Kombinatoorika kordamisküsimused

Sügis 2016

Vaheeksamil tuleb lahendada kaks ülesannet (üks neist tõestusülesanne), defineerida vajalikud mõisted ning sõnastada ja tõestada üks tulemus.

Ülesanded on analoogilised praktikumis lahendatud ülesannetega, mõisted ja tulemused kuuluvad alljärgnevasse loetellu.

Teoreemi sõnastamisel ja mõistete defineerimisel ei või abimaterjale kasutada (st. sõnastused ja definitsioonid tuleb varem ära anda, kui te tahate abivahendeid kasutada).

Materjalidena on lubatud kõik visuaalsed meediumid: õpik, muud raamatud, konspekt, elektroonilised märkmed, internetiotsing, isegi elektrooniline suhtlus. Aga selleks on aega maksimaalselt 5 minutit.

III Kombinatoorne loendamine.

Lause 3.1.1. Olgu M ja N hulgad, $|M| = m \geq 0$, $|N| = n \geq 0$. Siis kujutusi $f : M \to N$ on kokku n^m tükki.

Lause 3.1.2. Olgu $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Igal n-elemendilisel hulgal on täpselt 2^n erinevat alamhulka.

Lause 3.1.3. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Igal n-elemendilisel hulgal on täpselt 2^{n-1} paarisarvulise ja 2^{n-1} paarituarvulise võimsusega alamhulka.

Lause 3.1.4. Olgu M ja N hulgad, $|M| = m \geq 0$, $|N| = n \geq 0$. Siis injektiivseid kujutusi $f : M \to N$ on kokku $\prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ tükki.

Permutatsioon. Tsükkel. Faktoriaal.

Fakt 3.1. Permutatsioone n-elemendilisest hulgast on täpselt $n!$ tükki.

Binoomkordaja. Sümbol $\binom{X}{k}$.

Lause 3.3.2. Igal lõplikul hulgal X on täpselt $\binom{|X|}{k}$ k-elemendilist alamhulka: $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$.

Fakt 3.2. Täisarv $m \geq 0$ on esitatav r mittenegatiivse täisarvu summana $\binom{m+r-1}{r-1}$ eri viisil.

Fakt 3.3. Kui $0 \leq k \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtib võrdus $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Fakt 3.4. Kui $0 \leq k \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtib võrdus

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Lause 3.3.4. Kui $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtib võrdus

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Tähised $O(f(n))$, $o(f(n))$, $\Omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$, $f \sim g$.

Teoreem 3.5.5. Kui $n \in \mathbb{N}$, siis kehtivad võrratused

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Fakt 3.5. Kui $0 \leq k \leq n \in \mathbb{Z}$, siis kehtivad võrratused

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k.$$

Fakt 3.6. Kui $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, siis suurim binoomkordaja kujul $\binom{n}{k}$ on $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ja kehtivad võrratused

$$\frac{2^n}{n+1} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leq 2^n.$$

Teoreem 3.7.2. (elimineerimismeetod) Lõplike hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_n$ korral kehtib võrdus

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Ülesanne 3.8.1. (riidehoiutädi ülesanne) Kui riidehoiutädi jagab n härrasmehe vahel n silindrit juhuslikult ära, siis tõenäosus, et ükski härrasmees ei saa kätte enda silindrit, läheneb protsessis $n \to \infty$ arvule $\frac{1}{e} = 0.36787....$

IV Graafid.

Lihtgraaf. Tipp, serv, naabertipud.

Suunatud lihtgraaf. Algustipp, lõpptipp.

Täisgraaf, tsükkel, ahel, lihtahel (üldiselt ja konkreetses graafis).

(Täielik) kahealuseline graaf, alused.

Graafide isomorfism.

Fakt 4.1. Mitteisomorfsete graafide arv tipuhulgal T, $|T| = n$, on vahemikus

$$\left[\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}, 2^{\binom{n}{2}}\right].$$

Alamgraaf, indutseeritud alamgraaf.

Sidus graaf, graafi sidusad komponendid

Tähelepanek 4.2.2. Graafi sidus komponent on sidus graaf. Graaf on sidus parajasti siis, kui tal on üks sidus komponent.

Tipudevaheline kaugus graafis. Naabrusmaatriks.

Tipu aste. Graafi skoor.

Lause 4.3.1. Graafi $G = (T, S)$ korral kehtib $\sum\limits_{t \in T} \deg_G(t) = 2|S|$.

Järeldus 4.3.2. Igas graafis on paarisarv paarituastmelisi tippe.

Teoreem 4.3.3. (Skooriteoreem) Olgu $D = (d_1, d_2, \ldots d_n)$, kus $1 < n \in \mathbb{N}$ ja $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ on mittenegatiivsed täisarvud. Tähistagu

$$D' = (d'_1, d'_2, \ldots, d'_{n-1}),$$

kus

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \text{kui } i < n - d_n, \\ d_i - 1, & \text{kui } i \geq n - d_n. \end{cases}$$

Siis D on mingi graafi skoor parajasti siis, kui D' on mingi graafi skoor.

Euleri ahel. Euleri graaf. Pool-Euleri graaf.

Hamiltoni tsükkel ja Hamiltoni ahel. Hamiltoni ja pool-Hamiltoni graaf.

Teoreem 4.4.1. (Euleri graafide kirjeldus) Graaf on Euleri graaf parajasti siis, kui ta on sidus ja kõigil tema tippudel on paarisarvuline aste.

Lemma 4.4.2. Kui graafi $G = (T, S)$ kõigil tippudel on paarisarvuline aste, siis servade hulka S saab esitada lõikumatute hulkade ühendina $S = \bigsqcup_{i=1}^{n} S_i$, kus S_i on mingi tsükli servade hulk.

Suunatud Euleri graaf. Suunatud ahel, tee, tsükkel (üldiselt ja konkreetses graafis).

Tipu sisend ja väljundaste. Suunatud graafi sümmetrisatsioon.

Suunatud graafi nõrk ja tugev sidusus.

Lause 4.5.2. Suunatud graaf on suunatud Euleri graaf parajasti siis, kui see on nõrgalt sidus ja iga tipu sisend- ja väljundaste on võrdsed.

Lause 4.5.X. Maksimaalne numbrite arv rattal, mille iga positsiooni saab tuvastada fikseeritud k järjestikuse numbri lugemisega, on 2^k.

De Bruijni graafid.

2-sidus graaf.

Lemma 4.6.X Iga 2-sidus graaf on sidus.

Tehted graafiga: serva eemaldamine, serva lisamine, tipu eemaldamine, serva poolitamine.

Teoreem 4.6.3. Graaf G on sidus parajasti siis, kui iga tipupaari $t_1, t_2 \in T(G)$ korral leidub tsükkel graafis G, mis sisaldab tippe t_1 ja t_2.

Tähelepanek 4.6.4. Graaf G on 2-sidus parajasti siis, kui suvaline temast serva poolitamise teel saadud graaf on 2-sidus.

Teoreem 4.6.5. (2-sidusate graafide moodustamine) Graaf G on 2-sidus parajasti siis, kui ta on saadud graafist K_3 ("kolmnurgast") lõpliku arvu serva lisamise ja serva poolitamise tehete teel.

Ekstremaalne kolmnurgavaba graaf. Kahealuseline täisgraaf $K_{X,Y}$.

Teoreem 4.7.1. Kolmnurgavabas n tipuga graafis on maksimaalselt $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ serva.

Teoreem 4.7.2. Iga ekstremaalne n tipuga kolmnurgavaba graaf on isomorfne kahealuselise täisgraafiga $K_{\lfloor n/2 \rfloor, n-\lfloor n/2 \rfloor}$.

Teoreem 4.7.3. Olgu $G = (T, S)$ kolmnurgavaba graaf. Siis tipuhulk T on esitatav lõikumatute alamhulkade ühendina $T = X \sqcup Y$ nii, et iga tipu $t \in T$ korral $d_G(t) \leq d_{K_{X,Y}}(t)$.

Järeldus 4.7.X. Teoreemist 4.7.3 järeldub teoreem 4.7.1.

Ekstremaalne K_{r+1}-vaba graaf. Turáni graaf $T_r(n)$.

Lause 4.8.1. Turáni graaf $T_r(n)$ on isomorfismi täpsuseni ainus maksimaalse servade arvuga r-aluseline n tipuga graaf.

Teoreem 4.8.2. (nõrk Turáni teoreem) Igas K_{r+1}-vabas graafis on maksimaalselt $\left\lfloor \frac{n^2}{2}(1 - \frac{1}{r}) \right\rfloor$ serva.

Teoreem 4.8.3. (tugev Turáni teoreem) Igas K_{r+1}-vabas graafis on maksimaalselt $|S(T_r(n))|$ serva. Maksimum saavutatakse siis ja ainult siis, kui $G \cong T_r(n)$.

V Puud.

Puu. Leht.

Teoreem 5.1.2. Graafi $G = (T, S)$ jaoks on järgmised väited samaväärsed:

(1) G on puu;

(2) iga tipupaari $t, t' \in T$ jaoks leidub graafis G täpselt üks lihtahel tipust t tippu t';

(3) (minimaalne sidus graaf) G on sidus graaf, millest suvalise serva eemaldamisel tekib mittesidus graaf;

(4) (maksimaalne tsükliteta graaf) G on tsükliteta graaf ja suvalise serva $s \in \binom{T}{2} \setminus S$ lisamisel tekkiv graaf $G + s$ sisaldab tsüklit;

(5) (Euleri valem 1) G on sidus graaf ja $|T| = |S| + 1$;

(6) (Euleri valem 2) G on tsükliteta graaf ja $|T| = |S| + 1$.

Lemma 5.1.3. Iga vähemalt kahe tipuga puu sisaldab vähemalt kahte lehte.

Lemma 5.1.4. (puude kasvatamine) Olgu G graaf ja l selle leht. Siis G on puu parajasti siis, kui $G - l$ on puu.

Juurega puu, järjestatud puu. Alam- ja ülemtipp.

Puude, juurega puude ja järjestatud puude isomorfismid.

Lemma 5.2.X. Olgu P juurega puu, j selle juur ja $t_1, \ldots, t_n$ viimase alamtipud. Vähim hulk, mis sisaldab tippu t_i ja on kinnine alamtippude võtmise suhtes, on puu juurega t_i (tipule t_i vastav alampuu). Kui $f : P_1 \to P_2$ on juurega puude (P_1, j_1) ja (P_2, j_2) isomorfism, siis juure j_1 alamtippude $t_1, \ldots, t_n$ kujutised $f(t_1), \ldots, f(t_n)$ on juure j_2 alamtipud. Isomorfismi f ahend tipule t_i vastavale alampuule on juurega puude isomorfism tipule $f(t_i)$ vastava alampuuga.

Fakt 5.2.Y. Järjestatud puude koodid on üksüheses vastavuses järjestatud puude isomorfismiklassidega.

Fakt 5.2.Z. Juurega puude koodid on üksüheses vastavuses juurega puude isomorfismiklassidega.

Tipu ekstsentrilisus, graafi tsenter ja raadius.

Lause 5.2.U. Iga puu tsenter koosneb kas ühest või kahest tipust. Viimasel juhul on tegu naabertippudega.

Lause 5.2.V. (Juureta) puude koodid on üksüheses vastavuses (juureta) puude isomorfismiklassidega.

Graafi aluspuu.

Algoritm 5.3.2. Aluspuude leidmine servade tsüklivaba lisamise teel.

Lause 5.3.3. Kui sisendi $G = (T, S)$, $|T| = n$, $|S| = m$, korral on algoritmi 5.3.2 väljundiks $n - 1$ servaga graaf, siis on viimane graafi G aluspuu. Kui väljundis on $k < n-1$ serva, siis G on mittesidus $n-k$ sidusa komponendiga graaf.

Algoritm 5.3.5. Aluspuude leidmine aluspuu lehthaaval kasvatamise teel.

Lause 5.3.6. Kui sisendi $G = (T, S)$, $|T| = n$, $|S| = m$, korral on algoritmi 5.3.5 väljundiks n tipuga graaf, siis on viimane graafi G aluspuu. Vastasel korral on G mittesidus ja väljundiks on algoritmi esimesel sammul fikseeritud tippu sisaldava sidusa komponendi aluspuu.

Graafi servade kaalud, kaalufunktsioon. Minimaalse kaaluga aluspuu.

Ülesanne 5.4.1. Minimaalse kaaluga aluspuu leidmise ülesanne.

Algoritm 5.4.2. Kruskali algoritm (ahne servade tsüklivaba lisamine).

Lause 5.4.3. Algoritm 5.4.2 lahendab ülesande 5.4.1.