

Arvuteooria võistlusülesannete lahendamine

1. Leia võrrandi täisarvulised lahendid x ja y .

$$xy - 2x + 3y = 5$$

2. Millise algarvu p väärtuste korral on arv $p+4$, $p+14$ algarv?

3. Leia võrrandi täisarvulised lahendid x ja y .

$$2x^2 - 5y^2 = 7$$

4. Olgu n positiivne täisarv. Põhjendage, et kui arvul n on täpselt 2009 erinevat positiivset tegurit, siis see on mingi täisarvu ruut.

5. Olgu a , b , c ja d täisarvud ning olgu m positiivne täisarv. Tõestage järgmised omadused:

- Kui $a \equiv b \pmod{m}$, siis $ak \equiv bk \pmod{m}$ mis tahes täisarvu k korral
- Kui täisarvud k ja m on ühistegurita, siis $a \equiv b \pmod{m}$ on samaväärne kongruentsiga $ak \equiv bk \pmod{m}$
- Kui $a \equiv b \pmod{m}$ ja k on selline positiivne täisarv, et $k \mid m$, siis $a \equiv b \pmod{k}$

6. Tõestage, et

- $2007 \mid 1*2*3*4*...*1002*1003+1004*1005*...*2003*2004*2005*2006$
- $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$

7. Tõestage, et mistahes positiivsete täisarvude a ja b korral arv $2a+3b$ jagub arvuga 17 siis ja ainult siis, kui $9a+5b$ jagub arvuga 17.

8. Tõestage, et mistahes paaritu positiivse täisarvu n korral summa $5^n + 11^n + 17^n$ jagub arvuga 33.

9. Tõestage, et mistahes naturaalarvu n korral $19 \mid 5 * 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$.