TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKA TEADUSKOND
Puhta matemaatika instituut

Aivo Parring

ALGEBRA JA GEOMEETRIA

Tartu 2005

SISSEJUHATUS

Käesolevate märkmete järele tekkis vajadus 2000/01 õppeaastal, kui muudeti tollase matemaatikateaduskonna õppekavasid. Selle tulemusena lülitati õppekavasse algebra ja analüütilise geomeetria sissejuhatavaid peatükke käsitlev aine "Algebra ja geomeetria". Vahepeal on elu edasi läinud. Matemaatikateaduskonnast on juba saanud matemaatika-informaatikateaduskond. Nelja-aastasest bakalaureuse õppest on saamas kolmeaastane bakalaureuse õpe. Uue õppekava kohaselt on selle õppeaine maht nüüd 40 tundi loenguid ja sama palju harjutusi. Iseseisvaks tööks on ette nähtud 80 tundi. Semestri jooksul toimub 20 kahetunnilist loengut ja 20 kahetunnilist harjutustundi. Loengutest kolm esimest peatükki on pühendatud algebrale ja kolm viimast peatükki analüütilisele geomeetriale. Algebra peatükkideks on 1) maatriksid ja determinandid, 2) vektorruum üle reaalarvude ning 3) lineaarvõrrandisüsteemid. Analüütilise geomeetria omad on aga 4) vektoralgebra, 5) sirged ja tasandid ning 6) ellips, hüperbool, parabool ja ülevaade teist järku pindadest. Käesolevat õppeainet loetakse matemaatika-informaatika, füüsika-keemia ja haridusteaduskonna üliõpilastele.

Ei saa mitte kuidagi jätta märkimata, et matemaatilist teksti tuleb omandada laua taga pliiatsi ja paberiga. Valemite teisendamisel peate alati iga võrdusmärgi puhul küsima endalt, miks ta kehtib. Nende loengute autor soovitab siiralt, et Te iga võrdusmärgi kohale kirjutaksite valemi numbri, mis selgitab ülemineku õigsust. Õige pea Te märkate, et matemaatilise teksti omandamine on tõesti meeldiv tegevus. Hea lugeja, jõudu süstemaatilisele tööle.

Käesoleva õppevahendi joonised on arvutil teinud üliõpilane Marge Ilmosaar. Südamlik tänu talle selle eest.

SISUKORD

V. Sirged ja tasandid

VI. Ellips, hüperbool ja parabool. Ülevaade teist järku pindadest

I. MAATRIKSID JA DETERMINANDID

1. MAATRIKSI MÕISTE. TEHTED JA NENDE OMADUSED

1.1. Üldmõisted

Olgu $\mathbb{R}$ reaalarvude hulk. Kõike, mida saab teha reaalarvudega, eeldame lugejale teadaolevaks.

Definitsioon 1.1. *Tabelit reaalarvudest, milles on eristatavad read ja veerud ning on paigutatud ümarsulgudesse, nimetatakse maatriksiks.*

Definitsioon 1.2. *Maatriksit, millel on m rida ja n veergu, nimetatakse täpsemalt (m, n)-maatriksiks. Arvupaari (m, n) nimetatakse selle maatriksi mõõtmeteks.*

Definitsioon 1.3. *Maatriksit, millel on ridade ja veergude arv võrdne, s.o. m=n, nimetatakse ruutmaatriksiks. Maatriksit, millel ridade ja veergude arv on erinev, s.o. $m \neq n$, nimetatakse ristkülikmaatriksiks. Ruutmaatriksit mõõtmetega (n, n) nimetatakse ka n-järku maatriksiks.*

Definitsioon 1.4. *Reaalarve, millest maatriks koosneb, nimetatakse maatriksi elementideks.*

Maatriksi kirjapanekuks tähistame tema elemente väikese põhitähega, näiteks tähega a, mis on varustatud kahe indeksiga. Neist esimene ütleb mitmendas reas ja teine mitmendas veerus see element maatriksis asub. Näiteks (m, n)-maatriks näeb välja järgmine

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Selles maatriksis element a_{ij} asub i-ndas reas ja j-ndas veerus, element a_{st} asub s-ndas reas ja t-ndas veerus. Kui maatriksi elemendi a_{ij} reaindeks i muutub hulgas $\mathbb{N}_m := \{1, 2, ..., m\}$ ja veeruindeks j muutub hulgas $\mathbb{N}_n := \{1, 2, ..., n\}$, siis me oleme vaadelnud selle maatriksi kõiki elemente. Maatriksit (1.1) tähistame tihti ka lühemalt, juhul kui ei teki kaksipidi mõistmist, niinimetatud *üldelemendi* a_{ij} abil, saades (a_{ij}). Kui teame, kuidas muutuvad indeksid i ja j, siis saame taastada (a_{ij}) abil kuju (1.1). Veel on üks võimalus tähistada maatriksit (1.1) lühemalt, nimelt tähistame teda suure trükitähega. Eespool olevat maatriksit (1.1) tähistame tähega A. Seega võime kirjutada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \iff A = (a_{ij}), \quad i \in \mathbb{N}_m, \quad j \in \mathbb{N}_n. \quad (1.2)$$

Maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = (\,1 \quad -2 \quad 3\,), \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = (10) \qquad (1.3)$$

on vastavalt $(2,2)$-maatriks ehk teist järku maatriks, $(1,3)$-maatriks, $(3,1)$-maatriks ja $(1,1)$-maatriks ehk esimest järku maatriks. Maatriksite B ja C kohta öeldakse ka, et nad on vastavalt *üherealine* ja *üheveeruline maatriks*.

Definitsioon 1.5. *Ruutmaatriksit*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

nimetatakse ühikmaatriksiks.

Näiteks

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on vastavalt teist ja kolmandat järku ühikmaatriksid. Ühikmaatriksi saab kirja panna ka lühidalt üldelemendi abil, kasutades selleks *Kroneckeri sümbolit* δ_{ij}. Viimane defineeritakse valemiga

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{kui} \quad i \neq j \\ 1, & \text{kui} \quad i = j \end{cases}. \qquad (1.4)$$

Näiteks (δ_{ij}), kus $i, j \in \mathbb{N}_n$, on n- järku ühikmaatriks.

Definitsioon 1.6. *Me nimetame (m, n)-maatriksit nullmaatriksiks, kui kõik tema elemendid on nullid. Tähistame teda θ abil.*

Näiteks

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on (2,3)-nullmaatriks ja (3,1)-nullmaatriks.

Definitsioon 1.7. *Maatriksit A nimetame võrdseks maatriksiga B, kui neil on sama palju ridu ja sama palju veerge ning ühesugustel kohtadel on võrdsed elemendid. Tähistame A=B.*

Näiteks maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

mõlemad on (m, n)-maatriksid. Nad on võrdsed, s.o. $A = B$, kui

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_m, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n.$$

Näiteks valemis (1.3) maatriksid B ja C ei saa olla võrdsed, olenemata elementidest, sest mõõtmed (1,3) ja (3,1) pole ühesugused.

Definitsioon 1.8. *Maatriksi A vastandmaatriksiks, tähistame $-A$ abil, nimetatakse maatriksit, mille elementideks on maatriksi A elementide vastandarvud.*

Öeldu põhjal maatriksi (1.2) vastandmaatriksiks on

$$-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Vahetult definitsioonist 1.8 saame

$$-(-A) = A, \quad -\theta = \theta.$$

Maatriksite (1.3) vastandmaatriksid on vastavalt

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad -B = (\,-1 \quad 2 \quad -3\,),$$

$$-C = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -D = (\,-10\,).$$

Definitsioon 1.9. *Maatriksi transponeeritud maatriksiks nimetatakse maatriksit, mis saadakse antud maatriksist ridade ja veergude äravahetamisel. Maatriksi A transponeeritud maatriksit tähistatakse $A^\top$ abil.*

Näiteks (m,n)-maatriksi (1.2) transponeeritud maatriksiks on (n,m)-maatriks

$$A^\top := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Maatriksite (1.3) korral saame

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C^\top = (\,1 \quad 4 \quad -1\,), \quad D^\top = (\,10\,).$$

Ühikmaatriksi korral $E^\top = E$. Definitsioonist 1.9 saame

$$(A^\top)^\top = A.$$

Transponeeritud maatriksi definitsiooni 1.9 saab kirja panna ka teisiti. Kui tähistame

$$A^\top = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

siis

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_n, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_m. \tag{1.8}$$

Kirjutis (1.6) ning kirjutised (1.7) ja (1.8) on samaväärsed.

Definitsioon 1.10. *Ruutmaatriksit*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse sümmeetriliseks (*kaldsümmeetriliseks*), *kui*

$$A^\top = A \quad (A^\top = -A). \tag{1.9}$$

Kasutades valemeid (1.7) ja (1.8), saame tingimused (1.9) kirja panna ka maatriksi elementide abil. Me saame vastavalt

$$A^\top = A \Longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_n$$

ja

$$A^\top = -A \Longleftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_n. \tag{1.10}$$

Kaldsümmeetrilise maatriksi korral valemist (1.10) me $i = j$ korral saame

$$a_{ii} = -a_{ii} \Longleftrightarrow a_{ii} = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_n.$$

Seega on kaldsümmeetrlise maatriksi nn. *peadiagonaali* elemendid a_{11}, $a_{22}, ...,$ a_{nn} nullid. Näiteks maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = (1000)$$

on sümmeetrilised, aga maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kaldsümmeetrilised. Ühikmaatriks on sümmeetriline, sest $E^\top = E$. Samas n-järku nullmaatriks θ on samaaegselt nii sümmeetriline kui ka kaldsümmeetriline, sest $\theta^\top = \theta$ ja $\theta^\top = -\theta$.

Definitsioon 1.11. *Kõikvõimalike mõõtmetega maatriksite hulka tähistame Mat abil. Kõigi (m, n)-järku maatriksite hulka tähistame aga $Mat(m, n)$ abil.*

1.2. Maatriksite liitmine, selle omadused

Enne, kui anname maatriksite liitmise mõiste, pöördume korraks tagasi meile tuntud reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ juurde. Selles hulgas on antud liitmine ja korrutamine. Tegelikult on reaalarvude liitmine ja korrutamine ühesuguse olemusega: nimelt võetakse kaks reaalarvu kindlas järjekorras ning antakse eeskiri kuidas nende abil üheselt määrata uus reaalarv. Juhul kui olete tuttav kujutuse mõistega, siis reaalarvude liitmine ja korrutamine on kujutused

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \longmapsto x + y,$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \longmapsto xy.$$

Kujutiste $x + y$ ja xy leidmist iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral õpitakse koolis aastate kaupa. Seejuures, kui reaalarvud x ja y on irratsionaalarvud, siis ilmselt summa $x + y$ ja korrutis xy jäävadki oma keerukuse tõttu defineerimata.

Nüüd, parema viitamise huvides, paneme kirja reaalarvude liitmise ja korrutamise omadused.

1° *Reaalarvude liitmine ja korrutamine on kommutatiivsed:*

$$x + y = y + x, \quad xy = yx. \tag{1.11}$$

2° *Reaalarvude liitmine ja korrutamine on assotsiatiivsed:*

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (xy)z = x(yz). \tag{1.12}$$

3° *Leiduvad sellised reaalarvud* 0 *ja* 1, *et iga reaalarvu* x *korral*

$$x + 0 = x, \quad x1 = x. \tag{1.13}$$

4° *Iga reaalarvu* $x \in \mathbb{R}$ *jaoks leidub nn. vastandarv* $-x$, *et*

$$x + (-x) = 0.$$

5° *Distributiivsused:*

$$x(y + z) = xy + xz, \tag{1.14}$$

$$x(y - z) = xy - xz, \tag{1.15}$$

kus lahutamine defineeritakse valemiga

$$x - y := x + (-y).$$

Pöördume nüüd tagasi maatriksite juurde. Seejuures ei vaatle me igasuguseid maatrikseid, vaid selliseid, mis on ühesuguste mõõtmetega, näiteks selliseid, millel on m rida ja n veergu. Seega vaatluse all on maatriksite hulk $Mat(m, n)$.

Definitsioon 1.12. *Mistahes kahe (m,n)-maatriksi*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mn} \end{pmatrix}$$

korral hulgast $Mat(m, n)$ nende summaks nimetatakse maatriksit, mida tähistatakse $X + Y$ abil ja defineeritakse valemiga

$$X + Y := \begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} & x_{12} + y_{12} & \dots & x_{1n} + y_{1n} \\ x_{21} + y_{21} & x_{22} + y_{22} & \dots & x_{2n} + y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} + y_{m1} & x_{m2} + y_{m2} & \dots & x_{mn} + y_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Paneme tähele, et maatriksite liitmine on ka kujutus

$$+ : Mat(m, n) \times Mat(m, n) \longrightarrow Mat(m, n),$$

mis defineeritakse tuntud mõiste, reaalarvude liitmise, kaudu: maatriksite X ja Y samadel kohtadel olevad elemendid liidetakse. Maatriksite liitmise definitsiooni saab anda ka kompaktsemalt, kasutades nende maatriksite üldelemente. Nimelt $X = (x_{ij})$ ja $Y = (y_{ij})$ korral hulgast $Mat(m, n)$ saame

$$X + Y = (z_{ij}), \tag{1.17}$$

kus

$$z_{ij} := x_{ij} + y_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_m, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n. \tag{1.18}$$

Näiteks maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

korral

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ei saa aga üldsegi liita, sest liitmise definitsiooni 1.12 valem (1.16) ei lase end rakendada. Maatriksite liitmisel on järgmised omadused.

1° *Maatriksite liitmine on assotsiatiivne, s.o. mistahes kolme maatriksi* $X, Y, Z \in Mat(m, n)$ *korral*

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z). \tag{1.19}$$

2° *Iga* $X \in Mat(m, n)$ *ja nullmaatriksi* $\theta \in Mat(m, n)$ *korral*

$$X + \theta = X, \quad \theta + X = X.$$

3° *Iga* $X \in Mat(m, n)$ *ja tema vastandmaatriksi* $-X \in Mat(m, n)$ *korral kehtib*

$$X + (-X) = \theta, \quad (-X) + X = \theta.$$

4° *Maatriksite liitmine on kommutatiivne, s.o. mistahes kahe maatriksi* $X, Y \in Mat(m, n)$ *korral*

$$X + Y = Y + X.$$

Enne kui tõestame need omadused, märgime, et tõestused tuginevad tegelikult reaalarvude omadustele (1.11) – (1.15). Tõestuste läbiviimisel kasutame maatriksite liitmise definitsiooni kompaktsel kujul, mis antakse valemitega (1.17) ja (1.18). Soovitame lugejal mõned neist tõestustest kirja panna, kasutades maatriksite liitmise detailsemat definitsiooni antuna valemiga (1.16).

Tõestame nüüd maatriksite liitmise omadused $1° - 4°$.

1° Olgu maatriksid $X, Y, Z \in Mat(m, n)$ antud üldelementide abil, s.o.

$$X = (x_{ij}), \quad Y = (y_{ij}), \quad Z = (z_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_m, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n.$$

Valemite (1.17) ja (1.18) abil saame

$$X + Y = (u_{ij}), \quad (X + Y) + Z = (v_{ij}),$$

kus
$$u_{ij} = x_{ij} + y_{ij}, \quad v_{ij} = u_{ij} + z_{ij} = (x_{ij} + y_{ij}) + z_{ij}.$$
Analoogiliselt saame
$$Y + Z = (w_{ij}), \quad X + (Y + Z) = (p_{ij}),$$
kus
$$w_{ij} = y_{ij} + z_{ij}, \quad p_{ij} = x_{ij} + w_{ij} = x_{ij} + (y_{ij} + z_{ij}).$$
Reaalarvude liitmise assotsiatiivsuse (1.12) tõttu
$$(x_{ij} + y_{ij}) + z_{ij} = x_{ij} + (y_{ij} + z_{ij}) \Longleftrightarrow v_{ij} = p_{ij}$$
iga $i \in \mathbb{N}_m$ ja $j \in \mathbb{N}_n$ korral. Maatriksite võrduse definitsiooni 1.7 kohaselt saame
$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z). \quad \spadesuit$$

2° Iga $X = (x_{ij})$ ja $\theta = (o_{ij})$, kus $o_{ij} = 0$, korral
$$X + \theta = (x_{ij} + o_{ij}) = (x_{ij} + 0) = (x_{ij}) = X \Longrightarrow X + \theta = X$$
ja
$$\theta + X = (o_{ij} + x_{ij}) = (0 + x_{ij}) = (x_{ij}) = X \Longrightarrow \theta + X = X. \quad \spadesuit$$

3° Iga $X = (x_{ij})$ korral hulgast $Mat(m, n)$ valemi (1.5) kohaselt tema vastandmaatriksiks on $-X = (-x_{ij})$. Seega
$$X + (-X) = (x_{ij} + (-x_{ij})) = (o_{ij}) = \theta,$$
$$(-X) + X = (-x_{ij} + x_{ij}) = (o_{ij}) = \theta. \quad \spadesuit$$

4° Iga $X = (x_{ij})$ ja $Y = (y_{ij})$ korral hulgast $Mat(m, n)$, tänu reaalarvude liitmise kommutatiivsusele (1.11), saame
$$X + Y = (x_{ij} + y_{ij}) = (y_{ij} + x_{ij}) = Y + X \Longrightarrow X + Y = Y + X. \quad \spadesuit$$
Sellega omadused $1^\circ - 4^\circ$ on tõestatud.

Kasutades vastandmaatriksi mõistet, saab maatriksite liitmise abil defineerida maatriksite lahutamise.

Definitsioon 1.13. *Maatriksite $X, Y \in Mat(m, n)$ vaheks, tähistame $X - Y$ abil, nimetatakse maatriksit*
$$X - Y := X + (-Y).$$

1.3. Maatriksi korrutamine reaalarvuga

Selles punktis me defineerime reaalarvu ja mistahes mõõtmetega maatriksi korrutise.

Definitsioon 1.14. *Reaalarvu λ ja mistahes mõõtmetega maatriksi X korrutiseks nimetatakse maatriksit λX, mille elemendid saame maatriksi X kõigi elementide läbikorrutamisel reaalarvuga λ.*

Selle definitsiooni kohaselt $\lambda \in \mathbb{R}$ ja maatriksi

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

korral

$$\lambda X := \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \dots & \lambda x_{1n} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} & \dots & \lambda x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda x_{m1} & \lambda x_{m2} & \dots & \lambda x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sama definitsiooni võib anda ka maatriksi üldelemendi abil:

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad X = (x_{ij}) \Longrightarrow \lambda X := (\lambda x_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_m, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n.$$

Näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

korral

$$(-2)A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi korrutamisel reaalarvuga on terve rida omadusi. Need on järgmised.

Mistahes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja mistahes $X, Y \in Mat(m, n)$ korral

1° $$1X = X,$$

2° $$(-1)X = -X,$$

3° $$0X = \theta,$$

4° $$\lambda\theta = \theta,$$

5° $$(\lambda\mu)X = \lambda(\mu X),$$

6° $\lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y,$
7° $(\lambda+\mu)X=\lambda X+\mu X,$
8° $\lambda(X-Y)=\lambda X-\lambda Y,$
9° $(\lambda-\mu)X=\lambda X-\mu X.$

Nende omaduste tõestused tuginevad tegelikult reaalarvude omadustele (1.11)−(1.15). Vaatamata sellele, et nende omaduste tõestused on üsna sarnased, esitame nad siiski kõik. Tõestuseks lisame:

$$1X=1(x_{ij})=(1x_{ij})=(x_{ij})=X \Longrightarrow 1X=X,$$

$$(-1)X=(-1)(x_{ij})=((-1)x_{ij})=(-x_{ij})=-X \Longrightarrow (-1)X=-X,$$

$$0X=0(x_{ij})=(0x_{ij})=(o_{ij})=\theta \Longrightarrow 0X=\theta,$$

$$\lambda\theta=\lambda(o_{ij})=(\lambda o_{ij})=(o_{ij})=\theta \Longrightarrow \lambda\theta=\theta,$$

$$(\lambda\mu)X=(\lambda\mu)(x_{ij})=((\lambda\mu)x_{ij})=(\lambda(\mu x_{ij})=\lambda(\mu X) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\lambda\mu)X=\lambda(\mu X),$$

$$\lambda(X+Y)=\lambda((x_{ij})+(y_{ij}))=(\lambda(x_{ij}+y_{ij}))=(\lambda x_{ij}+\lambda y_{ij})=$$

$$=(\lambda x_{ij})+(\lambda y_{ij})=\lambda(x_{ij})+\lambda(y_{ij})=\lambda X+\lambda Y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda(X+Y)=\lambda X+\lambda Y,$$

$$(\lambda+\mu)X=(\lambda+\mu)(x_{ij})=((\lambda+\mu)x_{ij})=(\lambda x_{ij}+\mu x_{ij})=(\lambda x_{ij})+(\mu x_{ij})=$$

$$=\lambda(x_{ij})+\mu(x_{ij})=\lambda X+\mu X \Longrightarrow (\lambda+\mu)X=\lambda X+\mu X,$$

$$\lambda(X-Y)=\lambda(X+(-Y))=\lambda X+\lambda(-Y)=\lambda X+\lambda((-1)Y)=$$

$$=\lambda X+(\lambda(-1))Y=\lambda X+((-1)\lambda)Y=\lambda X+(-1)(\lambda Y)=\lambda X-\lambda Y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda(X-Y)=\lambda X-\lambda Y,$$

$$(\lambda-\mu)X=(\lambda+((-1)\mu)X=\lambda X+((-1)\mu)X=$$

$$=\lambda X+(-1)(\mu X)=\lambda X-\mu X \Longrightarrow (\lambda-\mu)X=\lambda X-\mu X. \quad \spadesuit$$

Lugejal soovitame toodud tõestuste puhul igal sammul leida eestpoolt viide, miks ta kehtib. Lisaks soovitame viia mõne omaduse tõestus läbi, kasutades maatriksi kirjapanekuks detailsemat kuju (1.1).

1.4. Maatriksite korrutamine. Omadused

Osutub, et igasuguste mõõtmetega maatrikseid ei saa korrutada. See on võimalik siis, kui esimese maatriksi veergude arv on võrdne teise maatriksi ridade arvuga.

Definitsioon 1.15. *Maatriksite* $X \in Mat(p,q)$ *ja* $Y \in Mat(q,r)$, *kus*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pq} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1r} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{q1} & y_{q2} & \dots & y_{qr} \end{pmatrix},$$

korrutiseks nimetatakse (p,r)*-maatriksit*

$$XY := \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1r} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{p1} & z_{p2} & \dots & z_{pr} \end{pmatrix},$$

kus

$$z_{ij} := x_{i1}y_{1j} + x_{i2}y_{2j} + \ldots + x_{iq}y_{qj}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_r. \qquad (1.20)$$

Näiteks maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = (10)$$

korral definitsiooni 1.15 kohaselt eksisteerivad järgmised maatriksite korrutised

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix},$$

$$DB = (10)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = (-10)$$

ja

$$CB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -8 & 12 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Maatriksite korrutamisel on järgmised omadused.

1° *Maatriksite korrutamine on assotsiatiivne, s.o. mistahes kolme maatriksi* $X \in Mat(p,q)$, $Y \in Mat(q,r)$ *ja* $Z \in Mat(r,s)$ *korral*

$$(XY)Z = X(YZ). \tag{1.21}$$

2° *Mistahes maatriksi* $X \in Mat(m,n)$ *ning vastavalt ühikmaatriksite* $E_1 \in Mat(n,n)$ *ja* $E_2 \in Mat(m,m)$ *korral*

$$XE_1 = X, \quad E_2X = X. \tag{1.22}$$

Maatriksite korrutamine on nii liitmise kui ka lahutamise suhtes distributiivne.

3° *Mistahes kolme maatriksi* $X, Y \in Mat(p,q)$ *ja* $Z \in Mat(q,r)$ *korral*

$$(X \pm Y)Z = XZ \pm YZ.$$

4° *Mistahes kolme maatriksi* $X \in Mat(p,q)$ *ja* $Y, Z \in Mat(q,r)$ *korral*

$$X(Y \pm Z) = XY \pm XZ. \tag{1.23}$$

Nende omaduste tõestamiseks kasutame summeerimismärki Σ ja tema omadusi. Ilma viimaseta on nende omaduste tõestamine üsna kohmakas. Näiteks maatriksite korrutamise valemi (1.20) saab Σ abil kirja panna järgmiselt:

$$z_{ij} = \sum_{s=1}^{q} x_{is}y_{sj}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_r. \tag{1.24}$$

Alustame omaduste $1^\circ - 4^\circ$ tõestamist.

1° Maatriksite

$$X = (x_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_q,$$

$$Y = (y_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_q, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_r$$

ja

$$Z = (z_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_r, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_s$$

korral toome sisse maatriksite XY, $(XY)Z$ ja YZ, $X(YZ)$ üldelemendid, tähistades neid järgmiselt

$$XY = (u_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_r,$$

$$(XY)Z = (v_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_s,$$

$$YZ = (w_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_q, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_s,$$

$$X(YZ) = (t_{ij}), \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_s.$$

Summa märgi abil antud maatriksite korrutamise definitsioon, mis antakse valemiga (1.24), lubab kirjutada

$$u_{ij} = \sum_{a=1}^{q} x_{ia} y_{aj},$$

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \sum_{b=1}^{r} u_{ib} z_{bj} = \sum_{b=1}^{r} (\sum_{a=1}^{q} x_{ia} y_{ab}) z_{bj} = \\ &= \sum_{b=1}^{r} \sum_{a=1}^{q} (x_{ia} y_{ab}) z_{bj} = \sum_{b=1}^{r} \sum_{a=1}^{q} x_{ia} (y_{ab} z_{bj}) = \\ &= \sum_{a=1}^{q} \sum_{b=1}^{r} x_{ia} (y_{ab} z_{bj}) = \sum_{a=1}^{q} x_{ia} (\sum_{b=1}^{r} y_{ab} z_{bj}), \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$w_{ij} = \sum_{b=1}^{r} y_{ib} z_{bj},$$

$$t_{ij} = \sum_{a=1}^{q} x_{ia} w_{aj} = \sum_{a=1}^{q} x_{ia} (\sum_{b=1}^{r} y_{ab} z_{bj}). \tag{1.26}$$

Võrreldes valemeid (1.25) ja (1.26), saame

$$v_{ij} = t_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_s \Longrightarrow (XY)Z = X(YZ). \quad \spadesuit$$

2° Maatriksite $X = (x_{ij})$, kus $i \in \mathbb{N}_m$, $j \in \mathbb{N}_n$, ja n-järku ühikmaatriksi $E_1 = (\delta_{ij})$ korrutise $XE_1 = (y_{ij})$ üldelement avaldub

$$y_{ij} = \sum_{s=1}^{n} x_{is} \delta_{sj} = x_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_m, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n,$$

mistõttu $XE_1 = X$. Juhul kui E_2 on m-järku ühikmaatriks, siis

$$E_2 X = (\sum_{s=1}^{m} \delta_{is} x_{sj}) = (x_{ij}) = X. \quad \spadesuit$$

3° Olgu maatriksid $X, Y \in Mat(p,q)$ ja $Z \in Mat(q,r)$ antud üldelementidega

$$X = (x_{ij}), \quad Y = (y_{ij}), \quad Z = (z_{ij}),$$

mille abil saame leida maatriksite

$$X \pm Y = (u_{ij}), \quad (X \pm Y)Z = (w_{ij}), \quad XZ = (t_{ij}),$$

$$YZ = (m_{ij}), \quad XZ \pm YZ = (n_{ij})$$

üldelemendid, saades

$$u_{ij} = x_{ij} \pm y_{ij}, \quad w_{ij} = \sum_{s=1}^{q} u_{is} z_{sj} = \sum_{s=1}^{q} (x_{is} \pm y_{is}) z_{sj} =$$

$$= \sum_{s=1}^{q} (x_{is} z_{sj} \pm y_{is} z_{sj}) = \sum_{s=1}^{q} x_{is} z_{sj} \pm \sum_{s=1}^{q} y_{is} z_{sj} \tag{1.27}$$

ja

$$t_{ij} = \sum_{s=1}^{q} x_{is} z_{sj}, \quad m_{ij} = \sum_{s=1}^{q} y_{is} z_{sj},$$

$$n_{ij} = t_{ij} \pm m_{ij} = \sum_{s=1}^{q} x_{is} z_{sj} \pm \sum_{s=1}^{q} y_{is} z_{sj}. \tag{1.28}$$

Võrreldes valemeid (1.27) ja (1.28) omavahel, saame

$$w_{ij} = n_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_p, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_r.$$

Seega

$$(X \pm Y)Z = XZ \pm YZ. \quad \spadesuit$$

4° Kuna valemi (1.23) tõestus on analoogiline eelmise tõestusega, siis jätame selle lugejale.

Tavaliselt tuleb korrutada sama järku ruutmaatrikseid, saades tulemuseks sama järku ruutmaatriksi.

1.5. Maatriksite transponeerimise omadused

Maatriksite transponeerimisel on järgmised omadused.

1° *Mistahes maatriksite $X, Y \in Mat(m, n)$ korral*

$$(X \pm Y)^\top = X^\top \pm Y^\top.$$

2° *Mistahes $a \in \mathbb{R}$ ja $X \in Mat$ korral*

$$(aX)^\top = aX^\top.$$

3° *Mistahes $X \in Mat(p, q)$ ja $Y \in Mat(q, s)$ korral*

$$(XY)^\top = Y^\top X^\top.$$

Tõestus. 1° Nüüd $X = (x_{ij})$ ja $Y = (y_{ij})$, kus $X, Y \in Mat(m, n)$, korral maatriksite

$$X \pm Y = (a_{ij}), \quad (X \pm Y)^\top = (b_{ij}),$$

$$X^\top = (c_{ij}), \quad Y^\top = (d_{ij}), \quad X^\top \pm Y^\top = (e_{ij})$$

üldelemendid avalduvad

$$a_{ij} = x_{ij} \pm y_{ij}, \quad b_{ij} = a_{ji} = x_{ji} \pm y_{ji} \tag{1.29}$$

ja

$$c_{ij} = x_{ji}, \quad d_{ij} = y_{ji}, \quad e_{ij} = c_{ij} \pm d_{ij} = x_{ji} \pm y_{ji}. \tag{1.30}$$

Valemite (1.29) ja (1.30) võrdlemisel saame

$$b_{ij} = e_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_n, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_m,$$

millest

$$(X \pm Y)^\top = X^\top \pm Y^\top. \quad \spadesuit$$

2° Anname maatriksi $X \in Mat(m,n)$ oma üldelemendi abil, s.o. $X = (x_{ij})$. Leiame maatriksite

$$aX = (y_{ij}), \quad (aX)^\top = (z_{ij}), \quad X^\top = (u_{ij}), \quad aX^\top = (v_{ij})$$

üldelemendid maatriksi X üldelemendi kaudu. Me saame

$$y_{ij} = ax_{ij}, \quad z_{ij} = y_{ji} = ax_{ji}, \tag{1.31}$$

ja

$$u_{ij} = x_{ji}, \quad v_{ij} = au_{ij} = ax_{ji}. \tag{1.32}$$

Valemite (1.31) ja (1.32) võrdlemisel saame

$$z_{ij} = v_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_n, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_m \Longrightarrow (aX)^\top = aX^\top. \quad \spadesuit$$

3° Maatriksid $X \in Mat(p,q)$ ja $Y \in Mat(q,r)$ olgu antud üldelementide abil, s.o. $X = (x_{ij})$ ja $Y = (y_{ij})$. Nüüd maatriksite

$$XY = (z_{ij}), \quad (XY)^\top = (u_{ij}), \quad Y^\top = (v_{ij}),$$
$$X^\top = (w_{ij}), \quad Y^\top X^\top = (s_{ij})$$

üldelemendid avalduvad järgmiselt:

$$z_{ij} = \sum_{t=1}^{q} x_{it} y_{tj}, \quad u_{ij} = z_{ji} = \sum_{t=1}^{q} x_{jt} y_{ti} \tag{1.33}$$

ja

$$v_{ij} = y_{ji}, \quad w_{ij} = x_{ji},$$
$$s_{ij} = \sum_{t=1}^{q} v_{it} w_{tj} = \sum_{t=1}^{q} y_{ti} x_{jt} = \sum_{t=1}^{q} x_{jt} y_{ti}. \tag{1.34}$$

Valemite (1.33) ja (1.34) võrdlemisel saame

$$u_{ij} = s_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_r, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_p \Longrightarrow (XY)^\top = Y^\top X^\top. \quad \spadesuit$$

2. PERMUTATSIOONID

See paragrahv on vajalik ainult järgmise paragrahvi jaoks. Meie uurimisobjektiks on naturaalarvude alamhulk $\mathbb{N}_n$, erijuhul näiteks $\mathbb{N}_1$ ja $\mathbb{N}_2$. Tegelikult võib hulga $\mathbb{N}_n$ asemel võtta mistahes n erinevast naturaalarvust koosneva hulga H_n. Tähistame edaspidi tema elemente kasvavas järjekorras $h_1, h_2, ..., h_n$ abil. Seega $H_n = \{h_1, h_2, ..., h_n\}$, kus $h_1 < h_2 < ... < h_n$. Meie järgnevad arutlused on antud, kui hulga H_n osas on hulk $\mathbb{N}_n$. Analoogiliselt saab need arutlused kirja panna hulga H_n korral.

"Rivistame" hulga $\mathbb{N}_n$ arvud üles, nõudes, et selles rivistuses kõik arvud esinevad ja seejuures ainult üks kord. Igat sellist ülesrivistust nimetame *permutatsiooniks hulga* $\mathbb{N}_n$ *elementidest* . Permutatsiooni esitame me kujul

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \tag{2.1}$$

Näiteks hulga $\mathbb{N}_1$ abil saab moodustada ainult ühe permutatsiooni 1, hulga $\mathbb{N}_2$ abil aga kaks permutatsiooni 12 ja 21. Hulga $\mathbb{N}_3$ abil saab aga moodustada juba kuus permutatsiooni. Need on

$$123, \quad 231, \quad 312, \quad 213, \quad 321, \quad 132.$$

Teoreem 2.1. *Hulga* $\mathbb{N}_n$ *elementidest saab moodustada* $n!$ *permutatsiooni.*

Tõestus. Tõestame teoreemi matemaatilise induktsiooni abil elementide arvu n järgi hulgas $\mathbb{N}_n$. Nagu nägime $n = 1$ korral teoreem kehtib. Eespool öeldu põhjal ka $n = 2$ ja $n = 3$ korral teoreem kehtib, olgugi et matememaatilise induktsiooni läbiviimiseks pole seda tarvis teada. Eeldame, et teoreem kehtib $n-1$ korral. Hulga $\mathbb{N}_{n-1}$ abil saab moodustada $(n-1)!$ permutatsiooni. Tuleb tõestada, et hulga $\mathbb{N}_n$ abil saab moodustada $n!$ permutatsiooni. Jaotame hulga $\mathbb{N}_n$ kõikide permutatsioonide hulga, tähistame P_n abil, tema alamhulkadeks $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, \ldots, P_n^{(n)}$. Alamhulka $P_n^{(i)}$, kus $i \in \mathbb{N}_n$, kuulugu sellised permutatsioonid, mille esimene element on $i \in \mathbb{N}_n$. Selle hulga iga permutatsioon on kujuga

$$i\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n,$$

kus $(n-1)$-elemendiline permutatsioon $\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n$ on permutatsioon hulga $\{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}$ elementidest. Matemaatilise induktsiooni eelduse kohaselt on selles hulgas $(n-1)!$ permutatsiooni. Mistahes $i,j\in\mathbb{N}_n$, kus $i\neq j$, korral ei ole hulkadel $P_n^{(i)}$ ja $P_n^{(j)}$ ühiseid permutatsioone, sest erinevus on juba esimeses arvus. Seega hulga P_n permutatsioonide arv võrdne hulkade $P_n^{(1)},P_n^{(2)},\ldots,P_n^{(n)}$ permutatsioonide arvu summaga, s.o. $(n-1)!n=n!$ ♠

Definitsioon 2.1. *Öeldakse, et permutatsioonis*

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i\ldots\alpha_j\ldots\alpha_n$$

elemendipaar $(\alpha_i\ ,\ \alpha_j)$ *moodustab inversiooni, kui selles paaris esimene arv* α_i *on suurem teisest arvust* α_j*, s.o.* $\alpha_i>\alpha_j$*.*

Vaadeldes permutatsioonis (2.1) kõiki arvupaare

$$(\alpha_1,\alpha_2),(\alpha_1,\alpha_3),\ldots,(\alpha_1,\alpha_n),$$

$$(\alpha_2,\alpha_3),\ldots,(\alpha_2,\alpha_n),\ldots,(\alpha_{n-1},\alpha_n),$$

saame kokku lugeda inversioonide arvu antud permutatsioonis. Inversioonide arvu permutatsioonis (2.1) tähistame $I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ abil.

Definitsioon 2.2. *Permutatsiooni nimetatatakse paarispermutatsiooniks (paarituks permutatsiooniks), kui tema inversioonide arv on paarisarv (paaritu arv).*

Teoreem 2.2. *Kui permutatsioonis ära vahetada kaks elementi, siis permutatsioon muudab paarsust.*

Tõestus. Tõestame esmalt teoreemi, kui permutatsioonis vahetatavad arvud on kõrvuti, s.o. permutatsioonist

$$\alpha_1\ldots\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n$$

saame permutatsiooni

$$\alpha_1\ldots\alpha_{i+1}\alpha_i\ldots\alpha_n.$$

Paneme tähele, et kummaski permutatsioonis arvudele α_i ja α_{i+1} eelnevate ja järgnevate arvudega inversioonid säilusid. Ainus inversiooni muutus tekkis üleminekul paarilt (α_i,α_{i+1}) paarile (α_{i+1},α_i). Seega inversioonide arv $I(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$ erineb ainult ühe võrra inversioonide arvust

$I(\alpha_1, \dots \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$. Järelikult jutuks olevad permutatsioonid on erineva paarsusega.

Vaatleme nüüd olukorda, kui vahetatavad arvud ei ole kõrvuti: olgu nende vahel s arvu. Läheme permutatsioonilt

$$\alpha_1 \dots \alpha_i \underbrace{\alpha_{i+1} \dots \alpha_{k-1}}_{s} \alpha_k \dots \alpha_n \tag{2.2}$$

üle permutatsioonile

$$\alpha_1 \dots \alpha_k \underbrace{\alpha_{i+1} \dots \alpha_{k-1}}_{s} \alpha_i \dots \alpha_n \tag{2.3}$$

samm-sammult, hakates vahetama kõrvuti olevaid arve. Vahetame permutatsioonis (2.2) arvu α_i temale järgnevate arvudega, viies ta arvu α_k järele. Selle protseduuri käigus toimub $s+1$ kõrvuti oleva arvupaari vahetust. Nüüd toome arvu α_k arvu α_i esialgsele kohale, vahetades s korda kõrvuti olevaid arve. Seega saime permutatsioonist (2.2) permutatsiooni (2.3), vahetades kokkuvõttes $(s+1)+s = 2s+1$ korda kõrvuti olevaid arvupaare. Iga selline arvupaari vahetus, nagu teame, muutis permutatsiooni paarsust. Kuna $2s+1$ on paaritu arv, siis permutatsioonid (2.2) ja (2.3) on erineva paarsusega. ♠

Võtame nüüd kaks permutatsiooni

$$12 \dots n, \quad \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Neist esimene on nn. *loomulik permutatsioon.* Tema inversioonide arv on null, seega ta on paarispermutatsioon. Teeme kummaski permutatsioonis ühesuguseid arvupaaride vahetusi eesmärgiga saada teisest permutatsioonist loomulik permutatsioon, mis muutub paarispermutatsiooniks. Öeldut saame iseloomustada järgmiselt:

$$12 \dots n \longrightarrow \beta_1\beta_2 \dots \beta_n$$

ja

$$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \longrightarrow 12 \dots n.$$

Üleminekul uutele permutatsioonidelele kasutasime samapalju arvupaaride vahetusi. Teoreemi 2.2 kohaselt permutatsioonid

$$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n, \quad \beta_1\beta_2 \dots \beta_n \tag{2.4}$$

on sama paarsusega.

Teoreem 2.3. *Kui $n \geq 2$, siis permutatsioonide hulgas P_n on paaris ja paarituid permutatsioone samapalju, s.o. $\frac{1}{2}n!$.*

Tõestus. Tähistame permutatsioonide hulga P_n paaris- ja paaritute permutatsioonide alamhulki vastavalt P_n^+ ja P_n^-. Definitsiooni 2.2 kohaselt

$$P_n^+ \cap P_n^- = \emptyset, \quad P_n^+ \cup P_n^- = P_n.$$

Defineerime kujutused

$$f : P_n^+ \longrightarrow P_n^-, \quad g : P_n^- \longrightarrow P_n^+$$

valemitega

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \in P_n^+ \longmapsto f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n) := \alpha_2\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_n \in P_n^-$$

ja

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \in P_n^- \longmapsto g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n) := \alpha_2\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_n \in P_n^+.$$

Tekivad nende kujutiste korrutised

$$gf : P_n^+ \longrightarrow P_n^+, \quad fg : P_n^- \longrightarrow P_n^-,$$

mille kohaselt

$$gf(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n) := g(f(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n)) =$$

$$= g(\alpha_2\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_n) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n$$

ja

$$fg(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n) := f(g(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n)) =$$

$$= f(\alpha_2\alpha_1\alpha_3 \ldots \alpha_n) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n.$$

Näeme, et kujutused gf ja fg on samasuskujutused. Sel korral kujutus g on kujutuse f pöördkujutus. Kujutus, millel on olemas pöördkujutus, on bijektiivne. Seega lõplikuelemendilistes hulkades P_n^+ ja P_n^- on samapalju elemente. Teoreemi 2.1 kohaselt on paaris- ja permutatsioonide arv $\frac{1}{2}n!$.♠

Selle teoreemi kirjapanekuks kasutasime kujutustega seotud mõisteid õppeainest "Sissejuhatus erialasse".

Lõpuks vaatleme permutatsoonide hulgal P_n teatavat teisendust $\tau : P_n \leftrightarrow P_n$. Tema definitsiooni andmiseks on vaja seletada, kuidas mistahes permutatsiooni $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in P_n$ korral leida kujutis $\tau(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) \in P_n$. Teeme seda järgmiselt. Mistahes permutatsiooni $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ abil moodustame kaherealise maatriksi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

tema esimeseks reaks on loomulik permutatsioon $12...n$ ja teiseks reaks võetud permutatsioon $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$. Moodustatud maatriksis veergude vahetamise teel viime ta maatriksiks

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Nagu näeme on sooritatud sellised veergude vahetused, et teise rea permutatsioonist on saadud loomulik permutatsioon. Samal ajal esimese rea loomulik permutatsioon teiseneb mingiks permutatsiooniks $\beta_1\beta_2...\beta_n \in P_n$. Saadud permutatsiooni $\beta_1\beta_2...\beta_n \in P_n$ loemegi permutatsiooni $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ kujutiseks teisenduse $\tau : P_n \leftrightarrow P_n$ korral. Seega

$$\tau(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) := \beta_1\beta_2...\beta_n \in P_n. \tag{2.5}$$

Oluline on märgata, et saadud permutatsiooni $\beta_1\beta_2...\beta_n$ kujutiseks $\tau(\beta_1\beta_2...\beta_n) \in P_n$ on lähtepermutatsioon $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$. Seega

$$\tau(\beta_1\beta_2...\beta_n) = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n,$$

millest

$$\tau\tau(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n, \quad \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \in P_n \Longleftrightarrow \tau\tau = \varepsilon.$$

Siin ε tähistab permutatsioonide hulga P_n samasusteisendust. Silmas pidades teisenduse pöördteisenduse definitsiooni, näeme, et teisendusel τ on olemas pöördteisendus τ^{-1}, milleks on tema ise, s.o. $\tau^{-1} = \tau$. Seega defineeritud kujutus on bijektiivne. Järelikult ottu kujutishulk rahuldab $\tau(P_n) = P_n$. Võime öelda nii: kui permutatsioon $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ muutub hulgal P_n, siis permutatsioonidest $\tau(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)$ tekkivaks kujutishulgaks on P_n.

3. DETERMINANDI MÕISTE. OMADUSED

Osutub, et iga ruutmaatriksi korral saab määrata tema abil teatava reaalarvu – tema determinandi. Materjali selgema esitamise huvides, tähistame permutatsioonide hulka kasvavas järjekorras võetud naturaalarvudest $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ nüüd $P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ abil. Näiteks $P(4,7)$ koosneb permutatsioonidest 4 7 ja 7 4.

Definitsioon 3.1. *Me nimetame n-järku ruutmaatriksi*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

n-järku determinandiks reaalarvu, mida tähistatame

$$|X| = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

abil ja anname valemiga

$$|X| := \sum_{P(1,2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{i\alpha_i} \dots x_{n\alpha_n}. \quad (3.1)$$

Kommenteerime viimast valemit. Siin $I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ tähistab inversioonide arvu permutatsioonis $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_n \in P(1, 2, \dots, n)$. Summas iga liidetav ilma märgita $x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{i\alpha_i} \dots x_{n\alpha_n}$ on selline, et maatriksi X igast reast ja igast veerust on võetud element, mis on omavahel korrutatud. Näeme, et reaindeksid, x-de juures on nad esimesel kohal, moodustavad igas liidetavas loomuliku permutatsiooni $12 \dots i \dots n$, ja veeruindeksid, x-de juures on nad teisel kohal, moodustavad permutatsioonidef hulga $P(1, 2, \dots, n)$ permutatsiooni $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i \dots \alpha_n$. Kui nüüd moodustame summa, kasutades hulga $P(1,2,\ldots,n)$ kõiki permutatsioone, siis saamegi valemi (3.1). Leiame valemi (3.1) abil esimest, teist ja kolmandat järku determinantide arvutamise valemid. Saame

$$X = (x_{11}) \Longrightarrow |X| = x_{11},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |X| = (-1)^{I(1,2)} x_{11}x_{22} + (-1)^{I(2,1)} x_{12}x_{21} =$$

$$= (-1)^0 x_{11}x_{22} + (-1)^1 x_{12}x_{21} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.$$

Seega

$$|X| = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}.$$

Lõpuks analoogiliselt maatriksi

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

korral saame

$$|X| = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} -$$
$$- x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{11}x_{23}x_{32}.$$

Determinandi arvutamine definitsiooni abil on üsna tülikas, sest maatriksi järgu kasvades kasvab valemis (3.1) järsult liidetavate arv. Näiteks neljandat, viiendat ja kuuendat järku maatriksite korral on determinandi avaldises teoreemi 2.1 kohaselt vastavalt 24, 120 ja 720 liidetavat. Muuseas teoreemi 2.3 kohaselt on valemis (3.1) pooled liidetavad plussmärgiga ja pooled miinusmärgiga. Järgnevas uurime determinantide omadusi.

1° *Maatriksi ja transponeeritud maatriksi determinandid on võrdsed, s.o.*

$$X \in Mat(n,n) \Longrightarrow |X| = |X^\top|.$$

Tõestus. Valemi (1.8) kohaselt transponeeritud maatriksi $X^\top = (y_{ij})$ ja maatriksi $X = (x_{ij})$ üldelementide korral $y_{ij} = x_{ji}$. Determinanti defineeriva valemi (3.1) kohaselt nüüd saame

$$|X^\top| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} y_{1\alpha_1} y_{2\alpha_2} \cdots y_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} x_{\alpha_1 1} x_{\alpha_2 2} \ldots x_{\alpha_n n}.$$

Arvestades reaalarvude korrutamise kommutatiivsust, paigutame viimase summa igas liidetavas tegurid sellises järjekorras, et reaindeksid on kasvavas järjekorras. Pärast seda protseduuri veeruindeksid moodustavad mingi permutatsiooni $\tau(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n) = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n$. Siin bijektiivne kujutus τ antakse valemiga (2.5). Valemi (2.4) kohaselt on need permutatsioonid sama paarsusega. Seega

$$(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} = (-1)^{I(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)}.$$

Me saame

$$|X^\top| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)} x_{1\beta_1} x_{2\beta_2} \ldots x_{n\beta_n} = |X|.$$

Siin summeerimisel me arvestasime, et $\tau(P(1,2,...,n)) = P(1,2,...,n)$. ♠

2° *Maatriksis kahe rea (veeru) äravahetamisel tema determinant muudab märgi.*

Tõestus. Tähistame maatriksis X nüüd s-nda ja t-nda rea äravahetamisel saadud maatriksit $X_{(s,t)}$ abil. Meil on vaja tõestada, et

$$|X_{(s,t)}| = -|X|.$$

Tähistame maatriksi $X_{(s,t)}$ üldelementi y_{ij} abil, s.o. $X_{(s,t)} = (y_{ij})$. Seejuures

$$y_{ij} = x_{ij}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_n \setminus \{s,t\}, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n$$

ja

$$y_{sj} = x_{tj}, \quad y_{tj} = x_{sj}, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n.$$

Valemi (3.1) abil saame

$$|X_{(s,t)}| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_n)} y_{1\alpha_1} \ldots y_{s\alpha_s} \ldots y_{t\alpha_t} \ldots y_{n\alpha_n}$$

ehk

$$|X_{(s,t)}| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1} \ldots \underline{x_{t\alpha_s}} \ldots \underline{x_{s\alpha_t}} \ldots x_{n\alpha_n}.$$

Vahetame viimase summa igas liidetavas allakriipsutatud elemendid, mis (1.11) tõttu on lubatav. Selle tulemusena x-de esimesed indeksid moodustavad loomuliku permutatsiooni. Me saame

$$|X_{(s,t)}| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1}\ldots x_{s\alpha_t}\ldots x_{t\alpha_s}\ldots x_{n\alpha_n}.$$

Siin veeruindeksite permutatsioon

$$\alpha_1\ldots\alpha_t\ldots\alpha_s\ldots\alpha_n,$$

võrreldes lähtepermutatsiooniga

$$\alpha_1\ldots\alpha_s\ldots\alpha_t\ldots\alpha_n,$$

on teoreemi 2.1 tõttu erineva paarsusega, sest $x_{s\alpha_t}$ ja $x_{t\alpha_s}$ äravahetamine tekitas α_t ja α_s äravahetamise. Järelikult

$$(-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_n)} = -(-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_n)}.$$

Me saame, et $|X_{(s,t)}|$ on võrdne

$$\sum_{P(1,2,\ldots,n)} [-(-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1}\ldots x_{s\alpha_t}\ldots x_{t\alpha_s}\ldots x_{n\alpha_n}] =$$

$$= - \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1}\ldots x_{s\alpha_t}\ldots x_{t\alpha_s}\ldots x_{n\alpha_n} = -|X|.$$

Saime

$$|X_{(s,t)}| = -|X|.$$

Tõestame nüüd omaduse, kui vahetame veerud s ja t. Tähistame maatriksist X saadud maatriksit taas $X_{(s,t)}$ abil. Omaduse 1° ja omaduse 2° tõestatud osa alusel saame

$$|X_{(s,t)}| = |X^{\top}_{(s,t)}| = -|X^{\top}| = -|X|. \quad \spadesuit$$

Järeldus 3.1. *Kui maatriksil kaks rida (veergu) on võrdsed, siis tema determinant on null.*

Tõestus. Olgu maatriksis omavahel võrdsed read (veerud) indeksitega s ja t. Seega $X = X_{(s,t)}$. Viimase omaduse tõttu

$$|X| = -|X_{(s,t)}| = -|X| \Longrightarrow 2|X| = 0 \Longrightarrow |X| = 0. \quad \spadesuit$$

3° *Kui maatriksis mingit rida (veergu) korrutada arvuga, siis tema determinant korrutub sama arvuga.*

Tõestus. Korrutame maatriksi X mingi rea, näiteks s-nda, arvuga a. Uuel maatriksil, tähistame X' abil, on kõik read samad, mis maatriksil X, väljaarvatud rida s. Selles reas on elemendid ax_{s1}, $ax_{s2}, \ldots,$ ax_{sn}. Valemi (3.1) abil saame

$$|X'| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1} \ldots (ax_{s\alpha_s}) \ldots x_{n\alpha_n} =$$

$$= a \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1} \ldots x_{s\alpha_s} \ldots x_{n\alpha_n} = a|X|.$$

Omadus ridade jaoks on tõestatud.

Korrutame nüüd maatriksi X veergu s arvuga a. Tähistame saadud maatriksit taas X' abil. Omaduse 1° ja omaduse 3° tõestatud osa abil saame

$$|X'| = |(X')^{\top}| = a|X^{\top}| = a|X| \Longrightarrow |X'| = a|X|. \quad \spadesuit$$

4° *Kui maatriksi mingile reale (veerule) liita mistahes arvuga korrutatud mistahes teine rida (veerg), siis uue maatriksi determinant on võrdne lähtemaatriksi determinandiga.*

Tõestus. Liidame maatriksi X reale s arvu a-kordse t-nda rea. Saadud maatriksil, mida tähistame X' abil, on kõik read samad, mis maatriksil X, välja arvatud rida s. Seal on elemendid

$$x_{s1} + ax_{t1}, \quad x_{s2} + ax_{t2}, \ldots, x_{sn} + ax_{tn}.$$

Valemi (3.1) abil saame

$$|X'| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1} \ldots (x_{s\alpha_s} + ax_{t\alpha_s}) \ldots x_{t\alpha_t} \ldots x_{n\alpha_n}.$$

Summa märgi Σ omadusi silmas pidades, saame

$$|X'| = \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1}\ldots x_{s\alpha_s}\ldots x_{t\alpha_t}\ldots x_{n\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{P(1,2,\ldots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\ldots,\alpha_t,\ldots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1}\ldots x_{t\alpha_s}\ldots x_{t\alpha_t}\ldots x_{n\alpha_n}.$$

Viimane summa on sellise maatriksi determinant, mille read s ja t on ühesugused. Järelduse 3.1 põhjal on ta võrdne nulliga. Esimene summa on aga maatriksi X determinant. Saime $|X'| = |X|$.

Omaduse tõestuse veergude jaoks jätame lugejale. Ta tugineb omadusele 1°. Kaks analoogilist tõestust on toodud omaduste 2° ja 3° juures.

5° *Kolmnurksete maatriksite*

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \ldots & x_{n-1,n-1} & 0 \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \ldots & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ 0 & 0 & x_{33} & \ldots & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{2,n-1} & x_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & x_{3,n-2} & x_{3,n-1} & x_{3n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & x_{n-1,2} & \ldots & x_{n-1,n-2} & x_{n-1,n-1} & x_{n-1,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{n,n-2} & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix}$$

ja

$$X_4 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2,n-1} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_{n1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

korral

$$|X_1| = |X_2| = x_{11}x_{22}\dots x_{nn} \tag{3.2}$$

ja

$$|X_3| = |X_4| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x_{1n}x_{2,n-1}\dots x_{n1}. \tag{3.3}$$

Tõestus. Lähtume determinandi $|X_1|$ leidmisel definitsiooni valemist (3.1), s.o.

$$|X_1| = \sum_{P(1,2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} x_{1\alpha_1}x_{2\alpha_2}\dots x_{n\alpha}.$$

Maatriksis X_1 esinevate nullide tõttu on viimases summas paljud liidetavad võrdsed nulliga. Korrutistes

$$x_{1\alpha_1}x_{2\alpha_2}\dots x_{n\alpha_n}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{N}_n \tag{3.4}$$

on iga tegur $x_{1\alpha_1}$ võetud maatriksi X_1 esimesest reast. Seega $x_{1\alpha_1} = 0$, kui $\alpha_1 \neq 1$. Valemis (3.4) jääb alles n tegurist ainult üks, nimelt

$$x_{11}x_{2\alpha_2}\dots x_{n\alpha_n}.$$

Saame

$$|X_1| = x_{11} \sum_{P(2,3,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} x_{2\alpha_2}x_{3\alpha_3}\dots x_{n\alpha_n} = |X_1^{(1)}|,$$

kus

$$X_1^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{32} & x_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1,2} & x_{n-1,3} & \dots & x_{n-1,n-1} & 0 \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n,n-1} & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

See $(n-1)$-järku maatriks on saadud maatriksist X_1 esimese rea ja veeru ärajätmisel ja seejuures on sama ehitusega. Analoogiliselt samm-sammult jätkates saame

$$|X_1| = x_{11}x_{22}\dots x_{nn}.$$

Kui veel arvestame, et maatriks $X_2^\top$ on sama ehitusega kui maatriks X_1, siis omaduse $1°$ tõttu $|X_2| = |X_2^\top|$. Seega valem (3.2) on tõestatud.

Tõestame nüüd valemi (3.3). Determinandi $|X_3|$ leidmiseks moodustame abimaatriksi $X_3^{(1)}$, mis saadakse maatriksist X_3 tema ridade esitamisel vastupidises järjekorras. Selleks viime viimase rea esimeseks, eelviimase rea viime teiseks, ..., teise rea viime eelviimaseks ja lõpuks esimene rida on jäänud viimaseks. Maatriksi $X_3^{(1)}$ saamiseks maatriksist X_3 reavahetuste arv on

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1).$$

Maatriks $X_3^{(1)}$ on samasuguse ehitusega kui maatriks X_2. Tema peadiagonaalil on elemendid

$$x_{1n},\quad x_{2,n-1},\ldots,x_{n-1,2},\quad x_{n1}.$$

Omaduse 2° ja valemi (3.2) põhjal

$$|X_3|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|X_3^{(1)}|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}x_{1n}x_{2,n-1}\ldots x_{n1}.$$

Oleme saanud valemi (3.3). Analoogiliselt näitame, et $|X_4|=|X_3|$. ♠

Lõpuks toome ühe näite determinandi arvutamise kohta. Lugejal soovitame igal sammul selgitada, milliseid determinantide omadusi kasutame. Arvutame:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ 3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix} = 1000\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ 3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3 & 8 & -1 & -0,006 \end{vmatrix} =$$

$$1000(-0,001)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

4. LAPLACE'I TEOREEM. DETERMINANDI ARENDAMINE REA JA VEERU JÄRGI

Fikseerime n-järku maatriksis

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

mingi arv ridu ja veerge. Olgu fikseeritud ridade ja veergude arv $m \in \mathbb{N}_n$. Tähistame fikseeritud rea- ja veeruindekseid kasvavas järjekorras vastavalt $i_1, i_2, \dots, i_m$ ja $j_1, j_2, \dots, j_m$.

Definitsioon 4.1. *Determinanti*

$$M_m := \begin{vmatrix} x_{i_1 j_1} & x_{i_1 j_2} & \dots & x_{i_1 j_m} \\ x_{i_2 j_1} & x_{i_2 j_2} & \dots & x_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i_m j_1} & x_{i_m j_2} & \dots & x_{i_m j_m} \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

nimetatakse maatriksi X jaoks m-järku miinoriks.

Kui $m < n$, siis m rida ja m veergu saab fikseerida väga erinevalt. Seega m-järku miinoreid on palju. Näiteks $m = 1$ korral saame 1-järku miinorid, milleks on maatriksi X elemendid. Samas suurimat järku miinori saame $m = n$ korral. Neid on ainult üks, nimelt maatriksi X determinant $|X|$.

Olgu m-järku miinori (4.1) korral $m < n$. Sel korral jääb fikseerimata $n - m$ rida ja samapalju veerge. Tähistame nende indeksid kasvavas järjekorras vastavalt

$$i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n; \quad j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n.$$

Definitsioon 4.2. *Miinorit*

$$M_{n-m} := \begin{vmatrix} x_{i_{m+1} j_{m+1}} & x_{i_{m+1} j_{m+2}} & \dots & x_{i_{m+1} j_n} \\ x_{i_{m+2} j_{m+1}} & x_{i_{m+2} j_{m+2}} & \dots & x_{i_{m+2} j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i_n j_{m+1}} & x_{i_n j_{m+2}} & \dots & x_{i_n j_n} \end{vmatrix}$$

nimetatakse miinori M_m täiendusmiinoriks.

Leides täiendusmiinorile omakorda täiendusmiinori, saame esialgse miinori.

Definitsioon 4.3. *Märgiga varustatud täiendusmiinorit*

$$\begin{gathered} A_{n-m} := (-1)^k M_{n-m}, \\ k := (i_{m+1} + i_{m+2} + \ldots + i_n) + (j_{m+1} + j_{m+2} + \ldots + j_n), \end{gathered} \tag{4.2}$$

nimetatakse miinori (4.1) *algebraliseks täiendiks.*

Arvude k ja

$$l := (i_1 + i_2 + \ldots + i_m) + (j_1 + j_2 + \ldots + j_m)$$

summa $k + l$ on maatriksi X rea- ja veeruindeksite summa, s.o. $2(1 + 2 + \ldots + n)$ tõttu paarisarv. Järelikult k ja l on sama paarsusega. Öeldu põhjal võime leida algebralise täiendi (4.2) ka valemi

$$A_{n-m} = (-1)^l M_{n-m}. \tag{4.3}$$

abil. Kokkuvõttes me leiame algebralise täiendi kas valemi (4.2) või (4.3) abil olenevalt sellest kas kergem on leida k või l.

Lause 4.1. *Miinori M_m ja tema algebralise täiendi A_{n-m} korrutis $M_m A_{n-m}$ koosneb liidetavatest, mis on osa determinandi $|X|$ avaldise* (3.1) *liidetavatest.*

Tõestus. Tõestame lemma esmalt erijuhul, kui miinor M_m asub maatriksis X priviligeeritud kohal, s.o. loodenurgas. Seega

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 2, \ldots, \quad i_m = m; \quad j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \ldots, \quad j_m = m.$$

Valemi (3.1) abil saame

$$M_m = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{P(1,2,\ldots,m)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)} x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \ldots x_{m\alpha_m},$$

$$A_{n-m} = \begin{vmatrix} x_{m+1,m+1} & x_{m+1,m+2} & \dots & x_{m+1,n} \\ x_{m+2,m+1} & x_{m+2,m+2} & \dots & x_{m+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n,m+1} & x_{n,m+2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{P(m+1,m+2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\dots,\alpha_n)} x_{m+1,\alpha_m+1} x_{m+2,\alpha_{m+2}} \dots x_{n\alpha_n}$$

ja

$$M_m A_{n-m} = \Big(\sum_{P(1,2,\dots,m)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)} x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{m\alpha_m} \Big) \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{P(m+1,m+2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\dots,\alpha_n)} x_{m+1,\alpha_{m+1}} x_{m+2,\alpha_{m+2}} \dots x_{n\alpha_n} \Big) =$$

$$= \sum_{P(1,2,\dots,m)} \sum_{P(m+1,m+2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)+I(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\dots,\alpha_n)} \cdot$$

$$\cdot x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{m\alpha_m} x_{m+1,\alpha_{m+1}} x_{m+2,\alpha_{m+2}} \dots x_{n\alpha_n}.$$

Paneme tähele, et

$$I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) + I(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\dots,\alpha_n) =$$

$$= I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m;\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\dots,\alpha_n),$$

sest permutatsioonis

$$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\dots\alpha_n$$

arvupaarid (α_i,α_j), kui $i \in \mathbb{N}_m$ ja $j \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$, inversioone ei anna. Saame, et

$$M_m A_{n-m} = \sum_{P(1,2,\dots,m)} \sum_{P(m+1,m+2,\dots,n)} (-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\dots,\alpha_n)} \cdot$$

$$\cdot x_{1\alpha_1} x_{2\alpha_2} \dots x_{m\alpha_m} x_{m+1,\alpha_{m+1}} x_{m+2,\alpha_{m+2}} \dots x_{n\alpha_n},$$

millest võrdlemisel valemiga (3.1) näeme, et $M_m A_{n-m}$ liidetavad moodustavad osa determinandi $|X|$ liidetavatest. Me võime kirjutada

$$|X| = M_m A_{n-m} + \rho, \tag{4.4}$$

kus ρ tähistab determinandi $|X|$ puuduvaid liikmeid. Seega vaadeldaval erijuhul on lemma tõeatatud.

Nüüd taandame üldjuhu tõestuse vaadeldud erijuhule. Maatriksist X moodustame uue maatriksi tema ridade omavahelise vahetamisel ja veergude omavahelisel vahetamisel nii, et miinor (4.1) on uues maatriksis priviligeeritud kohal. Selleks viime maatriksis X read $i_1, i_2, \ldots, i_m$ vastavalt esimesele, teisele,..., m-ndale kohale. Analoogiliselt toimime veergudega $j_1, j_2, \ldots, j_m$. Selle maatriksi, tähitame X' abil, saamiseks tehtud ridade ja veergude vahetuste arv kokku on

$$[(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_m - m)] + [(j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \ldots + j_m - m)] =$$

$$= (i_1 + i_2 + \ldots + i_m) + (j_1 + j_2 + \ldots + j_m) - 2(1 + 2 + \ldots + m) =$$

$$= k - 2(1 + 2 + \ldots + m).$$

Siit

$$(-1)^{k-2(1+2+\ldots+m)} = (-1)^k.$$

Determinandi omaduse 2° kohaselt $|X| = (-1)^k |X'|$. Pidades silmas, et maatriksi X' miinori M_m, mis on priviligeeritud kohal, algebraliseks täiendiks praegu on M_{n-m}. Analoogiliselt valemile (4.4) saame

$$|X| = (-1)^k |X'| = (-1)^k (M_m M_{n-m} + \rho) = M_m[(-1)^k M_{n-m} + (-1)^k \rho] =$$

$$= M_m A_{n-m} + (-1)^k \rho,$$

mis ütleb, et $M_m A_{n-m}$ on osa valemi (3.1) liidetavatest. Sellega lemma on tõestatud. ♠

Fikseerime nüüd maatriksis X mingi arv ridu, näiteks m tükki, kusjuures nõuame, et $m < n$ ja et reaindeksid on fikseeritud kasvavas järjekorras. Olgu nendeks ridadeks $i_1, i_2, \ldots, i_m$, kusjuures, nagu öeldud, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$. Moodustame nendele ridadele toetuvad kõikvõimalikud m-järku miinorid. Neid on C_n^m tükki. Siin C_n^m on kombinantsioonide arv n elemendist m kaupa.

Teoreem 4.2 (Laplace'i teoreem). *Maatriksi X determinant $|X|$ võrdub kõigi selliste korrutiste, mille üheks teguriks on fikseeritud ridadele $i_1, i_2, \ldots, i_m$ toetuv m-järku miinor ja teiseks teguriks tema algebraline täiend, summaga, s.o.*

$$|X| = \sum M_m A_{n-m}, \tag{4.5}$$

kus summa tuleb võtta üle kõigi miinorite, mis toetuvad nendele fikseeritud ridadele.

Tõestus. Summas (4.5) iga liidetav $M_m A_{n-m}$ annab lemma 4.1 kohaselt determinandi $|X|$ valemist (3.1), milles on $n!$ liidetavat, $m!(n-m)!$ liidetavat. Kuna summas (4.5) on aga

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

liidetavat, siis determinanti $|X|$ defineerivas valemis (3.1) on kätte saadud

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}m!(n-m)! = n!$$

liidetavat. Sellega on arvuliselt kätte saadud samapalju liidetavaid kui determinanti $|X|$ defineerivas valemis (3.1). Tuleb veel selgitada, et valem (4.5) ei anna valemi (3.1) liidetavatest mõnda liidetavat mitu korda, aga mõnda pole üldse võetud. Seda ohtu tegelikult ei ole. Valemis (4.5) mistahes kahe liidetava korral nendesse kuuluvad miinorid erinevad vähemalt ühe veeru poolest. ♠

Viimane teoreem tõestati Laplace'i poolt 1772. aastal.

Analoogiline teoreem kehtib determinandi $|X|$ kohta rakendatuna tema veergudele. Põhjus on väga lihtne tänu determinandi omadusele 1°. Selle kohaselt $|X| = |X^\top|$, mistõttu taandub Laplace'i teoreemi rakendamine determinandi $|X^\top|$ ridadele. Täpsemalt:

$$|X| = |X^\top| = \sum M_m^\top A_{n-m}^\top = \sum M_m A_{n-m}.$$

Praktikas determinandi arvutamise lihtsustamiseks kasutatakse Laplace'i teoreemi, kui fikseeritakse ainult üks rida (veerg). Meenutame, et maatriksi esimest järku miinoriteks on maatriksi elemendid. Kui fikseerime maatriksi X puhul i-nda rea, siis selle rea abil saab moodustada järgmised miinorid

$$x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in} \Longleftrightarrow x_{ij}, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}_n.$$

Lepime veel kokku tähistada esimest järku miinori x_{ij} algebralist täiendit X_{ij} abil. Valem (4.5) saab nüüd kuju

$$|X| = x_{i1}X_{i1} + x_{i2}X_{i2} + \dots + x_{in}X_{in}. \tag{4.6}$$

Vastav valem i-nda veeru fikseerimisel on

$$|X| = x_{1i}X_{1i} + x_{2i}X_{2i} + \ldots + x_{in}X_{in}. \tag{4.7}$$

Valemeid (4.6) *ja* (4.7) *nimetatakse determinandi* $|X|$ *arendisteks vastavalt* i*-nda rea ja* i*-nda veeru järgi.*

Kahe viimase valemi tähtsus seineb selles, et avaldiste paremal pool on algebraliste täiendite järk ühe võrra väiksem kui maatriksi X järk. Veel meeldivam on valemite (4.6) või (4.7) rakendamine, kui vastavalt maatriksi X i-nda rea või i-nda veeru elementide seas on võimalikult palju nulle. Viimane on saavutatav, rakendades eelnevalt determinandi omadusi.

5. TEOREEM MAATRIKSITE KORRUTISE DETERMINANDIST

Teoreem 5.1. *Sama järku ruutmaatriksite korrutise determinant võrdub nende maatriksite determinantide korrutisega, s.o.*

$$X, Y \in Mat(n, n) \Longrightarrow |XY| = |X||Y|.$$

Tõestus. Me moodustame n-järku maatriksite abil $2n$-järku maatriksi, mille determinandi leiame kahel erineval moel, saades kord $|X||Y|$ ja teinekord $|XY|$. Kuna saadud võrduste vasakud pooled ühtuvad, siis saamegi teoreemi 5.1. Selline on selle teoreemi tõestuse idee. Asume nüüd teoreemi tõestama. Maatriksite

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

abil moodustame $2n$-järku determinandi

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Arvutame selle determinandi Laplace'i teoreemi abil, rakendades seda n esimesele reale. Oluline on märgata, et ridadele $i_1 = 1, \; i_2 = 2, \dots, i_n = n$ toetub $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!}$ n-järku miinorit, kuid õnneks on kõik miinorid nullid peale $|X|$, sest need miinorid sisaldavad nullidest koosnevat veergu. Sel korral determinanti defineeriva valemi (3.1) kohaselt sellised miinorid kui determinandid on võrdsed nulliga. Valemi (4.5) abil saame

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = |X||Y|. \tag{5.1}$$

Nüüd leiame determinandi D teda eelnevalt teisendades nii, et determinant ei muutu: me rakendame determinantide omadust 3°. Nimelt reale $i \in \mathbb{N}_n$ liidame esmalt x_{i1}-kordse $n+1$ rea, seejärel x_{i2}-kordse $n+2$ rea ja lõpuks x_{in}-kordse $2n$-nda rea. Pärast seda protseduuri uus i-s rida on järgmine

$$0 \quad 0 \dots 0 \quad c_{i1} \quad c_{i2} \dots c_{in},$$

kus

$$c_{ij} = x_{i1}y_{1j} + x_{i2}y_{2j} + \dots + x_{in}y_{nj}, \quad \forall\, i,j \in \mathbb{N}_n.$$

See, mis me siin tegime, ei ole muutnud determinanti D. Oleme saanud

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.2}$$

Nüüd leiame determinandi D valemi (5.2) abil. Rakendame Laplace'i teoreemi taas n esimesele reale. Analoogilisel moel nagu valemi (5.1) juures n esimesele reale toetuvatest miinoritest nullist erinev võib olla ainult $|C|$, kus me tähistasime

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Miinori $|C|$ algebraliseks täiendiks on märgiga varustatud täiendusmiinor, s.o.

$$(-1)^k \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+\dots+2n}(-1)^n = (-1)^{2n(n+1)} = 1.$$

Siin me kasutasime k leidmiseks valemit (4.2) ja determinandi leidmiseks tema omadust 5°. Seega valemist (5.2) Laplace'i teoreemi abil saame nüüd $D = |C|$. Silmas pidades valemit (1.20), näeme, et maatriks C on maatriksite X ja Y korrutis, s.o. $C = XY$. Järelikult $D = |XY|$. Võrreldes valemiga (5.1), saame $|XY| = |X||Y|$. ♠

Järeldus 5.1. *Kehtivad valemid*

$$|XY^\top| = |X||Y|, \quad |X^\top Y| = |X||Y|.$$

Tõestus. Need valemid saame vahetult teoreemi 5.1 ja determinantide esimese omaduse abil. ♠

6. PÖÖRDMAATRIKS

Definitsioon 6.1. *Me nimetame n-järku maatriksi A pöördmaatriksiks sellist n-järku maatriksit X, mis rahuldab kahte maatriksvõrrandit*

$$AX = E, \quad XA = E. \tag{6.1}$$

Meil on praegu täiesti selgusetu, silmas pidades viimast definitsiooni, kas iga n-järku maatriks A omab pöördmaatriksit ja kui omab, siis mitu.

Definitsioon 6.2. *Me nimetame n-järku maatriksit Y regulaarseks (singulaarseks), kui*

$$|Y| \neq 0 \quad (|Y| = 0).$$

Tõestame kolm omadust, mis veidike toovad selgust maatriksi pöördmaatriksi olemasolu kohta.

Omadus 6.1. *Kui n-järku maatriksil A leidub pöördmaatriks, siis nii maatriks A kui ka tema pöördmaatriks on regulaarsed.*

Tõestus. Me eeldasime, et maatriksil A on olemas pöördmaatriks. Tähistame teda tähega B. Viimane rahuldab võrrandeid (6.1), järelikult $AB = E$ ja $BA = E$. Nüüd, näiteks esimesest, teoreemi 5.1 abil saame

$$|AB| = |E| \Longrightarrow |A||B| = 1,$$

millest $|A| \neq 0$ ja $|B| \neq 0$ tõttu maatriks A ja tema pöördmaatriks on regulaarsed. ♠

Omadus 6.2. *Maatriksi ja pöördmaatriksi determinandid on teineteise pöördarvud.*

Tõestus. See omadus on ilmne, sest $|A||B| = 1$. ♠

Singulaarsetel maatriksitel ei ole pöördmaatriksit, sest vastasel juhul omaduse 1 põhjal on singulaarne maatriks hoopis regulaarne.

Omadus 6.3. *Kui ruutmaatriksil on olemas pöördmaatriks, siis ainult üks.*

Tõestus. Oletame, et maatriksil A on olemas mitmed pöördmaatriksid. Hakkame neid paarikaupa võrdlema. Olgu B ja C üks maatriksi A pöördmaatriksite paar. Valemi (6.1) tõttu kehtivad

$$AB = E, \quad BA = E; \quad AC = E, \quad CA = E. \tag{6.2}$$

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsuse kohaselt (vt. (1.21))

$$(BA)C = B(AC),$$

millest (6.2) abil saame

$$EC = BE \Longrightarrow C = B.$$

Seega omadus 6.3 on tõestatud. ♠

Enne kui lahendame pöördmaatriksi probleemi lõplikult, tuletame kaks abivalemit.

Moodustame n-järku maatriksi A abil iga $j \in \mathbb{N}_n$ korral n uut maatriksit $A_{i(j)}$, kus $i \in \mathbb{N}_n$. Maatriks $A_{i(j)}$ saadakse maatrisist A j-nda rea muutmise teel. Nimelt j-ndasse ritta kirjutatakse i-nda rea elemendid. Juhul kui $i \neq j$ on $|A_{i(j)}| = 0$, sest maatriksil $A_{i(j)}$ on i-s ja j-s rida ühesugused. Samas $i = j$ korral $|A_{i(j)}| = |A|$. Seega

$$|A_{i(j)}| = |A|\delta_{ij}. \tag{6.3}$$

Arendame determinanti $|A_{i(j)}|$ nüüd j-nda rea järgi. Valemi (4.6) abil praegu saame

$$|A_{i(j)}| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}. \tag{6.4}$$

Siin on vaja rõhutada, et iga i korral on j-nda rea elementide algebralised täiendid ühesugused, nimelt maatriksi A j-nda rea omad. Võrreldes nüüd valemeid (6.3) ja (6.4) ja kasutades (1.4), saame

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = |A|\delta_{ij}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_n. \tag{6.5}$$

Lugejal palume tõestada, et kui kirjaldatud mõttekäigud viime läbi j-nda veeru jaoks, me saame

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = |A|\delta_{ij}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_n. \tag{6.6}$$

Valemeid (6.5) ja (6.6) nimetakse *determinantide teooria põhivalemiteks.*

Teoreem 6.1. *Iga regulaarne maatriks omab pöördmaatriksit.*

Tõestus. Me konstrueerime regulaarse maatriksi A abil teatava maatriksi, seejärel veendume, et ta rahuldab võrrandeid (6.1). See ütleb, et konstrueeritud maatriks on maatriksi A pöördmaatriks. Tähistame maatriksi A pöördmaatriksit A^{-1} abil. Nagu eestpoolt teada, tähistab A_{ij} maatriksi A esimest järku miinori, s.o. tema elemendi a_{ij} algebralist täiendit. Moodustame nende algebraliste täiendite n-järku maatriksi $\tilde{A} := (A_{ij})$. Osutub, et maatriksi A pöördmaatriksiks on maatriks

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^{\top}. \tag{6.7}$$

Nagu näeme läheb selles valemis vaja maatriksi A regulaarsust, sest muidu ei eksisteeri $\frac{1}{|A|}$. Veendume nüüd, et maatriks (6.7) rahuldab võrradeid (6.1). Selgitamise huvides tähistame $\tilde{A}^{\top} = (b_{ij})$ ja $\frac{1}{|A|}\tilde{A}^{\top} = (c_{ij})$, kus $b_{ij} = A_{ji}$ ja $c_{ij} = \frac{1}{|A|}b_{ij} = \frac{1}{|A|}A_{ji}$. Maatriksite korrutamise definitsiooni kohaselt leiame maatriksi

$$AA^{-1} = A(\frac{1}{|A|}\tilde{A}^{\top}) = (d_{ij})$$

elemendid (d_{ij}). Saame

$$d_{ij} = a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj} =$$

$$= a_{i1}(\frac{1}{|A|}A_{j1}) + a_{i2}(\frac{1}{|A|}A_{j2}) + \ldots + a_{in}(\frac{1}{|A|}A_{jn}) =$$

$$= \frac{1}{|A|}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}) =$$

$$= \frac{1}{|A|}(|A|\delta_{ij}) = \delta_{ij} \Longrightarrow d_{ij} = \delta_{ij}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_n.$$

Siin me kasutasme determinantide teooria põhivalemit (6.5). Saime

$$AA^{-1} = (d_{ij}) = (\delta_{ij}) = E \Longrightarrow AA^{-1} = E.$$

Seega konstrueeritud maatriks A^{-1} rahuldab võrranditest (6.1) esimest. Lugeja hooleks jätame kontrollida, et maatriks A^{-1} rahuldab ka võrrandit

$AX = E$. Seega oleme tõestanud, et maatriks (6.7) on maatriksi pöördmaatriks. ♠

Teeme nüüd veel mõned järeldused pöördmaatriksi kohta.

Omadus 6.4. *Regulaarsete n-järku maatriksite A ja B korral kehtib valem*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Tõestus. Kuna maatriksid A ja B on regulaarsed, siis leiduvad, nagu teame, pöördmaatriksid A^{-1} ja B^{-1}, kusjuures

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^{\top}, \quad B^{-1} = \frac{1}{|B|}\tilde{B}^{\top}.$$

Kuna $|A| \neq 0$ ja $|B| \neq 0$, siis teoreemi 5.1 kohaselt ka korrutismaatriks AB on regulaarne:

$$|AB| = |A||B| \neq 0.$$

Seega eksisteerib maatriksil AB pöördmaatriks $(AB)^{-1}$. Omadus 6.4 väidab, et korrutis $B^{-1}A^{-1}$ on maatriksi AB pöördmaatriks. Definitsiooni 6.1 kohaselt on vaja kontrollida, et $B^{-1}A^{-1}$ rahuldab võrrandeid

$$(AB)X = E, \quad X(AB) = E.$$

Tõepoolest, sest

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E$$

ja

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(EB) = B^{-1}B = E.$$

Seega omadus on tõestatud. ♠

Omadus 6.5. *Maatriksi A^{-1} pöördmaatriksiks on maatriks A, s.o. $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Tõestus. Et maatriks A^{-1} on maatriksi A pöördmaatriks, siis ta rahuldab võrrandeid (6.1). Seega $AA^{-1} = E$ ja $A^{-1}A = E$. Maatriksi A^{-1} pöördmaatriks peab aga rahuldama võrrandeid $A^{-1}X = E$ ja $XA^{-1} = E$. Ilmselt neid võrrandeid rahuldab, tänu eelmisele reale, maatriks A. ♠

Omadus 6.6. *Ühikmaatriksi E pöördmaatriksiks on tema ise, s.o. $E^{-1} = E$.*

Tõestus. Valemi (6.1) kohaselt on vaja kontrollida, et maatriks E rahuldab võrrandeid $EX = E$ ja $XE = E$. Valemi (1.22) kohaselt siit saame $X = E$, s.o. $E^{-1} = E$. ♠

Omadus 6.7. *Maatriksi transponeerimine ja pöördmaatriksi leidmise operatsioon on vahetatavad ehk kommuteeruvad, s.o.* $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Tõestus. Me eeldame, et $|A| \neq 0$, mistõttu ka $|A^\top| = |A| \neq 0$. Seega eksisteerivad A^{-1} ja $(A^\top)^{-1}$. Tõestatavas omaduses me väidame, et maatriksi $A^\top$ pöördmaatriksiks on $(A^{-1})^\top$. Silmas pidades valemeid (6.1), meil tuleb kontrollida, et $(A^{-1})^\top$ on võrrandite $A^\top X = E$ ja $XA^\top = E$. lahendiks. Tõepoolest on see nii, sest

$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = E^\top = E$$

ja

$$(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = E^\top = E.$$

Siin me kasutasime valemit (1.29).