, kui $0 \le t \le 2\pi$ ja $a > 0$.

Ülesanne 15.8. < * > Tähistagu U kolmnurka tippudega $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$.

Tõestage, et

$$\iint_U \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy = \frac{\operatorname{sh} 1}{2},$$

kus $\operatorname{sh} t = \dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$ (hüperboolne siinus).

Praktikum 16

Üleminek polaarkoordinaatidele. Kahekordse integraali geomeetrilisi rakendusi

16.1 Üleminek polaarkoordinaatidele

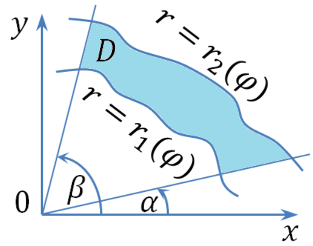
Valem 16.1

Üleminek polaarkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \Delta = \{(r,\varphi) : \alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\},$$

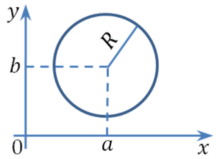
teisenduse jakobiaan $J(r,\varphi) = r$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr \qquad (16.1)$$

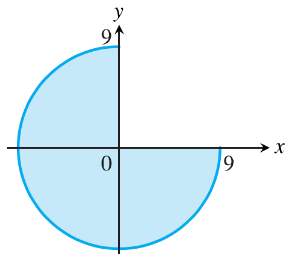


Valem 16.2

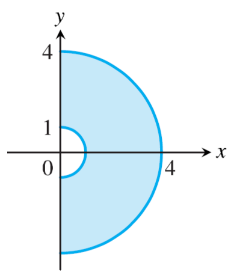
Ringjoone võrrand: $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$



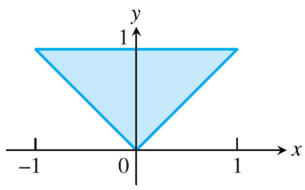
Ülesanne 16.1. **Esitage järgmised piirkonnad polaarkoordinaatides.**



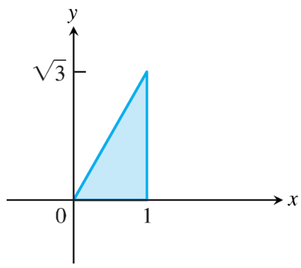
(a)



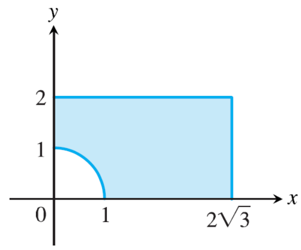
(b)



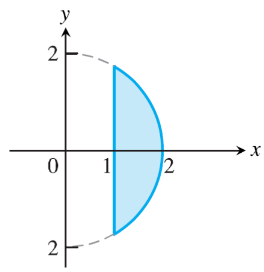
(c)



(d)



(e)



(f)

Ülesanne 16.2. **Leidke järgmised integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele.**

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kus
$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4,\ \ x,y \ge 0\}$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_D dx\,dy$, kus
$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4, y \ge -\sqrt{2}\}$;

(c) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1,\ y\ge 0\}$;

(d) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1\}$;

(e) $\displaystyle\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$;

(f) $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\le 1,\ x,y\ge 0\}$.

Ülesanne 16.3. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon (x-1)^2+y^2\le 1\}$;

(b) $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+(y-1)^2\le 1,\ x\ge 0\}$;

(c) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+(y-1)^2\le 1\}$;

(d) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+(y+2)^2\le 4\}$;

(e) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy$, kus $D=\{(x,y)\colon 4x\le x^2+y^2\le 8x,\ x\le y\le 2x\}$;

(f) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x, y=-x (y\le -x)$;

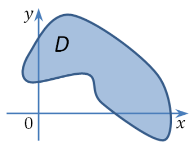
(g) $\displaystyle\iint_D dx\,dy$, kus D on piiratud joontega $y=0, y=\sqrt{2-x^2}, x=y^2\ (x\ge y^2)$.

16.2 Kahekordse integraali geomeetrilisi rakendusi

16.2.1 Tasandilise kujundi pindala

Valem 16.3

Tasandilise kujundi D pindala: $S_D=\displaystyle\iint_D dx\,dy$



Ülesanne 16.4. Leidke xy-tasandil asetsevate kujundite pindalad, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega.

(a) $y=x^3,\ y=1,\ x=0$;

(b) $y=\mathrm{e}^x,\ y=\mathrm{e}^{-x},\ y=\mathrm{e}$;

(c) $y=2^x,\ y=2^{-x},\ y=4$;

(d) $xy=4,\ x+y=5$;

(e) $3x^2=25y,\ 5y^2=9x$;

(f) $x^2+y^2=16$;

(g) $r=a\cos\varphi,\ r=b\cos\varphi,\ (b>a>0)$;

(h) $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioid);

(i) $r=2\cos 4\varphi$ (neljaleheline roos);

(j) $(x^2+y^2)^2=2xy$;

(k) $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$ (Bernoulli lemniskaat);

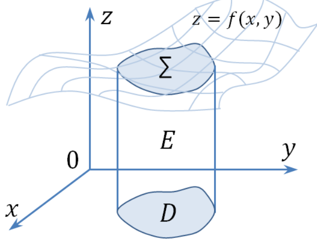
(l) $(x^2+y^2)^2=2x^3$.

16.2.2 Keha ruumala. Ruumilise pinnatüki pindala

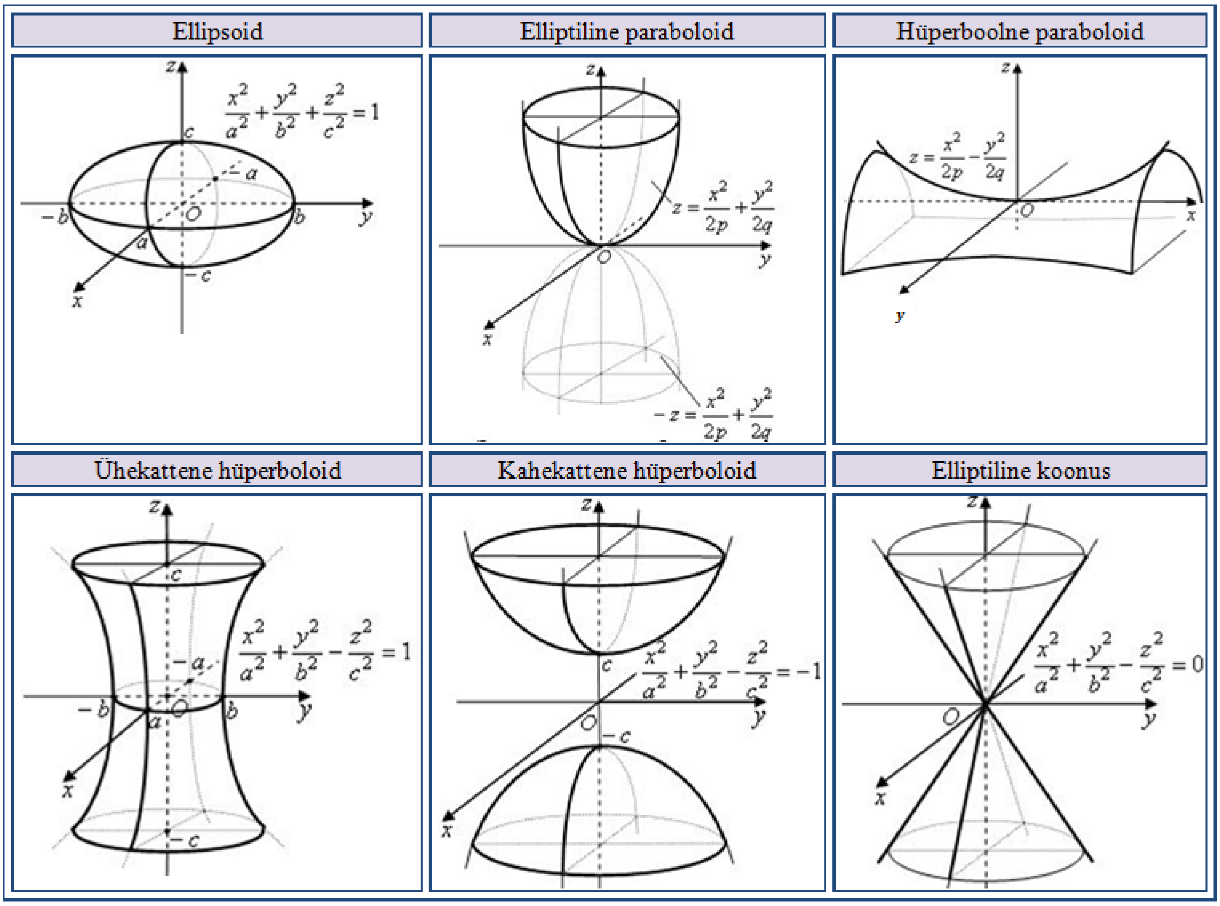
Valem 16.4

Keha E ruumala: $V_E = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Ruumilise pinnatüki Σ pindala: $S_\Sigma = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dx\,dy$

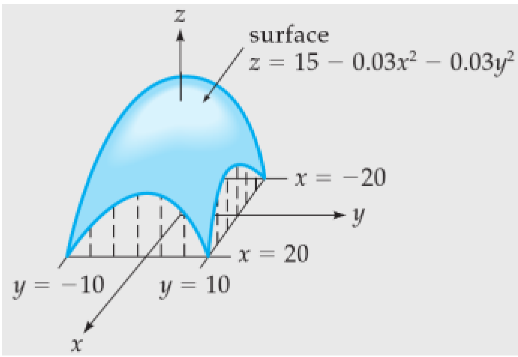


TEIST JÄRKU PINNAD



Ülesanne 16.5. Külgseintega kuppeltelk on konstrueeritud joonisel näidatud funktsiooni järgi.

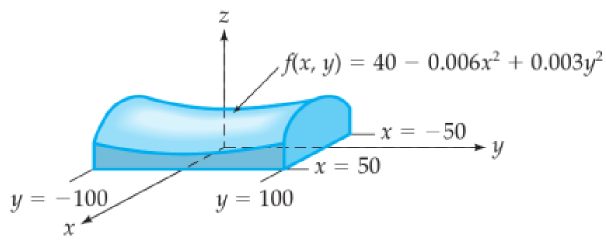
Et projekteerida ventilatsiooni- ja küttesüsteemi, on tarvis teada telgi ruumala. Leidke kuppeltelgi ruumala, kui tema põhjaks on joonisel märgitud ristkülik (kõik mõõtmed on antud jalgades, 1 ft ≈ 0,3 m).



Ülesanne 16.6. Konverentsikeskusel on lookas katus kõrgusega

$$f(x,y) = 40 - 0,006x^2 + 0,003y^2.$$

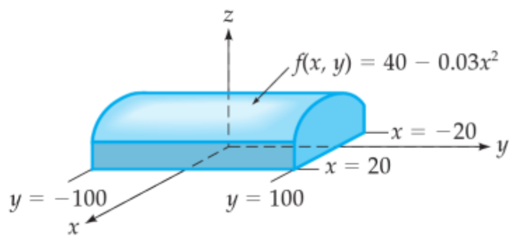
Ehitise põhjaks on ristkülik $[-50, 50] \times [-100, 100]$. Leidke maja ruumala. (Kõik suurused on antud meetrites.)



Ülesanne 16.7. Lennukite angaar on kumera katusega, mille kuju on määratud funktsiooniga

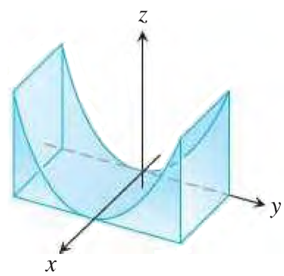
$$f(x, y) = 40 - 0,03x^2.$$

Leidke angaari ruumala, kui tema põhjaks on ristkülik $[-20, 20] \times [-100, 100]$. (Kõik suurused on antud meetrites.)

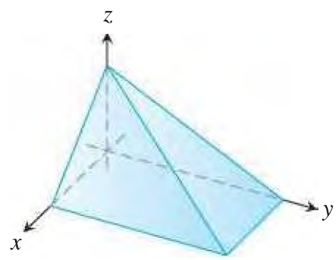


Ülesanne 16.8. Leidke keha E ruumala, kui see on tõkestatud järgmiste pindadega.

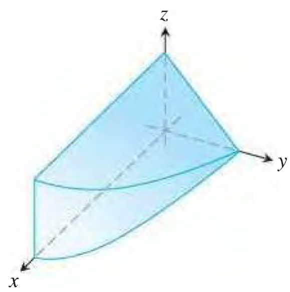
(a) $z = y^2, \; x = 0, \; x = 1, \; y = -1, \; y = 1, \; z = 0$



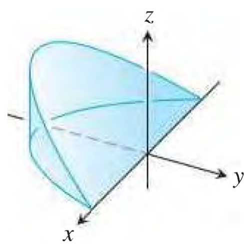
(b) $x + z = 1, \; y + 2z = 2 \quad (x, y, z \geq 0)$



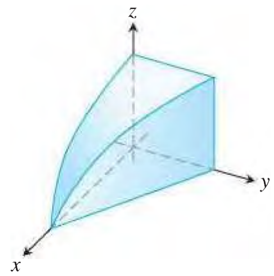
(c) $y + z = 2, \; x = 4 - y^2 \quad (x, y, z \geq 0)$



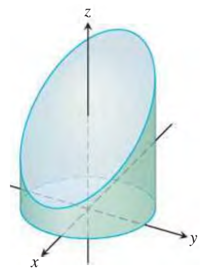
(d) $x^2 + y^2 = 1, \; z = -y, \; z = 0$



(e) $y = 1 - x,\ z = \cos(\pi x/2),\ 0 \le x \le 1,\ y, z \le 0$



(f) $x^2 + y^2 = 4, z = 0,\ x + z = 3$



Ülesanne 16.9. **Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E.**

(a) Tasandid $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ja $x + y + z = 1$.

(b) Tasandid $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 4$ ja $y = 4$ ning pöördparaboloid $z = x^2 + y^2 + 1$.

(c) Tasandid $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ja $x + y = 1$ ning elliptiline paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$.

(d) Tasandid $z = 0$ ja $x + z = 6$ ning silindrid $y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$.

(e) Tasand $z = 0$, pöördparaboloid $z = x^2 + y^2$ ja silinder $x^2 + y^2 = 1$.

(f) Koordinaattasandid, silinder $x^2+y^2 = 1$ ja pind $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, kus $x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0$ ja $y \ge 0$.

(g) Tasandid $x = 1,\ y = 0$ ja $z = 0$ ning hüperboolne paraboloid $z = x^2 - y^2$.

(h) Tasandid $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ja $2x + 3y = 12$ ning silinder $y^2 = 2z$.

(i) Tasandid $z = 1$ ja $z = 12 - 3x - 4y$ ning elliptiline silinder $x^2 + 4y^2 = 4$.

(j) Sfäär $x^2+y^2+z^2 = 3$ ja pöördpaboloid $2z = x^2 + y^2$.

(k) Silindrid $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + z^2 = 1$.

(l) Pöördparaboloidid $z = 4 - x^2 - y^2$ ja $2z = 2 + x^2 + y^2$.

(m) Silinder $x^2 + y^2 = 3$ ja kahekatteline hüperboloid $z^2 = x^2 + y^2 + 3$.

(n) $z = \cos x \cos y,\ z = 0,\ |x + y| \le \frac{\pi}{2}$ ja $|x - y| \le \frac{\pi}{2}$.

Ülesanne 16.10. **Leidke järgmiste ruumiliste pindade märgitud osade pindalad.**

(a) Tasandi $6x + 3y + 2z = 12$ osa, kus $x \ge 0,\ y \ge 0$ ja $z \ge 0$.

(b) Pinna $z = xy$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 1$ sees.

(c) Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis on silindri $x^2 + y^2 = b^2$ $(b < a)$ sees.

(d) Koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ osa, mille eraldab temast silidriline pind $z^2 = 2y$.

(e) Silindri $z^2 = 4x$ osa, mille eraldavad temast silinder $y^2 = 4x$ ja tasand $x = 1$.

(f) Sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mille lõikab temast välja silinder $x^2+y^2 = ax$.

(g) Koonuse $x^2 = y^2 + z^2$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 2$ sees.

Ülesanne 16.11. $< * >$ **Leidke joonega $y^4 = a^2(y^2 - 2x^2)$ piiratud kujundi pindala.**

Praktikum 17

Kahekordse integraali füüsikalisi rakendusi. Kolmekordse integraali arvutamine

17.1 Kahekordse integraali füüsikalisi rakendusi

17.1.1 Tasandilise kujundi mass

Valem 17.1

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y),\ (x, y) \in D$. *Kujundi* D **mass** *avaldub valemiga*

$$m_D = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

Ülesanne 17.1. Leidke ringi mass, kui ringi raadius on 10 **cm.**

Ringjoonel on pindtihedus $1,2$ g/cm^2 ning see on võrdeline punkti kaugusega ringi keskpunktist.

Ülesanne 17.2. Leidke ruudukujulise plaadi mass, kui plaadi külje pikkus on $2a$ **cm.**

Plaadi materjali tihedus on igas punktis võrdeline punkti kauguse ruuduga diagonaalide lõikepunktist ning on ruudu tippudes 1 g/cm^2.

Ülesanne 17.3. Funktsioon

$$f(x, y) = \frac{10000e^y}{1 + \frac{|x|}{2}}\ \frac{\textbf{bakter}}{\textbf{cm}^2}$$

kirjeldab mingi bakteri populatsiooni tihedust xy**-tasandil, kus** x **ja** y **mõõdetakse sentimeetrites.**

Leidke bakterite arv ristkülikul $[-5, 5] \times [-2, 0]$.

Ülesanne 17.4. Elektrilaengu pindtihedus kettal raadiusega R **meetrit on** $\rho(r, \varphi) = kr(1 - \sin\varphi)$ **C/m^2 (siin** k **on konstant).**

Integreerige pindtiheduse funktsiooni üle ketta, et leida elektrilaeng Q.

Ülesanne 17.5. Avaldugu sipelgate populatsiooni tihedus funktsioonina

$$P(x, y) = \frac{30000}{1 + x^2 + y^2},$$

kus x **ja** y **on meetrites ja koordinaatide alguspunktis on veeallikas.**

Mitu sipelgat elab veeallikast kuni 100 meetri raadiuses?

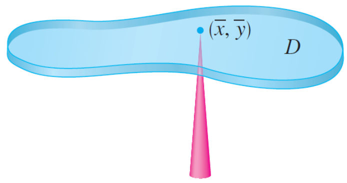
17.1.2 Tasandilise kujundi massikese

Valem 17.2

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Kujundi D **massikese** *asub punktis* $C = (\bar{x}, \bar{y})$, *kus*

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D x\rho(x, y)\, dx\, dy \\ \bar{y} = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D y\rho(x, y)\, dx\, dy \end{cases}$$



Ülesanne 17.6. Leidke bumerangi kujulise piirkonna massikese, kui see asub xy-tasandil paraboolide $y^2 = -4(x-1)$ ja $y^2 = -2(x-2)$ vahel.

Ülesanne 17.7. Leidke xy-tasandil asetsevate homogeensete kujundite massikesme $C = (\bar{x}, \bar{y})$ koordinaadid, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega

(a) Ringjoon $x^2 + y^2 = 1$ $(y > 0)$ ja sirgjoon $y = 0$.

(b) Sinusoid $y = \sin x$ ja sirged $x = 0$ $x = \pi/4$ ja $y = 0$.

(c) Jooned $y = x^2$ ja $x + y = 2$.

(d) Kardioid $r = 2(1 + \cos\varphi)$ ja polaartelg $\varphi = 0$.

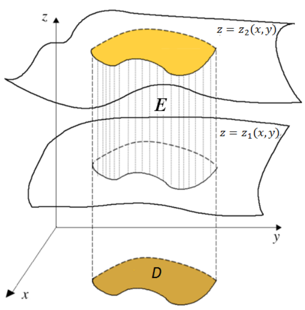
(e) x-telg ja tsükloid $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ kaar, kui $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ülesanne 17.8. Leidke ringi $x^2 + y^2 \leq 4$ massikesme koordinaadid, kui pindtihedus ringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega punktist $(2, 0)$.

Ülesanne 17.9. Leidke poolringi $x^2 + y^2 \leq 1$ massikesme koordinaadid, kui pindtihedus poolringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega ruuduga punktist $(1, 0)$.

17.2 Kolmekordse integraali arvutamine

Valem 17.3

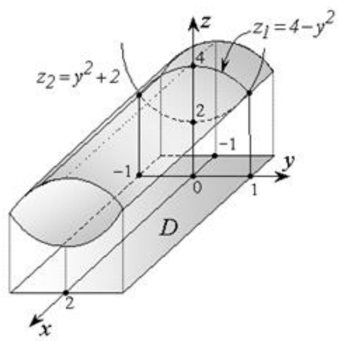


Kui $E = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$, *siis*

$$\iiint_E f(x, y)\, dx\, dy\, dz = \iint_D dx\, dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \tag{17.1}$$

Ülesanne 17.10. Leidke integraal $\displaystyle\iiint_E xz\, dx\, dy\, dz$,

kus piirkond E on piiratud silindriliste pindadega $z_1 = 4 - y^2$, $z_2 = y^2 + 2$ ja tasanditega $x = -1$, $x = 2$.



Ülesanne 17.11. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\iiint\limits_E x^2yz^2\,dx\,dy\,dz$, kus $E = \{(x,y,z)\colon 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1\}$;

(b) $\iiint\limits_E y\,dx\,dy\,dz$, kus $E = (x,y,z)\colon 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2-y$;

(c) $\iiint\limits_E (z+4)\,dx\,dy\,dz$, kus $E = \{(x,y,z)\colon -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$;

(d) $\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, kus $E = \{(x,y,z)\colon 0 \le x \le 1,\ 2 \le y \le 5,\ 2 \le z \le 4\}$;

(e) $\iiint\limits_E (1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz$, kus $E = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$;

(f) $\iiint\limits_E xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $z = 0$;

(g) $\iiint\limits_E (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ ja $x + y = 2$.

Ülesanne 17.12. Olgu $B = \{(x,y,z)\colon 1 \le x \le e^z,\ y \ge z,\ y^2+z^2 \le 4\}$.

Koostage hulga B kohta arvuti abiga kolmemõõtmeline kontuurjoonis. Tõestage, et

$$\iiint\limits_B \frac{dx\,dy\,dz}{x} = \frac{8-4\sqrt{2}}{3}.$$

Ülesanne 17.13. < ∗ > Tõestage, et iga lõigus $[0,a]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2 f(z)\,dz.$$

Ülesanne 17.14. < ∗ > Tõestage, et iga lõigus $[0,2]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$2\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)\,dz = \int_0^1 (2-z^2)f(z)\,dz + \int_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz.$$

Praktikum 18

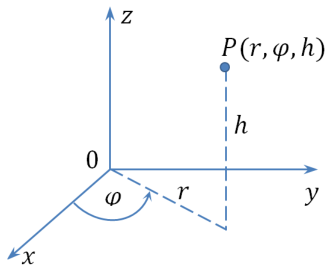
Muutuja vahetus kolmekordses integraalis. Kolmekordse integraali rakendusi. Joonintegraalid

18.1 Üleminek silinderkoordinaatidele

Valem 18.1

Üleminek silinderkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases}, \quad \textit{teisenduse jakobiaan } J(r,\varphi,h) = r$$



Ülesanne 18.1. **Üleminekuga silinderkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.**

(a) $\displaystyle\iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ ja tasanditega $x=0, y=0,\ z=0$ ja $z=2$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{1+(z-1)^2}$, kus $E = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_E xz\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=a^2$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ ja tasanditega $z=0, z=1,\ y=x$ ja $y=x\sqrt{3}$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_E y\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=2x$, tasandiga $z=0$ ja paraboloidiga $z=x^2+y^2$;

(e) $\displaystyle\iiint\limits_E z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=2x$ $(y \geq 0)$ ja tasanditega $z=0, z=c$ ja $y=0$;

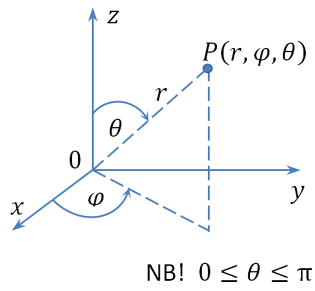
(f) $\displaystyle\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, kus $E = \{(x,y,z)\colon a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2,\ z \geq 0\}$;

18.2 Üleminek sfäärkoordinaatidele

Valem 18.2

Üleminek sfäärkoordinaatidele:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \quad \textit{teisenduse jakobiaan } J(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta$$



Ülesanne 18.2. Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

(a) $\displaystyle\iiint\limits_E z\,dx\,dy\,dz$, kus E on piiratud sfääri osaga $x^2+y^2+z^2=1$ $(y \geq 0,\ z \geq 0)$ ja tasanditega $y=0$ ja $z=0$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, kus $E = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \leq z$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_E \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$;

(e) $\displaystyle\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, kus $E = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z \geq 0\}$;

(f) $\displaystyle\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, kus $E = \{(x,y,z)\colon a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$.

18.3 Kolmekordse integraali rakendusi

18.3.1 Keha ruumala leidmine

Valem 18.3

Keha E **ruumala** *V_E avaldub valemiga*

$$V_E = \iiint\limits_E dx\,dy\,dz. \tag{18.1}$$

Ülesanne 18.3. Leidke kehade ruumalad, kui nad on piiratud järgmiste pindadega.

(a) Silindrid $z = 9 - y^2$ ja $z = 1 + y^2$ ning tasandid $x = -1$ ja $x = 5$;

(b) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$ ning silinder $x^2 + y^2 = 1$;

(c) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = x^2 + 2y^2$ ning tasandid $x = 1,\ y = x$ ja $y = 2x$;

(d) Silindrid $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ ning tasandid $z = 0$ ja $z = 9$;

(e) Hüperboolne paraboloid $z = xy$ ning tasandid $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1$ ja $x + y = z$;

(f) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$, silinder $y = x^2$ ning tasand $y = x$;

(g) Pind $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z, a > 0$;

Ülesanne 18.4. Poolkerakujuline tass on täidetud piimaga nii, et ülemise servani jääb puudu 3 cm.

Kui palju piima (liitrides) on tassis?

Ülesanne 18.5. Ringbasseini diameeter on 15 meetrit.

Kui palju vett mahub sellesse basseini, kui põhjast lõunasse on tema sügavus on konstantne ja läänest itta kahaneb lineaarselt kahest meetrist seitsmeni?

Ülesanne 18.6. Kauss on funktsiooni $z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 25)$ graafiku kujuga.

Teie planeerite kalibreerida kaussi nii, et teha sellest sadememõõturit. Milline kõrgus vastab 2 cm sademete hulgale? 6 cm sademete hulgale?

18.3.2 Keha mass ja massikese.

Valem 18.4

Olgu keha tihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y, z),\ (x, y, z) \in E$.

Keha E **mass** *võrdub* $m_E = \iiint\limits_E \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Keha E **massikese** $C = (x_c, y_c, z_c)$ *asub punktis* $\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m_E} \iiint\limits_E x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ y_c = \dfrac{1}{m_E} \iiint\limits_E y\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ z_c = \dfrac{1}{m_E} \iiint\limits_E z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \end{cases}$.

Ülesanne 18.7. Leidke kuubi $E = [0, 10]^3$ mass, kui kuubi tihedus igas punktis on $\rho(x, y, z) = z$.

Ülesanne 18.8. Leidke risttahuka $E = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui tihedus igas tema punktis on $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Ülesanne 18.9. Leidke tasanditega $x + y + z = a,\ x = 0,\ y = 0$ ja $z = 0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdne punkti aplikaadiga.

Ülesanne 18.10. Leidke kera mass, kui kera raadius on a ja kera igas punktis tiheduse ruut $\rho^2 = a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Ülesanne 18.11. Leidke silindri $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le c\}$ mass, kui tihedus igas tema punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga silindri teljest.

Ülesanne 18.12. Leidke kera kihi $a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2$ mass, kui kihi tihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega punktist $(0, 0, 0)$.

Ülesanne 18.13. On teada, et kerakujulise planeedi raadius on R ja tema mass on m.

Planeedi tihedus on sümmeetriline kera keskupnkti suhtes ning kahaneb lineaarselt planeedi pinna suunas. Millega võrdub tihedus keskpunktis, kui planeedi pinnal on see võetud võrdseks nulliga?

Ülesanne 18.14. Kerakujuline planeet raadiusega R omab atmosfääri tihedusega $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, kus h on kõrgus planeedi pinna kohal, μ_0 on tihedus merepinnal ja c on positiivne konstant.

Leidke selle planeedi atmosfääri mass.

Ülesanne 18.15. Leidke homogeensete kehade massikeskme koordinaadid, kui kehad on piiratud järgmiste pindadega.

(a) $x + y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

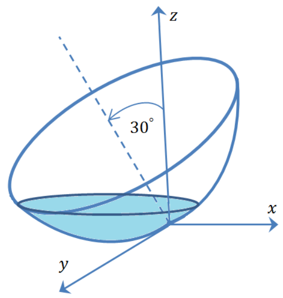
(b) $z^2 = xy,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 0;$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0),\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Ülesanne 18.16. Leidke poolkera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ $(z \geq 0)$ massikesme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on arvuliselt võrdne punkti kaugusega kera keskpunktist.

Ülesanne 18.17. $< * >$ **Paraboolse satelliiditaldriku laius on 2 m ja sügavus on 0,5 m.**

(a) Tema sümmeetriatelg on kallutatud 30 kraadi püstasendist. Konstrueerige (mitte arvutage!) kolmekordne integraal taldrikusse mahtuva vee ruumala arvutamiseks.



(b) Mis on minimaalne taldriku kalle, mille korral vesi temasse ei kogune?

18.4 Esimest liiki joonintegraalid*

Omadus 18.1

Esimest liiki joonintegraal ei sõltu integreerimistee AB läbimise suunast.

Valem 18.5

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$$AB:\ y = y(x),\ a \leq x \leq b: \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2}dx \tag{18.1}$$

$$AB:\ x = x(y),\ c \leq y \leq d: \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_c^d f(x(y), y)\sqrt{1+x'^2}dy \tag{18.2}$$

$$AB:\ r = r(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta: \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2+r'^2}d\varphi \tag{18.3}$$

$$AB:\ x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leq t \leq \beta: \qquad \int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\sqrt{x'^2+y'^2}dt \tag{18.4}$$

Valem 18.6

Ruumilise joonintegraali arvutamine

$$AB: \ x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t), \ \alpha \le t \le \beta: \int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt \quad (18.5)$$

Ülesanne 18.18. Arvutage järgmised integraalid

(a) $\displaystyle\int\limits_{AB} \frac{ds}{x-y}, \ AB: y = x/2 - 2, A = (0,-2), B = (4,0);$

(b) $\displaystyle\int_{AB} \frac{2x+y}{y}ds, \ AB: 2x + y + 1 = 0, A = (1,-3), B = (0,-1);$

(c) $\displaystyle\int\limits_{AB} xyds, \ AB: x = \cos t, y = \sin t, A = (1,0), B = (0,1);$

(d) $\displaystyle\int\limits_{AB} \sqrt{x^2+y^2}ds, \ AB: x^2 + y^2 = a^2 (x > 0), \ A = (a,0), B = (0,a);$

(e) $\displaystyle\int\limits_{L} (x-y)ds, \ L: x^2 + y^2 = 2x;$

(f) $\displaystyle\int\limits_{L} xyds$, kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $A = (0,0), \ B = (4,0), \ C = (4,2), \ D = (0,2)$;

(g) $\displaystyle\int\limits_{L} \frac{3z^2ds}{x^2+y^2}$, kus L on kruvijoone esimene keerd: $x = a\cos t, y = a\sin t, z = at \ (0 \le t \le 2\pi)$.

Ülesanne 18.19. < * > **Leidke joonintegraal** $\displaystyle\int\limits_{L} \sqrt{x^2+y^2}ds$, **kus joon** L **antud võrrandiga** $\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = a^2\left(x^2-y^2\right), \ (a > 0)$.

18.4.1 Esimest liiki joonintegraali rakendusi

Valem 18.7

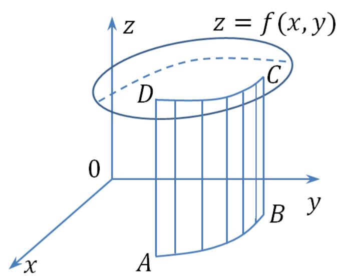
Joone kaare pikkus: $\displaystyle \ell_{AB} = \int\limits_{AB} ds$

Valem 18.8

Silinderpinna pindala:

$$S_{ABCD} = \int\limits_{AB} f(x,y)ds,$$

kus $f(x,y) \ge 0$ *joonel* AB



Ülesanne 18.20. Leidke järgmiste joonte pikkused

(a) $r = e^{\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi]$;

(b) $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3,\ A = (0,0,0),\ B = (3,3,2)$.

Ülesanne 18.21. **Leidke vertikaalsete silinderpindade pindala, kui pindade alumised servad asetsevad xy-tasandil ja ülemine serv on järgmiste pindade lõikejoon**

(a) $y + x = 1\ (x \geq 0),\ z = y$;

(b) $x^2 + y^2 = 4,\ 2z = x^2 + 4$;

(c) $x^2 + y^2 = 16,\ z = y$.

Ülesanne 18.22. **Leidke silinderpinna $x^2 + y^2 = 2x$ selle osa pindala, mis asub kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sees.**

Ülesanne 18.23. $< * >$ **Olgu $a > b > 0$. Tõestage, et ellipsi $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ pikkus on võrdne sinusoidi $y = c\sin\frac{x}{b}$ ühe täisvõnke kaarepikkusega, kui $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.**

18.5 Teist liiki joonintegraalid*

Omadus 18.2

Teist liiki joonintegraal muudab märki integreerimistee läbimissuuna muutmisel :

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Definitsioon 18.1

L_+ - *kinnise joone L läbimise **positiivne suund*** $\overset{\text{def}}{\iff}$ *kellaosuti liikumisele vastupidine suund (kui vaadata z-telje positiivselt poolelt xy-tasandile)*

Valem 18.9

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$AB:\ y = y(x),\ a \leq x \leq b:$
$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x, y(x))dx \tag{18.6}$$

$AB:\ x = x(y),\ c \leq y \leq d:$
$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy = \int_c^d f(x(y), y)dy \tag{18.7}$$

$AB:\ x = x(t),\ y = y(t)\ \alpha \leq t \leq \beta:$
$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(t)x'(t)dt \tag{18.8}$$
$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy = \int_\alpha^\beta f(t)y'(t)dt \tag{18.9}$$

Valem 18.10

Ruumilise joonintegraali arvutamine

$AB:\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta:$
$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dx = \int_\alpha^\beta f(t)x'(t)dt \tag{18.10}$$
$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dy = \int_\alpha^\beta f(t)y'(t)dt \tag{18.11}$$
$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dz = \int_\alpha^\beta f(t)z'(t)dt \tag{18.12}$$

Ülesanne 18.24. **Arvutage integraalid**

(a) $\int\limits_{AB} xydx,\ AB: y = \sin x, A = (0,0), B = (\pi, 0);$

(b) $\int\limits_{AB} ydx,\ AB: 2y + x = 4, A = (4,0), B = (0,2);$

(c) $\int\limits_{AB} ydx,\ AB: x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi/2];$

(d) $\int\limits_{L} xdy,\ L$ on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0,0),\ B = (3,0),\ C = (0,2);$

(e) $\int\limits_{L_-} (x^2 + y^2)dx,\ L$ on kontuur, mille moodustavad sirged $x = 1,\ x = 5,\ y = 1,\ y = 3;$

(f) $\int\limits_{AB} \cos y dx + \sin x dy,\ AB: y = x, A = (0,0), B = (\pi, \pi);$

(g) $\int\limits_{L} ydx + xdy,\ L: x = a\cos t, y = a \sin t, t \in [0, \pi/2];$

(h) $\int\limits_{AB} ydx + zdy + xdz,\ AB: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t, t \in [0, 2\pi].$

Ülesanne 18.25. $< * >$ **Näidake, et teist liiki joonintegraal ei ole monotoonne.**

Leidke näide sirgestuvast joonest $L \subset \mathbb{R}^2$ ning funktsioonidest $f, g, h: L \to \mathbb{R}$ nii, et $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ iga $(x,y) \in L$ korral, aga

$$\int\limits_{L} f(x,y)dx > \int\limits_{L} g(x,y)dx \qquad \text{ja} \qquad \int\limits_{L} g(x,y)dx < \int\limits_{L} h(x,y)dx\ .$$

18.5.1 Teist liiki joonintegraali rakendusi

Valem 18.11

Kui tasandiline kujund D on piiratud kinnise joonega L, siis tema pindala avaldub valemitega

$$S_D = \int\limits_{L} xdy = \int\limits_{L} (-y)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{L} (-y)dx + xdy.$$

Valem 18.12

Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punktini B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimel. Jõu $\vec{F}$ **töö** *on arvutatav valemiga*

$$W = m \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Ülesanne 18.26. Leidke xy-tasandil olevate tasandiliste kujundite pindalad, kui nad on piiratud järgmiste joontega.

(a) ellips $x = a\cos t,\ y = b\sin t$;

(b) $y = x^2,\ x = y^2$;

(c) astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

(d) kardioid $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Ülesanne 18.27. Olgu xy-tasandil jõud $\vec{F}$ suunatud igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist 0.

Leidke jõu töö W, mis on kulunud ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2, 4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

Ülesanne 18.28. Jõud konstantse suurusega F on xy-tasandi igas punktis x-telje suunaline.

Leidke jõu töö W, mis kulub ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0, a)$ punkti $(a, 0)$.

Ülesanne 18.29. Jõud $\vec{F}$ on suunatud xy-tasandi igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus on võrdne punkti M kaugusega punktist O.

Leidke jõu $\vec{F}$ töö W punkti massiga m nihutamisel punktist A punkti B.

Praktikum 19

Kontrolltöö 2

1. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus
1.1. Näidata, et funktsiooni piirväärtust ei leidu
1.2. Piirväärtuse leidmine ristkoordinaatides, üleminek polaarkoordinaatidele
1.3. Kahe muutuja funktsiooni pidevus

2. Osatuletised, osatuletiste rakendused
2.1. Mitme muutuja funktsiooni esimest ja kõrgemat järku osatuletised
2.2. Pinna puutujatasand
2.3. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali leidmine, funktsiooni muudu ja funktsiooni väärtuse ligikaudne leidmine täisdiferentsiaali abil
2.4. Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, optimiseerimine
2.5. Gradiendi leidmine, funktsiooni suurima kasvukiiruse ja suurima langemiskiiruse leidmine gradiendi abil

3. Kahekordsed integraalid
3.1. Kahekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek polaarkoordinaatidele
3.2. Tasandilise kujundi pindala ja keha ruumala leidmine kahekordse integraali abil

Praktikum 20

Diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 20.1

Diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.*

Definitsioon 20.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon $y = f(x)$ sõltub ühest argumendist x.*

20.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 20.3

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks *nimetatakse sellist funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.*

Ülesanne 20.1. **Millised antud funktsioonidest on diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x$ lahendid?**

(a) $y = x^2$ **(b)** $y = x^2 + 1$ **(c)** $y = x^2 - 0.5$ **(d)** $y = (5x)^2$

Ülesanne 20.2. **Millised antud funktsioonidest on diferentsiaalvõrrandi $y'' - 3y' + 2y = 0$ lahendid?**

(a) $y = e^x$

(b) $y = e^{-x}$

(c) $y = e^{0.5x}$

(d) $y = 4e^x$

(e) $y = -7e^x$

(f) $y = e^{2x}$

(g) $y = e^{2x} - 3$

(h) $y = e^x + e^{2x}$

(i) $y = 2e^x - e^{2x}$

Ülesanne 20.3. **Näidake, et antud funktsioon on temale järgneva diferentsiaalvõrrandi lahendiks.**

(a) $y = x$, $y' = y + 1 - x$

(b) $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $xy' + y = \cos(x)$

(c) $y = e^{\arcsin(2x)}$, $xy' = y\tan(\ln(y))$

(d) $x = y\displaystyle\int_0^y \frac{\sin(t)}{t}dt$, $y\dfrac{dx}{dy} = x + y\sin(y)$

(e) $x = ye^{y+1}$, $x(\ln(x) - \ln(y))dy - ydx = 0$

(f) $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos(p) \\ y & = & \sin(p) \end{array}\right\}$, $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$

(g) $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \ln(p) + \sin(p) \\ y & = & p(1 + \sin(p)) + \cos(p) \end{array}\right\}$, $x = \ln\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

Ülesanne 20.4. **Leidke antud võrrandite i) ja ii) ühised lahendid.**

(a) i) $y' = y + 1$, ii) $y' = e^x$

(b) i) $y' = y^2 + 2x - x^4$, ii) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

(c) i) $y' = x$, ii)$y' = y + x$

Ülesanne 20.5. Näidake, et antud diferentsiaalvõrrandi lahend on vastav funktsioon

(a) $x^2y' + (1-2x)y = x^2,\ y = (Cx)^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

(b) $y'' = x + \sin x,\ y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

(c) $y'' - y' = x,\ y = C_1 e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}$

(d) $y' \tan x - y = 1,\ y = C \sin x - 1$

(e) $xy' = y \ln \dfrac{y}{x},\ y = xe^{Cx+1}$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x,\ y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$

(g) $(y')^2 - y' - xy' + y = 0,\ y = Cx + C - C^2$

(h) $y''' + \dfrac{3}{x} y'' = 0,\ y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} + C_3$

(i) $xy\Big[1 - \Big(\dfrac{dy}{dx}\Big)^2\Big] = \Big(x^2 - y^2 - a^2\Big)\dfrac{dy}{dx},\ y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2 C}{1+C}$

20.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 20.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul*

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles dx *kordaja* $f(x)$ *sõltub ainult muutujast* x *ja* dy *kordaja* $g(y)$ *sõltub ainult muutujast* y.

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$. Võrrandi lahend ilmutamata kujul on

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

kus C on suvaline konstant

Definitsioon 20.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul*

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

milles dx *ja* dy *kordajad on kahe antud funktsiooni korrutised, millest üks sõltub ainult muutujast* x *ja teine sõltub ainult muutujast* y.

Muutujate eraldamiseks jagame võrrandi mõlemaid pooli järgmise avaldisega (tuleb jagada läbi dx kordajaga $g_1(y)$, sest ta sõltub muutujast y ja dy kordajaga $f_2(x)$, sest ta sõltub muutujast y ehk nende funktsioonide korrutisega, mis sisaldavad teist muutujat, kui on diferentsiaal)

$$| : g_1(y) \cdot f_2(x)$$

Saame eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Ülesanne 20.6. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Joonestada mõned integraaljooned.

(a) $dy = 2dx$

(b) $dy = \cos x dx$

(c) $dy = \dfrac{dx}{x}$

(d) $dy = e^x dx$

(e) $\dfrac{1}{x^4}y' = 1$

(f) $yy' - x = 5$

(g) $xy' = x + 1$

(h) $y' = \dfrac{1}{y}$

(i) $y' = 2\sqrt{y}$

(j) $xy' = y + 1$

Ülesanne 20.7. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $x(yy' - x + 1) = -1$

(b) $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$

(c) $y(x - 1)y' - 1/(y + 1) = 0$

(d) $xy' = y(y - 1)$

(e) $x(x + 1)y' + y = y^2$

(f) $2yy' \cos x = 1$

(g) $(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(h) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(i) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$

Erilahendi saamiseks asendame üldlahendisse algtingimuse ja avaldame saadud võrdusest konstandi C.

Ülesanne 20.8. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi erilahend.

(a) $y(x^2 - 1)y' = xy^2 + x,\ y(2) = -1$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y},\ y(0) = 0$

(c) $y^2y' + 2x = 1,\ y(2) = -1$

(d) $yxdy + (x^2 - 1)dx = 0,\ y(1) = 0$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = (1 + y^2)/(1 + x^2),\ y(0) = 1$

Ülesanne 20.9. (K) Leidke n-ndat järku keemilise reaktsiooni toimumisel ühe lähteainega antud algtingimusel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = -kx^n, \quad x(0) = a, \quad n > 1.$$

Ülesanne 20.10. (K) Leidke kolmandat järku keemilise reaktsiooni $A + 2B$ toimumisel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-2x)^2,$$

kus a ja b on vastavalt lähteainete A ja B algkogused. Algtingimuseks on $x(0) = 0$.

Ülesanne 20.11. (K) Leida raadiumi massi muutumise seadus sõltuvalt ajast, kui ajamomendil $t = 0$ on raadiumi mass m_0.

Olgu ajamomendil t raadiumi mass m, ajamomendil $t + \Delta t$ vastavalt $m + \Delta m$.
Ajavahemikus Δt lagunenud raadiumi mass on Δm. Suhe $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ on keskmine raadiumi lagunemiskiirus. Selle suhte piirväärtus

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

on raadiumi lagunemise kiirus ajamomendil t. Radioaktiivse aine lagunemise seadus ütleb, et lagunemise kiirus on võrdeline (veel lagunemata) aine hulgaga m.
Lahendage raadiumi lagunemisele vastav diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

kus $k > 0$ on võrdetegur. Miinusmärk näitab, et aja kasvades raadiumi mass kahaneb.

Ülesanne 20.12. (F) Leidke, palju jääb soola 1000 liitrises mahutis olevasse soolvee lahusesse 40 minuti pärast.

Olgu algselt soola soolalahuses 50 kilogrammi. Lahusele lisatakse konstantse kiirusega 10 liitrit minutis soolvett, mis sisaldab 10 grammi soola liitri vee kohta.
Samal ajal voolab lahus ka mahutist välja kiirusega 10 liitrit minutis, lahus segatakse mahutis ja lahuse hulk mahutis on püsivalt 1000 liitrit. Olgu otsitav soola kogus kilogrammides ajahetkel t tähistatud $x(t)$, siis soola on ajahetkel t mahutis $\dfrac{x(t)}{1000}$ kilogrammi liitri kohta.

Ülesanne 20.13. $< * >$ **Kahe liigi kooslus (kiskjad ja saakloomad). Olgu $x(t)$ jäneste ja $y(t)$ huntide arv ajamomendil t.**

Modelleerime nende kahe populatsiooni kooseksisteerimise lihtsustatud kujul, kus jänesed on huntide ainsaks toiduks ja neil pole teisi looduslikke vaenlasi, jäneste toidulaual ei ole piiranguid, kuna hundid ei lase neil liialt paljuneda. Jäneste ja huntide kooseksisteerimist saab kirjeldada diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + b_1xy}{ax - a_1xy},$$

kus a, a_1, b, b_1 on mingid positiivsed konstandid. Leidke diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Praktikum 21

Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

21.1 Homogeensed funktsiooonid

Definitsioon 21.1

*Olgu D mingi piirkond xy-tasandil, mis koos iga punktiga $(x, y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$. Sellises piirkonnas määratud funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse **k-astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x, y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus*

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

kus k on reaalarv ja $t > 0$.

Ülesanne 21.1. Leidke järgmiste funktsioonide jaoks homogeensuse aste k.

(a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{y - x}$

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \log \dfrac{x}{y}$

(c) $z = x^2 + y^2 - xy$

(d) $z = x^2\sqrt{y} - y^{\frac{5}{2}}$

(e) $z = \dfrac{x + y}{x^2 - y^2}$

21.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 21.2

***Homogeenseks** diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit $y' = f(x, y)$, kui $f(x, y)$ on 0-astme homogeenne funktsioon:*

$$f(tx, ty) = f(x, y), t > 0.$$

Homogeenne diferentsiaalvõrrand taandub eralduvate muutujatega võrrandiks muutuja vahetusega

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = z \cdot x,$$

kus

$$z = z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Ülesanne 21.2. Leidke antud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $y(x - y)dx = x^2 dy$

(b) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

(c) $xyy' = x^2 + y^2$

(d) $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{x}{y} + 1$

(f) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

Ülesanne 21.3. (F) **Päikesekiirte koondamise ülesanne. Leidke, millise kujuga peegel peegeldab paralleelsed kiired ühte punkti.**

Tegemist on pöördpinnaga, mille telg on paralleelsete kiirte sihiline. Valime koordinaatteljestiku nii, et kiired tuleksid x telje suunast ja ning peegelduksid koordinaatide algusesse. Leidke joon $y = y(t)$, mille pöörlemisel ümber x telje tekib kõnealune pöördpind, kui vastav diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

21.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$y' = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right).$$

Kui $a_3 = b_3 = 0$, siis võrrand on homogeenne võrrand.
Võrrand teisendub homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks, kui determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0.$$

Muutuja vahetus on järgmine:

$$x = X + u, y = Y + v,$$

Diferentsiaalid on $dx = dX, dy = dY$. Saadud võrrand on homogeenne muutujate X ja Y suhtes. Konstandid u ja v leiame eeldusel, et vabaliikmed oleksid nullid:

$$\begin{aligned} a_1u + a_2v + a_3 &= 0; \\ b_1u + b_2v + b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Kui $D = 0$, siis muutuja vahetusega $z = a_1x + a_1y$ teisendub võrrand eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks

Ülesanne 21.4. Lahendage antud homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks teisenduvad võrrandid.

(a) $(x + y + 1)dx - (x - 1)dy = 0$

(b) $(y + 2)dx = (2z + y - 4)dy$

(c) $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$

(d) $(x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0$

Ülesanne 21.5. $< * >$ **Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand.**

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$$

Ülesanne 21.6. $< * >$ **Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand.**

$$(y' + 1)\ln\left(\frac{y + x}{x + 3}\right) = \frac{y + x}{x + 3}$$

Praktikum 22

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

22.1 Lineaarne diferentsiaalvõrrand

Definitsioon 22.1

***Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks** nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.*

Lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul on

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

kus $P(x)$ ja $Q(x)$ on antud pidevad funktsioonid vahemikus (a, b) ja $y = y(x)$ on otsitav.
Lineaarse diferentsiaalvõrrandi **üldlahend** avaldub valemiga

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Lahendamiseks on kaks erinevat meetodit:
1) **Muutuja vahetus**:

$$y = u \cdot v, \quad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Lahendus taandub kahe eralduvate muutujatega võrrandi lahendamisele:

$$a)\ \frac{du}{dx} + P(x)u = 0, \quad b)\ u\frac{dv}{dx} = Q(x).$$

2) **Konstantide varieerimise meetod**: lahendada vastav homogeenne võrrand, saadud üldlahendis vaadelda integreerimiskonstanti C, kui otsitavat argumendi x funktsiooni $C(x)$.

$$a)\ \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \quad b)\ y_h = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Ülesanne 22.1. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - 3\dfrac{y}{x} = x$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$

(c) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$

(d) $y' - y\cos x = x^2 e^{\sin x}$

(e) $xe^x y' + ye^x = 1$

(f) $y' = \dfrac{y+1}{x}$

(g) $y' + 2y = 4x$

(h) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(i) $y' + y = x$

(j) $xy' + y - e^x = 0,\ y(a) = b$

(k) $xy' \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(1) = 0$

Ülesanne 22.2. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktsioonipool induktiivsusega L.

Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktsioonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a\sin(\omega t)$.

Ülesanne 22.3. (K) Esimest järku keemiliste reaktsioonide protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:

$$A \longrightarrow^{k_1} B \longrightarrow^{k_2} C \longrightarrow^{k_3} D$$

ja modelleeritakse järgmiste võrranditega

$$\frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x), \quad \frac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2y, \quad \frac{dz}{dx} = k_2y - k_3z.$$

Leidke aine C kontsentratsioon sõltuvalt ajast t.

Aine A kontsentratsioon alghetkel $t = 0$ on a ja ajahetkel t on $a - x$. Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on y. Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on z. Alustada tuleks esimese võrrandi lahendamisest, saadud lahend asendada teise võrrandisse, seejärel lahendada teine võrrand ja saadud lahend asendada kolmandasse.

22.2 Bernoulli diferentsiaalvõrrand

Definitsioon 22.2

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks *nimetatakse võrrandit kujul*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^a,$$

kus P ja Q on teadaolevad argumendi x funktsioonid, mis on pidevad vahemikus (c, d) ning a on mingi reaalarv, $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest siis on võrrand lineaarne).

Bernoulli võrrand on teisendatav lineaarseks võrrandiks järgmiselt:
a) jagame võrrandit suurusega $| : y^a$
b) teeme muutuja vahetuse $z = y^{1-a}$; $z' = (1-a)y^{-a}y'$

Ülesanne 22.4. Leidke antud Bernoulli diferentsiaalvõrrandi üldlahend (taandada lineaarseks võrrandiks).

(a) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2y}$

(b) $3y^2y' + y^3 = 1$

(c) $y' + 2y = y^2e^x$

(d) $(x+1)(y' + y^2) = -y$

(e) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

(f) $y' = (y + y^2)\cos x$

(g) $y' = y^4\cos^3 x + y\tan x$

(h) $xy^2dy = (x^2 + y^3)dx$

(i) $xydy = (y^2 + x)dx$

Ülesanne 22.5. $< * >$ **Leidke Bernoulli diferentsiaalvõrrandi $(xy + x^2y^3)dy = dx$ üldlahend.**

Praktikum 23

Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid, numbrilised meetodid

23.1 Eksaktse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 23.1

Diferentsiaalvõrrandit kujul

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

nimetatakse ***eksaktseks*** *ehk täisdiferentsiaaliga võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $u(x,y)$, nii et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Kui teadaolevad funktsioonid M ja N ning nende osatuletised $\frac{\partial M}{\partial y}$ ja $\frac{\partial N}{\partial x}$ on pidevad muutujate x, y mingis piirkonnas D, siis võrrandi **eksaktsuseks piirkonnas** D **on tarvilik ja piisav**, et iga $(x,y) \in D$ korral kehtib võrdus

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Eksaktse võrrandi võib kirjutada ka kujul $du(x,y) = 0$, millest $u(x,y) = C$.

Leiame funktsiooni $u(x,y)$ nii, et kehtivad võrdused

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M,\ \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Lahendus:

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y),$$

kus $C(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y. Valime $C(y)$ nii, et oleks täidetud ka teine pool seosest, ehk

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Ülesanne 23.1. Leidke antud eksaktse diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

(a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

(b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

(c) $(y^3 - x)y' = y$

(d) $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy = 0$

(e) $xe^x y' + ye^x = 1$

(f) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

(g) $\frac{xdx + (2x+y)dy}{(x+y)^2} = 0$

(h) $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

(i) $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$

(j) $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$

(k) $(y^3 - x)dy = ydx$

(l) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right) dx - \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}} dy = 0$

(m) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$

(n) $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})dy$

Ülesanne 23.2. $<*>$ **Leidke tingimus, millal võrrand** $y' = e^{x+f(y)}$ **on eksaktne**

23.2 Diferentsiaalvõrrandite numbriline lahendamine

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesannet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y(x_0) = y_0. \tag{23.1}$$

Tahame teada funktsiooni väärtust punktis $x = b$, otsitavaks funktsiooniks on $y = y(x)$.

Euleri meetod.

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

kus $h = x_i - x_{i-1}$

Euleri meetodil leitavad suurused on Cauchy ülesande lähisväärtused $x = x_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ korral.

Runge-Kutta 4. järku meetod.

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}), \ k_2 = f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3 = f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, \ y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3).$$

Ülesanne 23.3. **Leidke Euleri meetodi abil diferentsiaalvõrrandi lahendi lähisväärtused argumendi väärtustel** $x_i = x_0 + 0.1i$ $(i = 1, 2, 3)$.

(a) $y' = \dfrac{y}{x}, \ y(1) = 1$

(b) $y' = 1 + x + y^2, \ y(0) = 1$

(c) $y' = x^2 + y^2, \ y(0) = 0$

(d) $y' = \dfrac{y - x}{y + x}, \ y(0) = 1$

(e) $y' = y^2 + \dfrac{y}{x}, \ y(2) = 4$

Ülesanne 23.4. $<*>$ **Leidke Runge-Kutta 4. järku meetodi abil diferentsiaalvõrrandi** $y' = 1 + x^2 + y^2, \ y(1) = 0$ **lahendi lähisväärtused argumendi väärtustel** $x_i = x_0 + 0.1i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Praktikum 24

Teist järku diferentsiaalvõrrandid

24.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel

I Diferentsiaalvõrrand kujul $y'' = f(x)$.
Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järkjärgulise integreerimise teel. Kuna

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

siis integreerides saame

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

ja analoogiliselt teist korda integreerides jõuame otsitava lahendini y.

II Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y', y'') = 0$.
Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järgu alandamisel muutuja vahetusega

$$y' = u; \quad y'' = u'.$$

Originaalse diferentsiaalvõrrandi lahendi y leidmiseks on vaja leida muutuja vahetusega saadud diferentsiaalvõrrandi lahend u, asetada ta võrrandisse $y' = u$ ning saadud uus diferentsiaalvõrrand lahendada.

Ülesanne 24.1. **Lahendage diferentsiaalvõrrandid kaks korda järjest integreerides.**

(a) $xy'' = 1$

(b) $\cos^2(x)y'' = 1$

(c) $xy'' = 1 + x^2$

(d) $y'' + (x + 1)^{-3} = (x - 1)^{-3}$

(e) $4y'' = 4e^x + 3x^{-5/2}$

(f) $y'' = \ln(x)$

Ülesanne 24.2. **Lahendage diferentsiaalvõrrandid järgu alandamise teel.**

(a) $(x - 1)y'' = y'$

(b) $x^2y'' + xy' = 1$

(c) $y' = xy'' + (y'')^2$

(d) $(x^2 + 1)y'' = 2xy'$

(e) $xy'' = y'$

(f) $xy'' = -y'$

(g) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$

(h) $xy'' = y' + x^2$

(i) $y' = x\ln(x)y''$

(j) $xy'' = y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

(k) $x^2y'' = (y')^2$

24.2 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 24.1

***Teist järku konstantsete kordajatega lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand** omab kuju*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0,$$

kus a, b on konstandid.

Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarse homogeense võrrandi lahendid, siis on lahendiks ka nende erilahendite lineaarne kombinatsioon $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$. Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on **lineaarselt sõltumatud erilahendid**, siis on $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ antud lineaarse võrrandi **üldlahend**.

Antud konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on vaja leida sellele vastav **karakteristlik võrrand**

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid k_1, k_2 ja suurus $D = a^2 - 4b$ määravad antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi kuju:

$$D > 0, y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}, \tag{24.1}$$

$$D = 0, y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x), \tag{24.2}$$

$$D < 0, y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-D}. \tag{24.3}$$

Ülesanne 24.3. Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 2y$

(b) $y'' = 2y'$

(c) $y'' = 4y' - 5y$

(d) $y'' + 4y = 0$

(e) $y'' = 2y' - y$

(f) $y'' - 7y' = 0$

(g) $3y'' = 5y';\ y(0) = 2;\ y'(0) = \frac{5}{3}$

(h) $2y'' + 3y' = 2y$

(i) $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$

(j) $y'' + 9y = 0$

(k) $y'' + 7y' + 17y = 0$

(l) $y''+4y'-5y = 0;\ y(-1) = 0;\ y'(-1) = 1$

(m) $y'' = 2(3y' - 5y);\ y(0) = 1;\ y'(0) = 4$

Ülesanne 24.4. (M) $< * >$ **Leidke diferentsiaalvõrrandi $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$ üldlahend. Määrake millise parameetri α väärtuse korral üldlahend läheneb nullile protsessis $x \to \infty$.**

Ülesanne 24.5. (M) $< * >$ **Leidke diferentsiaalvõrrandi $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$ üldlahend. Määrake millise parameetri β väärtuse korral üldlahend läheneb nullile protsessis $x \to \infty$.**

Praktikum 25

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

25.1 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 25.1

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand *omab kuju*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = F(x),$$

kus a, b on konstandid ja $F(x)$ on argumendi x funktsioon.

Antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi **üldlahend** on esitatav kujul

$$y = y_* + Y,$$

kus y_* on vastava **homogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

üldlahend ja Y on antud **mittehomogeense võrrandi** üks **erilahend**.

Ülesanne 25.1. **Lahendage järgmised lineaarsed mittehomogeensed võrrandid.**

(a) $y'' + y' = 3x^2$

(b) $y'' + y' = 3$

(c) $y'' - y = 4e^x$

(d) $y'' + y = 4xe^x$

(e) $y'' + y = 4\sin(x)$

(f) $y'' + y = x\sin(x)$

(g) $y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x$

(h) $y'' - y' = e^x + x$

(i) $y'' + 4y' + 3y = x$

(j) $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

Ülesanne 25.2. **Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.**

(a) $y'' - 7y' + 12y = x$

(b) $y'' + y' = 8x^3 + 24x^2 - 10x$

(c) $y'' - 3y' + 9x^2 + 6x - 13 = 0$

(d) $y'' - 4y' - 5y = x^3 + 1$

(e) $y'' + 4y = 2x + 3$

(f) $y'' - y' - 2y = 4e^{2x}$

(g) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

(h) $y'' + 3y' + 2y = 6e^{-5x}$

(i) $y'' - 7y' + 6y = \sin(x)$

(j) $y'' - 4y' - y = \sin(x)$

(k) $y'' + 9y = \sin(3x)$

(l) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$

(m) $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$

Ülesanne 25.3. **Leidke diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on**

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Ülesanne 25.4. **Leidke diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on**

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-t/2}.$$

Ülesanne 25.5. **Näidake Euleri võrduse abil, et**

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Ülesanne 25.6. **Leidke Cauchy ülesande**

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b$$

lahend y.

Ülesanne 25.7. (M) $< * >$ **Näidake, et kui** a, b **ja** c **on positiivsed konstandid, siis kõik diferentsiaalvõrrandi**

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid lähenevad nullile protsessis $x \to \infty$.

Ülesanne 25.8. (M) $< * >$ **Näidake, et kui** a **ja** c **on positiivsed konstandid ning** $b = 0$, **siis kõik diferentsiaalvõrrandi**

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid on tõkestatud protsessis $x \to \infty$.

Ülesanne 25.9. (M) $< * >$ **Näidake, et kui** a **ja** b **on positiivsed konstandid ning** $c = 0$, **siis kõik diferentsiaalvõrrandi**

$$ay'' + by' + cy = 0$$

lahendid lähenevad kindlale konstantile protsessis $x \to \infty$, **mis sõltub diferentsiaalvõrrandi algtingimustest. Leidke vastav konstant, kasutades diferentsiaalvõrrandi algtingimusi** $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Praktikum 26

Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

26.1 Teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Definitsioon 26.1

Teist järku lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand *omab kuju*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0,$$

kus $p_1(x), p_2(x)$ *on argumendi* x *funktsioonid.*
Teist järku lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand *omab kuju*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = F(x),$$

kus $p_1(x), p_2(x)$ *ja* $F(x)$ *on argumendi* x *funktsioonid.*

Kui on teada teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

üks erilahend y_1, siis saab antud diferentsiaalvõrrandi alandada esimest järku diferentsiaalvõrrandiks **Liouville'i-Ostrogradski valemi** abil:

$$y'y_1 - y_1'y = Ce^{-\int p_1(x)dx}, \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2}$$

Ülesanne 26.1. Lahendage järgmised teist järku lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid, kasutades Liouville'i-Ostrogradski valemit.

(a) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0;\ y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(b) $xy'' + 2y' - xy = 0;\ y_1 = \frac{e^x}{x}$

(c) $y'' - 2(1 + \tan^2(x))y = 0;\ y_1 = \tan(x)$

(d) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0;\ y_1 = e^x - 1$

(e) $y'' + y'\tan(x) - y\cos^2(x) = 0;\ y_1 = e^{\sin(x)}$

(f) $y'' + y'(\tan(x) - 2\cot(x)) + 2y\cot^2(x) = 0;\ y_1 = \sin(x)$

(g) $x^2y'' - 2xy' + (3x^2 + 2)y = 0;\ y_1 = x\cos(2x)$

(h) $y'' - \frac{2y}{\cos^2(x)} = 0;\ y_1 = \tan(x)$

(i) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

(j) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$

(k) $x^2y''\ln(x) - xy' + y = 0$

(l) $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$

(m) $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$

(n) $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

(o) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$

Kui on teada **homogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = 0$$

üldlahend $y_* = C_1 y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ ja **mittehomogeense võrrandi**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y = F(x)$$

üks **erilahend** Y, siis **mittehomogeense võrrandi üldlahend** y avaldub kujul

$$y = Y + y_* = Y + C_1 y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Ülesanne 26.2. Lahendage järgmised teist järku lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 3$

(b) $y'' + y' = 3x^2$

(c) $y'' - y = 4e^x$

(d) $y'' + 3y' + 3y = x$

(e) $y'' + y' + e^{-2x} y = e^{-3x};\ y_1 = \cos(e^{-x})$

(f) $y'' + y' + e^{2x} y = xe^{2x} - 1;\ y_1 = \sin(e^x)$

(g) $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x};\ y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(h) $x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4;\ y_1 = \frac{1}{x}$

(i) $xy'' - (1 - 2x^2)y' = 4x^3 e^{x^2}$

(j) $y'' - 2y' \tan(x) = 1$

(k) $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2 e^{-x},\ 0 < x < 1$

(l) $x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3,\ x > 0$

Ülesanne 26.3. Lahendage Cauchy ülesanded.

(a) $(x+2)^5 y'' = 1,\ 12y(-1) = 1,\ 4y'(-1) = -1$

(b) $y'' = e^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

(c) $2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'},\ 5y(1) = \sqrt{2},\ 2y'(1) = \sqrt{2}$

(d) $(x^2+1)y'' = 2xy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

Ülesanne 26.4. Skitseerige Cauchy ülesande

$$(x^2 - 3x)y'' + xy' - (x+3)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

lahendi graafik.

Ülesanne 26.5. (M) $<*>$ Olgu meil diferentsiaalvõrrand

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kus p ja q pidevad funktsioonid ning y_1 ja y_2 on diferentsiaalvõrrandi lahendid vahemikus (a, b). Näidake, et kui leidub punkt vahemikus (a, b), kus y_1 ja y_2 on samaaegselt võrdsed nulliga, siis nad ei saa olla antud diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid.

Ülesanne 26.6. (M) $<*>$ Olgu y_1 ja y_2 diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

fundamentaallahendid. Näidake, et funktsiooni y_1 kahe järjestikuse nullkoha vahel leidub üks ja ainult üks funktsiooni y_2 nullkoht.

Praktikum 27

Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 27.1

Lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrandi *üldkujul on*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

kus $p_1, \ldots, p_n$ on pidevad funktsioonid.
Lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrandi *üldkujul on*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

kus $p_1, \ldots, p_n$ ja f on pidevad funktsioonid.

Kui on teada lineaarse homogeense võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, siis selle võrrandi üldlahendiks on

$$y_* = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x).$$

Kui on teada lineaarsele mittehomogeensele võrrandile vastava lineaarse homogeense võrrandi üldlahend y_* ja mittehomogeense võrrandi üks erilahend Y, siis mittehomogeense võrrandi üldlahend y avaldub kujul

$$y = Y + y_* = Y + \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x).$$

Lineaarse homogeense võrrandi järku võime vähendada asendusega

$$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z'), \quad y''' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

jne. Tuleb märkida, et sellisel juhul ei pruugi saadud võrrand enam lineaarne olla. Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis asendustega

$$y = y_1 z, \quad z' = u,$$

saame madalamat järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi.

Ülesanne 27.1. Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' - 8y = 0$

(b) $y^{(4)} - y = 0$

(c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(d) $y^{(5)} - y^{(4)} = xe^x - 1$

(e) $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$

(f) $y''' - y' = 2\sin(x)$

Definitsioon 27.2

Diferentsiaalvõrrandit

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

nimetatakse n-järku hariliku diferentsiaalvõrrandi ***üldkujuks****.*

Üks meetod kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on **järgu alandamine**. Sõltuvalt võrrandi kujust on mõningatel juhtudel võimalik leida originaalse diferentsiaalvõrrandi lahend, kasutades madalama järguga diferentsiaalvõrrandi lahendit. Vastav metoodika sõltub orginaalse diferentsiaalvõrrandi kujust. Toome järgnevalt mõned erijuhud.

I Diferentsiaalvõrrand kujul $y^{(n)} = F(x)$.
Antud juhul saab võrrandit lahendada tema järkjärgulise integreerimise teel. Kuna

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)}(x),$$

siis integreerides saame

$$y^{(n-1)} = \int F(x)dx + C_1$$

ja analoogiliselt $n-1$ korda jätkates jõuame otsitava lahendini y.

II Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$.
Antud juhul teeme diferentsiaalvõrrandis asenduse $y^{(k)} = z$ ja loeme $z = z(x)$ uueks otsitavaks funktsiooniks. Seega saame uue, $n-k$-järku diferentsiaalvõrrandi

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Lahendades selle võrrandi oleme leidnud funktsiooni $z = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$, kus $C_1, \dots, C_{n-k}$ on konstandid. Seose $z = y^{(k)}$ tõttu jääb veel lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^{(k)} = \phi(x, C_1, \dots, C_{n-k}),$$

mille lahend y on ka originaalse diferentsiaalvõrrandi lahend.

Ülesanne 27.2. Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' + \cos(x) = 0$

(b) $x^3 y''' = 2$

(c) $y^{(4)} = \mathrm{ch}(x)$

(d) $2y''' + (y'')^3 = 0$

(e) $y''' = ((y'')^2 + 1)^{1/2}$

(f) $xy^{(5)} = y^{(4)}$

(g) $y''' = (y'')^2$

(h) $y''' = 2(y'' - 1)\cot(x)$

(i) $xy''' = y'' - xy''$

Ülesanne 27.3. (M) $< * >$ Selgitage, kas diferentsiaalvõrrandi

$$y''' = x + y^2$$

kahe lahendi graafikud võivad teineteisega lõikuda xy-tasandi mingis punktis.

Praktikum 28

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkuju on järgmine:

$$\begin{array}{rcl} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}) & = & 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}) & = & 0, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ F_m(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(n_m)}) & = & 0. \end{array} \tag{28.1}$$

Arvu $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi (28.1) järguks. Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (28.1) lahendiks nimetatakse m funktsioonist koosnevat funktsioonide komplekti $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$, mis on määratud mingis vahemikus (a, b) ja mille korral on rahuldatud süsteemi (28.1) kõik võrrandid

Ülesanne 28.1. **Näidake, et funktsioonide süsteem $y = -x^{-2}$, $z = -x \ln x$ on diferentsiaalvõrrandite süsteemi**

$$y' = 2xy^2, \quad z' = zx^{-1} - 1$$

lahendiks.

Ülesanne 28.2. **Näidake, et funktsioonide süsteem $y = x$, $z = 2e^x$ on diferentsiaalvõrrandite süsteemi**

$$y' = e^{x-y}, \quad z' = 2e^y$$

lahendiks.

Ülesanne 28.3. (M) **Näidake, et süsteemi $y' = -z$, $z' = y$ üldlahendiks on**

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x), \quad z = C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x),$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Ülesanne 28.4. (M) $< * >$ **Näidake, et süsteemi**

$$y' = \frac{y^2}{z^2}, \quad z' = \frac{y}{x}$$

üldlahendiks on

$$y = C_1(C_2 x + C_2), \quad z = C_1 x + C_2,$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid, mis ei ole korraga võrdsed nulliga.

Normaalkujuline ehk normaalne n-järku diferentsiaalvõrrandite süsteem on kujul

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' & = & f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{array} \tag{28.2}$$

Ülesanne 28.5. **Teisendage järgmised diferentsiaalvõrrandite süsteemid normaalkujulisteks süsteemideks.**

(a) $y'' - z = 0,\ x^3z' - 2y = 0$

(b) $y'' + 2y = 2z',\ 3y' + z'' = 8z$

(c) $y'' + 3z'' = y,\ y' + 3z' = 2z$

(d) $y'' + 5y' + 2z' + z = 0,$
$3y'' + 5y + z' + 3z = 0$

(e) $y'' + 2z'' - 2z = y,\ z' + y' + z = 0$

(f) $y'' + z' + y = 3z + 2z'',$
$4z'' + 5z = 2y'' + y' + 2y$

(g) $y'' = z + 2z' + 2y - 4y',$
$y'' - z'' = 4y' - 2z' - 2z$

(h) $2y'' + 3z'' + 2y' + y + z' + z = 0,$
$z = 3z'' + 2z' + y'' + 4y' - y$

Ülesanne 28.6. (M) $< * >$ Teisendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y'' = f(x, y, z),\ \ z'' = g(y, z, w),\ \ w'' = h(y, z, w)$$

normaalkujuliseks süsteemiks.

Ülesanne 28.7. Lahendage lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

(a) $y' = 2y + z,\ z' = 2y + 4z$

(b) $y' = y - z,\ z' = z - 4y$

(c) $\frac{dx}{dt} + x - 8y = 0,\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0$

(d) $\frac{dx}{dt} = x + y,\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x$

(e) $\frac{dx}{dt} = x - 3y,\ \frac{dy}{dt} = 3x + y$

(f) $\frac{dx}{dt} + x + 5y = 0,\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0$

(g) $\frac{dx}{dt} = 3x - y,\ \frac{dy}{dt} = 4x - y$

(h) $\frac{dx}{dt} = 2y - 3x,\ \frac{dx}{dt} = y - 2x$

(i) $y' = z - y,\ z' = -3z - y$

(j) $y' = y - z,\ z' = z - y$

Ülesanne 28.8. Lahendage lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

(a) $y' = z,\ z' = 1 - y$

(b) $y' = -z + \sin(x),\ z' = y + \cos(x)$

(c) $y' = y + z + e^x,\ z' = y + z - e^x$

(d) $y' + z = x^2,\ z' - y = x$

(e) $\frac{dx}{dt} = y - 5\cos(t),\ \frac{dy}{dt} = 2x + y$

(f) $\frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t},\ \frac{dy}{dt} = x + 2y$

(g) $\frac{dx}{dt} = 2y - x + 1,\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x$

(h) $\frac{dx}{dt} = 2x - 4y,\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t$

(i) $\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos(t)}$

(j) $\frac{dx}{dt} = 3x - 2y,\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t t^{\frac{1}{2}}$

Ülesanne 28.9. Lahendage differentsiaalvõrrandite süsteemid.

(a) $y' = z,\ z' = -y$

(b) $y' = z + 1,\ z' = y + 1$

(c) $y' = 1 - \frac{1}{z},\ z' = \frac{1}{y - x}$

(d) $y' = z,\ z' = \frac{z^2}{y}$

(e) $y' = \frac{2x}{1 + x^2},\ z' = y + x - \frac{z}{x}$

(f) $y' = \frac{x}{z},\ z' = -\frac{x}{y}$

(g) $y' = \frac{y^2}{z - x},\ z' = y + 1$

(h) $y' = \frac{z}{x},\ z' = \frac{z(y + 2z - 1)}{x(y - 1)}$

(i) $y' = y^2 z,\ z' = x^{-1}z - yz^2$

(j) $y' = 2xy,\ z' = (z - x)x^{-1}$

(k) $y' = 1 + z^{-1},\ z' = z^2$

(l) $y' = z^2 + \sin(x),\ z' = y(2z)^{-1}$

(m) $y' = y + z,\ z' = -5z$

(n) $4y' - z' + 3y = \sin(x),\ y' + z = \cos(x)$

(o) $\frac{dx}{dt} = y + z,\ \frac{dy}{dt} = x + z,\ \frac{dz}{dt} = x + y$

(p) $\frac{dx}{dt} = z - y,\ \frac{dy}{dt} = z,\ \frac{dz}{dt} = z - x$

(q) $\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = x,\ \frac{dz}{dt} = x + y + z$

(r) $\frac{dx}{dt} = 2x - y + z,\ \frac{dy}{dt} = 2y - z,\ \frac{dz}{dt} = z$

(s) $\frac{dx}{dt} = -9y$, $\frac{dy}{dt} = x$

(t) $\frac{dx}{dt} = y + t$, $\frac{dy}{dt} = x - t$

(u) $\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0$, $\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0$;

$x(0) = 1$, $y(0) = 4$

(v) $\frac{dx}{dt} = x + 5y$, $\frac{dy}{dt} = -x - 3y$, $x(0) = -2$, $y(0) = 1$

Ülesanne 28.10. Lahendage differentsiaalvõrrandite süsteemid integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

(a) $y' = y^2 + z^2$, $z' = 2yz$

(b) $y' = \frac{z}{(z-y)^2}$, $z' = \frac{y}{(z-y)^2}$

(c) $y' = \frac{y}{z}$, $z' = \frac{z}{y}$

(d) $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}$

(e) $\frac{dx}{dt} = \sin(x)\cos(y)$, $\frac{dy}{dt} = \cos(x)\sin(y)$

(f) $e^t \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}$, $e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$

(g) $\frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{2x(x^2-y^2-1)}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{x^2-1}{2y(x^2-y^2-1)}$

(h) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}$

Ülesanne 28.11. Lahendage vektorkujul esitatud diferentsiaalvõrrandite süsteemid, kus A on antud maatriks ja $y = y(x)$ on otsitav vektorfunktsioon.

(a) $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $y' = yA$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $y' = yA$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

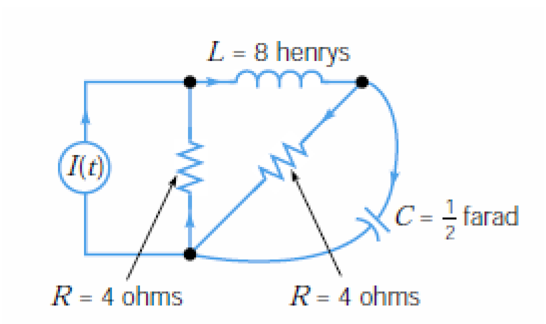
(g) $y' = Ay$, $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(h) $y' = Ay$, $y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^5 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(i) $y' = yA$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



Ülesanne 28.12. (F) **Joonisel kujutatud vooluahelat kirjeldab diferentsiaalvõrrandite süsteem**

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \tag{28.3}$$

kus $I(t)$ on allika voolutugevus. Eeldades, et $I(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, leidke süsteemi (28.3) lahend algtingimusel $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Praktikum 29

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Võrrandit, mis seob otsitavat mitme muutuja funktsiooni tema osatuletistega ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks. Kahe muutuja x ja y korral on esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist funktsiooni $u(x, y)$, mis sellesse võrrandisse asetatuna muudab võrrandi samasuseks. Kui hariliku esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sõltub argumendist ja ühest suvalisest konstandist, siis esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi korral võib lahend sõltuda ühest suvaliselt funktsioonist. Geomeetriliselt vastab võrrandile $u = u(x, y)$ pind ruumis, seda pinda nimetatakse integraalpinnaks.
Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Ülesanne 29.1. Näidake, et $u(x,t) = 3x^2 - 2x\alpha t + 3\alpha^2 t^2$ on lainevõrrandi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ lahend.

Ülesanne 29.2. Näidake, et $u(x,t) = a\sin(bx)\cos(\alpha bt)$: (i) on lainevõrrandi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ lahend, (ii) omab kuju $u(x,t) = F(x + vt) + G(x - vt)$.

Ülesanne 29.3. (M) $< * >$ Leidke funktsioonid $V = V(x)$, mille korral $u(x,t) = V(x)e^{Ct}$ $(C = \text{const})$ on difusioonivõrrandi $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(D = \text{const})$ lahenditeks.

Ülesanne 29.4. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid.

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0$ (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

Cauchy ülesanne osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks: otsitava erilahendi jaoks on vaja teada ruumilist kõverat, millest vastav integraalpind läbi läheb. Selle kõvera võrrandid võivad olla antud ristkoordinaatides

$$\begin{cases} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{cases}$$

või parameetrilisel kujul: leida integraalpind, mis läbib kõverat $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $u = \chi(t)$, kus parameeter t muutub mingis vahemikus (t_1, t_2). Tuleb leida selline võrrandi lahend, mille korral

$$\Phi(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = 0.$$

Algtingimused

$$u(x, y_0) = f(x), \quad u(x_0, y) = g(y).$$

Ülesanne 29.5. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandite Cauchy ülesanded.

(a) $x\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$; $u(x,1) = x^2$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = xy$; $u = 1$; $x^2 + y^2 = 1$

(c) $x\frac{\partial u}{\partial x} = y$; $u(1,y) = y^2$

(d) $x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; $u\left(\frac{1}{y}, y\right) = y$

Ülesanne 29.6. Leidke Laplace'i võrrandi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ üldlahend ristkülikus $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ rajatingimustel

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \quad u(a,y) = 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad u(x,b) = f(x), \end{aligned}$$

kus $f(x)$ on suvaline funktsioon.

Ülesanne 29.7. (F) Leidke järgmise soojusjuhtivuse (difusiooni) ülesande lahend.

$$\begin{gathered} 100\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) - \sin(5\pi x), \quad 0 \le x \le 2 \end{gathered}$$

Ülesanne 29.8. (F) Vaatleme varrast pikkusega 40 cm, mille difusiooni kordaja $D = 1$.

Varda otstes hoitakse iga $t > 0$ korral temperatuuri $0°$C. Leidke, kuidas avaldub temperatuur vardas $u(x,t)$ hetkel t $(0 \le x \le 40)$, kui ajahetkel $t = 0$ kirjeldab temperatuuri jaotumist vardas funktsioon

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 10, \\ 50°, & 10 \le x \le 30, \\ 0, & 30 < x \le 40. \end{cases}$$

Ülesanne 29.9. (F) Vaatleme isoleeritud otstega varrast pikkusega 30 cm, mille difusiooni kordaja $D = 1$.

Eeldame, et esialgne temperatuur vardas on võrdne nulliga kõikjal välja arvatud vahemikus $5 < x < 10$, kus see on $25°$C. Leidke temperatuuri kirjeldav funktsioon $u(x,t)$ ning joonistage graafikud $u(4,t)$ ja $u(11,t)$.

Ülesanne 29.10. (F) Vaatleme alumiiniumist $(D = 0.86)$ varrast pikkusega 20 cm, mille esialgne temperatuur on $25°$C.

Hetkel $t = 0$ jahutatakse ots $x = 0$ temperatuurini $0°$C ning ots $x = 20$ soojendatakse temperatuurini $60°$C ning mõlemas otsas hoitakse saavutatud temperatuuri. Leidke temperatuuri jaotus vardas $u(x,t)$ suvalisel ajahetkel t ning joonistage $u(x,t)$ graafikud kui $x = 5, 10, 15$.

Ülesanne 29.11. (F) Vaatleme elastset pillikeelt pikkusega L, mis on mõlemas otspunktis kinnitatud.

Leidke keele võnkumise eeskiri $u(x,t)$, kui alghetkel on keel asendis

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, & 0 \le x < \frac{L}{2}, \\ \frac{2(L-x)}{L}, & \frac{L}{2} < x \le L. \end{cases}$$

Eeldame, et laine levimise kiirus $c = 1$.

Ülesanne 29.12. (F) Vaatleme elastset pillikeelt pikkusega L, mis on mõlemas otspunktis kinnitatud.

Leidke keele võnkumise eeskiri $u(x,t)$, kui alghetkel antakse tasakaaluasendis olevale keelele algkiirus

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 1, & \frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} + 1, \quad (L > 2) \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Eeldame, et laine levimise kiirus $c = 1$.

Ülesanne 29.13. (M) Näidake, et lainevõrrand

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

saab muutujavahetusega $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ kuju $\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Ülesanne 29.14. (M) $< * >$ Näidake, et funktsioon

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)d\xi$$

on ülesande

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

lahend.

Kui otsitav funktsioon $u = u(x,y)$ on kahe muutuja funktsioon, siis lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{29.1}$$

Võrrandi (29.1) lahendamiseks tuleb lahendada harilik diferentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{dx}{p(x,y)} = \frac{dy}{q(x,y)}. \tag{29.2}$$

Osatuletistega võrrandi (29.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi(x,y)),$$

kus ψ on sümmetrilise diferentsiaalvõrrandi (29.2) esimene integraal ja $\Psi(z)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Ülesanne 29.15. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x,y)$.

(a) $y\frac{\partial u}{\partial x} = x\frac{\partial u}{\partial y}$

(b) $y\frac{\partial u}{\partial x} = u$

(c) $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x - y$

(d) $2x\frac{\partial u}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0$

(e) $xy\frac{\partial u}{\partial x} - x^2\frac{\partial u}{\partial y} = yu$

(f) $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$

(g) $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = ux$

(h) $(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + u^2 = 0$

(i) $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$

(j) $xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = x$

(k) $e^x\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = ye^x$

(l) $\cos(y)\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(x)\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x)\cos(y)$

(m) $\frac{1}{\cos(x)}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u + \cot(y)$

(n) $\sin^2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \tan(u)\frac{\partial u}{\partial y} = \cos^2(u)$

Ülesanne 29.16. (K) Kemikaalide tehase radioaktiivset leket mõõdetakse punktis $x = 0$. Vastuvõetud signaali intensiivsus meenutab funktsiooni $h(t) = \frac{1}{1+t}$ kuju ($t \geq 0$).

Puhub läänetuul tugevusega $v = 2$ m/s ning radioaktiivsed osakesed lagunevad aktiivsusega $\lambda = -3\ \mathrm{s}^{-1}$. Selliste osakeste jaoks võib kasutada lineaarset transpordi võrrandit

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \lambda \cdot u(x,t),$$

kus $u(x,t)$ näitab osakeste kontsentratsiooni punktis x ajahetkel t.

(a) Näidake, et võrrandi lahend on alati kujul $u(x,t) = e^{\lambda t} f(x - vt)$, kus f on mingi sobiv diferentseeruv funktsioon.

(b) Leidke osakeste kontsentratsioon hetkel $t = 6$ s punktis $x = 150$ m.

Ülesanne 29.17. (B) Tähistagu $u = u(x,t)$ mingi liigi populatsiooni tihedust hetkel t punktis x. Kui liigi populatsiooni tihedus on juhusliku Brown'i liikumise sarnane, siis modelleeritakse seda sarnaselt soojusjuhtivuse difusioonivõrrandiga

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Oletame, et populatsioon elab peenikeses vardas otspunktidega $x = 0$ ja $x = \pi/2$. Olgu lihtsuse mõttes difusioonikonstant $D = 1$. Varda vasakpoolne ots on avatud ja parempoolne ots on suletud.

(a) Kirjutage välja vastavad rajatingimused, kui väljaspool varrast $u = 10$.

(b) Leidke populatsiooni tihedus punktis $x = 1$ hetkel $t = 10$, kui on teada, et $u(0,0) = 12$ ja $u_t(0,0) = -50$.

Praktikum 30

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitav funktsioon $u = u(x, y, z)$ on kolme muutuja funktsioon, siis lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$p(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{30.1}$$

Võrrandi (30.1) lahendamiseks tuleb lahendada sümmeetriline diferentsiaalvõrrandite süsteem kujul

$$\frac{dx}{p(x, y, z)} = \frac{dy}{q(x, y, z)} = \frac{dz}{k(x, y, z)}. \tag{30.2}$$

Osatuletistega võrrandi (30.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \Psi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)),$$

kus ψ_1, ψ_2 on sümmetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi (29.2) sõltumatud esimesed integraalid ja $\Psi(z_1, z_2)$ on pidevalt diferentseeruv funktsioon.

Ülesanne 30.1. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrand, otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y, z)$.

(a) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(b) $(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(c) $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(d) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$

(e) $(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2u\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

(f) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

Ülesanne 30.2. (M) Näidake, et kui võtta $\xi = \frac{x}{L}$, siis soojusjuhtivuse võrrand saab kuju

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{L^2}{D}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0.$$

Ülesanne 30.3. (M) Vaatleme ülesannet

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(L) = 0. \tag{30.3}$$

Olgu $\lambda = \mu^2$, kus $\mu = \nu + i\sigma$, $\nu, \sigma \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$. Näidake, et $\sigma \neq 0$ korral ülesande (30.3) lahendiks on ainult triviaalne lahend $X = 0$.

Ülesanne 30.4. (M) Vaatleme ülesannet

$$D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} + \gamma u(L,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L.$$

Eeldades, et u avaldub kujul $u(x,t) = X(x)T(t)$, näidake, et

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) + \gamma X(L) = 0$$

ja

$$T' + \lambda DT = 0.$$

Ülesanne 30.5. Leidke Laplace'i võrrandi

$$\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\theta)}{\partial \theta^2} = 0$$

lahend $u(r,\theta)$ väljaspool ringi raadisega $r = a$, mis rahuldab ringjoonel tingimusi

$$u(a,\theta) = f(\theta), \quad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Eeldame, et funktsioon $u(r,\theta)$ on tõkestatud kui $r > a$, $0 \le \theta < 2\pi$.

Ülesanne 30.6. Leidke Laplace'i võrrandi lahend $u(x,y)$ piirkonnas $0 < x < a$, $y > 0$, mis rahuldab rajatingimusi

$$u(0,v) = 0, \quad u(a,y) = 0, \quad y > 0$$
$$u(x,0) = x(a-x), \quad 0 \le x \le a$$

ning lisaks tingimust $u(x,y) \to 0$ kui $y \to \infty$.

Eeldades, et $a = 5$, leidke vähim y_0, mille korral $u(x,y) \le 0.1$ iga $y \ge y_0$.

Ülesanne 30.7. (M) $<*>$ Kui Laplace'i võrrandi lahend ei sõltu parameetrist θ, siis saab võrrandi silindriliste koordinaatide r, θ, z abil kirja panna kujul

$$\frac{\partial^2 u(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,z)}{\partial z^2} = 0.$$

Eeldades, et $u(r,z) = R(r)Z(z)$, näidake, et funktsioonide süsteem R, Z on diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0$$

lahendiks.

Ülesanne 30.8. Leidke antud võrrandi selline integraalpind $u = u(x,y)$, mis läbib antud joont.

(a) $x\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y}$; $y = 1$, $u = 2x$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $x = 0$, $u = y$

(c) $2\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y}$; $x = 1$, $u = y^2$

(d) $(1+x^2)\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; $x = 0$, $u = y^2$

(e) $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = u$; $y = x$, $u = x^3$

(f) $x\frac{\partial u}{\partial x} + (y+x^2)\frac{\partial u}{\partial y} = u$; $x = 2$, $u = y - 4$

(g) $yu\frac{\partial u}{\partial x} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = xy$; $x = a$, $y^2 + u^2 = a^2$, $a = \text{const}$

(h) $(x-u)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-u)\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$; $x - y = 2$, $u + 2x = 1$

(i) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{u}$, $u(2,y) = y$

(j) $xy\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0$; $u = 0$, $xy = a^2$, $a = \text{const}$

Praktikum 31

Kontrolltöö nr. 3

1. Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

1.1. **Eralduvate muutujatega** diferentsiaalvõrrandid
1.2. **Homogeensed** diferentsiaalvõrrandid (töös ei ole murdlineaarset funktsiooni sisaldavat võrrandit, mis taandub homogeenseks võrrandiks)
1.2. Esimest järku **lineaarsed** diferentsiaalvõrrandid (töös ei ole Bernoulli võrrandit, mis taandub lineaarseks võrrandiks)
1.3. **Eksaktsed** diferentsiaalvõrrandid

2. Teist järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

2.1. Teist järku **lineaarsed konstantsete kordajatega homogeensed** diferentsiaalvõrrandid
2.2. Teist järku **lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomogeensed** diferentsiaalvõrrandid

3. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

3.1. Diferentsiaalvõrrandite süsteemid (töös ei ole integreeruvate kombinatsioonide leidmise meetodit ega vektorkujul esitatud süsteemide lahendamist)

Praktikum 32

Kordamine eksamiks

32.1 Eksam aines Kõrgem matemaatika II

Eksam koosneb teooria ja ülesannete osast.

32.1.1 Eksami teooria osa

1. Mõisted, näited mõiste kohta
2. Valemi tuletamine või tõestus

32.1.2 Eksami ülesannete teemad

Diferentsiaalvõrrandid

1. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid
2. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Vastused

Praktikum 1

Vastus 1.3. **(a)** ei **(b)** ei **(c)** ei **(d)** jah **(e)** jah **(f)** ei

Vastus 1.6. ei

Vastus 1.7. **(a)** ei **(b)** ei **(c)** ei **(d)** jah **(e)** jah **(f)** jah **(g)** jah **(h)** ei **(i)** jah

Vastus 1.8. **(a)** jah **(b)** jah **(c)** ei **(d)** jah **(e)** jah **(f)** jah

Vastus 1.9. jah

Vastus 1.10. $k^3 - 2k = 0$

Vastus 1.11. $(k-l)(k-m)(l-m) = 0$

Vastus 1.12. **(a)** $-5a_1 + 4a_2 + a_3 = 0$ **(b)** $-5f_1 + 4f_2 + f_3 = 0$ **(c)** $-5z_1 + 4z_2 + z_3 = 0$ **(d)** $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

Vastus 1.14. **(a)** lineaarselt sõltumatu **(b)** $4(6x+9) - 3(8x+12) = 0$ **(c)** lineaarselt sõltumatu **(d)** $2(4-x) - 32(2x+3) + 11(6x+8) = 0$ **(e)** lineaarselt sõltumatu **(f)** lineaarselt sõltumatu **(g)** lineaarselt sõltumatu **(h)** lineaarselt sõltumatu

Praktikum 2

Vastus 2.1. **(a)** on **(b)** ei ole **(c)** on **(d)** on

Vastus 2.2. **(a)** on **(b)** on **(c)** on **(d)** on **(e)** on **(f)** ei ole **(g)** on **(h)** ei ole **(i)** on

Vastus 2.3. **(a)** $L(a_1, \ldots, a_5) = \{(x+2y+z, y+2z, y+3z, -x+4z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$ **(b)** $L(a_1, \ldots, a_4) = \{(x+2y, 2x+y, x+2y, y+2x) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$ **(c)** $L(a_1, \ldots, a_4) = \{(x+2y, x, x+y, 2x+y) \colon x, y \in \mathbb{R}\}$

Vastus 2.4. ei ole

Vastus 2.5. $(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5})$

Vastus 2.6. Olgu $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (0,1,1,1)$, $a_3 = (0,0,1,1)$, $a_4 = (3,2,1,0)$ ja $a_5 = (1,0,0,0)$. Siis **(a)** $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ **(b)** $\{a_1, a_2, a_3\}$ **(c)** $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ **(d)** $\{a_1, a_2, a_5\}$

Vastus 2.7. A koordinaadid on $(3, 4, -2)$ ja B koordinaadid on $(2, 5, 0)$

Vastus 2.8. **(a)** on baas, koordinaadid on $(3, 7, 13)$ **(b)** on baas, koordinaadid on $(-4, -6, 13)$ **(c)** on baas, koordinaadid on $(1, 1, 1)$

Vastus 2.9. Suvalise vektori (x_1, x_2, x_3) koordinaadid uue baasi suhtes on $(-3x_1-8x_2-5x_3, 2x_1+5x_2+3x_3, x_1+x_2+x_3)$. Seega vektori $(6, 2, -7)$ koordinaadid uue baasi suhtes on $(1, 1, 1)$.

Vastus 2.10. **(a)** Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ ja $a = -139e_1 + 38e_2 + 24e_3$, $a = e'_1 + e'_2 + e'_3$ **(b)** Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $a = 0e_1 + 2e_2$, $a = e'_1 + e'_2$ **(c)** Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $a = 2e_1 + 4e_2 + 5e_3 - 3e_4$, $a = 5e'_1 + 2e'_2 - 8e'_3 + 3e'_4$

Vastus 2.11. Vektori a koordinaadid uue baasi suhtes on $(-13, 6, -27)$

Praktikum 3

Vastus 3.1. **(a)** -24 **(b)** $3/2$ **(c)** 30 **(d)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(e)** -3 **(f)** 3

Vastus 3.2. **(a)** 2 **(b)** -3 **(c)** ülesanne pole lahenduv **(d)** 0

NB! Ülesande tekst on korrektne.

Vastus 3.3. **(a)** $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 3$ **(b)** 9

Vastus 3.4. 10

Vastus 3.5. $\sqrt{37}$

Vastus 3.6. $A(14; 0)$, $B(0; 14/3)$

Vastus 3.7. sirge $18x - 8y - 53 = 0$

Vastus 3.8. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{6}$

Vastus 3.9. **(a)** $\arccos(\sqrt{2}/10)$ **(b)** $\arccos(44/\sqrt{2170})$ **(c)** $\arccos(-2/\sqrt{21})$ **(d)** $\arccos(19/(5\sqrt{58}))$

Vastus 3.10. **(a)** nürinurga **(b)** kollineaarsed **(c)** risti **(d)** teravnurga

Vastus 3.11. $\pi/3$

Vastus 3.12. $\pi/4$

Praktikum 4

Vastus 4.1. **(a)** $6\sqrt{3}$ **(b)** 28 **(c)** 0 **(d)** 0

Vastus 4.2. $(5; 9; 17), 17(5; 9; 17), \vec{0}$

NB! Ülesande tekst on korrektne.

Vastus 4.3. -15

Vastus 4.4. **(a)** $2\sqrt{77}$ **(b)** $5\sqrt{3}$ **(c)** 0

Vastus 4.5. $72\sqrt{2}$

Vastus 4.6. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\vec{c} = \pm(\sqrt{5}/5)(\vec{a} \times \vec{b})$

Vastus 4.7. $(-8; 7; 5)$

Vastus 4.8. $(\sqrt{5}/25)(6; -5; -8)$

Vastus 4.9. **(a)** -48 **(b)** -30 **(c)** -24

Vastus 4.10. $V = 3, h_D = 6/\sqrt{59}$

Vastus 4.11. $D(0; 8; 0), D(0; -7; 0)$

Vastus 4.12. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 0$

Praktikum 5

Vastus 5.1. **(a)** $2y - 5z + 7 = 0$ **(b)** $3x + 4z - 9 = 0$ **(c)** $5x - 2y + 1 = 0$

Vastus 5.2. **(a)** $4x - y - 14z = 0$ **(b)** $x - y - z + 2 = 0$ **(c)** $3x + 3y + z - 8 = 0$

Vastus 5.3. **(a)** $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ **(b)** $x - 4y - 7z + 12 = 0$ **(c)** $4x - y - 3z + 20 = 0$

Vastus 5.4. $L(-4/11; -5/11; 13/11)$

Vastus 5.5. **(a)** $\pi_1 \perp \pi_2$ **(b)** $\varphi = \pi/4$ **(c)** $\pi_1 \parallel \pi_2$

Vastus 5.6. xy-tasand: $\arccos(|C|/|\vec{n}|)$, xz-tasand: $\arccos(|B|/|\vec{n}|)$, yz-tasand: $\arccos(|A|/|\vec{n}|)$, $\vec{n} = (A; B; C)$

Vastus 5.7. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

Vastus 5.8. $x + 20y + 7z - 12 = 0$, $x - z + 4 = 0$

Vastus 5.9. **(a)** 1 **(b)** 10

Vastus 5.10. $h_D = 6/\sqrt{59}$

Vastus 5.11. $AB : \left\{ \begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 8y + 3z - 17 = 0 \end{array} \right.$, $AC : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-8}$, $BC : \left\{ \begin{array}{l} y - 4 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{array} \right.$

Vastus 5.12. **(a)** $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{0}$ ehk $\left\{ \begin{array}{l} y - 4 = 0 \\ z + 7 = 0 \end{array} \right.$ **(b)** $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{4}$ **(c)** $\frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{8}$ **(d)** $\frac{x+3}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{1}$ ehk $\left\{ \begin{array}{l} x + 3 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{array} \right.$

Vastus 5.13. $\frac{x-2}{37} = \frac{y-3}{-25} = \frac{z-4}{-32}$

Vastus 5.14. $P_1(17/10; 0; 2/5)$, $P_2(-31/10; 0; 14/5)$

Vastus 5.15. **(a)** $\arcsin(\sqrt{26/35})$, $L(0; 0; -2)$ **(b)** paralleelsed, ei lõiku **(c)** $\arcsin(3/(2\sqrt{3003}))$, $L(2; 4; 6)$

Praktikum 6

Vastus 6.1. **(a)** $S_n = \frac{n}{n+1}$, $S = 1$ **(b)** $S_n = \frac{1}{3}\frac{n}{n+1}$, $S = \frac{1}{3}$ **(c)** $S_n = \frac{11}{18} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$, $S = \frac{11}{18}$ **(d)** $S_n = \frac{2n+2}{2n+3}$, $S = 1$ **(e)** $S_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $S = 1$ **(f)** $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S \to \infty$ **(g)** $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S \to \infty$ Rea summa võib tuletada kuupide järgi: $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)^3 - (n+1)^3$ **(h)** $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$, $S = 1$ **(i)** $S_n = \frac{4}{3}\left(1 - (-1/2)^{n+1}\right)$, $S = \frac{4}{3}$

Vastus 6.2. **(a)** $S_1 = \ln 3$, $a_n = \ln\frac{n+2}{n+1}$ **(b)** $S_1 = 2$, $a_n = \frac{-2}{n^2+n}$ **(c)** $S_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{-1}{n^2+n}$ **(d)** $S_1 = 2$, $a_n = 1$ **(e)** $S_1 = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{2n-1}{(n^2+2)(n^2-2n+3)}$ **(f)** $S_1 = 1$, $a_n = n^3$

Vastus 6.3. **(a)** Piirväärtust $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n$ ei leidu. Lisaks võib märgata, et $\lim\limits_{n\to\infty}|(-2)^n| = \infty \neq 0$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n-1} = \dfrac{2}{3} \neq 0$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty}(3n)^{-1/n} = 1 \neq 0$ **(d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n^6}{n^6+3} = -7 \neq 0$ **(e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{5}} = 1 \neq 0$ **(f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e \neq 0$

Vastus 6.5. **(a)** koondub, $S = \frac{15}{2}$ **(b)** hajub

> Ilmselt on tekstis n üleliigne (muidu ei ole geomeetriline rida), hetkel parandatud

(c) hajub, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ **(d)** koondub, $S = \frac{8e^4}{e-2}$ **(e)** koondub, $S = \frac{9}{8}$ **(f)** koondub, $S = \frac{11}{24}$

Vastus 6.6. 10/3 ehk 3.33(3) m.

Vastus 6.7. $\frac{81}{11}$

Vastus 6.8. 5/3 ehk 1.66(6)

Vastus 6.9. Umbes 51 aastaks ja 106 päevaks.

Vastus 6.12. **(a)** koondub kui geomeetriline rida, $S = 3$ **(b)** hajub kui harmooniline rida, $\alpha = 1$ **(c)** koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{e}{e-1}$ **(d)** hajub, kui geomeetriline rida, $q = \frac{5}{4} > 1$ **(e)** hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ **(f)** koondub, kui geomeetriline rida, $S = 2$ **(g)** hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = -0.9 \leq 1$ **(h)** koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{2}{3}$

Vastus 6.13. **(a)** koondub **(b)** hajub **(c)** hajub **(d)** koondub **(e)** hajub **(f)** koondub

Vastus 6.17. **(a)** hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub

> Indeks peab algama kahest, mitte ühest. Tekstis parandatud

(b) koondub, kuna (reast suurem) geomeetriline rida teguriga $q = 1/4$ koondub **(c)** hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub **(d)** koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub **(e)** hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub **(f)** hajub, kuna (reast väiksem) harmooniline rida hajub **(g)** hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub **(h)** koondub, kuna (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ koondub **(i)** hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub **(j)** koondub, kuna näiteks (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub **(k)** koondub, kuna näiteks ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 3 > 1$ koondub **(l)** koondub, kuna ekvivalentne geomeetriline rida teguriga $q = 2/5 < 1$ koondub

Praktikum 7

Vastus 7.1. **(a)** $D = 0 < 1$, koondub **(b)** $D = 2 > 1$, hajub **(c)** $D = \frac{1}{4} < 1$, koondub **(d)** $D = \frac{2}{5} < 1$, koondub **(e)** $D = 1$, tunnus ei tööta, hajub kui harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{1}{2}$ **(f)** $D = \frac{2}{3} < 1$, koondub **(g)** $D = 1$, tunnus ei tööta, koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega 2 koondub **(h)** $D = \frac{1}{e} < 1$, koondub **(i)** $D = 4 > 1$, hajub, (või siis näidata, et $u_n \to \infty$) **(j)** $D = 3 > 1$, hajub **(k)** $D = \frac{1}{25} < 1$, koondub **(l)** $D = \frac{3}{2} > 1$, hajub

Vastus 7.2. **(a)** $C = 0 < 1$, koondub **(b)** $C = \frac{3}{4} < 1$, koondub **(c)** $C = 2 > 1$, hajub **(d)** $C = \frac{3}{2} > 1$, hajub **(e)** $C = 1$, tunnus ei tööta, koondub kui harmooniline rida astmega $\alpha = 1.5$ **(f)** $C = \frac{e}{3} < 1$, koondub **(g)** $C = \frac{1}{2} < 1$, koondub **(h)** $C = 2 > 1$, hajub **(i)** $C = 0 < 1$, koondub **(j)** $C = 0 < 1$, koondub **(k)** $C = 0 < 1$, koondub **(l)** $C = \frac{1}{e} < 1$, koondub

Vastus 7.5. **(a)** koondub **(b)** koondub **(c)** koondub (kahanemist on lihtsam näidata läbi funktsiooni tuletise) **(d)** koondub **(e)** tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \to \infty$ **(f)** tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \to 1/2$

Vastus 7.6. **(a)** koondub absoluutselt **(b)** koondub tingimisi **(c)** koondub absoluutselt **(d)** koondub tingimisi **(e)** koondub absoluutselt **(f)** koondub tingimisi **(g)** koondub tingimisi **(h)** koondub tingimisi (siinus tuleks lahti kirjutada korrutiste summaks) **(i)** hajub, kuna $|u_n| \to 1$ **(j)** koondub absoluutselt **(k)** hajub, kuna $|u_n| \to 1$ **(l)** hajub, kui $a \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; koondub tingimisi $a = -1$ korral; koondub absoluutselt $a \in (-1, 1)$ korral

Praktikum 8

Vastus 8.1. **(a)** $R = 1$, $A = (-1, 1)$ ja $X = (-1, 1]$ **(b)** $R = \frac{1}{5}$, $A = X = \left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right)$ **(c)** $R = 1$, $A = X = (-1, 1)$ **(d)** $R = 8$, $A = X = (-4, 12)$ **(e)** $R = \frac{1}{4}$, $A = X = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ **(f)** $R = 3$, $A = X = (-3, 3)$ **(g)** $R = \frac{1}{2}$, $A = X = (-3, -2)$ **(h)** $R = \infty$, $A = X = (-\infty, \infty)$ **(i)** $R = 0$, $A = X = \{0\}$ **(j)** $R = \infty$, $A = X = (-\infty, \infty)$, rida $\sum \frac{y^n}{n!}$ koondub iga $y \in \mathbb{R}$ korral, järelikult ka esialgne rida ($(x + 4)^2 = y$) **(k)** $R = 0$, $A = X = \{0\}$ **(l)** $R = 3$, $A = X = (-3, 3)$

Vastus 8.2. **(a)** Kasutame geomeetrilist rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, kui $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad X = (-1, 1)$$

(b)

$$\frac{x}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}, \quad X = (-1, 1)$$

(c) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x} = \ln|x+1| + C$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad X = (-1, 1]$$

(d) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$,

$$\arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}, \quad X = [-1, 1]$$

Vastus 8.5. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{n!}$ ehk $y = e^{2x}$

Vastus 8.6. $y = 1 + x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ ehk $y = 2e^x - x - 1$

Vastus 8.7. **(a)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n x^{n+1}}{n!}$ **(b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ **(c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ **(d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$ **(e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \dfrac{1}{n!}\right) x^n$ **(f)** $1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ **(g)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{3^n (2n)!}$ **(h)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\pi^n x^n}{2^n n!}$

Vastus 8.8. **(a)** 0.00266636, reast $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(4n-1)\cdot(2n-1)!\cdot 5^{4n-1}}$ piisab võtta kaks esimest liiget **(b)** 0.09994446 **(c)** 0.100001 **(d)** 0.48491714 **(e)** 0.48722236 **(f)** 0.18533015

Vastus 8.12. $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}$

Vastus 8.14. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$, $x\in\mathbb{R}$

Vastus 8.15. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(2n-1)\pi}\sin((2n-1)\pi x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Vastus 8.16. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\cos\left(n\pi\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$, $x\in\{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\}\cup\{4n:\ n\in\mathbb{Z}\}$

Praktikum 10

Vastus 10.1. **(a)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon y\geq 0\}$, $\partial D=\{(x,y)\colon y=0\}$; **(b)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq 4\}$; **(c)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x^2+y^2<4\}$; **(d)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x>-y\}$; **(e)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x>-y,\ x>0,\ x\neq 1\}$; **(f)** $\mathcal{D}=\{(x,x)\colon x\in\mathbb{R}\}$; **(g)** $\mathcal{D}=\mathcal{R}\times[-1,1]$; **(h)** $\mathcal{D}=[-1,1]^2$; **(i)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon -x^2-1\leq y\leq -x^2+1\}$; **(j)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x^2>y\}$; **(k)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon y^2>x\geq 0\}$; **(l)** $\mathcal{D}=(-1,\infty)\times((-1,\infty)\setminus\{0\})$; **(m)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon 2<x^2+y^2<3\}$; **(n)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon 2<x^2+y^2\leq 4,\ x^2+y^2\neq 3\}$; **(o)** $\mathcal{D}=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n\pi,(2n+1)\pi]\times[0,\infty)\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[(2n+1)\pi,(2n+2)\pi]\times(-\infty,0]\right)$; **(p)** $\mathcal{D}=\mathbb{R}^2$; **(q)** $\mathcal{D}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x,y)\colon x^2+y^2=2n\pi\}$; **(r)** $\mathcal{D}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x,y)\colon 2n\pi\leq x^2+y^2\leq(2n+1)\pi\}$; **(s)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon |y|\leq|x|,\ x\neq 0\}$; **(t)** $\mathcal{D}=[0,8]^2\cap\bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}}([2m,2m+1]\times[2n,2n+1]\cup[2m+1,2m+2]\times[2n+1,2n+2])$.

Vastus 10.2. **(a)** Samad; **(b)** erinevad; **(c)** erinevad; **(d)** samad; **(e)** erinevad; **(f)** samad; **(g)** erinevad, sest g ei ole punktis $(0,0)$ määratud.

Vastus 10.3. **(a)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x>0,y>0\}$; **(b)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon x\geq 0,y\geq 0\}$; **(c)** $\mathcal{D}=\{(x,y)\colon xy=x+y\}$.

Vastus 10.4. **(a)** $\frac{5}{4}$; **(b)** -1; **(c)** 0.

Vastus 10.6. $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{x^2-y^2}{2xy}$, $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

Vastus 10.7. $1+y$, $x+\frac{1}{y}$.

Vastus 10.8. **(a)** $E=\{(x,y,z)\colon x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$; **(b)** $E=\{(x,y,z)\colon x\geq 0,y\geq 0\}$; **(c)** $E=\{(x,y,z)\colon xy>0,z>0\}$; **(d)** $E=\{(x,y,z)\colon x,yz\in[-1,1]\}$; **(e)** $E=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2\leq 4\}$; **(f)** E on kogu xyz-ruum, välja arvatud punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud.

Vastus 10.9. **(a)** $\frac{3}{4}$; **(b)** $1,25$; **(c)** 0.

Vastus 10.10. Umbes 2.04853 m^2.

Vastus 10.11. 1500 looma.

Vastus 10.12. umbes 6.334 ml/(kg min).

Vastus 10.13. 0.087

Vastus 10.14. **(a)** $\{(x,y,z,w)\colon xy \geq 0, z \in \mathbb{R}, w = z + \sqrt{xy}\}$; **(b)** $\{(x,y,z,w)\colon x \geq 0, y \neq 0, z > -1, w = \sqrt{x}y^{-2} + \ln(z+1)\}$; **(c)** $\{(x,y,z,w)\colon x^2+y^2 \neq 0, z \in \mathbb{R}, w = \frac{2+z}{x^2+y^2}\}$; **(d)** $\{(x,y,z,w)\colon x^2+y^2 \neq 0, z \neq 0, w = \frac{x^2+y^2}{z\ln(x^2+y^2+1)}\}$.

Vastus 10.15. **(a)** $\ln x + \frac{y}{z} - z$; **(b)** $\frac{x(x-y)}{2} + z^2$.

Vastus 10.16. **(a)** $f(x,y) = (1-x)^2 - y - \sqrt{2}$, $g(x,y,z) = x - y + \sqrt{2z} - \sqrt{2}$; **(b)** $f(x,y) = 2x^2 + \ln y$, $g(x,y,z) = 2x + y + \sqrt{yz}$.

Vastus 10.17. **(a)** 4; **(b)** 16; **(c)** 1; **(d)** 0; **(e)** 0; **(f)** 2; **(g)** $\frac{1}{8}$; **(h)** 0; **(i)** 0; **(j)** $-\infty$; **(k)** 0, minna üle polaarkoordinaatidele; **(l)** ei leidu; **(m)** 0, minna üle polaarkoordinaatidele või muutujate vahetusega $x^2 = u$, $y^2 = v$ taandada ülesandele k); **(n)** 0; **(o)** 1, võtta $u = xy$ ja arvestada, et $u \to 0$ korral $\tan u \sim u$; **(p)** $\frac{1}{2}$; **(q)** 0, minnes üle polaarkoordinaatidele, näeme, et $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$; **(r)** e, võtta $u = x^2y^2$; **(s)** e^3; **(t)** 1; **(u)** 1, arvestada, et $\lim u = \lim e^{\ln u} = e^{\lim \ln u}$.

Vastus 10.22. **(a)** $A = 0,\ B = 1$; **(b)** $A = 1,\ B = 1$; **(c)** $A = 1,\ B = 0$.

Vastus 10.23. **(a)** 0; **(b)** 0.

Vastus 10.24. **(a)** Pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas; **(b)** pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Vastus 10.25. **(a)** Pidev, pidev x ja y järgi; **(b)** ei ole pidev, pidev x ja y järgi; **(c)** ei ole pidev, pidev x järgi, ei ole pidev y järgi; **(d)** pidev, ei ole pidev x järgi, pidev y järgi; **(e)** pidev, ei ole pidev x ega y järgi.

Vastus 10.26. **(a)** $(0,0)$; **(b)** katkeb sirgel $x + y = 0$; **(c)** katkeb sirgel $y + x = 0$; **(d)** katkeb koordinaattelgedel; **(e)** katkeb koordinaattelgedel; **(f)** katkeb punktis $(0,0)$ ning ringjoontel $x^2+y^2 = 1$ ja $x^2+y^2 = 2$.

Vastus 10.27. **(a)** Lisada $f(0,y) = y$; **(b)** lisada $f(x,y) = 0$, kui $x + y = 0$; **(c)** lisada $f(x,y) = 0$, kui $x + y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; **(d)** lisada $f(x,y) = \frac{1}{64}$, kui $x + 2y = 8$.

Praktikum 11

Vastus 11.1. **(a)** $f_x = 2x - y$, $f_y = 4y - x$; **(b)** $f_x = \frac{3}{2\sqrt{3x-y}}$, $f_y = \frac{-1}{2\sqrt{3x-y}}$; **(c)** $f_x = 0$, $f_y = 2y$; **(d)** $f_x = 2/x$, $f_y = 1/y$; **(e)** $f_x = \frac{-1}{(x-y)^2}$, $f_y = \frac{1}{(x-y)^2}$; **(f)** $f_x = 2e^{2x+3y}$, $f_y = 3e^{2x-3y}$; **(g)** $f_x = y^2z$, $f_y = 2xyz$, $f_z = xy^2$; **(h)** $f_x = \frac{2xy}{z}$, $f_y = \frac{x^2}{z}$, $f_z = -\frac{x^2y}{z^2}$.

Vastus 11.2. **(a)** $f_x = 3,\ f_y = -2y$; **(b)** $f_x = 2x,\ f_y = 2y$; **(c)** $f_x = 2e^{2x+3y},\ f_y = 3e^{2x+3y}$; **(d)** $f_x = 3x^2y+2,\ f_y = x^3$; **(e)** $f_x = 3x^2yz^2,\ f_y = x^3z^2+7,\ f_z = 2x^3yz$; **(f)** $f_x = \frac{1}{x},\ f_y = \frac{1}{y},\ f_z = \frac{2}{z}$; **(g)** $f_x = 5(x+2y)^4,\ f_y = 10(x+2y)^4$; **(h)** $f_x = \frac{2}{y},\ f_y = -\frac{2x}{y^2}$; **(i)** $f_x = \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}},\ f_y = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}$; **(j)** $f_x = -4\sin(4x-y),\ f_y = \sin(4x-y)$; **(k)** $f_x = \sin y,\ f_y = x\cos y$; **(l)** $f_x = \frac{1}{y\cos^2\frac{x}{y}},\ f_y = -\frac{x}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}$; **(m)** $f_x = -\frac{y}{1+x^2y^2},\ f_y = -\frac{x}{1+x^2y^2}$; **(n)** $f_x = yx^{y-1},\ f_y = x^y\ln x$; **(o)** $f_x = y(x+y)^{y-1},\ f_y = f[\ln(x+y)+\frac{y}{x+y}]$; **(p)** $f_x = a^{xy}[y\ln a+\frac{xy^2}{a}],\ f_y = a^{xy}[x\ln a+\frac{yx^2}{a}]$, kus $a = 1+xy$. Osatuletise f_y saame osatuletisest f_x vahetades x ja y kohtadega. **(q)** $f_x = \sin yx^{\sin y-1},\ f_y = f\ln x\cos y$; **(r)** $f_x = 2x,\ f_y = zy^{z-1},\ f_z = y^z\ln y$; **(s)** $f_x = \frac{1}{z-t},\ f_y = \frac{-1}{z-t},\ f_z = \frac{y-x}{(z-t)^2},\ f_t = \frac{x-y}{(z-t)^2}$; **(t)** $f_x = y^2z^3t^4,\ f_y = 2xyz^3t^4,\ f_z = 3xy^3z^2t^4,\ f_t = 4xy^2z^3t^3$.

Vastus 11.4. **(a)** Kui $x \neq 0$, siis $f_x = \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},\ f_y = \cos\frac{y}{x}$; kui $x = 0$, siis $f_y(0,y) = 0,\ f_x(0,0) = 0$. Kui $y \neq 0$, siis osatuletis $f_x(0,y)$ ei eksisteeri. **(b)** Kui $x \neq 0$, siis $f_x = 2x\arctan\frac{y}{x} - \frac{yx^2}{a},\ f_y = \frac{x^3}{a}$, kus $a = x^2+y^2$; kui $x = 0$, siis $f_x(0,y) = 0,\ f_y(0,y) = 0$. **(c)** Kui $a = x^2+y^2 \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2\ln a + \frac{2x^3y^2}{a}$. Et funktsioonis x ja y paiknevad sümmeetriliselt, siis vahetades x ja y kohtadega, saame arvutamata $f_y = 2yx^2\ln a + \frac{2y^3x^2}{a}$. Kui $a = 0$, s.o. punktis $(0,0)$, on $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. **(d)** Kui $|x|+|y| \neq 0$, siis $f_x = \frac{2xy^3}{a^2},\ f_y = \frac{x^2(x^2-y^2)}{a^2}$, kus $a = x^2+y^2$; $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$.

Vastus 11.5. **(b)** Kui $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x = 2x \arctan \frac{y}{x} - y$, $f_y = x - 2y \arctan \frac{x}{y}$; kui $x = 0$ ja $y \neq 0$, siis $f_x(0,y) = -y$, $f_y(0,y) = 0$; kui $x \neq 0$ ja $y = 0$, siis $f_y(x,0) = x$, $f_x(x,0) = 0$; kui $x = y = 0$, siis $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. **(a)** Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = xy^2[3x \sin \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{b}]$, $f_y = yx^2[3y \sin \frac{1}{b} - \cos \frac{1}{b}]$; kui $x = 0$, siis $f_x(0,y) = 0$, $f_y(0,y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x,0) = 0$, $f_y(x,0) = 0$. **(c)** Kui $b = xy \neq 0$, siis $f_x = 2xy^2 \sin \frac{1}{b} - y \cos \frac{1}{b}$, $f_y = 2yx^2 \sin \frac{1}{b} - x \cos \frac{1}{b}$; kui $x = 0$, siis $f_x(0,y) = 0$, $f_y(0,y) = 0$; kui $y = 0$, siis $f_x(x,0) = 0$, $f_y(x,0) = 0$.

Vastus 11.8. $f_x = 7.5$, $f_y = 40$, seega riik peaks investeerima kapitali

Vastus 11.11. **(a)** puutuja on $z = x - y$; **(b)** puutuja on $z = 2(x-1)$, normaal on $x = 1 + 2t$, $y = 0$, $z = -t$; **(c)** puutuja on $z = 1$, normaal $x = 0$, $y = 0$, $z = 1 - t$; **(d)** puutuja on $z = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{2}$, normaal on $-2(x-1) = 2(y-2) = -(z-1)$; **(e)** puutuja on $z = 5 + 8(x-1) + 2(y-1)$, normaal on $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}$; **(f)** puutuja on $z = -4x - 2y - 3$, normaal on $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$; **(g)** puutuja on $z = 2/5 + 3x/25 - 4y/25$, normaal on $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1/5}{-25}$; **(i)** puutuja on $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{x-\pi}{4} + \frac{\pi}{16}(y-4)\right)$, normaal on $\frac{x-\pi}{-1/(4\sqrt{2})} = \frac{y-4}{pi/(16\sqrt{2}} = \frac{z-1/\sqrt{2}}{-1}$.

Vastus 11.12. **(a)** $(-4, 1, -31)$; **(b)** $(0,0,0)$ ja $(1,1,1)$; **(c)** $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ ja $(-1,-1,1)$; **(d)** $(a^2/b, b^2/a, 3ab)$.

Vastus 11.14. **(a)** $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = f_{xy} = 0$; **(b)** $f_{xx} = -f_{yy} = 6xy$, $f_{xy} = 3(x^2 - y^2)$; **(c)** $f_{xx} = 0$, $f_{yy} = \frac{2x}{y^3}$, $f_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$; **(d)** $f_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $f_{yy} = -x\sin(x+y)$, $f_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$; **(e)** $f_{xx} = -4y(x+y)^{-3}$, $f_{yy} = 4x(x+y)^{-3}$, $f_{xy} = 2(x-y)(x+y)^{-3}$; **(f)** $f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $f_{yy} = x^y \ln^2 x$, $f_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$ $\quad (x > 0)$; **(h)** $f_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}$, $f_{xy} = 0$ $\quad (xy \neq 1)$; **(i)** $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -s$, $f_{xy} = z - s$, $f_{xz} = y - s$, $f_{yz} = x - s$, kus $s = (x+y+z)^{-2}$; **(j)** $f_{xx} = -y^2z^2 \sin v$, $f_{yy} = -x^2z^2 \sin v$, $f_{zz} = -x^2y^2 \sin v$, $f_{xy} = z\cos v - xyz^2 \sin v$, $f_{xz} = y\cos v - xy^2z \sin v$, $f_{yz} = x\cos v - x^2yz\sin v$, kus $v = 1 + xyz$.

Vastus 11.16. **(a)** $f_{xy} = f_{yx} = \cos x$; **(b)** $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2y}{x}$; **(c)** $f_{xy} = e^{x+y}$.

Vastus 11.18. **(a)** $f_{xxy} = 0$; **(b)** $f_{xyz} = f_{zxy} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$; **(c)** $f_{xxxyyy} = -6(\cos x + \cos y)$.

Praktikum 12

Vastus 12.1. **(a)** $df = dx + 3dy$; **(b)** $df = 4(x-y)dx - 4xdy$; **(c)** $df = ydx + xdy$; **(d)** $df = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; **(e)** $df = e^{1+xy}(ydx + xdy)$; **(f)** $df = \sin(xy)(ydx + xdy)$; **(g)** $df = y^x \ln y dx + xy^{x-1}dy$; **(h)** $df = \frac{dx - 2dy + 3dz}{\cos^2(x - 2y + 3z)}$; **(i)** $df = -\sin(x^2yz)(2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz)$; **(j)** $df = 2xz(2yzdx + xzdy + 2xydz)f$.

Vastus 12.4. **(a)** $du(P) = -0.2$, $\Delta u = -0.21$; **(b)** $du(P) = 2.5$, $\Delta u = 2.504$.

Vastus 12.6. **(a)** 0.04; **(b)** -0.01; **(c)** -0.1; **(d)** -0.18; **(e)** 0.06; **(f)** -0.1401.

Vastus 12.7. 125 m^2; 250 m^2.

Vastus 12.8. 1200.

Vastus 12.9. vähenevad vastavalt 44.8 cm^3 ja 13.6π cm^2.

Vastus 12.10. **(a)** 4300 eurot; **(b)** 8000 eurot.

Vastus 12.11. 4680 cm^3.

Vastus 12.12. 3%.

Vastus 12.13. Umbes $-3.28°$ C.

Vastus 12.14. 0.5 liitrit minutis.

Vastus 12.15. Rõhk langeb umbes 8.83 kPa.

Vastus 12.16. Ümardamisel tehtav viga on kuni 0.05, korrutise viga on kuni 25000.

Vastus 12.17. **(a)** 1.12; **(b)** -0.03; **(c)** 7.18; **(d)** 1.1; **(e)** 3.037; **(f)** $22\frac{249}{352}$; **(h)** $\frac{\sqrt{2}}{14}\pi$.

Vastus 12.19. 4.11 mm.

Vastus 12.20. **(a)** $z'_t = e^{\sin t - \cos t}(\cos t + \sin t)$; **(b)** $z'_t = \frac{5t^4}{t^5-1}$; **(c)** $u'_t = 2t\cos 2t + \sin 2t$; **(d)** $z'_t = 2t + 4t^3 + 1$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z = t^2 + x^2 + y^2$, $t = t$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$ ja kasutada valemit $z'_t = z_t t'_t + z_x x'_t + z_y y'_t$; **(e)** $z'_t = \cos^{-2}(t + t^4 - t^5)(1 + 4t^3 - 5t^4)$; **(f)** $z'_x = \frac{e^x(x+1)}{1+x^2e^{2x}}$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z = \arctan(xy)$, $x = x$, $y = e^x$ ja kasutada valemit $z'_x = z_x x'_x + z_y y'_x$; **(g)** $u'_x = 2e^x \sin x$; **(h)** $u'_t = u_x x'_t + u_y y'_t + u_z z'_t = 2u_x + \frac{u_y}{t} + u_z$; **(i)** $z'_t = (f_x x^2 \ln y + f 2x \ln y)(-2t) + (f_y x^2 \ln y + \frac{f x^2}{y})e^{\sin t}\cos t$, kus $x = 1 - t^2$, $y = e^{\sin t}$.

Vastus 12.21. **(a)** $z_x = z_u u_x + z_v v_x = 3x^2\cos^2 y \sin y$, $z_y = z_u u_y + z_v v_y = x^3 \cos y(1 - 3\sin^2 y)$; **(b)** $z_x = 0$, $z_y = 0$; **(c)** $z_x = y^x(2x + x^2 \ln y)$, $z_y = x^3 y^{x-1}$; **(d)** $z_x = 0$, $z_y = -1$; **(e)** $w_x = 2xvu^{v-1}$, $w_y = zu^v \ln u$, $w_z = 2zvu^{v-1} + yu^v \ln u$, kus $u = x\sin y$, $v = x\cos y$; **(f)** $w_x = e^{uv}(y - \frac{v}{xz} + uy)$, $w_y = e^{uv}(x - \frac{v}{yz} + ux)$, $w_z = -\frac{e^{uv}v}{z^2}$, kus $u = \frac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$.

Vastus 12.22. **(a)** $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = g'(y)$; **(b)** $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+y)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(x+y)$; **(c)** $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)g(y)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = f(x)g'(y)$; **(d)** $\frac{\partial z}{\partial x} = yf'(xy)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = xf'(xy)$; **(e)** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(x/y)}{y}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xf'(x/y)}{y^2}$.

Vastus 12.24. 2 kraadi sekundis.

Vastus 12.26. $dI/dt = -0.000031$ A/s.

Vastus 12.27. -0.27 liitrit sekundis.

Praktikum 13

Vastus 13.1. **(a)** P on lokaalne miinimum, Q ei ole ekstreemumpunkt, R on lokaalne maksimum; **(b)** P on sadulpunkt, Q on lokaalne maksimum, R ei ole ekstreemumpunkt.

Vastus 13.2. **(a)** $\text{locmax} f = f(-1,0) = 1$; **(b)** $\text{locmin} f = f(1,0) = -2$, kriitilises punktis $(-1,0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; **(c)** kriitilises punktis $(0,1)$ ekstreemumit ei ole; **(d)** $\text{locmax} f = f(0,0) = 1$; **(e)** $\text{locmin} f = f(1,0) = -1$ **(f)** $\text{locmin} f = f(1,1) = -1$, kriitilises punktis $(0,0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; **(g)** $\text{locmin} f = f(0,0) = 2$; **(h)** $\text{locmin} f = f(1,2) = 3 - \ln 4$, punkt $(-1,2)$ (kus osatuletised on nullid) ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda; **(i)** $\text{locmax} f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\text{locmin} f = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; **(j)** Punktides $(1,1)$ ja $(-1,-1)$ $\text{locmin} f = -2$. Punktis $(0,0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole, mida näitab funktsiooni väärtuste võrdlus sirgetel $y = x$ ja $y = -x$ punkti $(0,0)$ läheduses.

Vastus 13.4. **(a)** $\max f = f(0,-1) = 2$, $\min f = f(0, \frac{1}{2}) = -0,25$; **(b)** $\max f = f(-1,0) = f(1,0) = 3$, $\min f = f(0,1) = f(0,-1) = 1$; **(c)** maksimumi ei leidu, $\min f = f(0,1) = -3$; **(d)** $\max f = f(-1,0) = f(1,0) = f(0,-1) = f(0,1) = 1$, $\min f = f(0,0) = 0$; **(e)** $\max f = f(0,1) = f(0,-1) = \frac{3}{e}$, $\min f = f(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \approx -0.82$.

Vastus 13.5. Punktis $(0,0)$ on ainuke lokaalne maksimum $f(0,0) = 0$, kuid näiteks punktis $(5,0)$ on $f(5,0) = 25$. Seega punkt $(0,0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt. Osatuletised on nullid ka punktis $(2,2)$, kuid see punkt ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.

Vastus 13.7. Rajaks on sirged $q = 0$, $r = 0$ ja $q + r = 1$.

Vastus 13.9. $10 + 10 + 10$.

Vastus 13.10. Kuup.

Vastus 13.11. $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$, $z = \frac{(2V)^{\frac{1}{3}}}{2}$, kus x ja y on vanni põhja mõõtmed ja z on vanni kõrgus.

Vastus 13.12. Ristküliku küljed on $\frac{2p}{3}$ ja $\frac{p}{3}$.

Vastus 13.13. $p_1 = 580.81$ ja $p_2 = 808.08$.

Vastus 13.14. $P = -0.2x^2 + 16x - 0.1y^2 + 12y - 20$, 40 autot Ameerikas hinnaga 12000 \$, 60 autot Euroopas hinnaga 10000 \$.

Vastus 13.16. 6 tundi harjutamist ja 1 tund puhkust.

Vastus 13.17. $A = (5/4, -1/4)$

Vastus 13.19. **(a)** $y' = -\frac{e^x}{1+\cos y}$; **(b)** $y' = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$; **(c)** $y' = -\frac{y}{y+x}$; **(d)** $y' = \frac{x-y}{x-2y^3}$; **(e)** $y' = \frac{x+y}{x-y}$; **(f)** $y' = -\frac{e^y+ye^x-4xy}{xe^y+e^x-2x^2}$; **(g)** $y' = -\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$; **(h)** $y' = \frac{\cos(xy)-xy\sin(xy)-y\sin x}{x^2\sin(xy)-\cos x}$.

Vastus 13.20. **(a)** $4/3$; **(b)** 2; **(b)** $-4/5$; **(d)** $-(2-\ln 2)$.

Vastus 13.22. **(c)** $P_2(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$; **(d)** $P_2(x,y) = 9 + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + \frac{1}{3}(y-3)^2$; **(e)** $P_2(x,y) = 2\pi(x-1) + (y-\pi) - \frac{pi(x-1)^2}{2} + (x-1)(y-\pi)$; **(f)** $P_3(x,y) = 1 - xy$; **(g)** $P_2(x,y) = 1 + 4(x-\pi/4) - 2(y-\pi/4) + 8(x-\pi/4)^2 - 8(x-\pi/4)(y-\pi/4) + 2(y-\pi/4)^2$.

Vastus 13.23. $\arctan(xy) \approx \pi/4 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(y-1)^2$, $f(1.1, 0.8) \approx 0.7229$.

Vastus 13.26. $P_1(x,y) = -2 - 2(x+1) - (y-1)$, $|R_1| \leq 0.08$.

Vastus 13.27. $P_2(x,y) = 1 + x + 2y + x^2/2 + 2xy + 2y^2$, $|R_2(x,y)| \leq \frac{(0.3)^3}{3!}e^{0.3}$.

Praktikum 14

Vastus 14.1. Vähim kaugus on $2\sqrt{3}$

Vastus 14.2. Vähim kaugus on 1

Vastus 14.3. **(a)** $f_{\min} = 2$ punktis $(1,1)$ ja $\lambda = -2$, **(b)** $f_{\max} = 1$ punktis $(2,2)$ ja $\lambda = -1$; $f_{\min} = -1$ punktis $(-2,-2)$ ja $\lambda = 1$, **(c)** $f_{\min} = 1$ punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ja $\lambda = \frac{5}{2}$, **(d)** $f_{\min} = 9$ punktis $(3,3,3)$ ja $\lambda = 9$, **(e)** $f_{\min} = -9$ punktis $(-1,2,-2)$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$; $f_{\max} = 9$ punktis $(1,-2,2)$ ja $\lambda = -\frac{1}{2}$, **(f)** $f_{\min} = 6$ punktis $(1,1,2)$ ja $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$, **(g)**.

Vastus 14.4. Maksimaalne laskekaugus on $\frac{2E}{mg}$

Vastus 14.5. **(a)** $\nabla f(1,-2) = (10,-4)$, **(b)** $\nabla f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, **(c)** $\nabla f(1,-1,-1) = (-1,2,3)$, **(d)** $\nabla f(1,-1,0) = (1,2,0)$, **(e)** $\nabla f(e,e,-1) = (1,1,e)$, **(f)** $\nabla f(1,-1) = (4,-4)$.

Vastus 14.6. **(a)** $|\nabla f(2,-1)| = 2\sqrt{5}$, **(b)** $|\nabla f(1,1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, **(c)** $|\nabla f(2,0)| = 2$, **(d)** $|\nabla f(2,-1)| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Vastus 14.7. Kiireima tõusuga trajektoor igast punktist on sirge, mis on risti selle kontuurjoonega, millel see punkt asetseb.

Vastus 14.8. Temperatuur kasvab kõige kiiremini suunas $(1,-1)$ ja suurim kasvukiirus on $\frac{4\sqrt{2}}{e}$ ($°C$ kraadi pikkusühiku kohta).

Vastus 14.9. Muutumiskiirused on **(a)** $2\sqrt{5}$, **(b)** $\frac{-6\sqrt{5}}{5}$, **(c)** 2 ja **(d)** $3\sqrt{2}$.

Vastus 14.10. Vesi voolab suunas $(3,4)$ ja kiirusega $0,5$ meetrit ühe horisontaalse meetri kohta.

Vastus 14.11. Suundades $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ ja $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ on muutumiskiirus -1. Suunda, kus muutmiskiirus on -3 ei leidu. Suunas $(0,-1)$ on muutumiskiirus on -2.

Vastus 14.12. Kiireim suund on $(-4,-4)$.

Vastus 14.13. Algtingimusest saame, et $T(x,y,z)=\frac{360}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **(a)** Muutumiskiirus on $-\frac{200\sqrt{14}}{21}$. **(b)** Seda on võimalik näha, kas T avaldisest või gradiendi abil.

Vastus 14.16. **(a)** $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ **(b)** $f(x)=-0,2857x+1,8571$ **(c)** $f(x)=3$ **(d)** $f(x)=0,5116x+1,1163$

Vastus 14.17. **(a)** $f(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{7}{8}x+1$ **(b)** $f(x)=-0,3x^2+1,9x-0,6$ **(c)** $f(x)=\frac{2}{3}x^2+4x-\frac{4}{3}$ **(d)** $f(x)=0,0844x^2+0,7727x+1,026$

Vastus 14.18. **(a)** $f(x)=18,7e^{-0,001x}$ **(b)** $f(x)=7,1993e^{-0,008x}$

Vastus 14.19. **(a)** $f(x)=0,51x+0,41$ **(b)** Kuuenda aasta müüginumbrid on $3,47$ miljonit eurot

Vastus 14.20. **(a)** $f(x)=0,2878x^2+2,8847x+34,281$, sest $R^2=0,9977$ **(b)** Keskmiste haiguste arv on ligikaudu 71

Praktikum 15

Vastus 15.1. **(a)** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^2 f(x,y)\,dx$ **(b)** $\int\limits_{-2}^0 dx\int\limits_{-\frac{x}{2}}^1 f(x,y)\,dy+\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^1 f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx$ **(c)** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^2 f(x,y)\,dx$ **(d)** $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-a}^a f(x,y)\,dy=\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{-b}^b f(x,y)\,dx$, kus $a=\sqrt{1-x^2}$ ja $b=\sqrt{1-y^2}$ **(e)** $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1 f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-c}^c f(x,y)\,dx$, kus $c=\sqrt{y}$ **(f)** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^{\frac{1}{3}}} f(x,y)\,dx$.

Vastus 15.2. **(a)** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 f(x,y)\,dx$ **(b)** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$ **(c)** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{1-x}^a f(x,y)\,dy$, kus $a=\sqrt{1-x^2}$ **(d)** $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^y f(x,y)\,dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)\,dx$ **(e)** $\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{-a}^a f(x,y)\,dx+\int\limits_0^3 dy\int\limits_{-a}^{1-y} f(x,y)\,dx$, kus $a=\sqrt{y+1}$ **(f)** $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ **(g)** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-a}^a f(x,y)\,dx$, kus $a=\arccos y$ **(h)** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_b^{\pi-b} f(x,y)\,dx$, kus $b=\arcsin y$.

Vastus 15.3. **(a)** $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{1}{10}$ **(c)** π **(d)** 2 **(e)** $\frac{3}{2}$, arvestada, et $e^{x-y}=e^xe^{-y}$ **(f)** $\frac{1}{3}$ **(g)** $\frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{-2}{3}$ **(j)** $\frac{13}{81}$

Vastus 15.5. **(a)** 6; **(b)** $3,5$; **(c)** -6; **(d)** $\frac{3}{2}\ln 2$.

Praktikum 16

Vastus 16.1.

(a) $D = \left\{(r,\varphi):\ 0 \le r \le 9,\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi\right\}$

(b) $D = \left\{(r,\varphi):\ 1 \le r \le 4,\ -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$

(c) $D = \left\{(r,\varphi):\ 0 \le r \le \dfrac{1}{\sin\varphi},\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

(d) $D = \left\{(r,\varphi):\ 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\varphi},\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}\right\}$

(e) $D = \left\{(r,\varphi):\ 1 \le r \le \dfrac{2\sqrt{3}}{\cos\varphi},\ \text{kui } \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \text{ ja } 1 \le r \le \dfrac{2}{\sin\varphi},\ \text{kui } \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$

(f) $D = \left\{(r,\varphi):\ \dfrac{1}{\cos\varphi} \le r \le 2,\ -\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}\right\}$

Vastus 16.2. **(a)** $\frac{4\pi}{3}$ **(b)** $3\pi + 2$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$ **(d)** $\frac{2\pi}{3}$ **(e)** $\pi(\cos\pi^2 - \cos 4\pi^2)$ **(f)** $\frac{\pi^2}{16}$

Vastus 16.3. **(a)** $\frac{32}{9}$ **(b)** $\frac{2}{3}$ **(c)** $\frac{32}{9}$ **(d)** 24π **(e)** 7

Vastus 16.4. **(a)** $\frac{3}{4}$ **(b)** 2 **(c)** $16 - \frac{6}{\ln 2}$ **(d)** $7,5 - 8\ln 2$ **(e)** 5 **(f)** $\pi 16$ **(g)** $\frac{\pi(b^2-a^2)}{4}$ **(h)** $\frac{3\pi a^2}{2}$ **(i)** π **(j)** 1, minna üle polaarkoordinaatidele **(k)** 2, minna üle polaarkoordinaatidele **(l)** $\frac{5\pi}{8}$

Vastus 16.5. 8000 ft^3 ehk u. 216 m^3

Vastus 16.6. $90000\ m^3$

Vastus 16.7. $288000\ m^3$

Vastus 16.8. **(a)** $\frac{2}{3}$ **(b)** $\frac{2}{3}$ **(c)** $\frac{20}{3}$ **(d)** $\frac{2}{3}$ **(e)** $\frac{4}{\pi^2}$ **(k)** 12π

Vastus 16.9. **(a)** $\frac{1}{6}$ **(b)** $\frac{560}{3}$ **(c)** $\frac{3}{4}$ **(d)** $\frac{48\sqrt{6}}{5}$ **(e)** $\frac{\pi}{2}$ **(f)** $\frac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}$ **(g)** $\frac{1}{6}$ **(h)** 16 **(i)** 22π **(j)** $\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}$ **(k)** $\frac{16}{3}$ **(l)** 3π **(m)** $4\pi(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$ **(n)** π

Vastus 16.10. **(a)** 14 **(b)** $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$ **(c)** $14\pi a[a - \sqrt{a^2 - b^2}]$ **(d)** $2\pi\sqrt{2}$ **(e)** $\frac{16(\sqrt{8}-1)}{3}$ **(f)** $2a^2(\pi - 2)$ **(g)** 4π, võtke integreerimise piirkond yz-tasandil.

Praktikum 17

Vastus 17.1. 80π

Vastus 17.2. $4a^2/3$

Vastus 17.3. $4000(1 - e^{-2})\ln 3,5 \approx 4332,88$

Vastus 17.4. $Q = \dfrac{2k\pi R^3}{3} C$

Vastus 17.5. 868 000 sipelgat

Vastus 17.6. $(0,\ 6/5)$

Vastus 17.7. **(a)** $\left(0,\ \dfrac{4}{3\pi}\right)$ **(b)** $\left((1 - \dfrac{\pi}{8})(1 + \sqrt{2}),\ (\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{1}{8})(2 + \sqrt{2})\right)$ **(c)** $(-1/2,\ 8/5)$ **(d)** $\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{32}{9\pi}\right)$ **(e)** $(4\pi,\ 2\pi/3)$

Vastus 17.8. $(-2/5,\ 0)$

Vastus 17.9. $\left(-\frac{64+15\pi}{80+40\pi}, 0\right)$

Vastus 17.10. 24

Vastus 17.11. **(a)** 6 **(b)** 4 **(c)** $\frac{40}{3}$ **(d)** $10\ln\frac{4}{5}$ **(e)** $\frac{8\pi}{3}$ **(f)** $\frac{1}{364}$ **(g)** 11

Praktikum 18

Vastus 18.1. **(a)** $\frac{\pi}{2}$; **(b)** $\frac{\pi^2}{4}$; **(c)** $\frac{a^3}{12}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; **(d)** 0; **(e)** $\frac{8c^2}{9}$; **(f)** $\frac{4\pi(b^5-a^5)}{15}$.

Vastus 18.2. **(a)** $\frac{\pi}{8}$; **(b)** $\frac{\pi}{2}$; **(c)** $\frac{\pi}{10}$; **(d)** $\frac{2\pi}{3}$, osa lahendusest: minnes üle sfäärkoordinaatidele, saame
$-\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2\,dr \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}} = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{\pi} \frac{d(r^2-4r\cos\theta+4)}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}} = \pi\int\limits_0^1 r\,dr(\sqrt{(r+2)^2}-\sqrt{(r-2)^2}) =$
$\pi\int\limits_0^1 r\,dr(r+2-|r-2|)$. Et $r-2<0$, siis edasi arvestame, et $|r-2| = -(r-2)$. **(e)** $\frac{4\pi a^5}{15}$; **(f)** $\frac{8\pi(b^5-c^5)}{15}$.

Vastus 18.3. **(a)** 128; **(b)** $\frac{\pi}{2}$; **(c)** $\frac{7}{12}$. **(d)** 16; **(e)** $\frac{7}{24}$; **(f)** $\frac{3}{35}$; **(g)** $\frac{\pi a^3}{3}$, minna üle sfäärkoordinaatidele, arvestades kujundi sümmeetriat.

Vastus 18.4. $\dfrac{\pi(27-9R^2+2R^3)}{3000}$ liitrit, kus R on tassi raadius.

Vastus 18.7. 5000

Vastus 18.8. $abc(a+b+c)/2$

Vastus 18.9. $a^4/24$

Vastus 18.10. $\pi 2a^4/4$

Vastus 18.11. $\pi k\pi a^4 c/2$, kus k on võrdetegur

Vastus 18.12. $6k\pi a^2$, kus k on võrdetegur

Vastus 18.15. **(a)** (1, 1, 1) **(b)** (3/5, 3/5, 9/32) **(c)** (3/8, 3/8, 3/8)

Vastus 18.16. (0, 0, 4/5)

Praktikum 20

Vastus 20.1. Diferentsiaalvõrrandi lahendid on **(a)**, **(b)** ja **(c)**.

Vastus 20.2. Diferentsiaalvõrrandi lahendid on **(a)**, **(d)**, **(e)**, **(f)**, **(g)**, **(h)** ja **(i)**.

Vastus 20.6. **(a)** $y = 2x+C$ **(b)** $y = \sin x + C$ **(c)** $y = \ln x + C$ **(d)** $y = e^x + C$ **(e)** $y = 1/5x^5 + C$ **(f)** $y^2 = x^2+10x+C$ **(g)** $y = \ln|x| + x + C$ **(h)** $y^2 = 2x + C$ **(i)** $\sqrt{y} = x + C$ **(j)** $y = Cx - 1$

Vastus 20.7. **(a)** $y^2 = x^2 - 2x - 2\ln|x| + C$ **(b)** $y - 2 = C(x+1)$ **(c)** $y^3/3 + y^2/2 = \ln|x-1| + C$ **(d)** $y = 1/(1+Cx)$ **(e)** $(y-1)(x+1) = Cxy$ **(f)** $y^2 = \ln|(1+\tan(x/2))/(1-\tan(x/2))| + C$
$\int\frac{1}{\cos x}$ leidmiseks kasutada muutuja vahetust $t = \tan(x/2)$. Siis $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ja $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

(g) $\arcsin y - \arctan x = C$ **(h)** $\arcsin y - \arcsin x = C$ **(i)** $(t+x)/tx - \ln(x/t) = C$

Vastus 20.8. **(a)** $1+y^2 = C(x^2-1)$; $C = 2/3$ **(b)** $e^x + e^{-y} = C$; $C = 2$ **(c)** $y = (C+3x(1-x))^{1/3}$; $C = 5$ **(d)** $x^2+y^2 = \ln Cx^2$; $C = e$ **(e)** $y = (1+x)/(1-x)$

Vastus 20.9. $\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} = (n-1)kt$

Vastus 20.10. Üldlahend: $\frac{1}{(2a-b)^2}\big[-\ln(a-x)+\ln(b-2x)+\frac{2a-b}{b-2x} = kt + C\big]$, $C = \frac{1}{(2a-b)^2}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{b(2a-b)}$

Vastus 20.11. $m(t) = m_0 e^{-kt}$

Vastus 20.12. ≈ 36.8 kg. Näpunäide: Soolakoguse muutumise kiirus on võrdne vahega sissevoolava lahuse ja väljavoolava lahuse soola koguste kiirustest. Soola lisamise kiirus on 10 g/l ·10 l/min = 100 g/min, see on 1/10 kg/min. Kuna välja voolab lahust 10 l/min, siis soola voolab välja lahusest kiirusega $10x/1000$ kg/min.

Praktikum 21

Vastus 21.2. **(a)** $e^{\frac{y}{x}} = Cx$ **(b)** $1/2\ln(x^2+y^2) - \text{atan}\,\frac{y}{x} = C$ **(c)** $y^2 = 2x^2(\ln|x|+C)$ **(d)** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ **(e)** $y = x - \frac{x}{\ln(Cx)}$ **(f)** $y = C(x^2+y^2)$

Vastus 21.3. $y^2 = C(x+\sqrt{x^2+y^2})$

Vastus 21.4. **(a)** $y+2 = (x-1)(\ln|x-1|+C)$ **(b)** $(y+2)^2 = C(x+y-1)$ **(c)** $8y-4x+\ln|4x+8y+5| = C$ **(d)** $\ln(2x-3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$

Vastus 21.5. $(y+x-1)^5(y-x-1)^2 = C$

Vastus 21.6. $\ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right) = 1 + \frac{C}{x+y}$

Praktikum 22

Vastus 22.1. **(a)** $y = Cx^3 - x^2$ **(b)** $y = Ce^x - 2 - 2x - x^2$ **(c)** $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$ **(d)** $y = e^{\sin x}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)$ **(e)** $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{xe^x}$ **(f)** $y = Cx-1$ **(g)** $y = Ce^{-2x}+2x-1$ **(h)** $y = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$ **(i)** $y = x-1+Ce^{-x}$ **(j)** $y = \frac{1}{x}(e^x+C)$, $C = ba - e^a$ **(k)** $y = \frac{x}{x+1}(x+\ln|x|+C)$, $C = -1$

Vastus 22.2. $I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{aR}{\omega^2L^2+R^2}\sin(\omega t) - \frac{a\omega L}{\omega^2L^2+R^2}\cos(\omega t)$

Vastus 22.3. $z = \frac{ak_1k_2}{k_2-k_1}\left[\frac{e^{-k_1t}-e^{-k_3t}}{k_3-k_1} - \frac{e^{-k_2t}-e^{-k_3t}}{k_3-k_2}\right]$

Vastus 22.4. **(a)** $y^2 = Cx^2 - x$ **(b)** $y^3 = 1+Ce^{-x}$ **(c)** $y(e^x+Ce^{2x}) = 1, y = 0$ **(d)** $y(x+1)(\ln|x+1|+C) = 1, y = 0$ **(e)** $y = x^4(C+\ln|x|)^2, y = 0$ **(f)** $y(Ce^{-\sin x}-1) = 1, y = 0$ **(g)** $y^{-3} = (C+3x)\cos^3 x, y = 0$ **(h)** $y^3 = Cx^3 - 3x^2, x = 0$ **(i)** $y^2 = Cx^2 - 2x, x = 0$

Vastus 22.5. $x\left(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2\right) = 1, x = 0$

Praktikum 23

Vastus 23.1. **(a)** $\frac{x^3}{3}+xy-y^2=C$ **(b)** $2y^2-xy+x^3=C$ **(c)** $y^4=4xy+C$ **(d)** $\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C$ **(e)** . **(f)** $x^4+3x^2y^2+y^3=C$ **(g)** $\ln|x+y|-\frac{x}{x+y}=C$ **(h)** $x^2+y^2-2\arctan\frac{x}{y}=C$ **(i)** $x^2(y^2+1)+y^4=C$ **(j)** $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$ **(k)** $y^4=4xy+C$ **(l)** $\sqrt{x^2-y^2}-x=C$ **(m)** $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$ **(n)** $xe^{-y}-y^2=C$

Vastus 23.3. **(a)** $y_1=1.1, y_2=1.2, y_3=1.3$ **(b)** $y_1=1.2, y_2=1.45, y_3=1.78$ **(c)** $y_1=0, y_2=0.001, y_3=0.005$ **(d)** $y_1=1.1, y_2=1.18, y_3=1.25$ **(e)** $y_1=5.8, y_2=9.44, y_3=18.78$

Praktikum 25

Vastus 25.1. **(a)** $y=C_1+C_2e^{-x}+x^3-3x^2+6x$ **(b)** $y=3x+C_1+C_2e^{-x}$ **(c)** $Y=2xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$ **(d)** $y=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)+(2x-2)e^x$ **(e)** $y=C_1\cos(x)+C_2\sin(x)-2x\cos(x)$ **(f)** $y=(C_1-x^2/4)\cos(x)+(C_2+x/4)\sin(x)$ **(g)** $y=e^x-1+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ **(h)** $y=C_1+C_2e^x+xe^x-x(1+x/2)$ **(i)** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+((3x-4)/9)$ **(j)** $y=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)+e^{3x}(x^2/18-x/27+5/81))$

Vastus 25.2. **(a)**$y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}+x/12+7/144$ **(b)**$y=C_1+C_2e^{-x}+x(2x^3-5x+10)$ **(c)**$y=C_1+C_2e^{3x}+x^3+2x^2-3x$ **(d)**$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-x}-x^3/5+12/25x^2-126/125x-499/625$ **(e)**$C_1\cos(3x)+C_2\sin(2x)+x/2+3/4$ **(f)**$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+4/3e^{2x}$ **(g)**$y=e^{-x}(3/2x^2+C_1+C_2x)$ **(h)**$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+1/2e^{-5x}$ **(i)**$y=C_1e^{6x}+C_2e^x+5/74\sin(x)+7/74\cos(x)$ **(j)**$y=C_1e^{(2+\sqrt{5})x}+C_2e^{(2-\sqrt{5})x}-1/10\sin(x)+1/5\cos(x)$ **(k)**$y=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)-1/6x\cos(3x)$ **(l)**$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-1/5(6\sin(2x)+2\cos(2x))$ **(m)** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+1/3(x-4/3+1/5e^{2x})$

Praktikum 26

Vastus 26.1. **(a)** $y=\frac{C_1\sin(x)+C_2\cos(x)}{x}$ **(b)** $y=\frac{C_1e^{-x}+C_2e^x}{x}$ **(c)** $y=C_1\tan x+C_2(1+x\tan x)$ **(d)** $y=C_1(e^x-1)+C_2(e^x+1)^{-1}$ **(e)** $y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}$ **(f)** $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x$ **(g)** $y=C_1x\cos(2x)+C_2x\sin(2x)$ **(h)** $y=C_1\tan x+C_2(1+x\tan x)$ **(i)** $y=C_1x+C_2e^{-2x}$ **(j)** $y=C_1(1+x\ln|x|)+C_2x$ **(k)** $y=C_1x+C_2(\ln|x|+1)$ **(l)** $y=C_1(2x+1)+C_2e^{2x}$ **(m)** $y=C_1(x^2+1)+C_2(x+(x^2+1)\arctan x)$ **(n)** $y=C_1x+C_2\sqrt{x^2+1}$ **(o)** $y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)e^{-x}$

Vastus 26.2. **(e)** $y=C_1\cos(e^{-x})+C_2\sin(e^{-x})+e^{-x}$ **(f)** $y=C_1\cos e^{-x}+C_2\sin e^x+x$ **(g)** $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{1}{x}$ **(h)** $y=\frac{C_1}{x}+C_2x^3+x^4$ **(i)** $y=C_1e^{x^2}+C_2+(x^2-1)e^{x^2}$ **(j)** $y=C_1+C_2\tan x+\frac{1}{2}(1+x\tan x)$ **(k)** $y=C_1e^x+C_2x-\frac{1}{2}(2x-1)e^{-x}$ **(l)** $y=C_1x+C_2xe^x-2x^2$

Praktikum 27

Vastus 27.1. **(a)** $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\sin(\sqrt{3}x)+C_3\cos(\sqrt{3}x))$ **(b)** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin(x)+C_4\cos(x)$ **(c)** $y=C_1e^xx^2+C_2e^xx+C_3e^x$ **(d)** $y=C_1+C_2e^x+C_3x^3+C_4x^2+C_6x+x^4/24+e^xx^2/2-4e^xx$ **(e)** $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3x+x\ln(x)$ **(f)** $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^x+\cos(x)$

Vastus 27.2. **(a)** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+\sin(x)$ **(b)** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+\ln(x)$ **(c)** Vigane ülesanne **(d)** $y=C_1+C_2x\pm4/3\sqrt{(c_1+x)^3}$ **(e)** $y=C_1+C_2x+\cosh(C_3)\sinh(x)+\sinh(C_3)\cosh(x)$ **(f)** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5x^5$ **(g)** $y=C_1+C_2x-C_3\ln(C_3+x)-x\ln(C_3+x)$ **(h)** $y=C_1+C_2x+C_3(x^2+\cos^2(x))+1/4(x^2-\cos^2 x)$ **(i)** $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}(x+2)$

Praktikum 28

Vastus 28.9. **(a)** $y = C_1\cos(x)+C_2\sin(x)$, $z = -C_1\sin(x)+C_2\cos(x)$ **(b)** $y = C_1e^x+C_2e^{-x}-1$, $z = C_1e^x - C_2e^{-x}-1$ **(c)** $y = x + \frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$, $z = C_2e^{C_1x}$ **(d)** $y = C_2e^{C_1x}$, $z = C_1C_2e^{C_1x}$ **(e)** $y = C_1 + \ln(x^2+1)$, $z = \frac{C_1x}{2} + \frac{C_2}{x} + \frac{(2x-3)x^2+3(x^2+1)\ln(x^2+1)}{6x}$ **(f)** $y = C_2e^{C_1x^2}$, $z = \frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2}$ **(g)** $y = C_2e^{C_1x}$, $z = x + C_2C_1^{-1}e^{C_1x}$, $y = 0$, $z = x + C$ **(h)** $y = \frac{x+C_1}{x+C_2}$, $z = \frac{(C_2-C_1)x}{(x+C_2)^2}$ **(i)** $y = C_2e^{C_1x^2}$, $z = 2C_1C_2^{-1}xe^{-C_1x^2}$, $y = 0$, $z = Cx$ **(j)** $y = C_1e^{x^2}$, $z = x(C_2 - \ln|x|)$ **(k)** $y = C_1x + C_2 - \frac{x^2}{2}$, $z(C_1 - x - 1) = 1$ **(l)** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{\cos(x)}{2}$, $z^2 = C_1e^x - C_2e^{-x} - \frac{\sin(x)}{2}$ **(m)** $y = C_1e^x + C_2e^{-5x}$, $z = -6C_2e^{-5x}$ **(n)** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$, $z = C_1e^{-x} + 3C_2e^{-3x} + \cos(x)$ **(p)** $x = (C_1 - C_2)\cos(t) + (C_1 + C_2)\sin(t)$, $y = C_1\sin(t) - C_2\cos(t) + C_3e^t$, $z = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + C_3e^t$ **(s)** $x = 3C_1\cos(3t) - 3C_2\sin(3t)$, $y = C_2\cos(3t) + C_1\sin(3t)$ **(t)** $x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1$, $y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1$ **(u)** $x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}$, $y = e^{-t} + 3e^{-7t}$ **(v)** $x = (\sin(t) - 2\cos(t))e^{-t}$, $y = e^{-t}\cos(t)$

Praktikum 29

Vastus 29.5.

> Ülesande 29.5 puhul on parandatud **(a)** ja **(b)** teksti.

(a) $u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}$; $C(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$ **(b)** $u = y\frac{x^2}{2} + C(y)$; $C(y) = 1 - y\frac{1-y^2}{2}$ **(c)** $u = y\ln|x| + C(y)$; $C(y) = y^2$ **(d)** $u = C(y)$; $C(y) = y$

Vastus 29.15. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. **(a)** $u = f(x^2+y^2)$ **(b)** $u = e^{\frac{x}{y}}f(y)$ **(c)** $u = f(x^2-y^2) + y - x$ **(d)** $x^2 - 4u = f\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right)$ **(e)** $u = xf(x^2+y^2)$ **(f)** $u = xy + f(x^2-y^2)$ **(g)** $u = yf(x^2-y^2)$ **(h)** $v\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{u}, \frac{1}{x-y} + \frac{1}{u}\right) = 0$ **(i)** $u = xy + f(x^2+y^2)$ **(j)** $u^2 = 2x + f(\frac{y}{x})$ **(k)** $u = f\left(e^{-x} - \frac{1}{y}\right) - \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - \frac{1}{y}}$ **(l)** $u = \sin(y) + f(\sin(x) - \sin(y))$ **(m)** $u = f(y - \sin(x))\sin(y)$ **(n)** $v(\tan(u) + \cot(x), 2y - \tan^2(u)) = 0$

Praktikum 30

Vastus 30.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. **(a)** $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ **(b)** $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$ **(c)** $v\left(u, (x-y)^{\frac{2}{z}-1}, \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right) = 0$ **(d)** $v\left(\frac{x}{y}, xy - 2u, \frac{z+u-xy}{x}\right) = 0$ **(e)** $v\left(u, \frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right) = 0$ **(f)** $v\left(u, \frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right) = 0$

Vastus 30.8.

> Ülesande 30.8 puhul on parandatud **(e)** teksti.

(a) $u = 2xy$ **(b)** $u = ye^x - e^{2x} + 1$ **(c)** $u = y^2e^{2\sqrt{x}-2}$ **(d)** $u(x^2+1) = y^2$ **(e)** $u = x^2y$ **(f)** $u = y - x^2$ **(g)** $2x^2 - y^2 - u^2 = a^2$ **(h)** $(x-y)(3x+y+4u) = 4u$ **(i)** $4yx - x^3y + x^2u^2 = 4y^2$ **(j)** $xy + u^2 = a^2$