

Praktikum 3

Praktikumi põhiteemadeks on kahe sõltumatu juhusliku suuruse summa, jagatise, korrutise ja vahe jaotus. Summa jaotust uurime nii pideval kui ka diskreetsel juhul.

1. Olgu X pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga f_X ja sellest sõltumatu pidev juhuslik suurus Y tihedusfunktsiooniga f_Y . Leida juhusliku suuruse $Z = XY$ tihedusfunktsioon f_Z .
2. Olgu $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ja sellest sõltumatu $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. Kas eksponentjaotuse korral kehtib reproduktiivsuse omadus? (S.t. kas $Z = X + Y$ on samuti eksponentjaotusega?) Lahendada kahel viisil: momente genereeriva funktsiooni ja Lemma 10 abil.
3. Tuletada Lemma 10 analoog diskreetsel juhul:
Kui X on diskreetne juhuslik suurus tõenäosusfunktsiooniga $p(k) = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ ja sellest sõltumatu diskreetne juhuslik suurus Y on tõenäosusfunktsiooniga $q(r) = P(Y = r)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, siis juhuslik suurus $Z = X + Y$ on tõenäosusfunktsiooniga

$$w(i) = P(Z = i) = \sum_{k=0}^i p(k) q(i - k), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

4. Ausat täringut veeretatakse 2 korda. Olgu X viske tulemus esimesel korral ja Y viske tulemus teisel korral. Leida juhusliku suuruse $Z = X + Y$ jaotus ülesandes 3 tõestatud valemi abil.
5. Olgu $X \sim \text{Exp}(1)$ ja $Y \sim \text{Exp}(2)$ sõltumatud juhuslikud suurused. Leida $P(X > 2Y)$ kasutades Lemma 11 väidet kahe juhusliku suuruse jagatise tiheduse kohta.
6. Olgu juhusliku suuruse (X, Y) ühisjaotuse tihedusfunktsioon kujul

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} -x + 2y - 2xy + 1, & \text{kui } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Leida suurused EX , EY ja $E(XY)$. Kas juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud?

Kodused ülesanded III

1. Olgu $X \sim N(0, 1)$ ja $Y \sim N(0, 1)$ sõltumatud juhuslikud suurused. Leida juhusliku suuruse $Z = X + Y$ tihedusfunktsioon kasutades Lemmat 10 (vt konspekti). Integraali keerulise kuju korral võib kasutada WolframAlpha (või muu alternatiivse programmi) abi.
2. Olgu X pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga f_X ja sellest sõltumatu pidev juhuslik suurus Y tihedusfunktsiooniga f_Y . Leida juhusliku suuruse $Z = X - Y$ tihedusfunktsioon f_Z .
3. Aktsia hinna muutus ühe päeva jooksul on diskreetne juhuslik suurus X , mille jaotus on järgmine:

X	-1	0	1	2
$P(X = k)$	1/4	1/2	1/8	1/8

Leida ülesandes 3 tõestatud valemi abil aktsia hinna muutuse jaotus kahe (sõltumatu) päeva pärast.