MATHCAD

MITTELINEAARSED VÕRRANDID ja VÕRRANDISÜSTEEMID
ANALÜÜTILISED TEISENDUSED
ANIMATSIOONID
DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LAHENDAMIŃE

Sageliesinevaid vigu

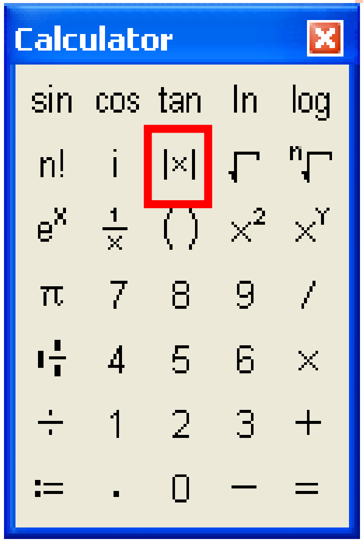
- Funktsioonidel tuleb panna argument sulgudesse

N: $vx(t), \sin(\alpha)$

Tuleb jälgida, et Mathcad ise ei lisaks korrutusmärke funktsiooni nime ja argumendi vahele. Seda märki näeb ainult võrrandi aktiivseks tegemisel (vasaku hiireklahviga valemil)

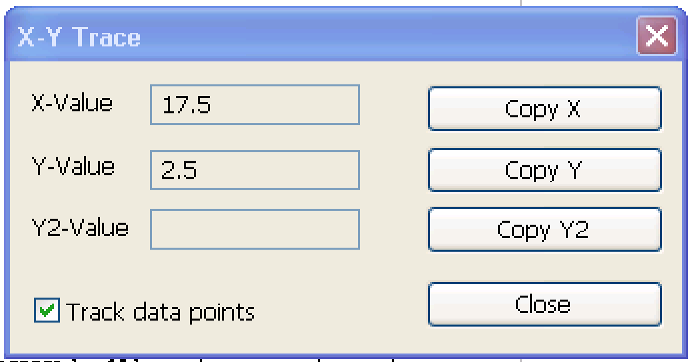
N: vx·(t) või Odesolve·(x,10) Viga!!!

Absoluutväärtuse märk tuleb valida Calculator nupurealt!



Maatriksite nupuriba sisaldab samasuguse väljanägemisega nuppu, mis arvutab maatriksi determinanti ja sellisel juhul lihtsalt ei arvutata vale märgiga avaldist välja (tekib viga)

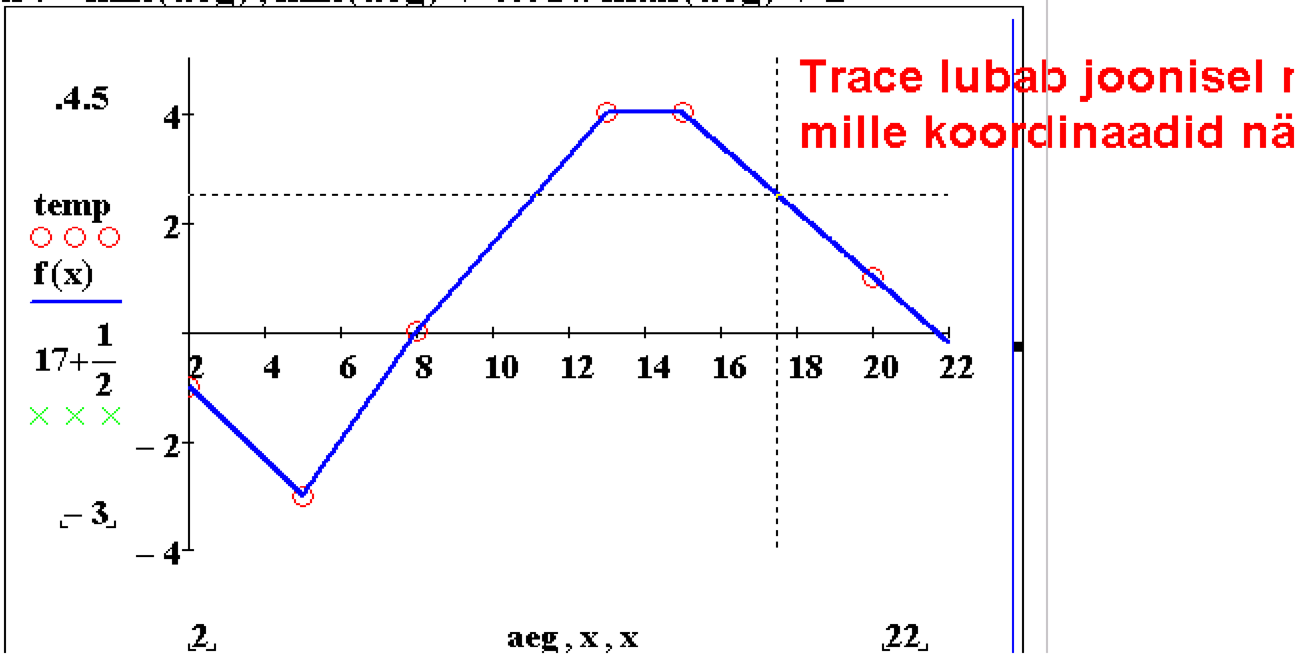
Format Graph Trace
lubab graafikult koordinaate määrata



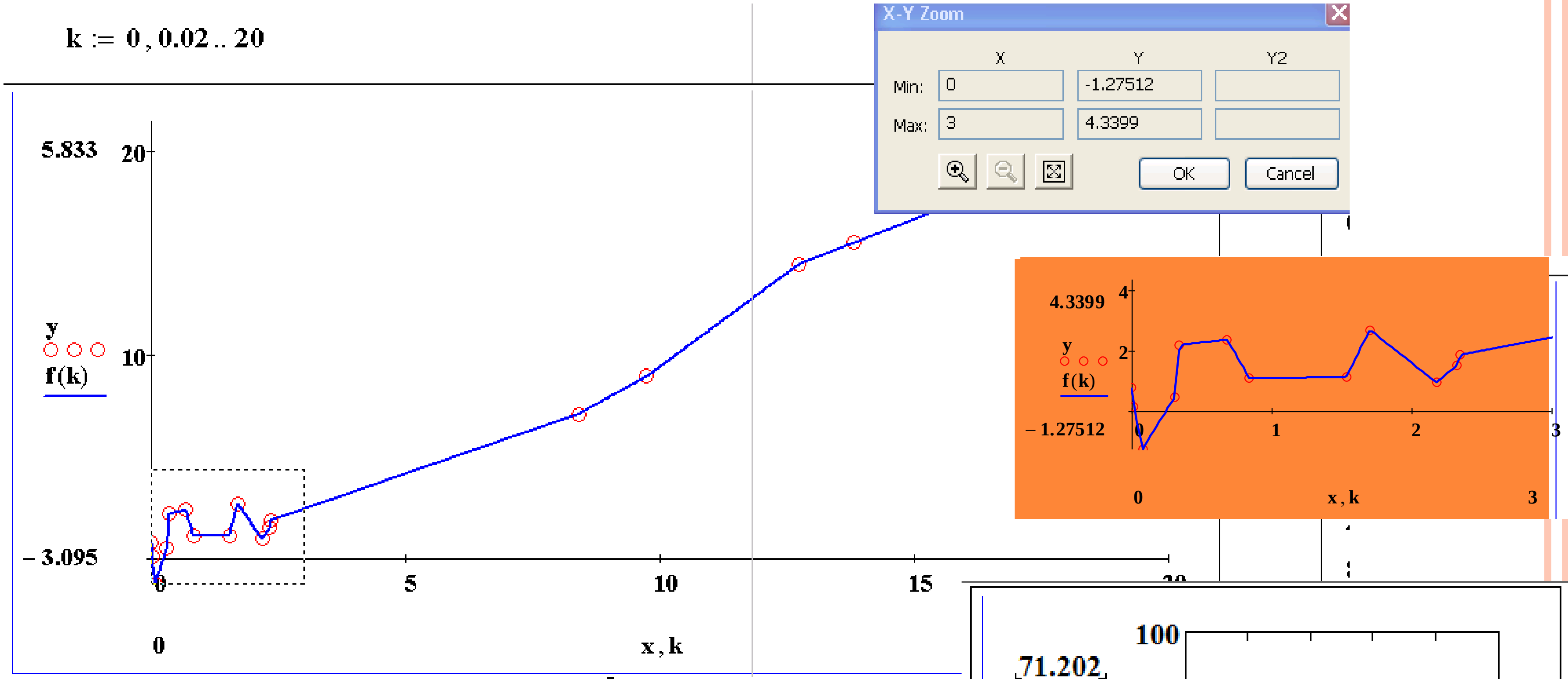
$$Katsed := csort(augment(aeg, temp), 0)$$

$$f(x) := linterp\left(Katsed^{\langle 0 \rangle}, Katsed^{\langle 1 \rangle}, x\right)$$

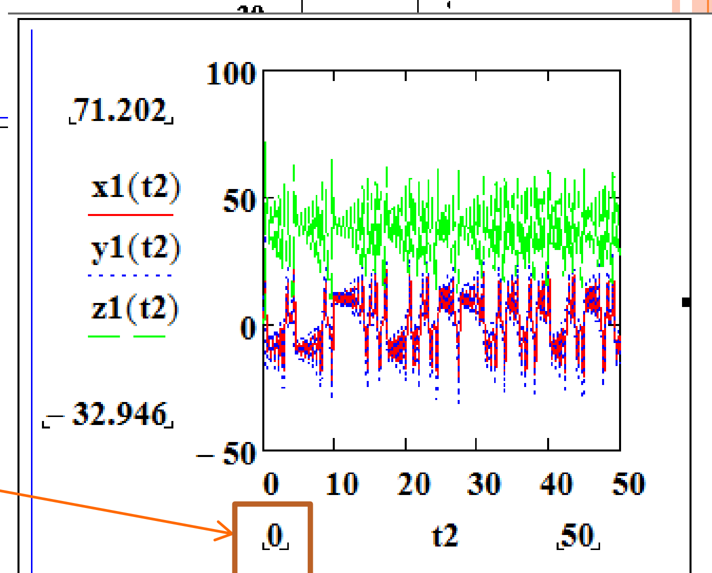
$$x := min(aeg), min(aeg) + 0.01 .. max(aeg) + 2$$



Format - Graph Zoom
lubab graafikult lõigata piirkonna, mida näidata



Teine võimalus on graafiku mõlema telje alguses ja lõpus olevatele rajade väärtustele kirjutada ise vajaminevad rajad (automaatsel rajal on all märgid)



Näide 5. Mittelineaarne võrrand

Auto kiirus sõltub ajast järgmise valemi kohaselt

$v(t) = (\sin t \cdot \ln(t+1) + 1) \cdot 20$ **(meeter/sekund)**

Leida ajahetk, mil auto on läbinud 1.5 kilomeetrit.

Võrrandite kirjutamiseks ilma arvutusteta kasutada rasvast võrdusmärki Boolean nupurealt **=**

Lahendamiseks vajaminevad võrrandid:

Punktmassi poolt läbitud teepikkust s saab kiiruse v järgi arvutada järgmiselt

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

kus t_0 on liikumise alghetk. Kui $t_0 = 0$, siis tuleb lahendada

$$\int_{t_0}^{t} (\sin t \cdot \ln(t+1) + 1) \cdot 20 dt = 1500m$$

Näide 5. Lahendus

Ülesande lahendus: anname otsitavale muutujale t algväärtuse **0**, kasutame funktsiooni root ja saadud võrrandit, saame:

$$t0 := 0 \quad t := 0$$

$$t1 := \mathrm{root}\left(\int_{t0}^{t} (\sin(t)\cdot \ln(t+1)+1)\cdot 20\,dt - 1500, t\right)$$

$$t1 = 76.523 \quad \text{sekundit}$$

Vastuse saime sekundites, teisendame minututeks ja sekunditeks, kasutades olemasolevaid funktsioone:

floor(x) argumendi täisosa

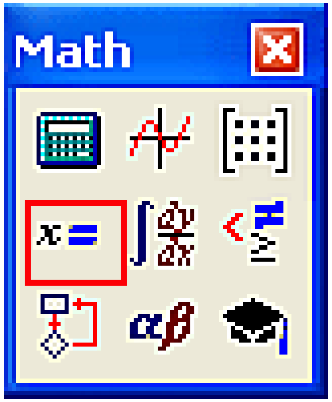
mod(x,y) x/y jagamise jääk

$$\mathrm{minutid} := \mathrm{floor}\left(\frac{t1}{60}\right) \qquad \mathrm{minutid} = 1$$

$$\mathrm{sekundid} := \mathrm{mod}(t1, 60) \qquad \mathrm{sekundid} = 16.523$$

MITTELINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID

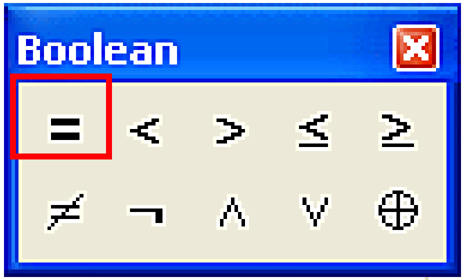
Võrrandisüsteemi lahendusskeem



Alglähendid otsitavatele muutujatele

Given

võrrand 1 (rasvase võrdusmärgiga)



....

võrrand n

(kitsendused lahenditele)

Find(muutuja1, ... ,muutujan)

NÄIDE 6

Leida lahendid järgmisele süsteemile

$$\begin{cases} 2x + y = 5 - 2z^2 \\ y^3 + 4z = 4 \\ xy + z = e^z \end{cases}$$

Algväärtused otsitavatele: $x := 1 \quad y := 1 \quad z := 0$

Võtmesõna: Given

Võrrandid:

võrdusmärgid on $\boxed{=}$

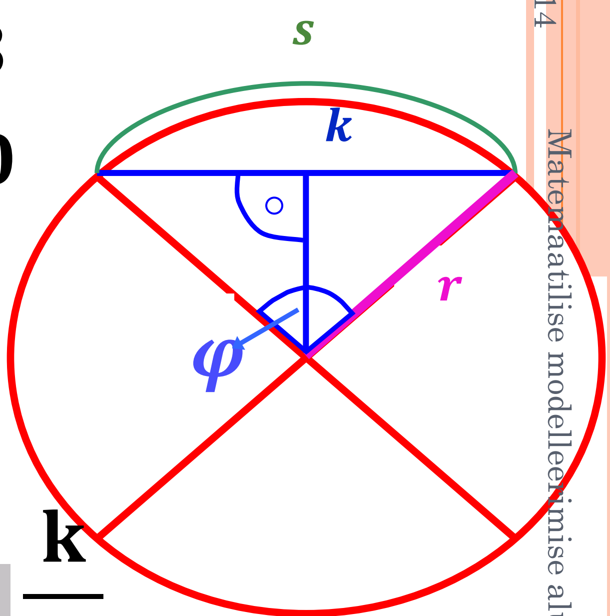
$$2x + y = 5 - 2z^2$$
$$y^3 + 4z = 4$$
$$x \cdot y + z = e^z$$

Lahend: $v := \mathrm{Find}(x, y, z)$

Vastus:

$$v = \begin{pmatrix} 1.422 \\ 0.975 \\ 0.768 \end{pmatrix}$$

Näide 7. Leida ringi raadius r, kui on teada ringist väljalõigatud segmendi kaare pikkus $s = 15$ ja temale vastava kõõlu pikkus $k = 13$. Eeldame, et segment moodustab mitte üle poole esialgsest ringist



Etteantud suurused $\quad s := 15 \quad k := 13$

Algväärtused otsitavatele: $\quad \varphi := \frac{\pi}{6} \quad r := 10$

Võtmesõna $\quad$ Given

Ringi kesknurga ja raadiuse korrutis on vastava kaare pikkusega $\quad \varphi \cdot r = s$

Kõõlust ja selle otspunktidest tõmmatud raadiusest moodustuvast võrdhaardsest kolmnurgast $\quad \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{k}{2r}$

Ülesande seadest tulenevad kitsendused lahendile $\quad r \geq 0 \quad \varphi \geq 0$

Lahend $\quad \begin{pmatrix} \text{raadius} \\ \text{nurk} \end{pmatrix} := \text{Find}(r, \varphi)$

Vastus $\quad \text{raadius} = 8.212 \quad \text{nurk} = 104.656\ \text{deg}$

NÄIDE 8

Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 20$ ja hüperbooli $y = \frac{1}{x}$ lõikepunktid. Illustreerida joonisel.

Algväärtused otsitavatele:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Võtmesõna **Given**

$$x^2 + y^2 = 20$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Lahend

$$\begin{pmatrix} Z1 \\ Z2 \end{pmatrix} := \mathrm{Find}(x, y)$$

Vastus

$$Z1 = \begin{pmatrix} 0.224 \\ 4.467 \\ -4.467 \\ -0.224 \end{pmatrix} \quad Z2 = \begin{pmatrix} 4.467 \\ 0.224 \\ -0.224 \\ -4.467 \end{pmatrix}$$

Näide 8. Graafik (ring, hüperbool, punktid)

Joonisele argumendid: **Ring** $\phi := 0, 0.01 .. 2\pi$

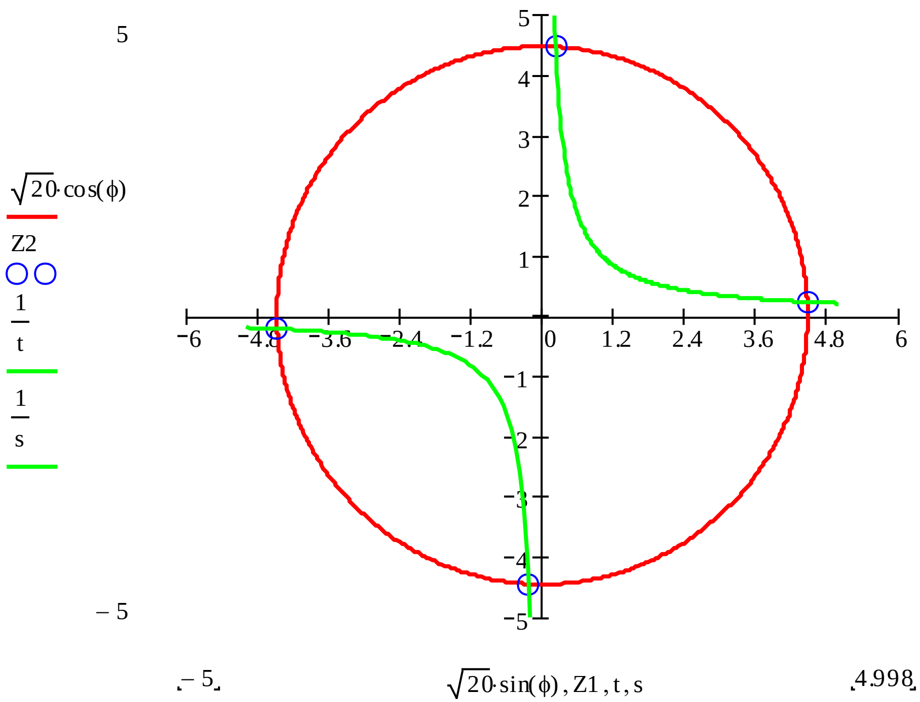
Hüperbooli negatiivne haru $t := -5, -4.93 .. -0.001$

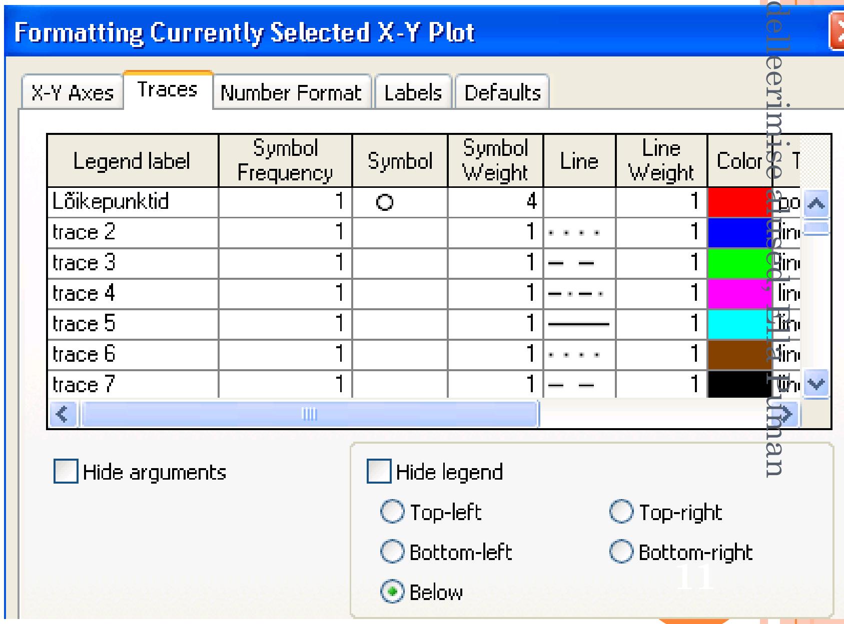
Hüperbooli positiivne haru $s := 0.001, 0.02 .. 5$

Telgedele ringi parameetrilised võrrandid

x **teljel** $r \cdot \sin(t)$, y **teljel** $r \cdot \cos(t)$ $\sqrt{20} \cdot \sin(\phi), \sqrt{20} \cdot \cos(\phi)$

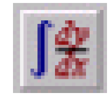
tähelepanu muutujate järjekorrale mõlemal teljel

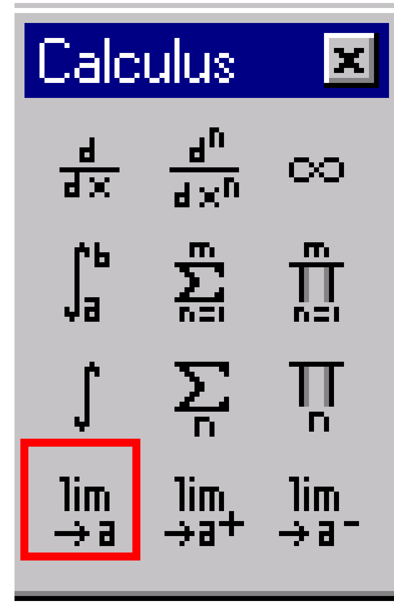




ANALÜÜTILISED TEISENDUSED

Nupuriba Calculus





Piirväärtused, vasakpoolne ja parempoolne piirväärtus

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x^2} \rightarrow \text{undefined}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin(x)}{x^2} \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan(x) \rightarrow -\infty$$

Integraalid: määramata ja määratud integaal

Määramata integraali leidmisel ei ole lahendis määramata konstanti C, lahend antakse juhul $C=0$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx \rightarrow \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

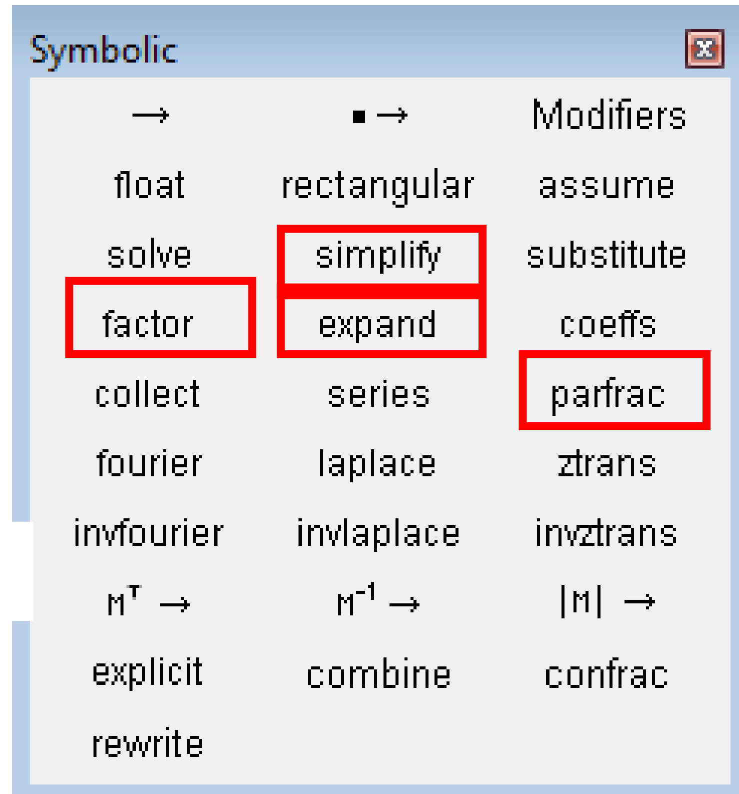
Tuletised: esimest ja kõrgemat järku

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare \qquad \frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{\ln(1-9x)}} \rightarrow \frac{81}{2\cdot\ln(1-9\cdot x)^{\frac{3}{2}}\cdot(9\cdot x-1)^2}+\frac{243}{4\cdot\ln(1-9\cdot x)^{\frac{5}{2}}\cdot(9\cdot x-1)^2}$$

ANALÜÜTILISED TEISENDUSED

Nupuriba Symbolic valikud



simplify lihtsustamine

$$\frac{x^2-1}{x-1}\ \text{simplify} \rightarrow x+1$$

factor teisendab korrutiseks

$$x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\ \text{factor} \rightarrow (x-y)^2$$

expand korrutab sulgavaldised läbi

$$(x+y)(z-5)\ \text{expand} \rightarrow x\cdot z-5\cdot x+y\cdot z-5\cdot y$$

parfrac osamurdudeks jagamine

$$\frac{2\cdot x^2+x-2}{x^3+1}\ \text{convert, parfrac}, x \rightarrow \frac{7\cdot x-5}{3\cdot(x^2-x+1)}-\frac{1}{3\cdot(x+1)}$$

ANALÜÜTILISED TEISENDUSED 2

series funktsiooni rittaarendus mingi punkti ümbruses (0)

$$\sin(x)\ \text{series}, x = \frac{\pi}{2}, 6 \rightarrow 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{24}$$

solve võrrandi lahendamine analüütiliselt

$$\sin(2 \cdot f) + \cos(x) + 1\ \text{solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{acos}(-\sin(2 \cdot f) - 1) \\ -\operatorname{acos}(-\sin(2 \cdot f) - 1) \end{pmatrix}$$

collect avaldis muutuja astmetena

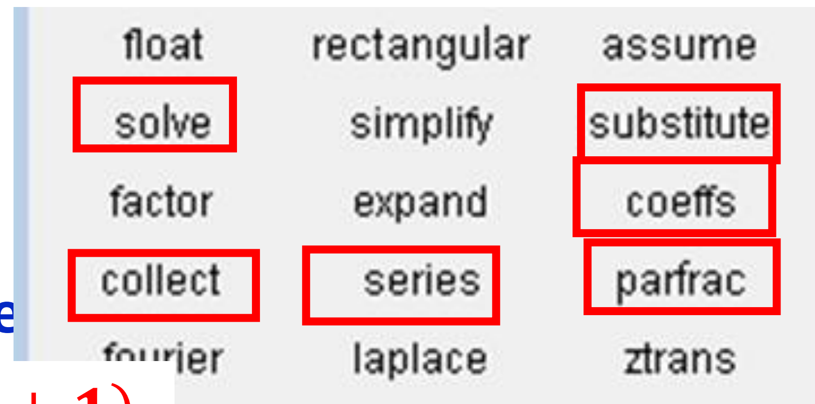
$$(x + 2 \cdot y - z)^2\ \text{collect}, x \rightarrow x^2 + (4 \cdot y - 2 \cdot z) \cdot x + (2 \cdot y - z)^2$$

coeffs polünoomi kordajad vektorina

float avaldise väärtus reaalarvuna

$$\pi\ \text{float}, 10 \rightarrow 3.141592654$$

substitute sümboli asendamine avaldise

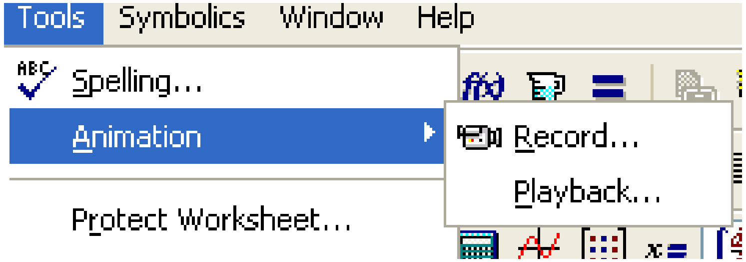


$$\cos(y)\ \text{substitute}, y = z + 1 \rightarrow \cos(z + 1)$$

Kahe teisenduse korraga sooritamiseks valida võtmesõnad järjest

$$\cos(y) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, y = z + 1 \\ \text{expand} \end{array} \right. \rightarrow \cos(z) \cdot \cos(1) - \sin(z) \cdot \sin(1)$$

ANIMATSIOONID



jadamuutuja FRAME

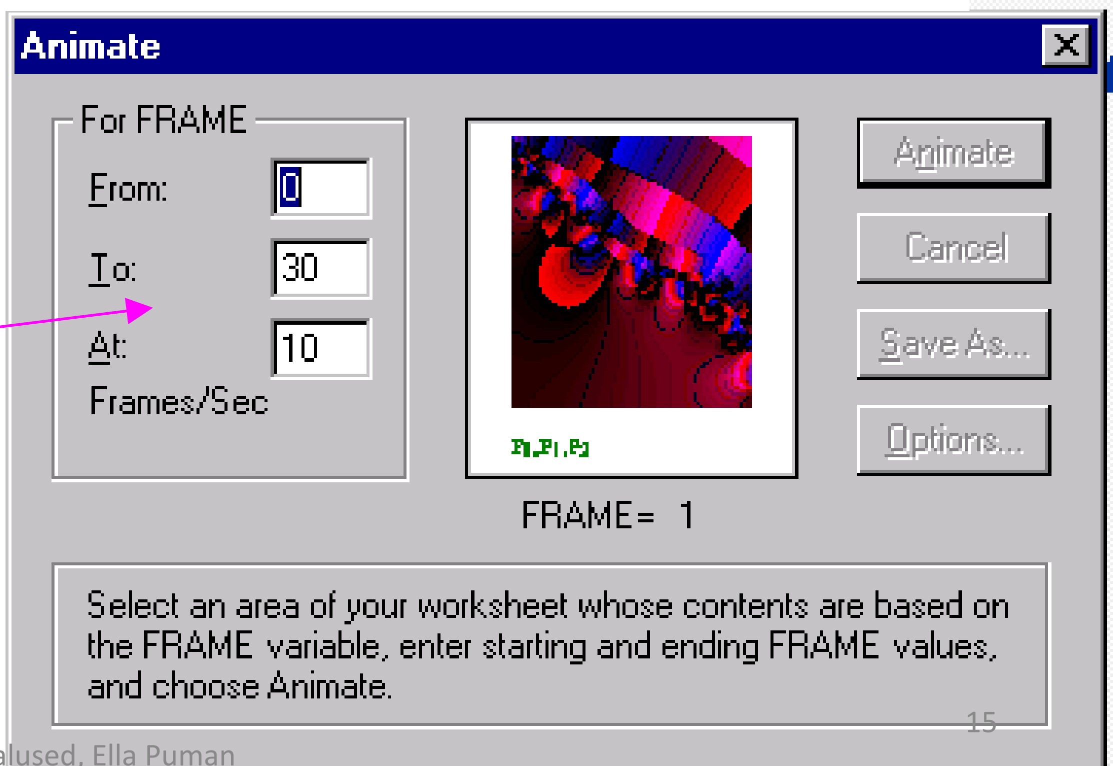
- graafiku väljanägemine peab mingil viisil sõltuma sellest muutujast
- graafikud iga jadamuutuja FRAME eriväärtuse korral

joonistatakse teatud ajaintervalliga üksteise peale

Tools – Animation - Record

Muutuja FRAME väärtuste vahemik

sekundis näidatavate kaadrite arv



Animate alustab

Save as salvestab videoklipina *.avi

NÄITED ANIMATSIOONIDEST 1

Koostada animatsioon järve pinna lainetusest pärast kivi vetteviskamist

Kõigepealt teeme 3 mõõtmelise graafiku, selleks:

x- ja y-telje punktide indeksid

$$i := 0..30 \qquad j := 0..30$$

punktid horisontaaltelgede suunas

$$x_i := \frac{i-15}{30} \cdot 12\pi \qquad y_j := \frac{j-15}{30} \cdot 12\pi$$

Funktsiooni defineerimine

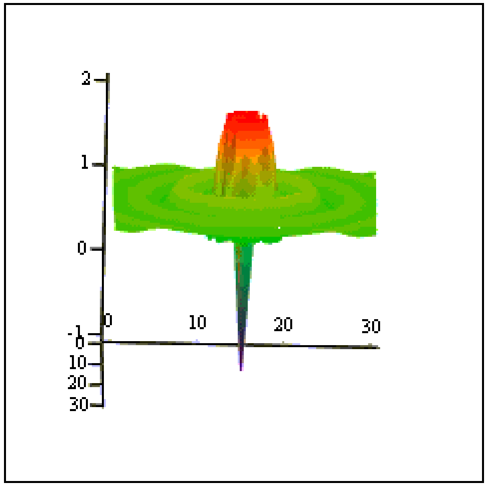
$$F(x,y) := -\cos\left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{FRAME}{2}\right) \cdot \frac{20}{x^2+y^2+0.5 \cdot FRAME^2+10} + 1$$

Maatriksi M defineerime elementide kaupa funktsiooni väärtustest vastavas sõlmpunktis

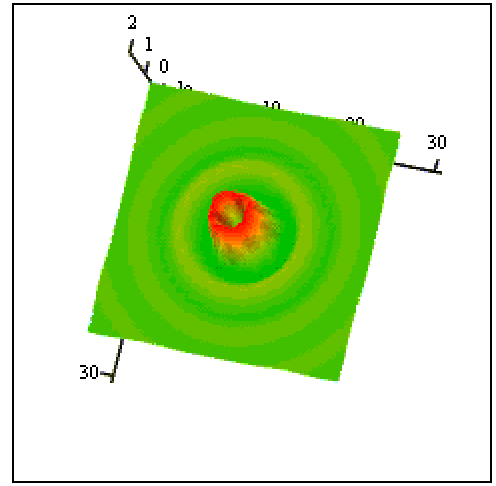
$$M_{i,j} := F(x_i, y_j)$$

Koostada 3-mõõtmeline joonis maatriksist M Surface Plot

Valmis animatsioon videoklipina



M

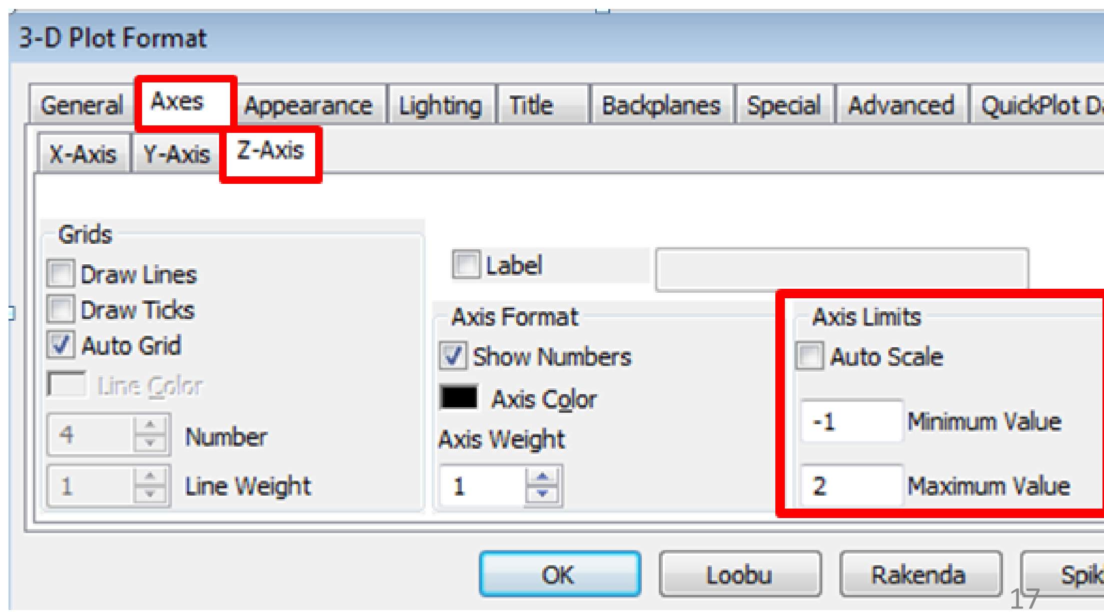


M

Kolmemõõtmeline pind maatriksist M

Tools – Animation - Record

Oluline on fikseerida z-telg, et graafik ei hakkaks animatsiooni ajal „hüppama“

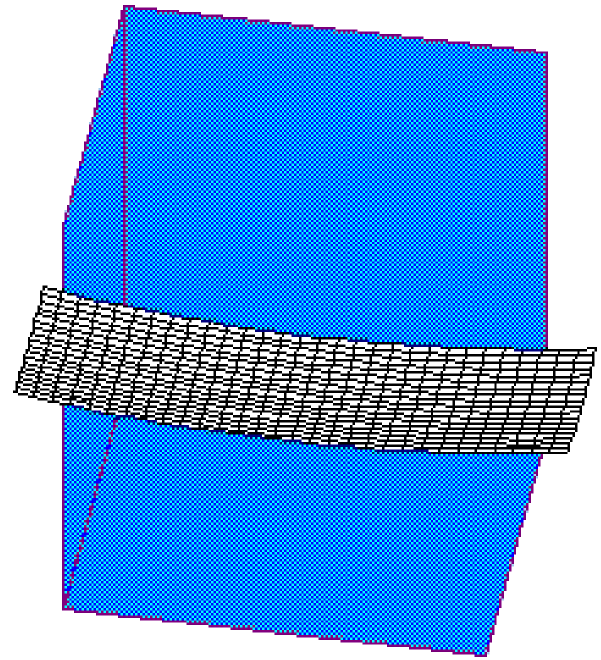


NÄITED ANIMATSIOONIDEST 2, 3

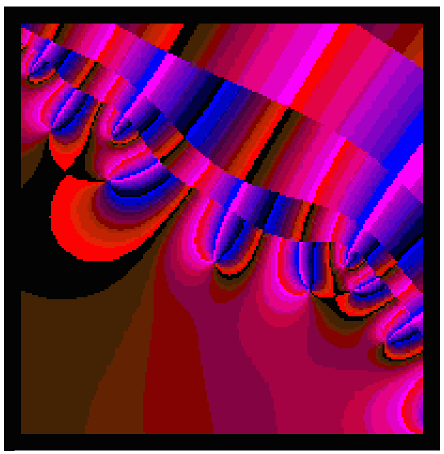
Resource Center

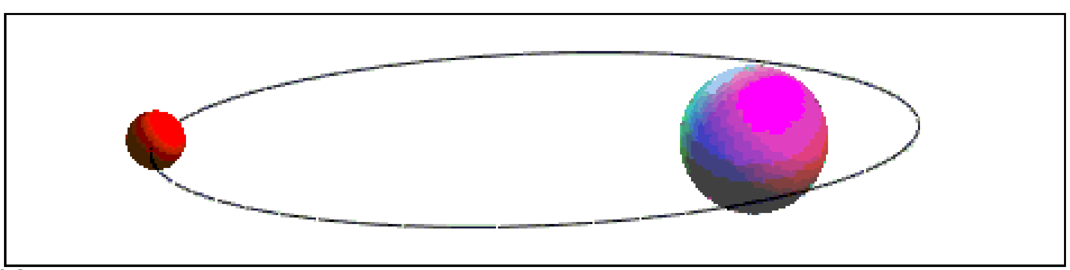
QuickSheets and Reference Tables

Animations

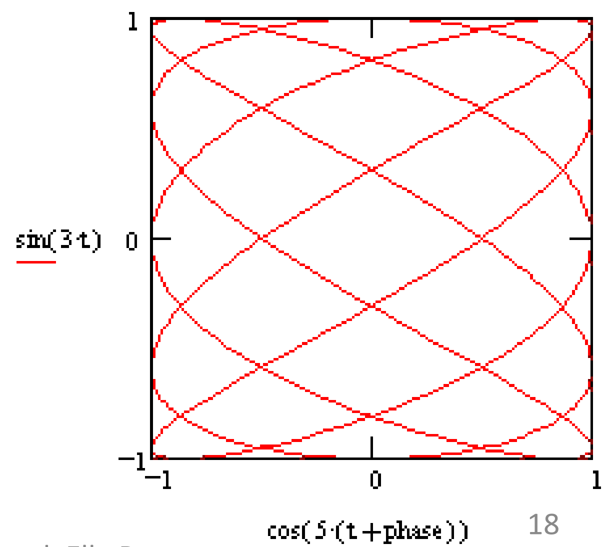


Valmis videoklipid





phase = 0·deg

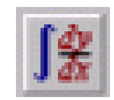


NÄIDE 2 ANIMATSIOONIDEST

Koostada animatsioon funktsioonist ja tõususirgest

$$\mathbf{f(x) := x \cdot sin(x)}$$

Funktsiooni tuletis $$\mathbf{df(x) := \frac{d}{dx} f(x)}$$



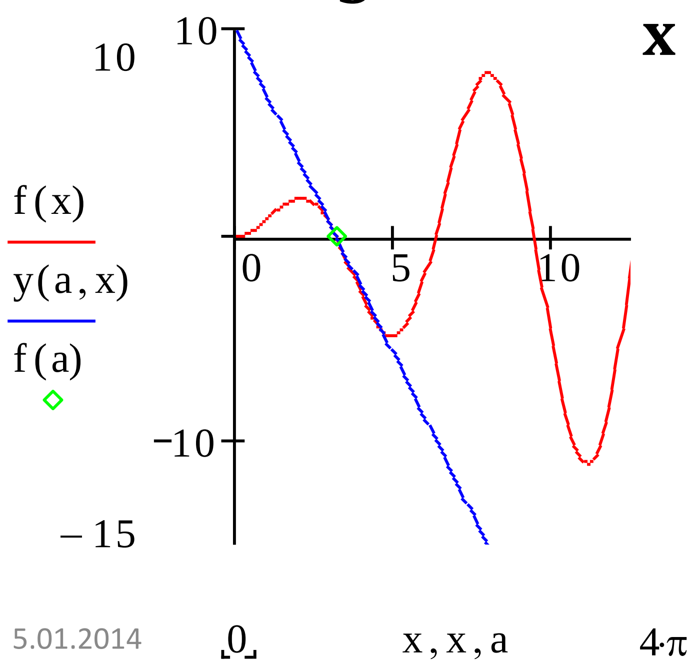
Sirge võrrand läbi punkti a $$\mathbf{y(a,x) := df(a) \cdot (x - a) + f(a)}$$

$$\mathbf{a := \pi + \frac{FRAME}{5}}$$

$\mathbf{a = 3.412}$

Kui $FRAME = 30$, siis $a = \pi + 6$

$$\mathbf{x := 0, 0.1 .. 4\pi}$$



$\mathbf{a = 1 \cdot \pi}$

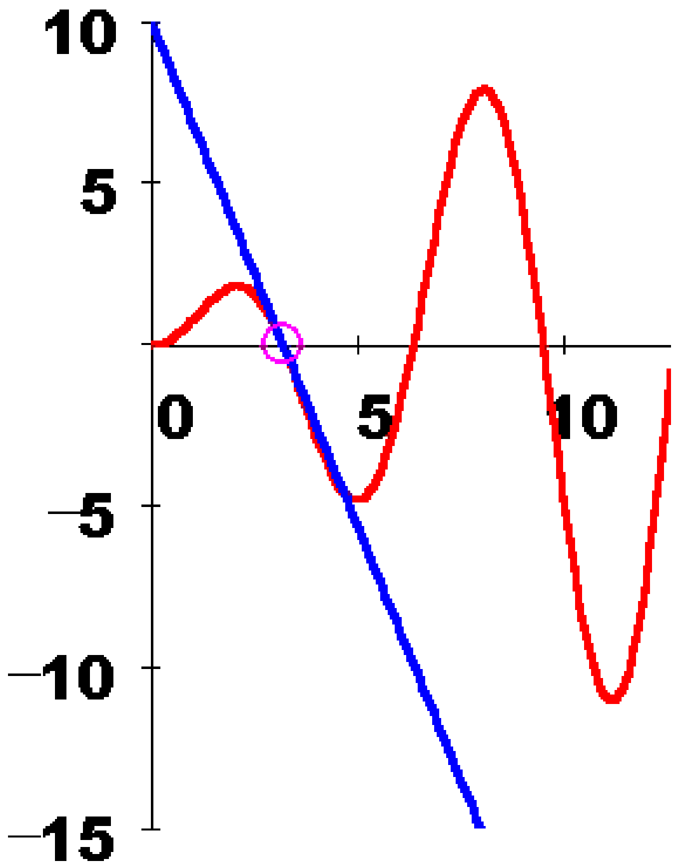
$\mathbf{df(a) = -1 \cdot \pi}$

y-teljele:

funktsioon $f(x)$,
sirge $y(a,x)$ ja
funktsiooni väärtus
punktis a $f(a)$

x-teljele: x, x, a

ANIMATSIOON 2 tõususirge



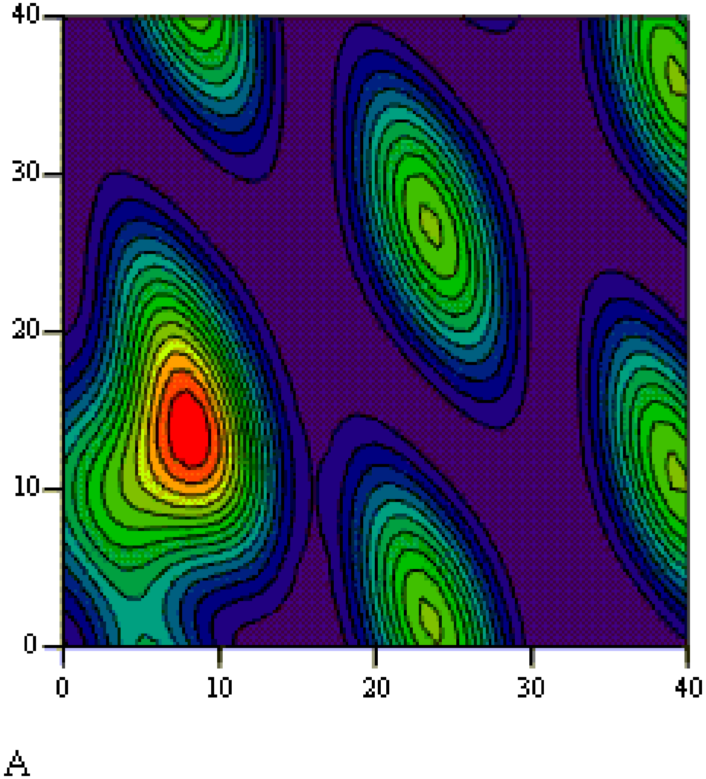
$\mathbf{a} = \mathbf{1}\,\pi$

$\mathbf{df(a)} = -\mathbf{1}\,\pi$

NÄIDE 3. ANIMEERITUD KONTUURKAART

$$g := 2 \cdot FRAME$$

$$A(u,v) := \sin\left(\frac{u}{5}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{u+v}{8}\right)^2 + \exp\left(-\frac{(u-5-g)^2+(v-10-g)^2}{50}\right)$$



Joonisel piirkonnad $[0, 40]$

3-D Plot Format QuickPlot Data

Range 1 start 0 end 40

# of Grids 40

Mathcad DV lahendamisel

$\mathbf{Odesolve([vektor], x, b, [punkte])}$

- Lahendab DV antud algtingimustel
- DV kõige kõrgema astme muutuja peab olema lineaarsel kujul
- Algtingimuste arv peab olema võrdne võrrandi järguga (süsteemis võrrandite arvuga ka)
- Võtmesõna **Given** tekitab lahenduspiirkonna
- **vektor** (ainult süsteemide jaoks) otsitavate funktsioonide nimede vektor (ilma argumentideta)

  Otsitavad funktsioonid on $f(x)$ ja $g(x)$, siis vektor $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$
- Alaindekseid saab funktsiooni nimedes kasutada ainult literaalseid (**x.1**)
- $\boldsymbol{x}$ integreerimismuutuja (argument)
- $\boldsymbol{b}$ integreerimispiirkonna ülemine raja (lõpp-punkt)

Mathcad DV lahendamisel

Odesolve([vektor], x, b, [punkte])

- Alguspunkt on antud algtingimustes lahenduspiirkonna sees muutujate argumentide algväärtusena
- **punkte** (ei ole kohustuslik) täisarvuline interpolatsioonipunktide arv lahendi saamiseks, vaikimisi **1000**
- **Odesolve** annab lahenduse funktsioonina, mis salvestab funktsiooni väärtused integreerimis-piirkonnas 1000-s (või punkte) punktis ja nende vahelistes punktides leiab kasutades interpoleerimist funktsiooni lspline abil
- **Mida rohkem on punkte, seda täpsem on lahend, suure integreerimispiirkonna puhul tuleks kasutada suuremat punktide arvu kui 1000**

Diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Ctrl F7 tuletise märk (') **Ctrl =** rasvane võrdusmärk

- **Given võtmesõna**
- **Võrrandid** $\boldsymbol{=}$
- **algtingimused** $\boldsymbol{=}$
- **Odesolve**(argument, lõppväärtus)

Näide 1.

Lahendada diferentsiaalvõrrand $\boldsymbol{e^{y} \cdot y' = 2x + 1}$
algtingimusel $\boldsymbol{y(0) = 1}$
Leida otsitava funktsiooni väärtus kohal $\boldsymbol{x = 8}$

Given

$$\mathbf{e^{y(x)} \cdot y'(x) \boldsymbol{=} 2x + 1} \qquad \boldsymbol{=}$$

$$\mathbf{y(0) \boldsymbol{=} 1} \qquad \boldsymbol{=}$$

$$\mathbf{y2 := Odesolve(x, 8)}$$

$$\boldsymbol{y2(8)} = 4.314$$

- Leiame otsitava funktsiooni kõik väärtused lõigus [0,8] sammuga 0.1

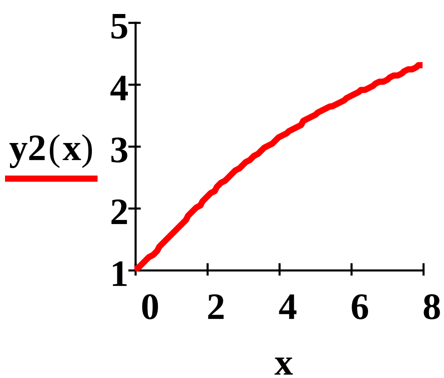
$$\mathbf{x} := \mathbf{0}, \mathbf{0.1} .. \mathbf{8} \qquad \boldsymbol{y2}(\mathbf{x}) =$$

- Teame, et analüütiline lahend on $y(x) = \ln|x^2 + x + C|$
- Kontrollime, kas leitud lahend antud lõigus on analüütilise lahendi vastavate väärtustega võrdne, kui $C = e$ (üldlahendit Mathcad ei leia)

$$\mathbf{ln}|\mathbf{x^2 + x + e}| =$$

$\mathbf{y2(x)} =$	$\mathbf{ln}(\mathbf{x^2 + x + e})$
1	1
1.04	1.04
1.085	1.085
1.134	1.134
1.187	1.187
1.244	1.244
1.302	1.302
1.363	1.363
1.425	1.425
1.488	1.488
1.551	1.551
1.615	1.615
1.679	1.679
1.742	1.742
1.805	1.805
...	

- Kanname funktsiooni **graafikule**



Diferentsiaalvõrrandite lahendamine

- **Näide 2.**

Lahendada diferentsiaalvõrrand $y'' + 3y = 0$ algtingimustel $y(0) = 1, y'(0) = 2$

Leida otsitava funktsiooni väärtus kohal $x = 6$

Given

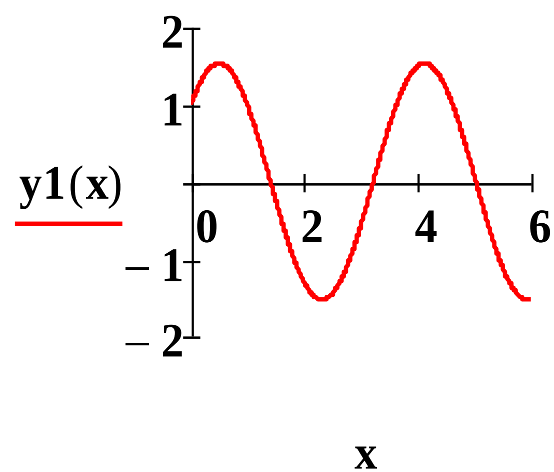
$$y''(x) + 3y(x) = 0$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$$

$$y1 := \mathrm{Odesolve}(x, 6)$$

$$y1(2) = -1.314 \qquad y1(6) = -1.518$$

$$x := 0, 0.1 .. 6 \qquad y1(x) =$$



$y1(x) =$

1
0.979
-1.314
-0.557
1.493
0.078
-1.518

DV süsteemide lahendamine

Funktsioonis ***Odesolve*** argument anda vektorina otsitavatest muutujatest

Given

$$\frac{d}{du}y0(u) = -8\cdot y0(u) + 8\cdot y1(u)$$

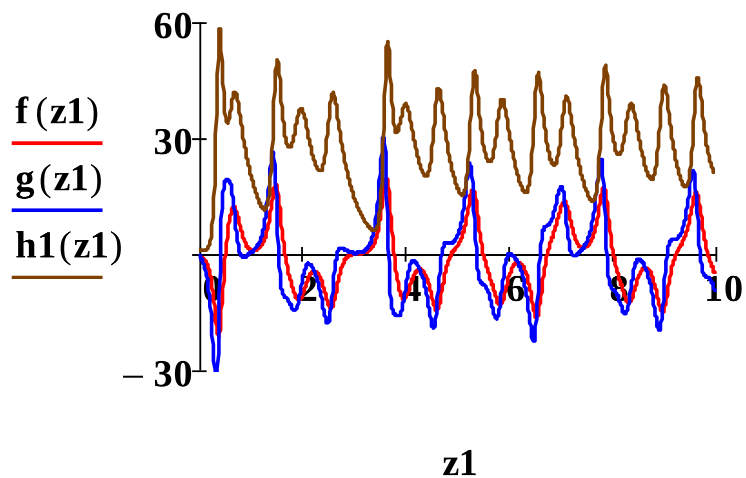
$$\frac{d}{du}y1(u) = 30\cdot y0(u) + y1(u) - y0(u)\cdot y2(u)$$

$$\frac{d}{du}y2(u) = y0(u)\cdot y1(u) - \frac{8}{3}\cdot y2(u)$$

$z1 := 0, 0.01 .. 10$

$y0(0) = -1 \qquad y1(0) = 0 \qquad y2(0) = 1$

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h1 \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} y0 \\ y1 \\ y2 \end{pmatrix}, u, 10, 1000\right]$$



DV süsteemide lahendamine, teine võimalus

- **Rkadapt(*alg, a, b, n, D*)**
  või **rkfixed, Bulstoer, Radau**
- ei kasutata Given võtmesõna
- võrrandisüsteem antakse ette maatriksina $\boldsymbol{D}$,
- kus $\boldsymbol{u}$ on funktsiooni argument ja
- maatriksis $\boldsymbol{D}$ on võrrandite paremad pooled, kui vasakule jääb vastava funktsiooni tuletis
- Algtingimused antakse esimeses argumendis

$$D(u,Y) := \begin{pmatrix} -8 \cdot Y_0 + 8 \cdot Y_1 \\ 30 \cdot Y_0 + Y_1 - Y_0 \cdot Y_2 \\ Y_0 \cdot Y_1 - \frac{8}{3} \cdot Y_2 \end{pmatrix} \qquad Y0 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S1 := \mathrm{Rkadapt}(Y0, 0, 10, 1000, D)$$

Lorenzi süsteem

$$\begin{cases} x' = p(y - x) \\ y' = (r - z)x - y \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

Algtingimused:

$$\boldsymbol{x(0) = 1, y(0) = 1,}$$
$$\boldsymbol{z(0) = 0}$$

Parameetrid:

$$\boldsymbol{p = 10, b = 8/3,\ r = 40}.$$

Leida otsitava funktsiooni väärtus ajani $\boldsymbol{t = 50}$

$$\mathbf{p} := 10 \qquad \mathbf{b} := \frac{8}{3} \qquad \mathbf{r} := 40$$

Given

$$\mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}))$$

$$\mathbf{y}'(\mathbf{t}) = (\mathbf{r} - \mathbf{z}(\mathbf{t}))\cdot\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})$$

$$\mathbf{z}'(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t})\cdot\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{b}\cdot\mathbf{z}(\mathbf{t})$$

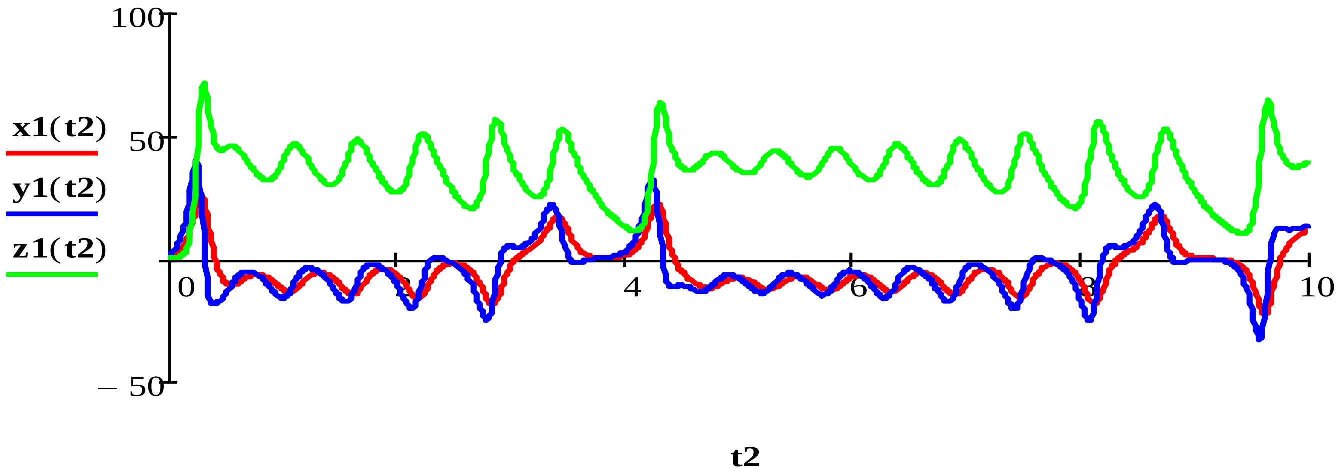
$$\mathbf{x}(0) = 1 \qquad \mathbf{y}(0) = 1 \qquad \mathbf{z}(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x1} \\ \mathbf{y1} \\ \mathbf{z1} \end{pmatrix} := \mathbf{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}, \mathbf{t}, 50\right]$$

Graafikud

- Kanda otsitavate funktsioonide väärtused kahemõõtmelisele graafikule aja suhtes

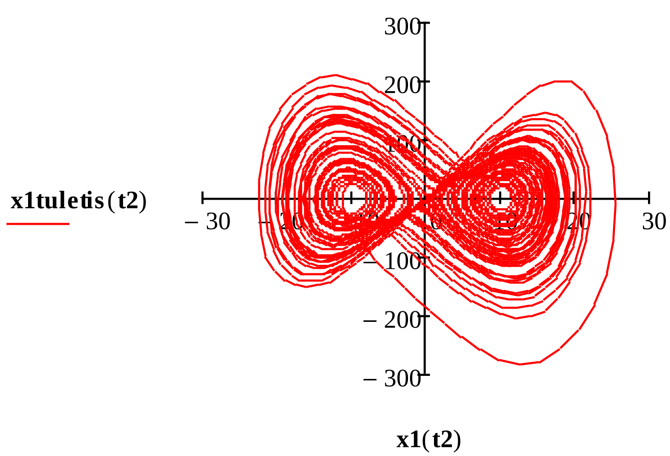
$$\mathbf{t2 := 0, 0.1 .. 50}$$

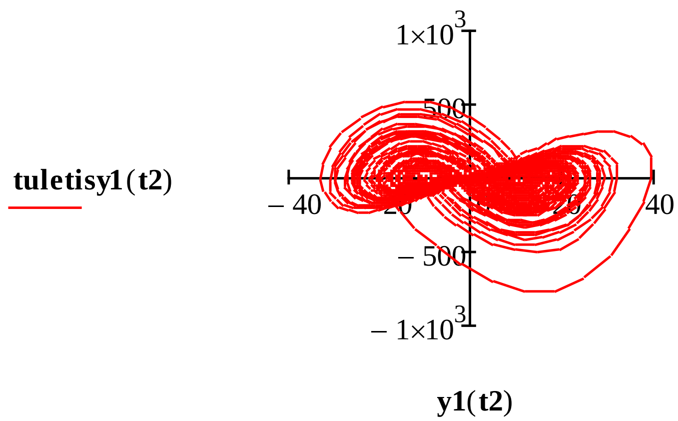


Graafikud

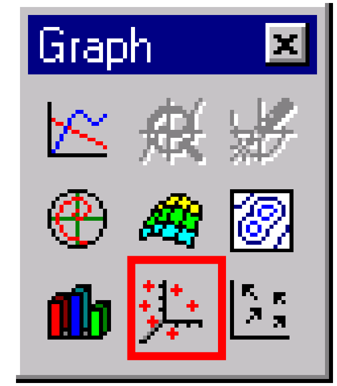
- Teha kahemõõtmeline graafik ühest muutujat ja tema tuletisest. Kasutame argumendi $\boldsymbol{x}$ tuletise valemit: $\boldsymbol{x'(t) = p \cdot \big(y(t) - x(t)\big)}$

$$\mathbf{x1tuletis(t2) := p \cdot \big(y1(t2) - x1(t2)\big)}$$





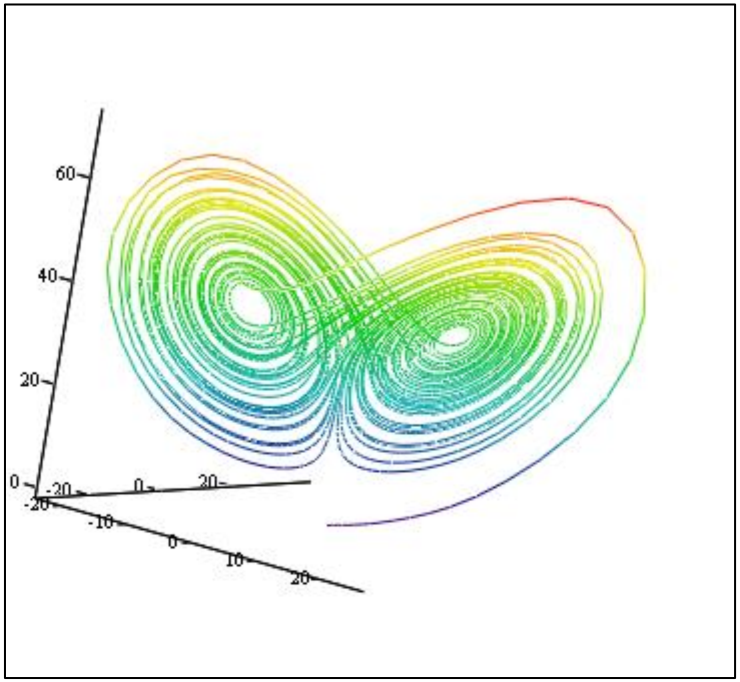
3-mõõtmeline graafik



- Teha kolmemõõtmeline graafik, selleks defineerida

$$\mathbf{curve(t1)} := \begin{pmatrix} \mathbf{x1(t1)} \\ \mathbf{y1(t1)} \\ \mathbf{z1(t1)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S := CreateSpace(curve, 0, 50, 4000)}$$



S

3 mõõtmelise graafiku tegemiseks valida graafikute nupuribalt 3D Scatter tüüpi graafik ja alumisele tühjale kastile kirjutada S.

3-mõõtmelise graafiku kujundus

- Topeltklõps graafikul või parema hiireklahviga **Properties**

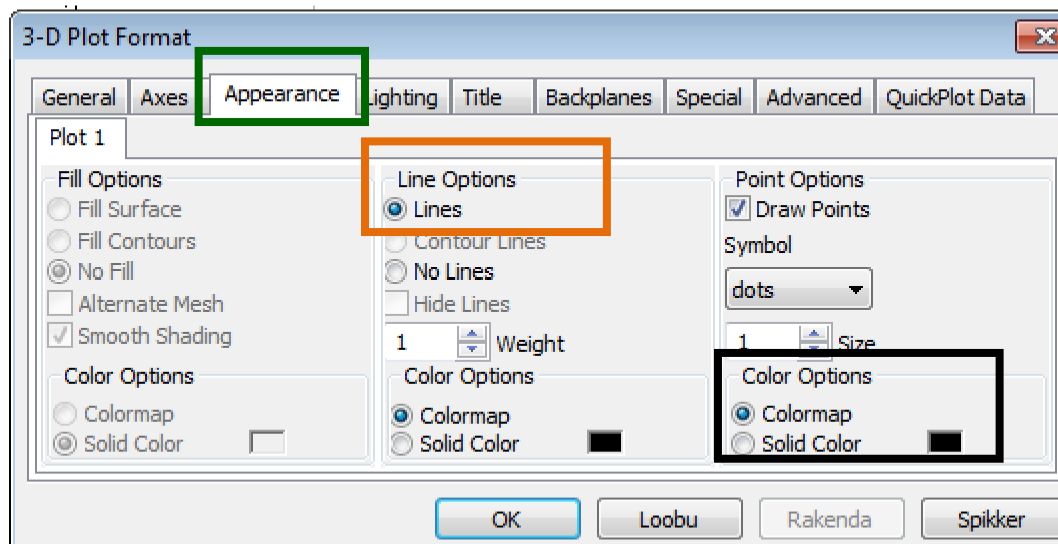
Appearance vaheleht

Värviliseks

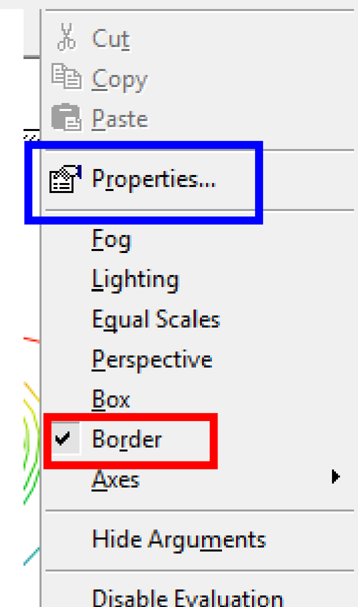
Colormap nupuga

Punktide ühendamine

Lines



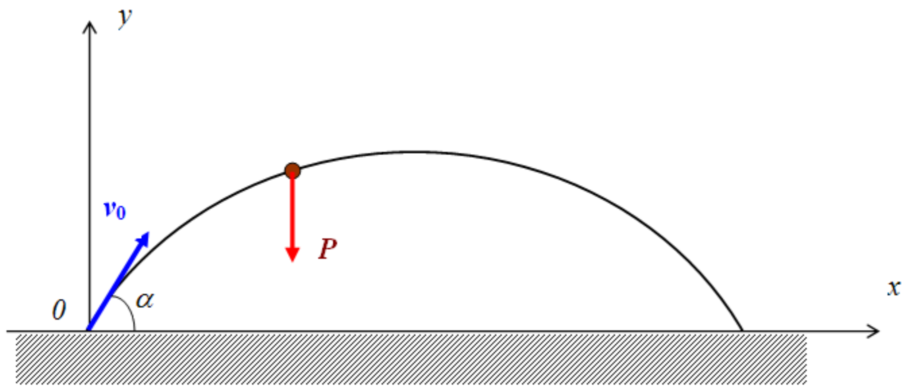
- Windows 7 korral võib juhtuda, et graafikut ei ole näha, siis tuleb parema hiireklahviga vajutades graafikule märkeruut **Border** sõna eest välja lülitada



Näide 3

- Keha visatakse **algkiirusega 100 meetrit sekundis** horisondi suhtes üles
- **algnurga** all **30 kraadi**

(radiaanides $\mathbf{30\pi/180}$)



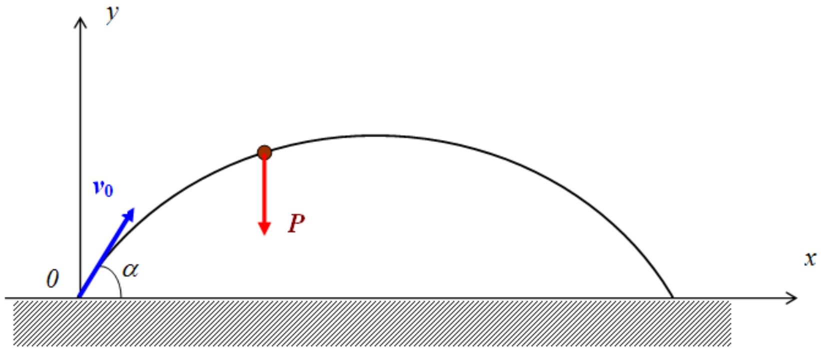
- Keha **mass** on $m = 50$
- **takistustegur** $R = 0.2$
- **Algtingimused:**
  - keha algasukoht on punktis$(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

    algtingimused $x(0) = 0, y(0) = 0$
  - algkiirus ja algnurk on kiiruste algväärtused:

$$vx(0) = algkiirus \cdot \mathbf{cos}(algnurk),$$
$$vy(0) = algkiirus \cdot \mathbf{sin}(algnurk)$$

Lahendus Mathcadis

$m := 50 \quad R := 0.2 \quad v0 := 100 \quad algnurk := 30 \cdot \pi/180$



Given

$$x'(t) = vx(t)$$

$$y'(t) = vy(t)$$

$$vx'(t) = -\frac{R \cdot vx(t) \cdot |vx(t)|}{m}$$

$$vy'(t) = -9.8 - \frac{R \cdot vy(t) \cdot |vy(t)|}{m}$$

$x(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad vx(0) = v0 \cdot \cos(algnurk)$

$vy(0) = v0 \cdot \sin(algnurk)$

$$\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ vx1 \\ vy1 \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ vx \\ vy \end{pmatrix}, t, 10\right]$$

Tulemused

- Kasutades saadud lahendeid, leiame

a) kui kaua keha on õhus?

Leida kasutades funktsiooni $\boldsymbol{root(f(x),x)}$, andes enne algväärtuse otsitavale, näiteks $\boldsymbol{t3 := 7}$ ja arvestades, et keha jõuab maapinnani siis, kui $\boldsymbol{y = 0}$

$\mathbf{t4 := 7} \quad \mathbf{maas := root(y1(t4), t4)} \quad \mathbf{maas =} 8.48$

b) kui kaugel keha alla kukub?

Leida $\boldsymbol{x}$ koordinaat ajahetke jaoks, mil keha kukub maha

$\mathbf{x1(maas) =} 342.643$

c) millise maksimaalse kõrguse keha saavutab? Sellele küsimusele vastamiseks peame kõigepealt leidma ajahetke, mil keha kiirus saab väärtuse $\mathbf{0}$ ehk leidma funktsiooni $\boldsymbol{root}$ abil $\boldsymbol{vy} = \mathbf{0}$ ajahetk

$$\mathbf{t5} := \mathbf{3} \quad \mathbf{kiirusnull} := \mathbf{root}(\mathbf{vy1}(\mathbf{t5}), \mathbf{t5})$$

$$\mathbf{kiirusnull} = 3.992$$

Maksimaalne kõrgus on $\boldsymbol{y}$ väärtus vastaval ajahetkel

$$\mathbf{y1}(\mathbf{kiirusnull}) = 87.912$$

Saime vastused kõigile küsimustele:

a) Keha on õhus 8.48 sek

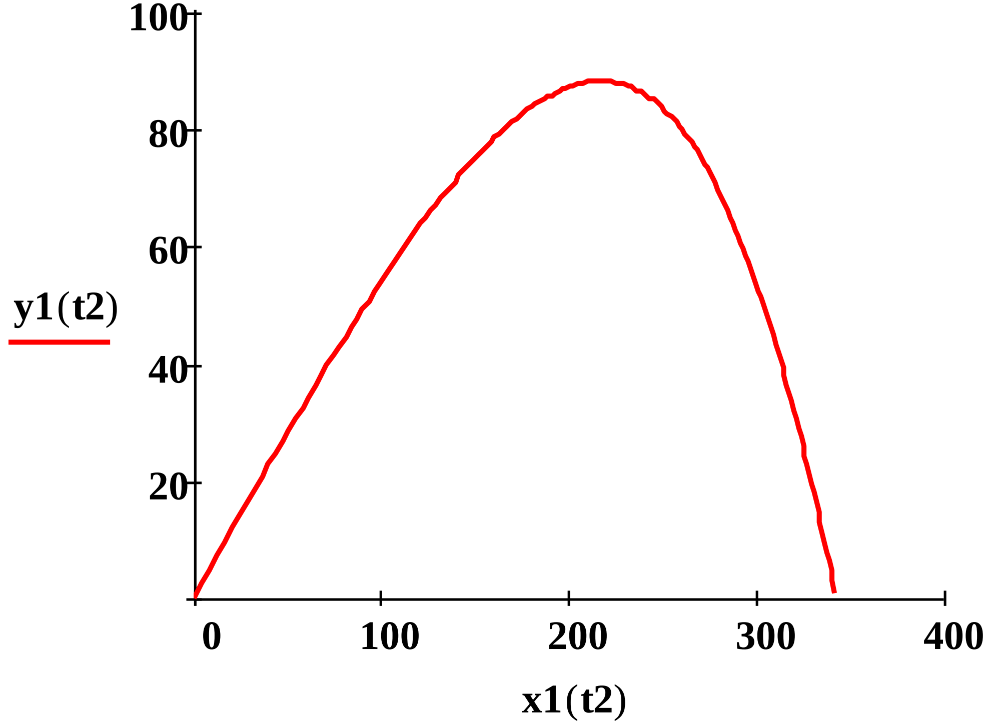
b) Keha kukub maapinnale 342.643 m

c) Keha saavutas maksimaalse kõrguse 87.912 m

Graafik

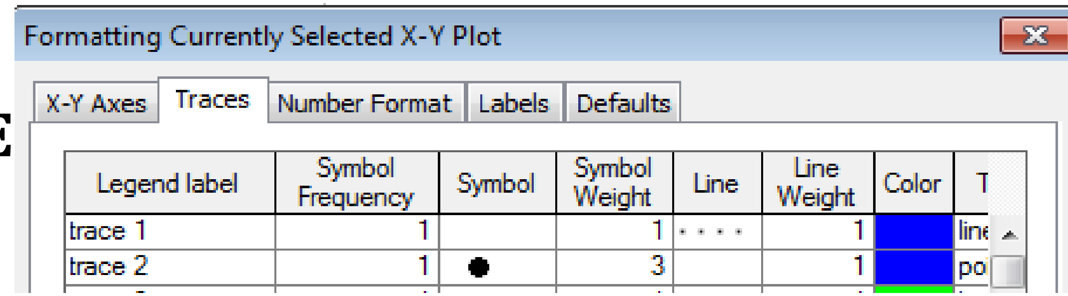
- Teha **graafik** keha liikumisest, kus aeg muutub alates $\mathbf{0}$ kuni keha mahakukkumise ajani $(\boldsymbol{maas})$

$$\mathbf{t2 := 0, 0.1 .. maas}$$



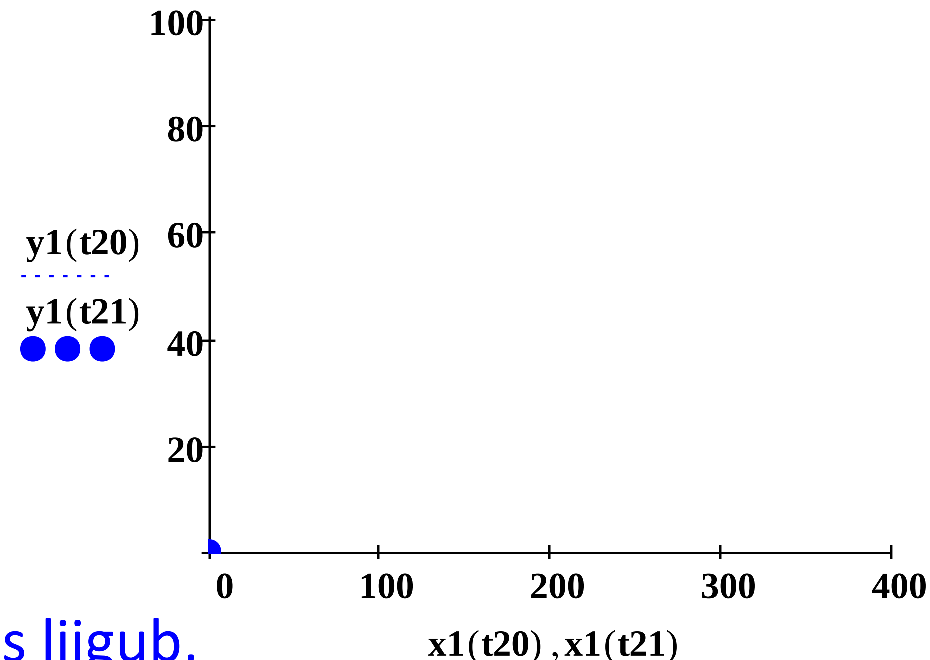
Animatsioon kivi viskamisest

- **Animeerida graafik**, jadamuutuja $\boldsymbol{FRAME}$ on antud aja lõppväärtuseks



$$\mathbf{t20 := 0, 0.1 .. 0.1 \cdot FRAME}$$
$$\mathbf{t21 := 0.1 \cdot FRAME}$$

Enne animeerimist tuleks **fikseerida väärtused *x* ja *y* teljel**, et vältida graafiku „hüplemist“ video ajal (iga FRAME väärtuse korral joonistab Mathcad uue graafiku ja seoses sellega võib ka telgede rajad ära muuta)



Teine joon tähistab kivi (keha) mis liigub, sellepärast on see vormindatud sümbolina ja ilma jooneta

Valmis animatsioon

Tools – Animation – Record avab animeerimise akna
Jadamuutuja **FRAME** muutub animeerides kuni väärtuseni **84** (rohkem ei ole vaja muuta)
Enne **Animate** nupu vajutamist tuleks **märgistada** uuesti animeeritav **graafik** (NB! Märgistamisel peab jääma graafiku ümber vaba ruumi)
Avanevas uues aknas saab videot vaadata

Save as **salvestab videoklipi faili (*.avi),** mille vaatamiseks sobivad kõik vastavd programmid (Windows Media Player)