II. VEKTORRUUM ÜLE REAALARVUDE

7. VEKTORRUUMI MÕISTE. OMADUSED

Vaatluse all on algebra üks olulisi mõisteid. Tegemist on teatava ehitusega mittetühja hulgaga. Tavaliselt tähistatakse seda hulka tähega $\mathbf{V}$. Selle hulga elemente nimetame *vektoriteks*. Neid tähistame väikeste ladina tähtedega, mis on varustatud noolega. Näiteks $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{x}, \vec{z}$ on vektorid.

Definitsioon 7.1. *Mittetühja hulka* $\mathbf{V}$ *nimetame vektorruumiks üle reaalarvude* $\mathbb{R}$, *kui tal on järgmine ehitus.*

I. *On antud kujutus*

$$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}, \tag{7.1}$$

mida nimetame vektorite liitmiseks. Vektorite liitmine peab rahuldama järgmisi aksioome.

1° *Vektorite liitmine on assotsiatiivne, s.o. iga* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$ *korral kehtib*

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}). \tag{7.2}$$

2° *Hulgas* $\mathbf{V}$ *leidub selline vektor, mida tähistame* $\vec{0}$ *abil, et iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral kehtib*

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}. \tag{7.3}$$

Vektorit $\vec{0}$ *nimetatakse nullvektoriks.*

3° *Iga vektori* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral leidub hulgas* $\mathbf{V}$ *selline vektor, mida tähistame* $-\vec{x}$ *abil, et*

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}, \quad (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}. \tag{7.4}$$

Vektorit $-\vec{x}$ *nimetatakse vektori* $\vec{x}$ *vastandvektoriks.*

4° *Vektorite liitmine on kommutatiivne, s.o. iga* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}. \tag{7.5}$$

II. *On antud kujutus*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}; \quad (\xi, \vec{x}) \longmapsto \xi\vec{x}, \tag{7.6}$$

mida nimetame reaalarvu ja vektori korrutamiseks. Viimane peab rahuldama järgmisi aksioome.

5° *Iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$1\vec{x} = \vec{x}. \tag{7.7}$$

6° *Iga* $\xi, \mu \in \mathbb{R}$ *ja iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$(\xi\mu)\vec{x} = \xi(\mu\vec{x}). \tag{7.8}$$

III. *Kehtivad distributiivsused.*

7° *Iga* $\xi \in \mathbb{R}$ *ja iga* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$\xi(\vec{x} + \vec{y}) = \xi\vec{x} + \xi\vec{y}. \tag{7.9}$$

8° *Iga* $\xi, \mu \in \mathbb{R}$ *ja iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$(\xi + \mu)\vec{x} = \xi\vec{x} + \mu\vec{x}. \tag{7.10}$$

Märkusena lisame, et vektorruumi mõiste on tegelikult üldisem. Loengukursuses "Algebra I" on reaalarvude osas suvaline korpus. Meil on siin korpuse osas konkreetne korpus – reaalarvude korpus. Kuna meil korpuse mõistet ei ole antud, siis reaalarvude korpuse, kui ühe konkreetse korpuse, kohta on öeldud lihtsalt "reaalarvude hulk". Teiseks. Kuna me vaatleme vektorruumi ainult üle reaalarvude $\mathbb{R}$, siis me ütleme "vektorruum üle reaalarvude $\mathbb{R}$" asemel lihtsalt "vektorruum". Samuti juhime lugeja tähelepanu sellele, et me tähistame reaalarvude ja vektorite liitmist ühtemoodi, nimelt plussmärgiga eristamata omavahel erinevate tehete tähiseid. Näiteks valemis (7.10) esimene liitmine on reaalarvude liitmine ja teine liitmine vektorite liitmine.

Nüüd teeme mõningad järeldused vektorruumi definitsioonist.

Järeldus 7.1. *Vektorruumis on ainult üks nullvektor.*

Tõestus. Aksioomi 2° kohaselt on ühe nullvektori $\vec{0}$ olemasolu tagatud. See aksioom ei võta aga enda peale vastutust, et neid rohkem ei võiks olla. Oletame, et neid on rohkem kui üks. Me hakkame neid võrdlema aksioomiga 2° antud nullvektoriga $\vec{0}$. Olgu teiseks nullvektoriks $\vec{0}'$. Aksioomi 2° kohaselt iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral saame

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}; \quad \vec{x} + \vec{0}' = \vec{x}, \quad \vec{0}' + \vec{x} = \vec{x}.$$

Kuna vektor $\vec{x}$ on viimases valemis suvaline, siis ta kehtib ka $\vec{x} = \vec{0}'$ ja $\vec{x} = \vec{0}$ korral. Viimasest teine ja kolmas annavad

$$\vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}', \quad \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0},$$

millest vasakute poolde võrdsuse tõttu saame $\vec{0}' = \vec{0}$. See näitabki, et vektorruumis on ainult üks nullvektor. ♠

Järeldus 7.2. *Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.*

Tõestus. Tõestuse idee on analoogiline eelmise tõestusega. Oletame, et mingil vektoril $\vec{x} \in \mathbf{V}$ on mitu vastandvektorit. Olgu $\vec{y}, \vec{y}\,' \in \mathbf{V}$ üks selline paar. Valemi (7.4) kohaselt

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}, \quad \vec{y} + \vec{x} = \vec{0}; \quad \vec{x} + \vec{y}\,' = \vec{0}, \quad \vec{y}\,' + \vec{x} = \vec{0}. \tag{7.11}$$

Kasutades järgimööda valemeid (7.2), (7.11) ja (7.3), me saame

$$(\vec{y} + \vec{x}) + \vec{y}\,' = \vec{y} + (\vec{x} + \vec{y}\,') \Longrightarrow \vec{0} + \vec{y}\,' = \vec{y} + \vec{0} \Longrightarrow \vec{y}\,' = \vec{y}. \quad \spadesuit$$

Enne kui tõestame järgmise omaduse, defineerime vektorruumis veel ühe tehte – vektorite lahutamise, kasutades seejuures tuntuid mõisteid – vektorite liitmine ja vektori vastandvektor.

Definitsioon 7.2. *Vektorite* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ *vaheks* $\vec{x} - \vec{y}$ *nimetatakse vektorit*

$$\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-\vec{y}). \tag{7.12}$$

Osutub, et ka vektorite lahutamine on arvuga korrutamisega seotud distributiivselt analoogiliselt valemitega (7.9) ja (7.10).

Järeldus 7.3. *Iga* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ *ja iga* $\xi \in \mathbb{R}$ *korral kehtib*

$$\xi(\vec{x} - \vec{y}) = \xi\vec{x} - (\xi\vec{y}). \tag{7.13}$$

Tõestus. Valemite (7.9), (7.12), (7.2), (7.4) ja (7.3) samm-sammult kasutamine annab

$$\xi(\vec{x} - \vec{y}) + \xi\vec{y} = \xi[(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}] = \xi[(\vec{x} + (-y)) + \vec{y}] =$$

$$= \xi[\vec{x} + ((-\vec{y}) + \vec{y})] = \xi(\vec{x} + \vec{0}) = \xi\vec{x} \Longrightarrow$$

$$\xi\vec{x} = \xi(\vec{x} - \vec{y}) + \xi\vec{y}. \tag{7.14}$$

Viimase abil saame

$$\xi\vec{x} - (\xi\vec{y}) = \xi\vec{x} + [-(\xi\vec{y})] = [\xi(\vec{x} - \vec{y}) + \xi\vec{y}] + [-(\xi\vec{y})] =$$

$$= \xi(\vec{x} - \vec{y}) + [\xi\vec{y} + (-\xi\vec{y})] = \xi(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{0} = \xi(\vec{x} - \vec{y}),$$

millest poolte vahetamise teel saame valemi (7.13). Lugejal palume eelnenud ridadel iga võrdusmärgi kohale kirjutada valem, mida tuleb rakendada. ♠

Järeldus 7.4. *Iga* $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ *ja iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral kehtib*

$$(\xi - \eta)\vec{x} = \xi\vec{x} - (\eta\vec{x}). \tag{7.15}$$

Tõestus. See on analoogiline eelmise omaduse tõestusele. Leiame valemi (7.14) analoogi. Kuna

$$(\xi - \eta)\vec{x} + \eta\vec{x} = [(\xi - \eta) + \eta]\vec{x} = \xi\vec{x},$$

siis

$$\xi\vec{x} = (\xi - \eta)\vec{x} + \eta\vec{x}.$$

Lähtudes valemi (7.15) paremast poolest, viimase abil saame

$$\xi\vec{x} - (\eta\vec{x}) = \xi\vec{x} + (-(\eta\vec{x})) = [(\xi - \eta)\vec{x} + \eta\vec{x}] + (-(\eta\vec{x})) =$$

$$= (\xi - \eta)\vec{x} + [\eta\vec{x} + (-(\eta\vec{x}))] = (\xi - \eta)\vec{x} + \vec{0} = (\xi - \eta)\vec{x}.$$

Siit poolte vahetamisel saame valemi (7.15). ♠

Loodan, et lugeja pole unustanud iga võrdusmärgi kohale kirjutada valemi numbrit, mida kasutatakse. Tehke seda ka allpool.

Järeldus 7.5. *Iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$0\vec{x} = \vec{0}. \tag{7.16}$$

Tõestus. Mistahes fikseeritud $\alpha \in \mathbb{R}$ korral $0 = \alpha - \alpha$. Valemi (7.15) abil saame

$$0\vec{x} = (\alpha - \alpha)\vec{x} = \alpha\vec{x} + (-(\alpha\vec{x})) = \vec{0} \Longrightarrow 0\vec{x} = \vec{0}. \quad ♠$$

Järeldus 7.6. *Iga* $\xi \in \mathbb{R}$ *korral*

$$\xi\vec{0} = \vec{0}. \tag{7.17}$$

Tõestus. Kuna mistahes fikseeritud vektori $\vec{a} \in \mathbf{V}$ korral

$$\vec{0} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a},$$

siis (7.13) abil saame

$$\xi\vec{0} = \xi(\vec{a} - \vec{a}) = \xi\vec{a} - \xi\vec{a} = \xi\vec{a} + (-(\xi\vec{a})) = \vec{0}. \quad \spadesuit$$

Järeldus 7.7. *Iga* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *korral*

$$(-1)\vec{x} = -\vec{x}. \tag{7.18}$$

Tõestus. Omaduses väidetakse, et vektor $(-1)\vec{x}$ on vektori $\vec{x}$ vastandvektor. Valemit (7.4) ja vastandvektori ühesust silmas pidades, on vaja kontrollida, et

$$\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}, \quad (-1)\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}. \tag{7.19}$$

Tõepoolest on see nii, sest

$$\vec{x} + (-1)\vec{x} = 1\vec{x} + (-1)\vec{x} = [1 + (-1)]\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}.$$

Valemi (7.19) teine seos kehtib tänu vektorite liitmise kommutatiivsusele (7.5). $\spadesuit$

Lõpuks toome paar valemit, mis lihtsustavad vektoritega opereerimist. Nimelt

$$\vec{y} = \alpha\vec{x}, \quad \alpha \neq 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{y}, \tag{7.20}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{z} - \vec{y}. \tag{7.21}$$

Toodud valemid kehtivad, sest

$$\vec{x} = 1\vec{x} = (\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha)\vec{x} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\vec{y} \Longleftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{\alpha}\vec{y}$$

ja

$$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} + [\vec{y} + (-\vec{y})] = (\vec{x} + \vec{y}) + (-\vec{y}) = \vec{z} + (-\vec{y}) = \vec{z} - \vec{y}.$$

Valem (7.20) võimaldab vektorit avaldada ja valem (7.21) aga viia võrduses vektorit teisele poole võrdusmärki vastandvektorina.

8. VEKTORRUUMI ALAMRUUM. LINEAARKATE – ALAMRUUMI OLULINE NÄIDE

Olgu $\mathbf{M}$ vektorruumi $\mathbf{V}$ mittetühi alamhulk. Tekib küsimus, kas vektorruumi $\mathbf{V}$ ehitus mingil moel kandub ka ta alamhulgale $\mathbf{M}$ üle. Reeglina see paraku nii ei ole. Osutub, et mõne alamhulga korral midagi seesugust ka aset leiab.

Definitsioon 8.1. *Me nimetame vektorruumi* $\mathbf{V}$ *mittetühja alamhulka* $\mathbf{M}$ *tema alamruumiks, kui* $\mathbf{M}$ *on* $\mathbf{V}$ *tehete – liitmise ja arvuga korrutamise – suhtes vektorruum* (*üle reaalarvude* $\mathbb{R}$).

Teeme nüüd selgeks, mida tähendab, et vektorruumi $\mathbf{V}$ tehted on ka tema mittetühja alamhulga $\mathbf{M}$ teheteks. Niisiis meie käsutuses on $\mathbf{V}$ tehted, s.o. (7.1) ja (7.6) kohaselt me oskame

1) iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ korral määrata summa $\vec{x}+\vec{y}$, mis (rõhutame) kuulub samasse vektorruumi $\mathbf{V}$;

2) iga $\xi \in \mathbb{R}$ ja iga $\vec{x} \in \mathbf{V}$ korral $\xi\vec{x}$ kuulub ka vektorruumi $\mathbf{V}$.

Seesama liitmine ja arvuga korrutamine antuna vektorruumis $\mathbf{V}$ on teheteks tema mittetühjal alamhulgal $\mathbf{M}$, kui

1) iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}$ korral summa $\vec{x}+\vec{y}$ kuulub alamhulka $\mathbf{M}$;

2) iga $\xi \in \mathbb{R}$ ja iga $\vec{x} \in \mathbf{M}$ korral $\xi\vec{x}$ ka kuulub alamhulka $\mathbf{M}$.

Oluline on ka, et $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$, sest tänu sellele saame mittetühja alamhulga $\mathbf{M}$ vektoreid liita ja arvuga korrutada. On selge, et iga alamhulga $\mathbf{M}$ korral tingimused 1) ja 2) ei kehti.

Teoreem 8.1. *Vektorruumi* $\mathbf{V}$ *mittetühi alamhulk* $\mathbf{M}$ *on tema alamruum siis ja ainult siis, kui vektorruumi* $\mathbf{V}$ *tehted on alamhulga* $\mathbf{M}$ *teheteks.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Oletame, et alamhulk $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$ on vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruum. Seega definitsiooni 8.1 kohaselt on $\mathbf{M}$ vektorruumi $\mathbf{V}$ tehete suhtes omakorda vektorruum. Seega $\mathbf{M}$ jaoks kehtib vektorruumi definitsioon 7.1, mis praegu näeb välja nii.

I. Vektorruumi $\mathbf{V}$ liitmine (7.1) indutseerib liitmise tema alamhulgal $\mathbf{M}$, s.o.

$$+ : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x}+\vec{y} \in \mathbf{M}, \tag{8.1}$$

kusjuures kehtivad neli aksioomi:

1° $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{M} \Longrightarrow (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$,

2° $\exists\, \vec{0} \in \mathbf{M}, \ \ \forall\, \vec{x} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \vec{x}+\vec{0} = \vec{x}, \quad \vec{0}+\vec{x} = \vec{x}$,

3° $\forall\, \vec{x} \in \mathbf{M}, \ \ \exists\, (-\vec{x}) \in \mathbf{M} \Longrightarrow \vec{x}+(-\vec{x}) = \vec{0}, \quad (-\vec{x})+\vec{x} = \vec{0}$,

4° $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$.

II. Vektorruumi V arvuga korrutamine (7.5) indutseerib arvuga korrutamise tema alamhulgal $\mathbf{M}$, s.o.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}; \quad (\xi, \vec{x}) \longmapsto \xi\vec{x}, \tag{8.2}$$

kusjuures kehtib kaks aksioomi:

5° $\forall\, \vec{x} \in \mathbf{M} \Longrightarrow 1\vec{x} = \vec{x}$,

6° $\forall\, \xi, \eta, \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbf{M} \Longrightarrow (\xi\eta)\vec{x} = \xi(\eta\vec{x})$.

III. Kehtivad distributiivsused:

7° $\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \xi(\vec{x}+\vec{y}) = \xi\vec{x}+\xi\vec{y})$,

8° $\forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbf{M} \Longrightarrow (\xi+\eta)\vec{x} = \xi\vec{x}+\eta\vec{x}$.

Tõestuseks on meil vaja näidata, et vektorruumi $\mathbf{V}$ tehted on tema alamruumi $\mathbf{M}$ teheteks. See on tõesti nii, sest eelduse tõttu kehtivad (8.1) ja (8.2). Muuseas tarvilikkuse tõestamisel aksioomide $1° - 8°$ kehtivust me ei kasutanud üldse.

Piisavus. Nüüd me eeldame, et vektorruumi $\mathbf{V}$ tehted on ka teheteks tema mittetühjal alamhulgal $\mathbf{M}$. Seega kehtivad (8.1) ja (8.2). Vaja on veel näidata, et kehtivad aksioomid $1°-8°$. Aksioomide $1°$, $4°$ ja $5°-8°$ kehtivus on ilmne, sest, võttes vektorid vektorruumi $\mathbf{V}$ alamhulgast $\mathbf{M}$, on need vektorid ka vektorruumi $\mathbf{V}$ vektorid. Need aga (7.1) ja (7.6) tõttu loetletud aksioome rahuldavad. Siin oli väga oluline, et alamhulgal $\mathbf{M}$ antud tehted on vektorruumi $\mathbf{V}$ tehete poolt indutseeritud. Tuleb veel kontrollida $\mathbf{M}$ jaoks aksioomide $2°$ ja $3°$ kehtivust. Kuna iga $\vec{x} \in \mathbf{M}$ korral võime öelda, et ka $\vec{x} \in \mathbf{V}$, aga $\mathbf{V}$ on ju vektorruum, siis temas leidub nullvektor $\vec{0}$, mis kuulub vektorruumi $\mathbf{V}$ ning

$$\vec{x}+\vec{0} = \vec{x}, \quad \vec{0}+\vec{x} = \vec{x}.$$

Selleks et vektorruumi $\mathbf{V}$ nullvektor oleks ka alamhulga $\mathbf{M}$ nullvektoriks, tuleb näidata, et $\vec{0}$ kuulub ka alamhulka $\mathbf{M}$. See on tõepoolest nii, sest iga $\vec{x} \in \mathbf{M}$ korral ka $\vec{x} \in \mathbf{V}$ ning (7.16) tõttu $\vec{0} = 0\vec{x}$. Nüüd eelduse (8.2) tõttu

$$0\vec{x} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \vec{0} \in \mathbf{M}.$$

Seega vektorruumi $\mathbf{V}$ nullvektor on ka alamhulga $\mathbf{M}$ nullvekor.

Lõpuks tuleb veel kontrollida aksioomi 3° täidetust. Siin on sama probleem, mis aksioomi 2° korral. Kui võtame $\vec{x} \in \mathbf{M}$, siis $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$ tõttu ka $\vec{x} \in \mathbf{V}$. Kuna $\mathbf{V}$ on vektorruum, siis leidub vastandvektor $-\vec{x} \in \mathbf{V}$, et

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}, \quad (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}.$$

See vektor $-\vec{x}$ on vektori $\vec{x}$ vastandvektor alamhulgas $\mathbf{M}$, siis kui näitame $-\vec{x} \in \mathbf{M}$. See on tõepoolest nii, kuna valemi (7.18) tõttu $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$. Et $\vec{x} \in \mathbf{M}$, siis (8.2) tõttu $(-1)\vec{x} \in \mathbf{M}$, millest $-\vec{x} \in \mathbf{M}$. Sellega olemegi näidanud, et $\mathbf{M}$ on alamruum. ♠

Nimetatud tarvilik ja piisav teoreem annab suure eelise, et kontrollida, kas mittetühi alamhuk $\mathbf{M}$ on vektorruumi $\mathbf{V}$ alamruum. Selleks on vaja kontrollida ainult kahte tingimust (8.1) ja (8.2).

Järeldus 8.1. *Tingimused*

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{M}, \tag{8.3}$$

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{x} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \xi\vec{x} \in \mathbf{M} \tag{8.4}$$

on samaväärsed tingimusega

$$\forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M} \Longrightarrow \xi\vec{x} + \eta\vec{y} \in \mathbf{M}. \tag{8.5}$$

Tõestus. Kehtigu tingimused (8.3) ja (8.4), siis iga $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}$ korral (8.4) tõttu $\xi\vec{y}, \eta\vec{y} \in \mathbf{M}$ ning nüüd (8.4) tõttu $\xi\vec{x} + \eta\vec{y} \in \mathbf{M}$. Seega (8.5) kehtib.

Vastupidi. Kehtigu tingimus (8.5), siis iga $\xi \in \mathbb{R}$ ja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}$ korral $\vec{x} + \vec{y} = 1\vec{x} + 1\vec{y} \in \mathbf{M}$ ja $\xi\vec{x} = \xi\vec{x} + \vec{0} = \xi\vec{x} + 0\vec{y} \in \mathbf{M}$. ♠

Toome kaks triviaalset alamruumi näidet.

Näide 1. Vektorruum $\mathbf{V}$ on iseenda alamruum, sest $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}$ ja $\mathbf{V} \neq \emptyset$ ning alamhulk $\mathbf{V}$ on vektorruumi $\mathbf{V}$ tehete suhtes vektorruum.

Näide 2. Vektorruumi nullvektorist koosnev alamhulk $\{\vec{0}\}$ on tema alamruum, sest mistahes kahe arvu $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ja mistahes kahe vektori $\vec{x} = \vec{0}$ ja $\vec{y} = \vec{0}$ korral vaadeldavast alamhulgast kehtib (8.5), sest

$$\xi\vec{0} + \eta\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Seega $\{\vec{0}\}$ on vektorruumi alamruum.

Teoreem 8.2. *Vektorruumi* $\mathbf{V}$ *mistahes kahe alamruumi* $\mathbf{M}_1$ *ja* $\mathbf{M}_2$ *ühisosa* $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ *on samuti vektorruumi* $\mathbf{V}$ *alamruum.*

Tõestus. Kõigepealt me võime öelda, et $i = 1, 2$ korral

$$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{M}_i \subset \mathbf{V} \Longrightarrow \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \subset \mathbf{V}$$

ja

$$\vec{0} \in \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \Longrightarrow \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \neq \emptyset.$$

Jääb veel kontrollida tingimust (8.5). Et $\mathbf{M}_1$ ja $\mathbf{M}_2$ on alamruumid, siis kehtib (8.5), s.o.

$$\forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}_i \Longrightarrow \xi\vec{x} + \eta\vec{y} \in \mathbf{M}_i,$$

mille abil

$$\forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 \Longrightarrow \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}_i \Longrightarrow$$

$$\xi\vec{x} + \eta\vec{y} \in \mathbf{M}_i \Longrightarrow \xi\vec{x} + \eta\vec{y} \in \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2.$$

Järelikult alamruumide lõige on alamruum. ♠

Lõpuks anname ühe olulise võtte alamruumi moodustamiseks.

Definitsioon 8.2. *Olgu* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ *vektorruumi* $\mathbf{V}$ *vektorid. Hulka*

$$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m) := \{\vec{x} = \xi_1\vec{a}_1 + \xi_2\vec{a}_2 + \ldots + \xi_m\vec{a}_m |\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}\}$$

nimetatakse lineaarkatteks moodustajatega $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$.

Sellest definitsioonist näeme, et lineaarkatte moodustajad kuuluvad temasse, sest iga $i \in \mathbb{N}_m$ korral

$$\vec{a}_i = 0\,\vec{a}_1 + \ldots + 0\,\vec{a}_{i-1} + 1\vec{a}_i + 0\,\vec{a}_{i+1} + \ldots + 0\vec{a}_m.$$

Lineaarkatte definitsiooni kohalselt seega $\vec{a}_i \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$.

Teoreem 8.3. *Lineaarkate* $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$*, kus* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbf{V}$*, on vektorruumi* $\mathbf{V}$ *alamruum.*

Tõestus. Lineaarkatte definitsioonist 8.2 teame, et tema moodustajad $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbf{V}$. Nüüd valemi (7.1) ja (7.6) tõttu lineaarkatte $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$ iga vektor $\vec{x} = \xi_1\vec{a}_1 + \xi_2\vec{a}_2 + \ldots + \xi_m\vec{a}_m$ on vektorruumi

V vektor. Seega $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m) \subset \mathbf{V}$. Lineaarkate on ka mittetühi hulk, sest moodustajad kuuluvad temasse. Nüüd tuleb veel kontrollida tingimust (8.5). Vaja on näidata, et mistahes kahe reaalarvu $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ ja mistahes kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$ korral ka $\xi\vec{x}+\eta\vec{y} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m)$. See on tõepoolest nii. Lineaarkatte vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on avaldatavad kujul

$$\vec{x} = \xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_m\vec{a}_m, \quad \vec{y} = \eta_1\vec{a}_1 + \ldots + \eta_m\vec{a}_m.$$

Kuna

$$\xi\vec{x} + \eta\vec{y} = \xi(\xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_m\vec{a}_m) + \eta(\eta_1\vec{a}_1 + \ldots + \eta_m\vec{a}_m) = [\xi(\xi_1\vec{a}_1)+$$

$$+ \ldots + \xi(\xi_m\vec{a}_m)] + [\eta(\eta_1\vec{a}_1) + \ldots + \eta(\eta_m\vec{a}_m)] = [(\xi\xi_1)\vec{a}_1 + \ldots + (\xi\xi_m)\vec{a}_m]+$$

$$+[(\eta\eta_1)\vec{a}_1 + \ldots + (\eta\eta_m)\vec{a}_m] = [(\xi\xi_1)\vec{a}_1 + (\eta\eta_1)\vec{a}_1] + \ldots +$$

$$+[(\xi\xi_m)\vec{a}_m + (\eta\eta)_m)\vec{a}_m] = (\xi\xi_1 + \eta\eta_1)\vec{a}_1 + \ldots + (\xi\xi_m + \eta\eta_m)\vec{a}_m,$$

siis (8.5) on täidetud. ♠

9. VEKTORSÜSTEEMI LINEAARNE SÕLTUVUS JA SÕLTUMATUS

Vektorsüsteemi lineaarne sõltuvus ja lineaarne sõltumatus on fundamentaalse tähtsusega mõisted. Ta võimaldab meil sisse tuua sellised tähtsad mõisted nagu vektorruumi baas ja selle kaudu vektori koordinaadid.

Võtame vektorruumist teatav arv vektoreid, näiteks $m \in \mathbb{N}$ tükki. Seejuures pole keelatud, et ühte ja sama vektorit on võetud mitu korda. Kuid tähtis on nende vektorite andmisel järjestus. Kui need tingimused on täidetud, siis me ütleme, et meil on antud *vektorruumi* $\mathbf{V}$ *vektorsüsteem.* Vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in \mathbf{V}$ abil moodustatud vektorsüsteemi tähistame järgmiselt

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}. \tag{9.1}$$

Vektorite arvult kõige lühem vektorsüsteem on ühevektoriline. Moodustame vektorsüsteemi (9.1) abil vektorvõrrandi

$$\xi_1\vec{a}_1 + \xi_2\vec{a}_2 + \ldots + \xi_m\vec{a}_m = \vec{0}, \tag{9.2}$$

kus $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ on selle võrrandi otsitavad. Sellel võrrandil on alati olemas üks lahend. Reaalarvude komplekt

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \ldots, \xi_m = 0 \tag{9.3}$$

valemi (7.16) tõttu rahuldab võrrandit (9.2). Lahendit (9.3) nimetatakse võrrandi (9.2) *null-lahendiks.* Kas null-lahend on võrrandi (9.2) ainus lahend, see sõltub vektorsüsteemi (9.1) vektoritest.

Definitsioon 9.1. *Vektorsüsteemi* (9.1) *nimetame lineaarselt sõltuvaks* (*lineaarselt sõltumatuks*) *kui võrrandil* (9.2) *on enam kui üks lahend* (*ainult üks lahend*).

Definitsioonis öeldut võib sõnastada ka järgmiselt. Kui võrrandil (9.2) on lahendiks ainult null-lahend (9.3), siis vektorsüsteem (9.1) on lineaarselt sõltumatu. Kui võrrandil (9.2) lisaks null-lahendile on veel teine lahend – null-lahendist erinev lahend –, siis on vektorsüsteem (9.1) lineaarselt sõltuv.

Alljärgnevas me leiame täiendavaid kriteeriume lineaarse sõltuvuse ja lineaarse sõltumatuse hindamiseks lisaks definitsioonile 9.1. Need kriteeriumid sõltuvad vektorite arvust vektorsüsteemis (9.1). Ühed kriteeriumid saame, kui vektorsüsteemis on ainult üks vektor, ja teised kriteeriumid, kui enam kui üks vektor.

Teoreem 9.1. *Ühevektoriline vektorsüsteem* $\{\vec{a}\}$ *on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui* $\vec{a}$ *on nullvektor, s.o.* $\vec{a} = \vec{0}$.

Tõestus. *Tarvilikkus.* Oletame, et vektorsüsteem $\vec{a}$ on lineaarselt sõltuv. Järelikult võrrandil

$$\xi\vec{a} = \vec{0}$$

on enam kui üks lahend. Seetõttu leidub $\alpha \in \mathbb{R}$, mis on nullist erinev, et $\alpha\vec{a} = \vec{0}$. Siit (7.20) ja (7.17) abil saame

$$\alpha\vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{a} = \frac{1}{\alpha}\vec{0} = \vec{0},$$

mida oligi vaja näidata.

Piisavus. Eeldame, et $\vec{a} = \vec{0}$. Definitsiooni 9.1 kohaselt tuleb uurida võrrandi

$$\xi\vec{0} = \vec{0} \tag{9.4}$$

lahendite arvu. Tänu valemile (7.17), kehtib viimane võrrand iga reaalarvu korral. Järelikult võrrandil (9.4) on enam kui üks lahend, mistõttu vektorsüsteem $\{\vec{0}\}$ on lineaarselt sõltuv. ♠.

Järeldus 9.1. *Ühevektoriline vektorsüsteem* $\vec{a}$ *on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor* $\vec{a}$ *ei ole nullvektor, s.o.* $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tõestuse jätame lugeja hooleks. Kasutada vastuväitelist tõestust ja teoreemi 9.1.

Järgnevas me vaatleme vektorsüsteemi, milles on enam kui üks vektor.

Teoreem 9.2. *Vektorsüsteem*

$$\{\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2, \quad \ldots, \quad \vec{a}_m\}, \tag{9.5}$$

milles on vähemalt kaks vektorit, s.o. $m \geq 2$, *on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi mingi vektor on avaldatav tema ülejäänud vektorite kaudu.*

Tõestus. *Piisavus.* Oletame, et vektorsüsteemi (9.5) üks vektoritest on avaldatav tema ülejäänud vektorite kaudu. See on põhimõtteliselt võifmalik, sest vektorsüsteemis on vähemalt kaks vektorit. Tõestust on lihtsam kirja panna, kui avalduvaks vektoriks on vektorsüsteemi viimane vektor $\vec{a}_m$. (Kui avalduvaks vektoriks ei ole vektorsüsteemi viimane vektor, siis tuleb käituda analoogiliselt järgnevaga tõestusega.) Et vektor $\vec{a}_m$ avaldub ülejäänud vektorite kaudu, siis leidavad reaalarvud $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, et

$$\vec{a}_m = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}$$

ehk

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} = \vec{a}_m + \vec{0},$$

millest valemi (7.21) abil saame

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}) - \vec{a}_m = \vec{0}$$

ehk

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} + (-1)\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Siit näeme, et reaalarvud

$$\xi_1 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \xi_{m-1} = \alpha_{m-1}, \quad \xi_m = -1 \neq 0$$

on vektorvõrrandi

$$\xi_1\vec{a}_1 + \xi_2\vec{a}_2 + \ldots + \xi_m\vec{a}_m = \vec{0} \tag{9.6}$$

null-lahendist erinev lahend. Seega vektorsüsteem (9.5) on definitsiooni 9.1 kohaselt lineaarselt sõltuv.

Tarvilikkus. Oletame, et vektorsüsteem (9.5) on lineaarselt sõltuv. Seega võrrandil (9.6) leidub null-lahendist erinev lahend, s.t. leiduvad reaalarvud

$$\xi_1 = \alpha_1, \quad \xi_2 = \alpha_2, \ldots, \quad \xi_m = \alpha_m,$$

mis ei ole korraga nullid ja mis on vektorsüsteemi (9.6) lahendiks. Viimane tähendab, et

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m = \vec{0}. \tag{9.7}$$

Oletame, et nullist on erinev näiteks α_m, s.o. $\alpha_m \neq 0$. Viimasest avaldisest (9.7) saab avaldada vektori $\vec{a}_m$. Tõepoolest, sest (7.21) kohaselt

$$\vec{0} - \alpha_m\vec{a}_m = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}$$

ehk

$$(-\alpha_m)\vec{a}_{m-1} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}.$$

Siit, arvestades samm-sammult valemeid (7.20), (7.9) ja (7.8), saame

$$\vec{a}_m = \Big(-\frac{1}{\alpha_m}\Big)[\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}] =$$

$$= \Big(-\frac{1}{\alpha_m}\Big)(\alpha_1\vec{a}_1) + \Big(-\frac{1}{\alpha_m}\Big)(\alpha_2\vec{a}_2) + \ldots + \Big(-\frac{1}{\alpha_m}\Big)(\alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}) =$$

$$= \Big(-\frac{\alpha_1}{\alpha_m}\Big)\vec{a}_1 + \Big(-\frac{\alpha_2}{\alpha_m}\Big)\vec{a}_2 + \ldots + \Big(-\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}\Big)\vec{a}_{m-1}.$$

Näemegi, et vektorsüsteemi üks vektoritest, praegu $\vec{a}_m$, on avaldatav vektorsüsteemi ülejäänud vektorite kaudu. ♠

Järeldus 9.2. *Vektorsüsteem* $\{\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$, *kus* $m \geq 2$, *on lineaarselt sõltumatu siis ainult siis, kui sellest vektorsüsteemist ei saa avaldada ühtegi vektorit selle vektorsüsteemi ülejäänud vektorite kaudu.*

Tõestuse oma lihtsuse tõttu jätame lugejale.

Teoreem 9.3. *Vektorsüsteem, millel on lineaarselt sõltuv alamsüsteem, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus. Olgu lihtsuse mõttes vektorsüsteemi

$$\{\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_s; \ \vec{a}_{s+1}, \ldots, \ \vec{a}_m\}$$

alamsüsteem $\{\vec{a}_1, \ \ldots, \ \vec{a}_s\}$ lineaarselt sõltuv. Seega võrrandil

$$\xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_s\vec{a}_s = \vec{0}$$

leidub null-lahendist erinev lahend, s.o. leiduvad arvud $\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots \ \ \alpha_s$, millede seas leidub vähemalt üks nullist erinev, et

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_s\vec{a}_s = \vec{0}. \tag{9.8}$$

Lähtevektorsüsteemi lineaarse sõltuvuse uurimiseks tuleb näidata, et võrrandil

$$\xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_s\vec{a}_s + \xi_{s+1}\vec{a}_{s+1} + \ldots + \xi_m\vec{a}_m = \vec{0} \tag{9.9}$$

leidub null-lahendist erinev lahend. Selleks lahendiks on ilmselt

$$\xi_1 = \alpha_1, \ \ \ldots, \ \ \xi_s = \alpha_s; \ \ \xi_{s+1} = 0, \ \ \ldots, \ \ \xi_m = 0,$$

sest, asendades nüüd võrrandi (9.9) vasakusse poolde ja kasutades valemeid (9.8) ja (7.16), saame

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \ldots + \alpha_s\alpha_s\vec{a}_s) + (0\,\vec{a}_{s+1} + \ldots + 0\vec{a}_m) = \vec{0} + (\vec{0} + \ldots + \vec{0}) = \vec{0}. \quad \spadesuit$$

Järeldus 9.3. *Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteemi kõik alamsüsteemid on lineaarselt sõltumatud.*

Tõestus. Kui lineaarselt sõltumatul vektorsüsteemil peaks leiduma lineaarselt sõltuv alamsüsteem, siis teoreemi 9.3 põhjal on vektorsüsteem lineaarselt sõltuv. Saime vastuolu. ♠

Järeldus 9.4. *Vektorsüsteem, mis sisaldab nullvektorit, on lineaarselt sõltuv.*

Tõestus järeldub teoreemidest 9.1 ja 9.3. ♠

Järeldus 9.5. *Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem ei sisalda nullvektorit.*

Tõestus. Ilmne. ♠

10. VEKTORRUUMI BAAS. VEKTORI KOORDINAADID. NENDE TEISENEMISE VALEMID ÜLEMINEKUL UUELE BAASILE

Käesolevas paragrahvis näitame, et teatavate vektorruumide korral arvutamine vektoritega taandub arvutamisele reaalarvudega. Viimastega arvutamine on aga meile hästi tuttav.

Definitsioon 10.1. *Vektorruumi* **V** *vektoritest moodustatud vektorsüsteemi*

$$\{\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n\} \tag{10.1}$$

nimetatakse tema baasiks, kui see vektorsüsteem on esiteks lineaarselt sõltumatu ja teiseks vektorruumi **V** *iga vektor avaldub selle vektorsüsteemi vektorite kaudu.*

Nagu öeldud, avaldub iga vektor $\vec{x}$ vektorsüsteemi (10.1) vektorite kaudu. See avaldis peab oleme selline, kus kasutatakse vektorite liitmist ja vektori korrutamist arvuga. Muud võimalust vektorruumi definitsiooni kohaselt ei ole. Öeldu põhjal

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \tag{10.2}$$

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et viimases avaldises me võrdusmärgist paremal pool kordajate tähistamiseks baasivektorite juures kasutame sama põhitähte, mis on avaldataval vektoril, kuid varustatuna indeksiga: i-nda baasivektori juures oleva kordaja indeks on i.

Baasi definitsioonist ei järeldu, et iga vektorruum peab omama baasi. Kui vektorruumil on baas, siis on üsna loomulik, et see baas ei ole ainus. Tekib loomulik küsimus, kas kuidagi on seotud vektorite arv erinevates baasides. Järgmine teoreem, mille anname tõestuseta, toob asjasse selgust.

Teoreem 10.1. *Vektorruumi kõikides baasides on sama palju vektoreid.*

Definitsioon 10.2. *Vektorruumi, millel puuduvad baasid, nimetatakse lõpmatumõõtmeliseks ehk lõpmatudimensionaalseks vektorruumiks.*

Definitsioon 10.3. *Vektorruumi, millel on baas(id) olemas, nimetatakse lõplikumõõtmeliseks ehk lõplikudimensionaalseks vektorruumiks. Vektorite arvu baasis nimetatakse vektorruumi mõõtmeks ehk dimensiooniks.*

Teoreemi 10.1 kohaselt vektorruumi mõõtme definitsioon on korrektne, sest mõõde ei sõltu baasi valikust. Järgnevas n-mõõtmelise vektorruumi $\mathbf{V}$ mõõdet tähistame $dim\mathbf{V}$ ja vektorruumi $\mathbf{V}$ ennast täpsemalt $\mathbf{V}_n$ abil.

Definitsioon 10.4. *Kordajaid* $x_1,\ x_2,\ldots,x_n$ *avaldises* (10.2) *nimetatakse vektori* $\vec{x}$ *koordinaatideks baasil* $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$.

Teoreem 10.2. *Vektori koordinaadid igal baasil määratakse üheselt.*

Tõestus. Tõestame teoreemi vastuväiteliselt. Olgu $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ldots,\ \vec{e}_n\}$ vektorruumi $\mathbf{V}_n$ vabalt võetud baas. Oletame, et vektoril $\vec{x}\in\mathbf{V}_n$ on mitmed koordinaadid. Hakkame neid koordinaatide seeriaid paarikaupa võrdlema. Olgu vektoril $\vec{x}$ ühed koordinaadid $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ja teised $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ldots,\ \bar{x}_n$. Meie käsutuses on valemi (10.2) tõttu avaldised

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n,\quad \vec{x}=\bar{x}_1\vec{e}_1+\bar{x}_2\vec{e}_2+\ldots+\bar{x}_n\vec{e}_n. \tag{10.3}$$

Kuna

$$\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}\Longrightarrow\vec{x}+(-1)\vec{x}=\vec{0}\Longrightarrow$$

$$(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)+(-1)(\bar{x}_1\vec{e}_1+\bar{x}_2\vec{e}_2+\ldots+\bar{x}_n\vec{e}_n)=\vec{0}\Longrightarrow$$

$$(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ldots+x_n\vec{e}_n)+[(-\bar{x}_1)\vec{e}_1+(-\bar{x}_2)\vec{e}_2+\ldots+(-\bar{x}_n)\vec{e}_n]=\vec{0}\Longrightarrow$$

$$[x_1\vec{e}_1+(-\bar{x}_1)\vec{e}_1]+[x_2\vec{e}_2+(-\bar{x}_2\vec{e}_2)]+\ldots+[x_n\vec{e}_n+(-\bar{x}_n)\vec{e}_n]=\vec{0}\Longrightarrow$$

$$(x_1-\bar{x}_1)\vec{e}_1+(x_2-\bar{x}_2)\vec{e}_2+\ldots+(x_n-\bar{x}_n)\vec{e}_n=\vec{0}.$$

Viimasest näeme, et

$$\xi_1=x_1-\bar{x}_1,\quad \xi_2=x_2-\bar{x}_2,\quad \ldots,\quad \xi_n=x_n-\bar{x}_n$$

on võrrandi

$$\xi_1\vec{e}_1+\xi_2\vec{e}_2+\ldots+\xi_n\vec{e}_n=\vec{0}$$

lahendiks. Kuna baas kui vektorsüsteem on lineaarselt sõltumatu, siis viimasel võrrandil on ainult null-lahend. Seega

$$x_1-\bar{x}_1=0,\quad x_2-\bar{x}_2=0,\quad \ldots,\quad x_n-\bar{x}_n=0\Longrightarrow$$

$$x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad \ldots, \quad x_n = \bar{x}_n.$$

Sellega vektori koordinaatide ühesus antud baasil on tõestatud. ♠

Näide. Kuna valemite (7.7) ja (7.16) tõttu

$$\vec{0} = 0\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + \ldots + 0\,\vec{e}_n \tag{10.4}$$

ja

$$\vec{e}_i = 0\vec{e}_1 + \ldots + 0\,\vec{e}_{i-1} + 1\vec{e}_i + 0\,\vec{e}_{i+1} + \ldots + 0\,\vec{e}_n,$$

siis koordinaatide definitsiooni 10.1 kohaselt on nullvektori kõik koordinaadid nullid ja ka baasivektori $\vec{e}_i$ kõik koordinaadid on nullid, v.a. i-s, mis on võrdne ühega. Avaldisest (10.4) näeme, et see kehtib iga baasi korral. Seega nullvektori koordinaadid on igal baasil nullid. Üldiselt võib arvata, et vektori koordinaadid sõltuvad baasi valikust. Vektorit $\vec{x}$ koordinaatidega $x_1, \; x_2, \ldots, x_n$ tähistatakse lisaks valemile (10.2) ka järgmiselt

$$\vec{x} = (x_1, \;\; x_2, \ldots, x_n).$$

Viimast tähistust saame kasutada siis, kui tekstist on selge, millisel baasil vektori koordinaadid on leitud. Selle tähise korral ei paista see ju välja.

Teoreem 10.3. *Vektorite liitmisel, lahutamisel ja vektori arvuga korrutamisel tuleb koordinaadid vastavalt liita, lahutada ja sama arvuga korrutada.*

Tõestus. Olgu nüüd järgnevas vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$ koordinaadid baasil $\{\vec{e}_1, \;\; \vec{e}_2, \ldots, \;\; \vec{e}_n\}$ vastavalt tähistatud $x_1, \;\; x_2, \ldots, \;\; x_n$ ja $y_1, \;\; y_2, \ldots, \;\; y_n$. Seega (10.2) kohaselt

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n,$$

millest

$$\vec{x} \pm \vec{y} = \vec{x} + (\pm 1)\vec{y} =$$

$$= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) + (\pm 1)(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n) =$$

$$= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) + [(\pm y_1)\vec{e}_1 + (\pm y_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\pm y_n)\vec{e}_n] =$$

$$= [x_1\vec{e}_1 + (\pm y_1)\vec{e}_1] + [x_2\vec{e}_2 + (\pm y_2)\vec{e}_2] + \ldots + [x_n\vec{e}_n + (\pm y_n\vec{e}_n)] =$$

$$= (x_1 \pm y_1)\vec{e}_1 + (x_2 \pm y_2)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n \pm y_n)\vec{e}_n.$$

Oleme saanud vektori $\vec{x} \pm \vec{y}$ avaldise baasi $\{\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ kaudu. Definitsiooni 10.4 kohaselt vektori $\vec{x} \pm \vec{y}$ koordinaatideks on

$$x_1 \pm y_1, \quad x_2 \pm y_2, \ldots, \quad x_n \pm y_n.$$

Seega

$$\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1 \pm y_1, \ \ x_2 \pm y_2, \ldots, \ \ x_n \pm y_n).$$

Leiame nüüd vektori $\xi\vec{x}$ avaldise baasi kaudu. Saame

$$\xi\vec{x} = \xi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = (\xi x_1)\vec{e}_1 + (\xi x_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\xi x_n)\vec{e}_n,$$

millest

$$\xi\vec{x} = (\xi x_1, \ \ \xi x_2, \ \ \ldots \ \ , \ \xi x_n). \quad \spadesuit$$

Viimane teoreem koos teoreemiga 10.2 on fundamentaalse tähtsusega. Nimelt tehted, mis me teeme vektoritega tuleb teha ka koordinaatidega, s.o. reaalarvudega.

Kahjuks sellist võimalust ei ole lõpmatumõõtmeliste vektorruumide korral, sest pole baase, seega ka koordinaate.

Lõpuks leiame vektori koordinaatide teisenemise valemid üleminekul ühelt baasilt teisele.

Olgu $\{\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ldots, \ \vec{e}_n\}$ ja $\{\vec{e}\,'_1, \ \vec{e}\,'_2, \ldots, \ \vec{e}\,'_n\}$ vektorruumi $\mathbf{V}_n$ mistahes kaks baasi. Üleminekut baasilt $\{\vec{e}_1, \ \vec{e}_2, \ldots, \ \vec{e}_n\}$ baasile $\{\vec{e}\,'_1, \ \vec{e}\,'_2, \ldots, \ \vec{e}\,'_n\}$ sümboolselt tähistame

$$\{\vec{e}_1, \ \ \vec{e}_2, \ldots, \ \ \vec{e}_n\} \longrightarrow \{\vec{e}\,'_1, \ \ \vec{e}\,'_2, \ldots, \ \ \vec{e}\,'_n\}.$$

Nimetame kokkuleppeliselt esimest baasi *vanaks baasiks* ja teist baasi *uueks baasiks.* Kuna iga vektori saab avaldada baasi kaudu, siis saab mistahes vektori $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$ avaldada nii vana kui uue baasi kaudu. Meil on õigus kirjutada

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n, \quad \vec{x} = x'_1\vec{e}\,'_1 + x'_2\vec{e}\,'_2 + \ldots + x'_n\vec{e}\,'_n. \tag{10.5}$$

Nagu näeme oleme vektori $\vec{x}$ koordinaate vanal ja uuel baasil vastavalt tähistanud $(x_1, \ \ x_2, \ldots, \ \ x_n)$ ja $(x'_1, \ \ x'_2, \ldots, \ \ x'_n)$ abil. Meie tahtmine on selgitada, kuidas on seotud vektori $\vec{x}$ vanad ja uued koordinaadid omavahel. Selleks on vaja uut baasi kirjeldada vana baasi kaudu. Nagu teame on iga vektor avaldatav baasi kaudu. Sellest tulenavalt on ka uue baasi iga vektor avaldatav vana baasi kaudu. Saame kirjutada:

$$\begin{aligned}
\vec{e}\,'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n,\\
\vec{e}\,'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{e}\,'_i &= a_{1i}\vec{e}_1 + a_{2i}\vec{e}_2 + \ldots + a_{ni}\vec{e}_{ni},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\vec{e}\,'_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Nendes valemites kordajad paremal pool võrdusmärki on vaadeldava vektori koordinaadid. Näiteks vektori $\vec{e}'_i$ avaldises paremal poool kordajad a_{1i}, $a_{2i}, \ldots,$ a_{ni} on tema koordinaadid vanal baasil. Teine indeks, praegu i, näitab mitmenda vektori koordinaatidega on tegemist. Siin toimuva paremaks jälgimiseks moodustame valemi (10.6) abil n-järku maatriksi (n on vektorruumi mõõde): vektori $\vec{e}'_i$ koordinaatidest moodustame maatriksi i-nda veeru. Kuna i muutub hulgas $\mathbb{N}_n$, siis saamegi selle maatriksi. Tähistades seda maatriksit A abil, saame

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{10.7}$$

Seda maatriksit A nimetatakse *baasiteisenduse maatriksiks üleminekul vanalt baasilt uuele baasile.* Teisendame valemis (10.5) teist avaldist nii, et saaks seal esimesega võrrelda. Seejuures kasutame baasiteisenduse valemeid (10.6). Me saame

$$\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \ldots + x'_n\vec{e}'_n = x'_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n) +$$

$$+x'_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n) + \ldots + x'_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n) =$$
$$= [(x'_1a_{11})\vec{e}_1 + (x'_1a_{21})\vec{e}_2 + \ldots + (x'_1a_{n1})\vec{e}_n] + [(x'_2a_{12})\vec{e}_1 + (x'_2a_{22})\vec{e}_2 + \ldots +$$
$$+(x'_2a_{n2})\vec{e}_n] + \ldots + [(x'_na_{1n})\vec{e}_1 + (x'_na_{2n})\vec{e}_2 + \ldots + (x'_na_{nn})\vec{e}_n] =$$
$$= (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n)\vec{e}_1 + (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots +$$

$$+a_{2n}x'_n)\vec{e}_2 + \ldots + (a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n)\vec{e}_n.$$

Oleme saanud vektori $\vec{x}$ avaldise vana baasi $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, \ldots,\ \vec{e}_n\}$ kaudu. Vektori koordinaatide ühesuse tõttu (vt. teoreem 10.2) viimase võrdlemine valemi (10.5) esimesega annabki koordinaatide teisenemise valemid, milleks on

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n, \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \ldots + a_{2n}x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i &= a_{i1}x'_1 + a_{i2}x'_2 + \ldots + a_{in}x'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Paneme tähele, et vektori $\vec{x}$ vanad koordinaadid on avaldatud uute koordinaatide kaudu. Neid valemeid (10.8) on lihtne meelde jätta: *i-nda koordinaadi x_i avaldamiseks tuleb kordajad uute koordinaatide juurde võtta maatriksi A, antuna valemi* (10.7) *abil, i-ndast reast. Lastes indeksil i muutuda hulgas $\mathbb{N}_n$ saame valemi* (10.8) *kõik read.*