

Praktikum 4

Praktikumi põhiteemadeks on kovariatsioon ning korrelatsioon kahe juhusliku suuruse vahel koos omadustega ning kahemõõtmeline normaaljaotus.

1. Olgu X ja Y mingid lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused. Leida selline konstandi a väärtus (suuruste DX , DY ja $cov(X, Y)$ kaudu), et juhusliku suuruse $Z = aX + (1 - a)Y$ dispersioon oleks minimaalne.
2. Näidata, et kui juhuslike suuruste X ja Y korral $DX = DY$, siis kovariatsioon suuruste $Z = X + Y$ ja $W = X - Y$ vahel on null.
3. Olgu A_1 , A_2 , A_3 sõltumatud eksponentjaotusega $Exp(1)$ juhuslikud suurused. Olgu $X = A_2 + \frac{1}{2}A_1$ ning $Y = A_3 + \frac{1}{2}A_2$. Leida $cov(X, Y)$ ja $\rho_{X, Y}$.
4. Tõestada, et kahemõõtmelise normaaljaotusega juhusliku suuruse $(X, Y)^T$ komponendid on sõltumatud parajasti siis kui $cov(X, Y) = 0$.

Mitmemõõtmelise normaaljaotuse lisaomadused:

1. Sõltumatud normaaljaotusega juhuslikud suurused moodustavad mitmemõõtmelise normaaljaotusega vektori (kovariatsioonimaatriks on diagonaalne).
2. Olgu $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ja $\mathbf{D} : l \times n$ teisenduste maatriks astakuga $l \leq n$ ning olgu $\mathbf{Y} = \mathbf{D} \mathbf{X} : l \times 1$ (juhuslik vektor, mis on saadud elementide X_i lineaarsete kombinatsioonide abil). Siis $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}^T)$.

Sellest omadusest järlidub:

- (a) Kui $\mathbf{D} = \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n) : 1 \times n$ reavektor, siis $\mathbf{Y} = \mathbf{d}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n d_i X_i$. See tähendab, et mitmemõõtmelise normaaljaotuse korral vektori elementide lineaarne kombinatsioon on samuti normaaljaotusega.
- (b) Kui $\mathbf{D} = \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, 0, 0, \dots, 0) : 1 \times n$, mille esimest k komponenti erineb nullist ja ülejäänud on nullid, siis $\mathbf{Y} = \mathbf{d}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^k d_i X_i$. See tähendab, et mitmemõõtmelise normaaljaotuse korral vektori elementide suvalise alamhulga lineaarne kombinatsioon on samuti normaaljaotusega.
- (c) Saame alati valida $\mathbf{D}$ nii, et see "võtaks" vektorist $\mathbf{X}$ suvalise alamhulga elemente, näiteks kui $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$ ja

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

siis $\mathbf{Y} = \mathbf{D} \mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$. See tähendab, et mitmemõõtmelise normaaljaotusega vektori suvaline alamhulk on samuti normaaljaotusega.

5. Juhuslikult valitakse üks abielupaar ning eeldatakse, et naise pikkus ning mehe pikkus moodustavad kahemõõtmelise normaaljaotusga juhusliku suurust, kusjuures naiste pikkuste üldkogumi keskmine on 160,3 cm standardhälbega 4,8 cm ning meeste üldkogumi keskmine on 168 cm sama standardhälbega, ning korrelatsioon pikkuste vahel on 0,68. Leida tõenäosus, et juhuslikult valitud abielupaari korral naine on pikem kui mees.

6. Moodustagu $(X, Y)^T$ kahemõõtmelise normaaljaotusega juhusliku vektorit, kusjuures $EX = 1$, $EY = 0$, $DX = 2$, $DY = 4$ ja $cov(X, Y) = 1$. Olgu $Z = X + Y$ ja $W = X + aY$, a on mingi konstant. Tuletada $cov(Z, W)$ ning leida selline a , et Z ja W oleksid sõltumatud.
7. Olgu X ja Y pidevad juhuslikud suurused, mille ühisjaotuse tihedusfunktsioon on järgmine:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{kui } y + x \leq 1, \ x > 0, \ y > 0, \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Leida $cov(X, Y)$ ja $\rho_{X,Y}$.

Kodused ülesanded IV

1. Juhuslikult valitud tudengile antakse lahendamiseks kaks testi, A ja B. On teada, et testi A üldine keskmine on 85 standardhälbega 10, testi B üldine keskmine on 90 standardhälbega 16; kusjuures testi tulemused moodustavad kahemõõtmelise normaaljaotusega juhuslikku vektorit. Korrelatsioon kahe testi vahel on 0,8. Leida tõenäosus, et selle juhuslikult valitud tudengi kahe testi summa on suurem kui 200.
2. Olgu $A_1 \sim U(0, 2)$, $A_2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$, $A_3 \sim B(9, \frac{1}{3})$ sõltumatud juhuslikud suurused. Olgu $X = A_2 + 3A_1$ ning $Y = A_3 - A_1$. Leida suuruste X ja Y kovariatsioon ning Pearsoni korrelatsioonikordaja.
3. Juhuslik vektor $(X, Y)^T$ on kahemõõtmelise normaaljaotusega, kusjuures $EX = 0$, $DX = 1$, $EY = -1$, $DY = 4$ ja $\rho_{X,Y} = -1/2$. Leida konstandi a väärtus nii, et suurused $(aX + Y)$ ja $(X + 2Y)$ oleksid sõltumatud. (NB! Panna kirja teisenduste maatriks **D**.)