III. LINEAARVÕRRANDISÜSTEEMID

11. LINEAARVÕRRANDISÜSTEEMI MÕISTE. LINEAARVÕRRANDISÜSTEEMI LAHENDAMINE GAUSSI EHK TUNDMATUTE ELIMINEERIMISE MEETODIGA

Võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m. \end{aligned} \tag{11.1}$$

nimetatakse *lineaarvõrrandisüsteemiks.* Siin x_1, $x_2, \ldots,$ x_n on *tundmatud ehk otsitavad*, mis kõik, nagu näeme, on esimesel astmel. Võrrandite arv m ja tundmatute arv n reeglina ei ole omavahel seotud. Seega on mõeldavad juhud $m > n$, $m < n$ ja $m = n$. Tundmatute kordajad a_{ij}, kus esimene indeks i ja teine indeks j muutuvad vastavalt hulkades $\mathbb{N}_m$ ja $\mathbb{N}_n$, on reaalarvud. Reaalarve a_1, $a_2, \ldots,$ a_n nimetatakse *lineaarvõrrandisüsteemi vabaliikmeteks.*

Definitsioon 11.1. *Lineaarvõrrandisüsteemi* (11.1) *nimetatakse homogeenseks, kui vabaliikmed on võrdsed nulliga:* $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$, *ja mittehomogeenseks, kui vähemalt üks vabaliige on nullist erinev.*

Lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) abil saab moodustada kaks maatriksit. Maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & a_m \end{pmatrix}$$

nimetatakse vastavalt *lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiks ja tema laiendatud maatriksiks.*

Definitsioon 11.2. *Reaalarve*

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \dots, \quad x = \alpha_n$$

nimetatakse lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) *lahendiks, kui nende arvude asendamisel tema võrranditesse tundmatute asemele saame samasused*

$$\begin{aligned} &a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \equiv a_1, \\ &a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \equiv a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \equiv a_i, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \equiv a_m. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Igal lineaarvõrrandisüsteemil ei pea kaugeltki olema lahendit (lahendeid). Lineaarvõrrandisüsteemi nimetatakse *vastuoluliseks ehk vasturääkivaks*, kui tal ei ole lahendeid. Homogeensed lineaarvõrrandisüsteemid ei ole kunagi vastuolulised, sest alati on lahendiks nn. *null-lahend*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \dots, \quad x_n = 0.$$

Järgnevas on meie eesmärgiks lineaarvõrrandisüsteem ära lahendada. Aga kuidas? Esimeseks mõtteks, mis pähe tuleb, on asendada lineaarvõrrandisüsteem (11.1) uuega, millel on samad lahendid ja mida on seejuures lihtsam lahendada.

Definitsioon 11.3. *Lineaarvõrrandisüsteemi elementaarteisendusteks nimetatakse*

1) *tema mistahes võrrandi korrutamist nullist erineva reaalarvuga,*

2) *tema mingile võrrandile teise mistahes reaalarvuga läbikorrutatud võrrandi liitmist.*

Teoreem 11.1. *Lineaarvõrrandisüsteemile elementaarteisenduste rakendamisel saadud uuel lineaarvõrrandisüseemil on samad lahendid, mis esialgsel ja ainult need.*

Tõestus. Fikseerime lineaarvõrrandisüsteemis (11.1) mingi võrrandi, näiteks i-nda, mida korrutame nullist erineva reaalarvuga k. Seega me sooritame esimest tüüpi elementaarteisenduse, saades uue lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(ka_{i1})x_1 + (ka_{i2})x_2 + \ldots + (ka_{in})x_n = (ka_i), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m.
\end{aligned} \tag{11.3}$$

Lineaarvõrrandisüsteemid (11.1) ja (11.3) erinevad i-nda võrrandi poolest. Veendume, et neil lineaarvõrrandisüsteemidel on samad lahendid. Lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) mistahes lahendi

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n$$

korral kehtib valem (11.2). Sama lahend rahuldab ka kindlasti lineaarvõrrandisüsteemi (11.3) kõiki võrrandeid esialgu väljaarvatud i-s võrrand, sest jutuks olevad võrrandid on ju ka lineaarvõrrandisüsteemis (11.1). Osutub, et lahend rahuldab ka i-ndat võrrandit, sest

$$(ka_{i1})\alpha_1 + (ka_{i2})\alpha_2 + \ldots + (ka_{in})\alpha_n = k(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}) = ka_i.$$

Siin me kasutasime eelduse (11.2) i-ndat võrrandit. Seega me oleme tõestanud, et lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) iga lahend on ka lineaarvõrrandisüsteemi (11.3) lahendiks.

Nüüd näitame, et lineaarvõrrandisüsteemi (11.3) iga lahend on ka lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) lahendiks. Olgu lineaarvõrrandisüsteemi (11.3) lahendiks

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n, \tag{11.4}$$

s.o.

$$\begin{aligned}
&a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n \equiv a_1, \\
&a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n \equiv a_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(ka_{i1})\alpha_1 + (ka_{i2})\alpha_2 + \ldots + (ka_{in})\alpha_n \equiv (ka_i), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n \equiv a_m.
\end{aligned}$$

Näitame nüüd, et lahend (11.4) on ka lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) lahendiks. Kehtib (11.3). Ka nüüd on vaja kontrollida i-nda võrrandi täidetust, sest teised võrrandid on ühised. Kuna $k \neq 0$, siis eksisteerib $\frac{1}{k}$. Tema abil saame

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = (\frac{1}{k}k)(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) =$$

$$\frac{1}{k}[(ka_{i1})\alpha_1 + (ka_{i2})\alpha_2 + \ldots + (ka_{in})\alpha_n] = \frac{1}{k}(ka_i) = a_i.$$

Sellega oleme näidanud, et lineaarvõrrandisüsteemidel (11.1) ja (11.3) on samad lahendid.

Moodustame nüüd lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) abil uue lineaarvõrrandisüsteemi teist tüüpi elementaarteisenduse abil – liidame i-ndale võrrandile p-kordse k-nda võrrandi. Uueks lineaarvõrrandisüsteemiks on

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(a_{i1} + pa_{k1})x_1 + (a_{i2} + pa_{k2})x_2 + \ldots +\\
&+ (a_{in} + pa_{kn})x_n = a_i + pa_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m.
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Nagu näeme, lineaarvõrrandisüsteemid (11.1) ja (11.5) erinevad jällegi ainult i-nda võrrandi poolest. Nüüd veendume, et nendel on samad lahendid.

Lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) iga lahendi

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n \tag{11.6}$$

korral kehtib

$$\begin{aligned}
&a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n \equiv a_1,\\
&a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n \equiv a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n \equiv a_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \ldots + a_{kn}\alpha_n \equiv a_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n \equiv a_m.
\end{aligned}$$

Veendume, et lahend (11.6) on lineaarvõrrandisüsteemi (11.5) lahendiks. Nagu öeldud, tuleb kontrollida i-nda võrrandi täidetust. See on tõepoolest nii, sest

$$(a_{i1}+pa_{k1})\alpha_1+(a_{i2}+pa_{k2})\alpha_2+\ldots+(a_{in}+pa_{kn})\alpha_n=$$

$$=(a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\ldots+a_{in}\alpha_n)+$$

$$+p(a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\ldots+a_{kn}\alpha_n)=a_i+pa_k.$$

Seega lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) iga lahend on lineaarvõrrandisüsteemi (11.5) lahendiks.

Olgu nüüd (11.6) lineaarvõrrandisüsteemi (11.5) suvaline lahend. Järelikult kehtib

$$\begin{array}{l}
a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n\equiv a_1,\\
a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n\equiv a_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(a_{i1}+pa_{k1})\alpha_1+(a_{i2}+pa_{k2})\alpha_2+\ldots+(a_{in}+pa_{kn})\alpha_n=a_i+pa_k,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\ldots+a_{mn}\alpha_n\equiv a_m.
\end{array}$$

Vaja on näidata, et (11.6) on ka lineaarvõrrandisüsteemi (11.1) lahendiks. Nagu eespool juba öeldud, kontrolli väärib ainult i-nda võrrandi rahuldatus. See on tõepoolest nii, sest

$$a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\ldots+a_{in}\alpha_n=$$

$$=(a_{i1}+pa_{k1})\alpha_1+(a_{i2}+pa_{k2})\alpha_2+\ldots+(a_{in}+pa_{kn})\alpha_n-$$

$$-p(a_{k1}\alpha_1+a_{k2}\alpha_2+\ldots+a_{kn}\alpha_n)=(a_i+pa_k)-pa_k=a_i.$$

Sellega teoreem 1.1 on tõestatud. ♠

Järeldus 11.1. *Kui lineaarvõrrandisüsteem on vastuoluline, siis on vastuoluline ka elementaarteisenduste abil saadud lineaarvõrrandisüsteem.*

Tõestus on vastuväiteline ja tugineb eelmisele teoreemile. ♠

Nüüd on kõik valmis, et tutvuda *Gaussi ehk tundmatute elimineerimise meetodiga* lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisel. Kõik järgnev tugineb teoreemile 11.1. Olgu meil antud mittevastuoluline lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Tundmatu x_1 juures kõik kordajad a_{11}, a_{21}, $a_{31}, \ldots,$ a_{m1} ei ole korraga nullid, sest vastasel juhul langevad lineaarvõrrandisüsteemist x_1-ga liidetavad "mängust välja" ning tundmatuid jääb alles $n-1$ tükki eeldatava n tundmatu asemel. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et a_{11} on nullist erinev, sest vastasel juhul tõstame võrrandeid ringi. Moodustame teist tüüpi elementaarteisenduste abil samade lahenditega uue lineaarvõrranditesüsteemi järgmiselt: i-ndale võrrandile liidame $(-\frac{a_{i1}}{a_{11}})$ kordse esimese võrrandi. Siin $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Me saame

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1, \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2, \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \ldots + b_{3n}x_n &= b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ b_{m_12}x_2 + b_{m_13}x_3 + \ldots + b_{m_1n}x_n &= b_{m_1}. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Viimases lineaarvõrrandisüsteemis võrrandite arv m_1 võib olla väiksem, võrreldes lähtelineaarvõrrandisüsteemi võrrandite arvuga m. Põhjuseks on asjaolu, et lineaarvõrrandisüsteemis (11.8) alates teisest võrrandist võib olla ühesuguseid võrrandeid. Taolisel juhul on küllaldane alles jätta neist ainult üks. Rakendame analoogilist protseduuri võrranditele alates teisest võrrandist otsitava x_2 suhtes. Esmapilgul kipuvad aga võimust võtma raskused. Nimelt, nagu eespool seletatud, on tundmatu x_2 kordajatest a_{12}, $b_{22}, \ldots,$ b_{m_12} vähemalt üks nullist erinev. Tõrge tekib siis, kui nullist erinev on ainult a_{12}. Sel korral me ei saa öelda, et üldsust kitsendamata kordaja b_{22} on nullist erinev. Juhul kui $b_{22} = b_{32} = \ldots = b_{m_12} = 0$, siis vaatleme tundmatu x_3 kordajaid. Kui ka siin peaks olema $a_{13} \neq 0$ ja

$b_{23} = b_{33} = \ldots = b_{m_1 3} = 0$, siis vaatleme tundmatu x_4 kordajaid. Võib tekkida isegi olukord, et samm-sammult oleme jõudnud tundatu x_n juurde ja ka seal on $a_{1n} \neq 0$, $b_{2n} = b_{3n} = \ldots = b_{m_1 n} = 0$. Sel korral valemis (11.8) iga võrrand alates teisest on kujuga

$$0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b_i, \quad i \in \{2, \ 3, \ldots, \ m_1\}.$$

Kuna lineaarvõrrandisüsteem (11.8) ei ole vastuoluline, siis viimane saab kehtida ainult siis, kui $b_2 = b_3 = \ldots = b_{m_1} = 0$. Seega lineaarvõrrandisüsteemi (11.8) jääb ainult esimene võrrand. Nüüd läheme oma põhijuhu vaatlemisega edasi: leidub $k < n$, et tundmatu x_k kordajate b_{2k}, $b_{3k}, \ldots,$ $b_{m_1 k}$ seas on vähemalt üks nullist erinev. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $b_{2k} \neq 0$. Nüüd tehes tundmatute ümbertähistused

$$y_1 = x_1, \ \ y_2 = x_k, \ \ y_3 = x_2, \ldots, \ \ y_k = x_{k-1}, y_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \ \ y_n = x_n,$$

me üldsust kitsendamata võime eeldada, et lineaarvõrrandisüsteemis (11.8) kordaja b_{22} ei ole null. Liidame nüüd i-ndale võrrandile, kus $i \in \{3, \ 4, \ldots, m_1\}$, $-\frac{b_{i2}}{b_{22}}$ kordse teise võrrandi. Selle tulemusena saab lineaarvõrrandisüsteem kuju

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1, \\
b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2, \\
c_{33}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n &= c_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
c_{m_2 3}x_3 + \ldots + c_{m_2 n}x_n &= c_{m_2}.
\end{aligned}$$

Siin $m_2 \leq m_1$. Analoogilist protseduuri samm-sammult jätkates, saame oma lineaarvõrrandisüsteemi viia järgmisele kujule

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1s}x_s + a_{1,s+1} + \ldots + a_{1n}x_n &= a_1, \\
b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2s}x_s + b_{2,s+1} + \ldots + b_{2n}x_n &= b_2, \\
c_{33}x_3 + \ldots + c_{3s}x_s + c_{3,s+1} + \ldots + c_{2n}x_n &= c_3, \quad (11.9) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
h_{ss}x_s + h_{s,s+1}x_{s+1} + \ldots + h_{sn}x_n &= h_s.
\end{aligned}$$

Järele jäänud võrrandite arv s on ilmselt väiksem või võrdne tundmatute arvuga. Lisaks sellele on kordajad a_{11}, b_{22}, c_{33}, $\ldots, h_{ss}$ kõik nullist erinevad. Rõhutamata ei saa jätta ka seda, et saadud lineaarvõrrandisüsteem on "kolmnurkse" kujuga.

Nüüd jätkame lineaarvõrrandisüsteemi (11.9) edasist teisendamist. Protseduurid on analoogilised, mis me tegime lineaarvõrrandisüsteemi (11.9) saamiseks lineaarvõrrandisüsteemist (11.7), rakendatuna viimasest s-ndast võrrandist ettepoole. Esimesel sammul liidame sobiva kordsusega viimast võrrandit eelnevatele nii, et tundmatu x_s kordajad muutuvad nullideks. Seejärel analoogiliselt teeme eelviimase võrrandi abil eelmiste võrrandite kordajad tundmatu x_{s-1} juures nullideks. Analoogiliselt jätkates, saab meie lineaarvõrrandisüsteem järgmist tüüpi kuju

$$
\begin{aligned}
c_{11}x_1 + c_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + c_{1n}x_n &= c_1, \\
c_{22}x_2 + c_{2,s+1}x_{s+1} + \ldots + c_{2n}x_n &= c_2, \\
c_{33}x_3 + c_{3,s+1}x_{s+1} + \ldots + c_{3n}x_n &= c_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{ss}x_s + c_{s,s+1}x_{s+1} + \ldots + c_{sn}x_n &= c_s.
\end{aligned}
$$

Viimasest avaldame tundmatud x_1, $x_2, \ldots, x_s$ tundmatute $x_{s+1}, \ldots,$ x_n kaudu. Selleks rakendame esimest tüüpi elementaarteisendusi, korrutades võrrandeid vastavalt teguritega $\frac{1}{c_{11}}$, $\frac{1}{c_{22}}, \ldots, \frac{1}{c_{ss}}$. Me saame lineaarvõrrandisüstemile järgmise kuju

$$
\begin{aligned}
x_1 &= d_{1,s+1}x_{s+1} + \ldots + d_{1n}x_n + d_1, \\
x_2 &= d_{2,s+1}x_{s+1} + \ldots + d_{2n}x_n + d_2, \\
x_3 &= d_{3,s+1}x_{s+1} + \ldots + d_{3n}x_n + d_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_s &= d_{s,s+1}x_{s+1} + \ldots + d_{sn}x_n + d_s.
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

Lineaarvõrrandisüsteemi viimist kujule (11.10) nimetatakse *lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks Gaussi ehk tundmatute elimineerimise meetodiga.* Nagu näeme on osa tundmatuid, praegu x_1, $x_2, \ldots,$ x_s, avaldatud elementaarteisenduste abil ülejäänud tundmatute, praegu $x_{s+1}, \ldots, x_n$, kaudu. Viimaseid nimetatakse *vabadeks tundmatuteks.* Kui $s = n$, siis vabu tundmatuid ei ole. Valemit (11.10) nimetame *lineaarvõrrandisüsteemi*

(11.7) *üldlahendiks vabade tundmatute kaudu.* Vabade tundmatute olemasolul on lineaarvõrrandisüsteemil lõpmatu palju lahendeid. Kui fikseerime vabad tundmatud, saame valemite (11.10) abil leida ülejäänud tundmatud. Oleme saanud oma lineaarvõrrandisüsteemi konkreetse lahendi, mida nimetame *erilahendiks.*

12. LINEAARVÕRRANDISÜSTEEMI ÜLDLAHEND ERILAHENDI JA FUNDAMENTAALSÜSTEEMI KAUDU

Selles paragrahvis läheneme lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisele veidi teise nurga alt, kasutades vektorruumi mõisteid. Olgu antud lahenduv lineaarvõrrandisüsteem

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_i, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m
\end{array}
\qquad (12.1)
$$

tundmatutega $x_1, \quad x_2, \ldots, x_n$. Aruteluga edasiminekuks me eeldame, et lugeja on veendunud, et hulk $\mathbb{R}^n = Mat(1, n)$ on vektorruum tehete

$$(x_1, \quad x_2, \ldots, x_n) + (y_1, \quad y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \quad x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

ja

$$\xi(x_1, \quad x_2, \ldots, x_n) := (\xi x_1, \quad \xi x_2, \ldots, \xi x_n)$$

suhtes. Edaspidi tähistame selle vektorruumi vektoreid lühidalt

$$\vec{x} := (x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n).$$

Selle tähise kohaselt nullvektori ja vastandvektori tähisteks tulevad

$$\vec{0} = (0, \quad 0, \ldots, \quad 0), \quad -\vec{x} = (-x_1, \quad -x_2, \ldots, -x_n).$$

Pöördume nüüd tagasi lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) juurde. Moodustame viimase tundmatute abil nii-öelda tundmatute vektori

$$\vec{x} = (x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n),$$

mida saab tõlgendada vektorruumi $\mathbb{R}^n$ muutuva vektorina. Lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) iga lahendi

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, \quad x_n = \alpha_n$$

korral

$$\begin{aligned}
&a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n \equiv a_1,\\
&a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n \equiv a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n \equiv a_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n \equiv a_m.
\end{aligned} \tag{12.2}$$

Seejuures seda lahendit võime tõlgendada vektorruumi $\mathbb{R}^n$ vektorina

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n).$$

Tähistame lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) lahendivektorite hulka L abil. Tegemist on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamhulgaga. Kui lineaarvõrrandisüsteem on vastuoluline, siis L on tühi hulk.

Hulga L kohta saab olulist lisada, kui lineaarvõrrandisüsteem on homogeenne, s.o.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0.
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Viimase lahendivektorite hulk L on mittetühi, sest lahendiks on nullvektor

$$\vec{0} = (0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0).$$

Teoreem 12.1. *Homogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.3) *lahendivektorite hulk L on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum.*

Tõestus. Valemi (8.5) kohaselt on vaja esiteks näidata, et hulk L on mittetühi. See on meil juba näidatud. Teiseks on vaja näidata, et mistahes kahe reaalarvu ξ ja η ning lineaarvõrrandisüsteemi (12.3) mistahes kahe lahendivektori

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \ \ \xi_2, \ldots, \ \ \xi_n), \quad \vec{\eta} = (\eta_1, \ \ \eta_2, \ldots, \ \ \eta_n)$$

korral ka vektor

$$\xi\vec{\xi} + \eta\vec{\eta} = (\xi\xi_1 + \eta\eta_1, \ \ \xi\xi_2 + \eta\eta_2, \ldots, \ \ \xi\xi_n + \eta\eta_n)$$

on lineaarvõrrandisüsteemi (12.3) lahendivektoriks. Kuna eelduse kohaselt $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in L$, siis

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n &\equiv 0, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n &\equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_n &\equiv 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n &\equiv 0, \\ a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n &\equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \ldots + a_{mn}\eta_n &\equiv 0. \end{aligned}$$

Viimaste abil saame

$$a_{11}(\xi\xi_1 + \eta\eta_1) + a_{12}(\xi\xi_2 + \eta\eta_2) + \ldots + a_{1n}(\xi\xi_n + \eta\eta_n) =$$

$$= \xi(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n) + \eta(a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \ldots + a_{1n}\eta_n) = \xi 0 + \eta 0 = 0,$$

$$a_{21}(\xi\xi_1 + \eta\eta_1) + a_{22}(\xi\xi_2 + \eta\eta_2) + \ldots + a_{2n}(\xi\xi_n + \eta\eta_n) =$$

$$= \xi(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n) + \eta(a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 + \ldots + a_{2n}\eta_n) = \xi 0 + \eta 0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}(\xi\xi_1 + \eta\eta_1) + a_{m2}(\xi\xi_2 + \eta\eta_2) + \ldots + a_{mn}(\xi\xi_n + \eta\eta_n) =$$

$$= \xi(a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_n) + \eta(a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \ldots + a_{mn}\eta_n) =$$

$$= \xi 0 + \eta 0 = 0,$$

s.o. $\xi\vec{\xi} + \eta\vec{\eta} \in L$. ♠

Kuna vektorruumi alamruum on vektorruum, siis saab rääkida tema mõõtmest. Seega saab rääkida ka homogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.3) lahendivektorite alamruumi L mõõtmest. Vektorruumi $\mathbb{R}^n$ mõõde on n, siis kindlasti $dim\ L \leq n$. Ilmselt ei leia siin aset ka võrdus, sest siis $L = \mathbb{R}^n$. Seega $dim\ L < n$. Tõestuseta märgime, et lahendite alamruumi mõõde on võrdne vabade tundmatute arvuga. Kui jälgida valemeid (11.10), on vabade tundmatute arv võrdne $(n-s)$-ga. Muuseas homogeense lineaarvõrrandisüsteemi korral valemis (11.10) on $d_1 = d_2 = \ldots = d_s = 0$. Seega homogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.3) üldlahendiks leituna Gaussi meetodiga on (11.10) tõttu järgmine

$$\begin{aligned} x_1 &= d_{1,s+1}x_{s+1} + d_{1,s+2}x_{s+2} + \ldots + d_{1n}x_n, \\ x_2 &= d_{2,s+1}x_{s+1} + d_{2,s+2}x_{s+2} + \ldots + d_{2n}x_n, \\ x_3 &= d_{3,s+1}x_{s+1} + d_{3,s+2}x_{s+2} + \ldots + d_{3n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= d_{s,s+1}x_{s+1} + d_{s,s+2}x_{s+2} + \ldots + d_{sn}x_n. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Järgnevas selgitame, kuidas leida lahendivektorite alamruumi L mingit baasi. Viimane koosneb, nagu öeldud, $(n-s)$ lahendivektorist. Me anname vabadele tundmatutele x_{s+1}, $x_{s+2}, \ldots,$ x_n nüüd $(n-s)$ seeriat väärtusi. Väärtuste iga seeria

$$x_{s+1} = c_{i,s+1}, \quad x_{s+2} = c_{i,s+2}, \ldots, \quad x_n = c_{in}, \quad i \in \mathbb{N}_{n-s}$$

korral saame valemi (12.4) abil leida tundmatute x_1, $x_2, \ldots,$ x_s väärtused. Tähistame neid järgmiselt

$$x_1 = c_{i1}, \quad x_2 = c_{i2}, \ldots, \quad x_s = c_{is}, \quad i \in \mathbb{N}_{n-s}.$$

Selle protseduuri tulemusena oleme saanud $(n-s)$ lahendivektorit

$$\vec{c}_i = (c_{i1}, \quad c_{i2}, \ldots, \quad c_{is}, \quad c_{i,s+1}, \quad c_{i,s+2}, \ldots, \quad c_{in}), \quad i \in \mathbb{N}_{n-s}. \tag{12.5}$$

Tõestuseta märgime, et vektorsüsteem

$$\{\vec{c}_1, \quad \vec{c}_2, \ldots, \quad \vec{c}_{n-s}\} \tag{12.6}$$

on lahendivektorite alamruumi L baasiks, kui vabadele tundmatutele antud väärtuste seeriatest moodustatud $(n-s)$-järku determinant on nullist erinev, s.o.

$$\begin{vmatrix} c_{1,s+1} & c_{1,s+2} & \dots & c_{1n} \\ c_{2,s+1} & c_{2,s+2} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i,s+1} & c_{i,s+2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-s,s+1} & c_{n-s,s+2} & \dots & c_{n-s,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tuginedes vektorruumi baasi mõistele, võime öelda, et kõik lahendivektorid

$$\vec{x} = (x_1, \quad x_2, \dots, \quad x_n), \quad \vec{x} \in L$$

saame kätte kujul

$$\vec{x} = t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + \dots + t_{n-s}\vec{c}_{n-s}, \quad t_1, t_2, \dots, t_{n-s} \in \mathbb{R}. \tag{12.7}$$

Asendades siia vektorite $\vec{x}$, $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\dots$, $\vec{c}_{n-s}$ avaldised valemitest (12.6) ja (12.5) ning vektorite võrdsuse tõttu peavad ühesugustel kohtadel olevad komponendid olema võrdsed. Seega

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1c_{11} + t_2c_{21} + \dots + t_{n-s}c_{n-s,1}, \\ x_2 &= t_1c_{12} + t_2c_{22} + \dots + t_{n-s}c_{n-s,2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i &= t_1c_{1i} + t_2c_{2i} + \dots + t_{n-s}c_{n-s,i}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= t_1c_{1n} + t_2c_{2n} + \dots + t_{n-s}c_{n-s,n}, \\ & t_1, t_2, \dots, t_{n-s} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Definitsioon 12.1. *Homogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.3) *lahendiruumi L baasi* $\{\vec{c}_1, \quad \vec{c}_2, \dots, \quad \vec{c}_{n-s}\}$ *nimetatakse tema fundamentaalsüsteemiks.*

Valemit (12.7) nimetatakse homogeense lineaarvõrrandisüsteemi *üldlahendiks fundamentaalsüsteemi kaudu vektorkujul ja* (12.8) *komponentkujul.*

Kui $t_1, \ t_2, \ldots, \ t_{n-s}$ muutuvad üksteisest sõltumatult reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$, siis saame valemi (12.7) abil kätte kõik homogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.3) lahendivektorid. Nende hulga L geomeetriliseks sisuks on olla vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum.

Pöördume nüüd tagasi lahenduva mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) lahendivektorite hulga, mida tähistame siin $\bar{L}$ abil, uurimisele. Kuna vaadeldav lineaarvõrrandisüsteem on lahenduv, siis saame leida mingi konkreetse lahendivektori nn. erilahendivektori

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ \ \alpha_2, \ldots, \ \ \alpha_n). \tag{12.9}$$

Seejuures kehtivad samasused (12.2). Praktiliselt erilahendivektori leidmiseks tuleb lineaarvõrrandisüsteem lahendada Gaussi meetodiga, saades üldlahendi (11.10) vabade tundmatute kaudu. Fikseerides selles, nii kuidas tahame, vabad tundmatud, saamegi mingi erilahendivektori (12.9). Järgnevas moodustame antud lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) abil homogeense lineaarvõrrandisüsteemi, võttes vabaliikmed võrdseks nulliga. Saame

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0.
\end{aligned} \tag{12.10}$$

Definitsioon 12.2. *Homogeenset lineaarvõrrandisüsteemi* (12.10) *nimetatakse mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.1) *taandatud lineaarvõrrandisüsteemiks.*

Tähistame taandatud lineaarvõrrandisüsteemi lahendivektorite alamruumi, nii nagu eespool, L abil. Selle alamruumi kõik lahendivektorid kirjeldatakse valemi (12.7) abil.

Teoreem 12.2. *Iga vektor* $\vec{y} := \vec{\alpha} + \vec{x}$, *kus* $\vec{\alpha}$ *on mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.1) *erilahendivektor ja* $\vec{x}$ *on taandatud lineaarvõrrandisüsteemi* (12.10) *lahendivektor, on mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.1) *lahendivektor. Vastupidi. Mittehogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.1) *iga lahendivektor* $\vec{y}$ *on avaldatatav kujul* $\vec{y} = \vec{\alpha} + \vec{x}$, *kus*

$\vec{\alpha}$ *on mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.1) *erilahendivektor ja vektor* $\vec{x}$ *on taandatud lineaarvõrrandisüsteemi* (12.10) *lahendivektor.*

Tõestus. Näitame, et vektor $\vec{y} = \vec{\alpha} + \vec{x}$, kus $\vec{\alpha}$ on mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteeme (12.1) erilahend ja $\vec{x}$ taandatud lineaarvõrrandisüsteemi (12.10) suvaline lahendivektor, on lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) lahend. Öeldu põhjal kehtib (12.2) ja seosed (12.10) muutuvad samasusteks. Asendame nüüd moodustatud vektori

$$\vec{y} = (\alpha_1 + x_1, \quad \alpha_2 + x_2, \ldots, \quad \alpha_n + x_n)$$

komponendid mittehomogeense võrrandisüsteemi (12.1) tundmatute asemele. Me saame

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = a_{11}(\alpha_1 + x_1) + a_{12}(\alpha_2 + x_2) + \ldots + a_{1n}(\alpha_n + x_n) =$$

$$= (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) + (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) = a_1 + 0 = a_1,$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = a_{21}(\alpha_1 + x_1) + a_{22}(\alpha_2 + x_2) + \ldots + a_{2n}(\alpha_n + x_n) =$$

$$= (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) = a_2 + 0 = a_2,$$

. . . .

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n = a_{i1}(\alpha_1 + x_1) + a_{i2}(\alpha_2 + x_2) + \ldots + a_{in}(\alpha_n + x_n) =$$

$$= (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) = a_i + 0 = a_i,$$

. . . .

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = a_{m1}(\alpha_1 + x_1) + a_{m2}(\alpha_2 + x_2) + \ldots +$$

$$+ a_{mn}(\alpha_n + x_n) = (a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n) +$$

$$+ (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) = a_m + 0 = a_m,$$

mis ütleb, et vektor $\vec{y} = \vec{\alpha} + \vec{x}$ on mittehomogeense linearvõrrandisüsteemi lahendivektor. Järelikult

$$\{\vec{\alpha} + \vec{x} | \, \vec{x} \in L\} \subseteq \bar{L},$$

kus $\bar{L}$ on mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) lahendivektorite hulk.

Olgu nüüd vektor $\vec{y} = (y_1, \ \ y_2, \ldots, \ \ y_n)$ mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) suvaline lahendivektor. Seega kehtib

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \equiv a_1, \\
&a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \equiv a_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \equiv a_i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \equiv a_m.
\end{aligned} \tag{12.11}$$

Osutub, et vektor

$$\vec{x} := \vec{y} - \vec{\alpha} = (y_1 - \alpha_1, \ \ y_2 - \alpha_2, \ldots, \ \ y_n - \alpha_n),$$

kus $\vec{\alpha}$ on mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi erilahend, on taandatud lineaarvõrrandisüsteemi lahend. See on tõepoolest nii, sest

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{11}(y_1 - \alpha_1) + a_{12}(y_2 - \alpha_2) + \ldots + a_{1n}(y_n - \alpha_n) =$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n) - (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) = a_1 - a_1 = 0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{21}(y_1 - \alpha_1) + a_{22}(y_2 - \alpha_2) + \ldots + a_{2n}(y_n - \alpha_n) =$$

$$= (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n) - (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) = a_2 - a_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_{i1}(y_1 - \alpha_1) + a_{i2}(y_2 - \alpha_2) + \ldots + a_{in}(y_n - \alpha_n) =$$

$$= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n) - (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) = a_i - a_i = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = a_{m1}(y_1 - \alpha_1) + a_{m2}(y_2 - \alpha_2) + \ldots +$$

$$+ a_{mn}(y_n - \alpha_n) = (a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n) - (a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots +$$

$$+ a_{mn}\alpha_n) = a_m - a_m = 0.$$

Siis me arvestasime seoseid (12.2). Seega me oleme näidanud

$$\{\vec{\alpha} + \vec{x} \,|\, \vec{x} \in L\} \supseteq \ \bar{L}. \tag{12.12}$$

Valemid (12.11) ja (12.12) lubavad kirjutada

$$\bar{L} = \{\vec{\alpha} + \vec{x} \mid \vec{x} \in L\}. \tag{12.13}$$

Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Kasutades viimast teoreemi ja valemit (12.7), saame mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi (12.1) lahendivektorite jaoks avaldise

$$\vec{y} = \vec{\alpha} + t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + \ldots + t_{n-s}\vec{c}_{n-s}, \qquad t_1, t_2, \ldots, t_{n-s} \in \mathbb{R}.$$

Viimases on mängust väljas vektor $\vec{x}$, siis avaneb võimalus kasutada vektori $\vec{y}$ tähistamiseks vektorit $\vec{x}$. Saame

$$\vec{x} = \vec{\alpha} + t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + \ldots + t_{n-s}\vec{c}_{n-s}, \qquad t_1, t_2, \ldots, t_{n-s} \in \mathbb{R}.$$

Viimase kohta ütleme, et on antud *mittehomogeense lineaarvõrrandisüsteemi* (12.1) *lahendivektor tema erilahendi ja taandatud lineaarvõrrandisüsteemi* (12.10) *fundamentaalsüsteemi kaudu.* Valemi (12.13) kuju komponentides on järgmine

$$x_1 = \alpha_1 + t_1c_{11} + t_2c_{21} + \ldots + t_{n-s}c_{n-s,1},$$

$$x_2 = \alpha_2 + t_1c_{12} + t_2c_{22} + \ldots + t_{n-s}c_{n-s,2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i = \alpha_i + t_1c_{1i} + t_2c_{2i} + \ldots + t_{n-s}c_{n-s,i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \alpha_n + t_1c_{1n} + t_2c_{2n} + \ldots + t_{n-s}c_{n-s,n},$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_{n-s} \in \mathbb{R}.$$

13. CRAMERI PEAJUHT

Selles punktis anname valemi teatavat tüüpi lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Täidetud peab olema kaks tingimust: lineaarvõrrandisüsteemi võrrandite arv peab olema võrdne tundmatute arvuga ja tema maatriks peab olema regulaarne. Öeldut arvestades, on lineaarvõrrandisüsteem kujuga

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = a_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_n. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Tema maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

on regulaarne, s.o. $|A| \neq 0$. Moodustame tundmatute ja vabaliikmete üheveerulised maatriksid:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Viimaste abil saame lineaarvõrrandisüsteemi (13.1) kirjutada maatrikskujul, saades

$$AX = \bar{A}.$$

Siin me kasutasime maatriksite korrutamise ja võrdsuse definitsiooni. Kuna maatriks A on regulaarne, siis on tal olemas pöördmaatriks A^{-1}. Viimase abil saame saadud maatriksvõrrandist avaldada tundmatute maatriksi. Tõepoolest, sest

$$X = EX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}\bar{A}.$$

Seega oleme lineaarvõrrandisüsteemi (13.1) lahendimaatriksiks saanud

$$X = A^{-1}\bar{A}. \tag{13.2}$$

Et viimane kirjutada maatriksi elementide kaudu, tähistame selleks pöördmaatriksi A^{-1} elemente järgmiselt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \ldots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \ldots & \bar{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \ldots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Maatriksite võrduste definitsiooni kohaselt valemis (13.2) üheveeruliste maatriksite X ja $A^{-1}\bar{A}$ i-ndas reas elemendid on võrdsed. Saame

$$x_i = \bar{a}_{i1}a_1 + \bar{a}_{i2}a_2 + \ldots + \bar{a}_{in}a_n, \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{13.3}$$

Selle valemi kasutamine on üsna tülikas, sest keeruline on leida pöördmaatriksi A^{-1} elemente. Valemi (13.3) saab viia sobivamale kujule, kui arvestame valemit (6.7). Selle kohaselt

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^{\top},$$

millest maatriksite võrdsuse definitsiooni kohaselt

$$\bar{a}_{ij} = \frac{1}{|A|}A_{ji}, \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}_n.$$

Viimase abil valem (13.3) saab kuju

$$x_i = \frac{1}{|A|}(A_{1i}a_1 + A_{2i}a_2 + \ldots + A_{ni}a_n), \quad i \in \mathbb{N}_n \tag{13.4}$$

Enne kui aruteluga edasi minna, kohendame tähiseid. Tähistame D abil meie lineaarvõrrndisüsteemi maatriksi A determinanti, s.o. $D = |A|$. Lisaks võtame kasutusele veel n determinanti D_i, kus $i \in \mathbb{N}_n$. Selleks me determinandis $|A|$ asendame i-nda veeru lineaarvõrrandisüsteemi (13.1) vabaliikmetega. Seega

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & a_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & a_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & a_n & a_{1,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i \in \mathbb{N}_n.$$

Arendame viimast valemi (4.7) kohaselt i-nda veeru järgi. Saame

$$D_i = a_1 A_{1i} + a_2 A_{2i} + \ldots + a_n A_{ni}.$$

Siin tuleb ilmtingimata juhtida tähelepanu sellele, et A_{1i}, A_{2i}, $\ldots$, A_{ni} on maatriksi A i-nda veeru elementide algebralised täiendid ja seda iga $i \in \mathbb{N}_n$ korral. Valemi (13.4) lõppkujuks saame

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i \in \mathbb{N}_n. \tag{13.5}$$

Crameri peajuhu korral lineaarvõrrandisüsteemi (13.1) lahendamiseks valemite (13.5) kasutamist nimetatakse *Crameri reegli* kasutamiseks.