

Matemaatika olümpiaadid

Diskreetse matemaatika seminar

Ülesanne 1. Olgu meil tabel mõõtmetega 10×10 ruutu. Igasse ruutu kirjutatakse -1 , 0 või 1 . Tõestage, et kui välja arvutada tabeli iga rea, veeru ja diagonaali elementide summad, siis nende seas leidub vähemalt kaks võrdset summat.

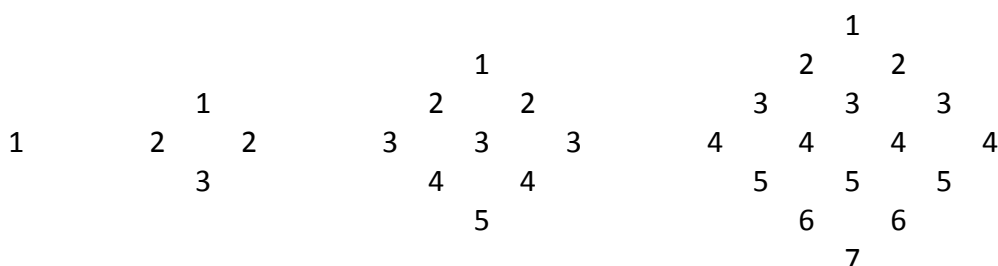
Ülesanne 2. Ühte ritta kirjutatakse 17 suvalist mittenegatiivset täisarvu. Tõestage, et nende seas on võimalik valida mõned järjest kirjutatud arvud (võib-olla ka ühe arvu) nii, et nende summa jagub 17-ga.

Ülesanne 3. Tõestage, et kahevärvilises 6-tipulises graafis leidub vähemalt kaks ühevärvilist kolmnurka.

Ülesanne 4. On tarvis tõestada, et suvaliste 13 reaalarvu seast saab leida kaks arvu x ja y , mille korral

$$0 < \frac{y-x}{1+xy} < 2 - \sqrt{3}.$$

Ülesanne 5. Naturaalarvudest koostatakse rombid küljepikkusega $1, 2, 3, \dots$ allnäidatud viisil. Leida n -nda rombi arvude summa ja tõestada saadud valemi õigsus induktsiooniga.



Ülesanne 6. Kõik linnud on ühte värvi.

Baas. Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et väide kehtib k linnu korral. Vaatleme $k + 1$ lindu $L_1, \dots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \dots, L_k$ on ühte värvi.

Jättes välja esimese linnu, näeme, et ka linnud $L_2, \dots, L_{k+1}$ on ühte värvi. Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi nagu linnud $L_1, \dots, L_k$, seega on kõik $k + 1$ lindu ühte värvi.

Ülesanne 7. Mitmel viisil saab sõnas MATEMAATIKA tähti ümber paigutada nii, et kaks A – tähte poleks kuskil kõrvuti?

Ülesanne 8. Malelaua vasakul alumisel ruudul a_1 asub kuningas, millel lubatakse ühe käiguga liikuda ainult kas sammu paremale või sammu üles. Mitu võimalikku teekonda saab kuningas valida, et jõuda laua paremale ülemisele ruudule h_8 ? Mitu erinevat teekonda on siis, kui malelaua mõõtmed on $k \times l$?

Ülesanne 9. Maagiline geomeetria on valdkond, milles püütakse mitmesuguste kujundite tükkideks lõikamise ja seejärel tükide kokkupanemise teel näidata, et mateeria jäävuse seadus on ilmselt väär. Kõrvalolev joonis näiteks tõestab, et $64 = 65$. Milles on viga? Millisel eespool toodud võrdusel „maagia“ põhineb? Pannes tähele, et kujundite küljepikkused on Fibonacci arvud, leida viis niisuguse konstruktsiooni üldistamiseks.

