

VI. ELLIPS, HÜPERBOOL JA PARABOOL. ÜLEVAADE TEIST JÄRKU PINDADEST

24. ELLIPS

Fikseerime tasandil E_2 kaks erinevat punkti F_1 ja F_2 ning lisaks veel ühe positiivse reaalarvu a , nõudes, et $a > \frac{1}{2}F_1F_2$.

Definitsioon 24.1. *Punkti hulka $\{X\}$ tasandil E_2 nimetame ellipsiks, kui selle hulga iga punkt X rahuldab võrrandit*

$$F_1X + F_2X = 2a. \quad (24.1)$$

Punkte F_1 ja F_2 nimetame ellipsi fookusteks.

Sellest definitsioonist näeme, et ellipsi iga punkti korral kauguste summa fookustest on jääv suurus $2a$.

Järgnevas leiame võrrandi, mida peavad rahuldama ellipsi punktide koordinaadid. Selleks, et punktidel tekiksid koordinaadid, tuleb tasandil fikseerida reeper. Me fikseerime täpsemalt ristreeperi. Seejuures sellise, mis on tihedalt seotud ellipsiga. Selleks kasutame ellipsi fookusi. Paigutame ristreeperi alguspunkti O fookuste vahelise lõigu keskpunkti. Reeperi esimese ühikvektori $\vec{e}_1$ võtame samasuunaliseks vektoriga $\overrightarrow{F_1F_2}$, s.o. $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}$. Oluline on märgata, et vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$ ei ole nullvektor, mistõttu vektori $\vec{e}_1$ suund fikseeritakse üheselt. Ristreeperi teise ühikvektori $\vec{e}_2$ võtame ristuvaks valitud vektoriga $\vec{e}_1$, s.o. $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$. Selliseid vektoreid on kaks, mis erinevad suuna poolest. Meile ei ole oluline kumma ristreeperiga $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ me töötame. Kui võtta parema käe ristreeper, siis fookused määravad valitava ristreeperi päris üheselt. Ristreeper on seega valitud. Valitud ristreeperit nimetame *ellipsi kanooniliseks reeperiks*. Reeperi valimise tulemusena tekivad igal punktil koordinaadid. Tasandi suvalise punkti korral saame kirjutada $X(x_1, x_2)$. Kui tähistada poolt fookustevahelist kaugusest $c := \frac{1}{2}F_1F_2$ abil, siis punkti koordinaatide definitsiooni 16.9 kohaselt me saame

$$F_1(-c, 0), \quad F_2(c, 0).$$

Asenduste tegemiseks ellipsi võrrandisse (24.1) on vaja leida lõikude F_1X ja F_2X pikkused koordinaatide kaudu. Leiame nad vektorite

$$\overrightarrow{F_1X} = (x_1 + c, x_2), \quad \overrightarrow{F_2X} = (x_1 - c, x_2)$$

abil. Me saame

$$F_1X = |\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2}, \quad F_2X = |\overrightarrow{F_2X}| = \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2}.$$

Viimased asendame ellipsi võrrandisse (24.1), mille tulemusena saame ellipsi võrrandi koordinaatides:

$$\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} = 2a. \quad (24.2)$$

Selle võrrandi puuduseks on ruutjuurte olemasolu. Nad saab ära kaotada viimase ruutu tõstmise teel. Seda on kõige lihtsam teha, kui kirjutame võrrandi (24.2) järgmiselt:

$$\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = 2a - \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2}.$$

Ruutu tõstmise tulemusena saame

$$\begin{aligned} (x_1^2 + 2cx_1 + c^2) + x_2^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} + (x_1^2 - 2cx_1 + c^2) + x_2^2 \iff \\ &\iff a\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} = a^2 - cx_1. \end{aligned}$$

Veelkord ruutu tõstes, oleme ka viimasest ruutjuurest lahti saanud:

$$\begin{aligned} a^2[(x_1^2 - 2cx_1 + c^2) + x_2^2] &= a^4 - 2a^2cx_1 + c^2x_1^2 \iff \\ &\iff (a^2 - c^2)x_1^2 + a^2x_2^2 = a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (24.3)$$

Saadud võrrandit on võimalik esitada kompaktsemalt, kui võtame kasutusele positiivse abisuuruse

$$b := \sqrt{a^2 - c^2}. \quad (24.4)$$

Selles valemis ruutjuur eksisteerib, sest $a > c$. Valem (24.3) saab kuju

$$b^2x_1^2 + a^2x_2^2 = a^2b^2,$$

millest

$$\epsilon : \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (24.5)$$

Saab näidata, et ruutu tõstmised ei toonud ellipsile täiendavaid punkte juurde. Seega võrrand (24.5) on ellipsi võrrand. Kuna ta on saadud ellipsiga seotud ristreeperi suhtes, siis nimetame võrrandit (24.5) *ellipsi kanooniliseks võrrandiks*.

Järgnevas hakkame uurima ellipsi ehitust tema kanoonilise võrrandi abil. Esiteks me märkame, et ellips asub tasandi lõplikus osas. Täpsemalt teatavas ristkülikus servadega $2a$ ja $2b$. Selgitame öeldut. Ellipsi kanoonilisest võrrandist saame

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1 &\implies \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \leq 1, \quad \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 \leq 1 \iff \\ \iff \left|\frac{x_1}{a}\right| \leq 1, \quad \left|\frac{x_2}{b}\right| \leq 1 &\iff -1 \leq \frac{x_1}{a} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{x_2}{b} \leq 1 \iff \\ &\iff -a \leq x_1 \leq a, \quad -b \leq x_2 \leq b. \end{aligned}$$

Viimaseid võrratusi peavad rahuldama ellipsi mistahes punkti koordinaadid. Näeme, et ellipsi punktid asuvad ristkülikus, mis eraldatakse välja kahe paralleelse sirgepaari

$$l_1 : x_1 = -a, \quad l_2 : x_1 = a; \quad l_3 : x_2 = -b, \quad l_4 : x_2 = b$$

poolt.

Nüüd uurime ellipsi sümmeetriat. Selleks tuleb eelnevalt selgitada punktiga sümmeetrilise punkti mõistet sirge või punkti suhtes.

Definitsioon 24.2. Me nimetame punkti K' sümmeetriliseks punktiga K sirge l suhtes, kui sirglõik KK' on risti sirgega l , punktid K ja K' asuvad teine teisel pool sirget l ning on võrdsel kaugusel sirgest l .

Definitsioon 24.3. Me nimetame punkti K' sümmeetriliseks punktiga K punkti A suhtes, kui punkt A poolitab lõigu KK' .

Nende definitsioonide abil saame anda joone γ sümmeetria mõiste sirge või punkti suhtes.

Definitsioon 24.4. Me nimetame joont γ sümmeetriliseks mingi sirge (mingi punkti) suhtes, kui joone γ iga punkti korral ka sümmeetriline punkt selle sirge (selle punkti) suhtes asub joonel γ .

Teoreem 24.1. Ellips on sümmeetriline fookusi läbiva sirge ja fookuste vahelise lõigu keskristsirge suhtes ning nende lõikepunkti suhtes, s.o. fookuste vahelise lõigu keskpunkti suhtes.

Tõestus. Valitud ristreeperi korral on teoreemis jutuks olevateks sirgeteks koordinaatteljed. Olgu punkt $M(m_1, m_2)$ ellipsi suvaline punkt. Seetõttu

$$\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1. \quad (24.6)$$

Näitame, et x_1 -telje ja x_2 -telje suhtes punktiga M sümmeetrilised punktid $M'(m_1, -m_2)$ ja $M''(-m_1, m_2)$ on ellipsil. See on tõepoolest nii, sest valemi (24.6) tõttu

$$\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{(-m_2)^2}{b^2} = \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \implies M' \in \epsilon$$

ja

$$\frac{(-m_1)^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \implies M'' \in \epsilon.$$

Punkt, mille suhtes väidetavalt on ellips sümmeetriline, on valitud ristreeperi korral tema alguspunkt. Tema suhtes punktiga M sümmeetriline punkt $M'''(-m_1, -m_2)$ on samuti ellipsi punkt, sest

$$\frac{(-m_1)^2}{a^2} + \frac{(-m_2)^2}{b^2} = \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \implies M''' \in \epsilon. \spadesuit$$

Definitsioon 24.5. Sirgeid, mille suhtes joon on sümmeetriline, nimetatakse joone sümmeetriatelgedeks.

Definitsioon 24.6. Punkti, mille suhtes joon on sümmeetriline, nimetatakse joone keskpunktiks.

Nende kahe definitsiooni kohaselt on ellipsil kaks sümmeetriatelge ja üks keskpunkt. Ellipsi sümmeetriat teades, saame täpsemalt iseloomustada eespool tehtud ristreeperi valikut: *reeperi alguspunkt on ellipsi keskpunktis ning vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ on paralleelsed ellipsi sümmeetriatelgedega.*

Definitsioon 24.7. Joonel lõikepunkte sümmeetriatelgedega nimetame joone tippudeks.

Leiame ellipsi tipud, täpsemalt tippude koordinaadid. Kuna ellipsi tipp on ellipsi ja sümmeetriatelje ühine punkt, siis tipu koordinaadid on leitavad süsteemist, millesse kuulub ellipsi võrrand ja sümmeetriatelje võrrand. See- ga me lahendame järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \pm a \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pm b \end{cases}.$$

Saime kummalgi sümmeetriateljel kaks tippu. Saadud tippe tähistame järgmiselt

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0); \quad B_1(0, -b), \quad B_2(0, b).$$

Definitsioon 24.8. *Ellipsi samal sümmeetriateljel asuva tipupaari poolt välja eraldatud lõike ja nende pikkusi nimetame ellipsi telgedeks.*

Viimase definitsiooni kohaselt on ellipsil sisuliselt kaks telge: ühelt poolt lõigud A_1A_2 ja B_1B_2 ning teiselt poolt nende lõikude pikkused $2a$ ja $2b$. Ellipsi keskpunkt O poolitab ellipsi teljed. Nelja lõiku A_1O , OA_2 ja B_1O , OB_2 ning nende pikkusi a ja b nimetame *ellipsi pooltelgedeks*. Kuna a on suurem kui b , siis lõike A_1O , OA_2 ja nende pikkust a nimetame *suuremaks poolteljeks* ning lõike B_1O , OB_2 ja nende pikkust b nimetame *väiksemaks poolteljeks*.

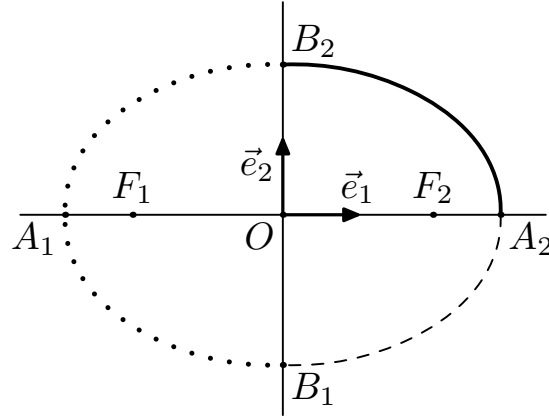
Nüüd on meil ellipsi kohta niipalju teadmisi, et oskame teha ellipsi joonise. Tänu ellipsi sümmeetriale on küllaldane teha esmalt ellipsi selle osa joonis, kus ellipsi punktide koordinaadid on mittenegatiivsed, s.o. $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \geq 0$. Selleks me avaldame ellipsi kanoonilisest võrrandist koordinaadi x_2 . Saame

$$x_2 = \pm b \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

Kuna me vaatleme ellipsi seda osa, kus $x_2 \geq 0$, me saame

$$x_2 = b \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}, \quad x_1 \in [0, a].$$

Andes koordinaadile x_1 väärtusi lõigust $[0, a]$, saame igakord leida koordinaadi x_2 . Tulemusena tekivad ellipsi punktid $X(x_1, x_2)$. Joonisele 24.1 on need punktid kantud pideva joonena.



Joonis 24.1

Sümmeetriat x_1 -telje suhtes kasutades, lisandub katkendliku joonega osa joonisel. Sümmeetria x_2 -telje suhtes lisab veel ülejäänud osa. Kokkuvõttes oleme saanud ellipsi joonise.

Ellipsi puhul antakse veel mitmeid mõisteid, millega me alustame tutvumist.

Definitsioon 24.9. Arvu $e := \frac{c}{a}$ nimetame ellipsi ekstsentrilisuseks.

Sellest definitsioonist näeme, et mistahes ellipsi ekstsentrilisus kuulub vahemikku $(0, 1)$, sest $a > c > 0$. Sageli on otstarbekas anda ekstsentrilisus ellipsi pooltelgede a ja b kaudu. Me saame:

$$e = \frac{c}{a} = \left| \frac{c}{a} \right| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \iff$$

$$\iff e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (24.7)$$

Sellest valemist näeme, et kõikidel ellipsitel, millel on sama pooltelgede suhe, on sama ekstsentrilisus. Seega ellipsi ekstsentrilisus iseloomustab ellipsi kuju ainult teataval määral, sest ellipsi määramiseks on vaja leida kaks suurust, need on ellipsi poolteljed. Ekstsentrilisuse andmine on ainult üks tingimus, mis ei luba määrata kahte pooltelge, s.o. ellipsit. Näiteks, kui fikseerime ellipsi suurema pooltelje a ja laseme väiksemal poolteljel b väheneda, siis valemi (24.7) kohaselt ellipsi ekstsentrilisus kasvab. Seega sisemisel ellipsil on suurem ekstsentrilisus kui välimisel.

Definitsioon 24.10. Ellipsi kõrgust fookuse kohal nimetame tema fokaalparameetriks.

Tavaliselt ellipsi fokaalparameetrit tähistatakse p abil. Leiame valemi tema arvutamiseks. Selleks joonistame fookuse F_2 kohale ellipsi teljega A_1A_2 ristuva lõigu F_2P nii, et punkt P on ellipsil. Punkti $P(p_1, p_2)$ esimene koordinaat on sama, mis fookusel F_2 , s.o. $p_1 = c$. Tema teise koordinaadi p_2 leiame tingimusest $P \in \epsilon$. Ellipsi kanoonilise võrrandi abil saame

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 1 \iff p_2^2 = b^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = b^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Nüüd saame leida ellipsi fokaalparameetri:

$$p = F_2P = |\overrightarrow{F_2P}| = \sqrt{(c - c)^2 + (p_2 - 0)^2} = \sqrt{p_2^2} = |p_2| = p_2 = \frac{b^2}{a}.$$

Saime

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Definitsioon 24.11. *Ellipsi mistahes punkti kaugusi fookusteni nimetame selle punkti fokaalraadiusteks.*

Leiame ellipsi suvalise punkti $M(m_1, m_2)$ fokaalraadiuste arvutamise valemi. Tähistame punkti M fokaalraadiusi fookuste F_1 ja F_2 korral vastavalt $r_1(M)$ ja $r_2(M)$. Järgnevas me leiame mõlemad fokaalraadiused $r_i(M)$, kus $i=1, 2$, korraga. Seejuures järgnevatel rehkendustel ülemine märk vastab juhule $i = 1$ ja alumine märk juhule $i = 2$. Et punkt M on ellipsil, siis seetõttu

$$\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \iff m_2^2 = b^2 \left(1 - \frac{m_1^2}{a^2}\right).$$

Fokaalraadiuste arvutamiseks kasutame vektoreid. Praegu vektorite

$$\overrightarrow{F_iM} = (m_1 \pm c, m_2)$$

abil saame

$$\begin{aligned} r_i(M) = F_iM &= |\overrightarrow{F_iM}| = \sqrt{(m_1 \pm c)^2 + m_2^2} = \\ &= \sqrt{(m_1^2 \pm 2m_1c + c^2) + b^2 \left(1 - \frac{m_1^2}{a^2}\right)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)m_1^2 \pm 2m_1c + (b^2 + c^2)} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}m_1\right)^2 \pm 2m_1c + a^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{c}{a}m_1 \pm a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}m_1 \pm a\right|.
\end{aligned}$$

Saame ellipsi punkti M fokaalraadiuste leidmiseks valemi

$$r_1(M) = \left|\frac{c}{a}m_1 + a\right|, \quad r_2(M) = \left|\frac{c}{a}m_1 - a\right|.$$

Kasutades definitsiooniga 24.9 antud ekstsentrilisuse mõistet, saame

$$r_1(M) = |em_1 + a|, \quad r_2(M) = |em_1 - a|. \quad (24.8)$$

Lõpuks leiame ellipsi parameetrilised võrrandid, mis sageli kergendavad rehkendusi. Teeme järgmise konstruktsiooni, mis annab võimaluse ellipsi punktide leidmiseks.

Olgu antud ellipsi sümmeetriateljed ning ellipsi poolteljed a ja b . Saame paika panna ristreeperi, mis on seotud ellipsi sümmeetria omadustega. Joonistame kaks kontsentrilist ringjoont raadiustega a ja b ning keskpunktiga sümmeetriatelgede lõikepunktis O . Järgnevas võtame pöörleva poolsirge s , mille otspunkt asub punktis O . Olgu poolsirge algasendis suunatud baasivektori $\vec{e}_1$ suunas. Nüüd paneme selle poolsirge pöörlema "vastu päeva". Tähistame nurka baasivektori $\vec{e}_1$ ja poolsirge s vahel t abil. Iga $t \in [0, 2\pi)$ korral poolsirge s lõikab kumbagi ringjoont vastavalt punktides X_1 ja X_2 . Need punktid koordinaatide abil

$$X_1(b \cos t, b \sin t), \quad X_2(a \cos t, a \sin t).$$

Nende kahe punkti abil konstrueerime kolmanda punkti X . Viimane on läbi punkti X_1 joonistatud x_1 -teljega paralleelse sirge ja läbi punkti X_2 joonistatud x_2 -teljega paralleelse sirge lõikepunkt. Ilmselt on selle punkti esimeseks koordinaadiks punkti X_2 esimene koordinaat ja teiseks koordinaadiks punkti X_1 teine koordinaat. Seega tekib punktihulk $\{X(a \cos t, b \sin t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$ ehk teisiti: tekib punktihulk $\{X(x_1, x_2)\}$, kus

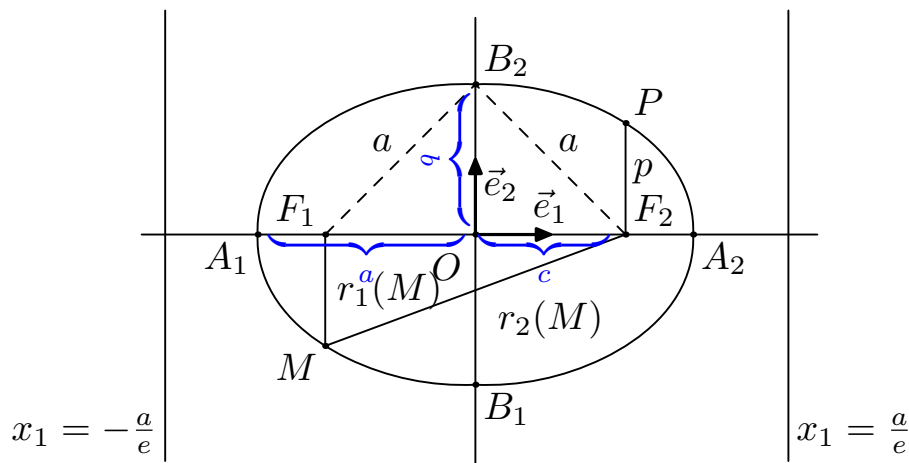
$$x_1 = a \cos t, \quad x_2 = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi). \quad (24.9)$$

Selle hulga punktid on ellipsi punktid, sest nende punktide koordinaadid rahuldavad ellipsi võrrandit. Tõepoolest:

$$\frac{(a \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Võrrandeid (24.9) nimetame *ellipsi parameetrilisteks võrranditeks*.

Ellipsit ja temaga seotud mõisteid on kujutatud joonisel 24.2.



Joonis 24.2

Märkus. Ellipsi kanoonilist võrrandit (24.5) saame kasutada ka siis, kui fookused langevad kokku, mida me eespool ei lubanud. Sel korral meil $F_1 = F_2 = O$. Me saame $c = 0$ ja sellest tulenevalt nüüd valemi (24.4) tõttu $b = a$. Tegemist on sellise "ellipsiga", mille poolteljed on võrdsed. Vaadeldava joone võrrandiks on

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1 \iff x_1^2 + x_2^2 = a^2. \quad (24.10)$$

Et iseloomustada saadud "ellipsit", kasutame valemit (24.1). Meie "ellips" on selline, et iga tema punkti X korral $OX = a$. Näeme, et "ellipsi" kõik punktid asuvad võrdsel kaugusel keskpunktist O . Sellist "ellipsit" nimetame *ringjooneks raadiusega a ja keskpunktiga O* . Tema võrrandiks on (24.10). Definiitsioon 24.9 lubab öelda, et ringjoone eksentrilisus on null.

25. HÜPERBOOL

See paragrahv on oma ülesehituselt sarnane ellipsi paragrahviga.

Fikseerime tasandil E_2 kaks erinevat punkti F_1 ja F_2 ning lisaks veel ühe positiivse reaalarvu a , nõudes, et $a < \frac{1}{2}F_1F_2$.

Definitsioon 25.1. *Punkti hulka $\{X\}$ tasandil E_2 nimetame hüperbooliks, kui selle hulga iga punkt X rahuldab võrrandit*

$$|F_1X - F_2X| = 2a. \quad (25.1)$$

Punkte F_1 ja F_2 nimetame hüperbooli fookusteks.

Sellest definitsioonist näeme, et hüperbooli iga punkti korral fookusteni leitud kauguste vahe absoluutväärtus on jääv suurus $2a$.

Järgnevas leiame võrrandi, mida peavad rahuldama hüperbooli punktide koordinaadid. Selleks, et punktidel tekiksid koordinaadid, tuleb tasandil fikseerida reeper. Me fikseerime täpsemalt ristreeperi. Seejuures sellise, mis tihedalt on seotud hüperbooliga. Selleks kasutame hüperbooli fookusi. Paigutame ristreeperi alguspunkti O fookuste vahelise lõigu keskpunkti. Reeperi esimese ühikvektori $\vec{e}_1$ võtame samasuunaliseks vektoriga $\overrightarrow{F_1F_2}$, s.o. $\vec{e}_1 \uparrow\uparrow \overrightarrow{F_1F_2}$. Oluline on märgata, et vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$ ei ole nullvektor. Seega vektori $\vec{e}_1$ suund fikseerub üheselt. Teise ühikvektori $\vec{e}_2$ võtame ristuvaks valitud vektoriga $\vec{e}_1$, s.o. $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$. Selliseid vektoreid on kaks, mis erinevad suuna poolest. Meile ei ole oluline kumma ristreeperiga $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ me töötame. Kui me valime täpsemalt parema käe ristreeperi, siis on ta fookuste poolt juba üheselt määratud. Ristreeper on nüüd meil valitud. Nimetame valitud ristreeperit *hüperbooli kanooniliseks reeperiks*. Reeperi valimise tulemusena tekivad igal punktil koordinaadid. Tasandi suvalise punkti korral saame kirjutada $X(x_1, x_2)$. Kui tähistada poolt fookustevahelist kaugusest $c := \frac{1}{2}F_1F_2$ abil, siis punkti koordinaatide definitsiooni 16.9 kohaselt me saame

$$F_1(-c, 0), \quad F_2(c, 0).$$

Asenduste tegemiseks hüperbooli võrrandisse (25.1) on vaja leida lõikude F_1X ja F_2X pikkused koordinaatide kaudu. Nad leiame vektorite

$$\overrightarrow{F_1X} = (x_1 + c, x_2), \quad \overrightarrow{F_2X} = (x_1 - c, x_2)$$

abil. Me saame

$$F_1X = |\overrightarrow{F_1X}| = \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2}, \quad F_2X = |\overrightarrow{F_2X}| = \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2}.$$

Asendame viimased hüperbooli võrrandisse (25.1). Saame hüperbooli võrrandi koordinaatides:

$$\left| \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} \right| = 2a$$

ehk

$$\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} = \pm 2a. \quad (25.2)$$

Selle võrrandi puuduseks on ruutjuurte olemasolu. Need saab ära kaotada ruutu tõstmise teel. Seda on kõige lihtsam teha, kui võrrandi (25.2) kirjutame järgmiselt:

$$\sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2} = \pm 2a + \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2}.$$

Viimase ruutu tõstmise tulemusena saame

$$\begin{aligned} (x_1^2 + 2cx_1 + c^2) + x_2^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} + (x_1^2 - 2cx_1 + c^2) + x_2^2 \iff \\ &\iff \mp a\sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2} = a^2 - cx_1. \end{aligned}$$

Tõstame veelkord ruutu:

$$\begin{aligned} a^2[(x_1^2 - 2cx_1 + c^2) + x_2^2] &= a^4 - 2a^2cx_1 + c^2x_1^2 \iff \\ &\iff (a^2 - c^2)x_1^2 + a^2x_2^2 = a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \quad (25.3)$$

Saadud võrrandi saame esitada kompaktsemalt, kui võtame kasutusele positiivse abisuuruse

$$b := \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Selles valemis ruutjuur eksisteerib, sest $c > a$. Valem (25.3) saab kuju

$$b^2x_1^2 - a^2x_2^2 = a^2b^2,$$

millest

$$h : \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (25.4)$$

Saab näidata, et ruutu tõstmised ei toonud hüperboolile täiendavaid punkte juurde. Seega saadud võrrand (25.4) on hüperbooli võrrand. Kuna ta on saadud hüperbooliga seotud ristreeperi suhtes, siis nimetame võrrandit (25.4) *hüperbooli kanooniliseks võrrandiks*.

Järgnevas hakkame uurima hüperbooli ehitust tema kanoonilise võrrandi abil. Esiteks me märkame, et hüperboolil pole punkte paralleelsete sirgete $s_1 : x_1 = -a$ ja $s_2 : x_1 = a$ poolt välja eraldatud servadeta ribas. Selgitame öeldut. Hüperbooli kanoonilisest võrrandist saame

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1 \implies \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \geq 1 \iff \left|\frac{x_1}{a}\right| \geq 1 \iff |x_1| \geq a.$$

Seega hüperbooli iga punkti esimese koordinaadi korral

$$x_1 \in (-\infty, a] \cup [a, \infty),$$

millest

$$x_1 \notin (-a, a).$$

Seega tõesti ei ole hüperboolil sellel servadeta ribal punkte. See teadmine lubab öelda, et hüperbool koosneb vähemalt kahest tükist.

Nüüd uurime hüperbooli sümmeetriat. Seejuures me tugineme eelmise paragrahvi definitsioonidele 24.2, 24.3 ja 24.4.

Teoreem 25.1. *Hüperbool on sümmeetriline fookusi läbiva sirge ja fookuste vahelise lõigu keskristsirge suhtes ning nende lõkepunkti suhtes, s.o. fookuste vahelise lõigu keskpunkti suhtes.*

Tõestus. Valitud ristreeperi korral on teoreemis jutuks olevateks sirgeteks koordinaatteljed. Olgu punkt $M(m_1, m_2)$ hüperbooli suvaline punkt. Seetõttu

$$\frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 1. \quad (25.5)$$

Näitame, et x_1 -telje ja x_2 -telje suhtes punktiga M sümmeetrilised punktid $M'(m_1, -m_2)$ ja $M''(-m_1, m_2)$ on hüperboolil. See on tõepoolest nii, sest valemi (25.5) tõttu

$$\frac{m_1^2}{a^2} - \frac{(-m_2)^2}{b^2} = \frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \implies M' \in h$$

ja

$$\frac{(-m_1)^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = \frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \implies M'' \in h.$$

Punkt, mille suhtes väidetavalt on hüperbool sümmeetriline, on valitud ristreeperi korral tema alguspunkt. Tema suhtes punktiga M sümmeetriline punkt $M'''(-m_1, -m_2)$ on ka hüperbooli punkt, sest

$$\frac{(-m_1)^2}{a^2} - \frac{(-m_2)^2}{b^2} = \frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \implies M''' \in h. \spadesuit$$

Definitsioonide 24.5 ja 24.6 kohaselt on hüperboolil kaks sümmeetriatelge ja üks keskpunkt. Hüperbooli sümmeetriat teades, saame täpsemalt iseloomustada eespool tehtud ristreeperi valikut: *reeperi alguspunkt on hüperbooli keskpunktis ning vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ on paralleelsed hüperbooli sümmeetriatelgedega.*

Tuginedes definitsioonile 24.7, leiame hüperbooli tipud, täpsemalt tippude koordinaadid. Kuna hüperbooli tipp on hüperbooli ja sümmeetriatelje ühine punkt, siis tipu koordinaadid on leitavad süsteemist, millesse kuulub hüperbooli võrrand ja sümmeetriatelje võrrand. Seega me lahendame järgmised võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \pm a \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2^2 = -b^2 \end{cases}.$$

Näeme, et fookusi läbiv sümmeetriatelg lõikab hüperbooli kahes punktis, andes kaks tippu. Tähistame neid analoogiliselt nagu ellipsi korral

$$A_1(-a, 0), \quad A_2(a, 0).$$

Teine sümmeetriatelg aga ei lõika hüperbooli andmata seega tippe. See oli ilmne ka süsteemi lahendamata, sest sümmeetriatelg, millega hüperbooli lõikasime, on ribas, kus hüperboolil ei ole punkte. Vaatamata sellele defineerime me kaks punkti sellel sümmeetriateljel

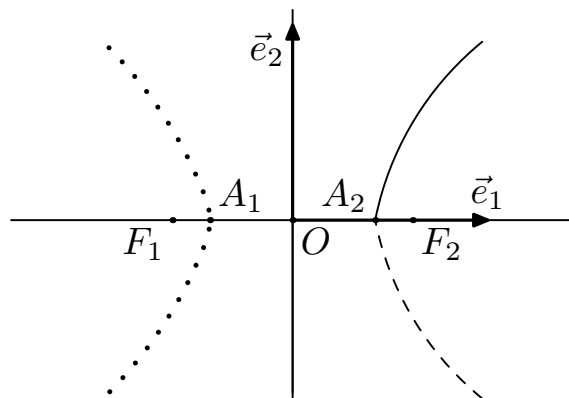
$$B_1(0, -b), \quad B_2(0, b).$$

Nimetame neid punkte *hüperbooli ebatippudeks* ehk *imaginaarseteks tip-pudeks*.

Definitsioon 25.2. *Hüperbooli samal sümmeetriateljel asuva tipupaari (ebatipupaari) poolt välja eraldatud lõiku ja tema pikkust nimetame hüperbooli teljeks (ebateljeks).*

Viimase definitsiooni kohaselt on hüperboolil kaks telge: ühelt poolt lõik A_1A_2 ja tema pikkus $2a$ ning teiselt poolt B_1B_2 ja tema pikkus $2b$. Nende omavaheliseks eristamiseks nimetame telge A_1A_2 ja tema pikkust *reaalteljeks*. Teine telg on juba nimetatud ebateljeks. Hüperbooli keskpunkt O poolitab tema teljed. Nelja lõiku A_1O , OA_2 ja B_1O , OB_2 ning nende pikkusi a ja b nimetame *hüperbooli pooltelgedeks*. Täpsemalt küll vastavalt *reaalpoolteljeks* ja *ebapoolteljeks*.

Nüüd on meil hüperbooli kohta juba niipalju teadmisi, et oskame teha tema joonise (vt joonist 25.1).



Joonis 25.1

Tänu hüperbooli sümmeetriale on küllaldane teha esmalt tema selle osa joonis, kus punktide koordinaadid on mittenegatiivsed, s.o. $x_1 \geq 0$ ja $x_2 \geq 0$. Selleks me avaldame hüperbooli kanoonilisest võrrandist koordinaadi x_2 . Saame

$$x_2 = \pm b \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}.$$

Kuna me vaatleme hüperbooli seda osa, kus $x_2 \geq 0$, siis

$$x_2 = b \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}, \quad x_1 \in [a, \infty). \quad (25.6)$$

Andes koordinaadile x_1 väärtusi poolsirgelt $[a, \infty)$, saame iga kord leida koordinaadi x_2 . Tulemusena tekivad hüperbooli punktid $X(x_1, x_2)$. Joonisele on need punktid kantud pideva joonena. Sümmeetriat x_1 -telje suhtes kasutades, lisandub katkendliku joonega hüperbooli osa. Sümmeetria x_2 -telje suhtes lisab punktiiriga osa. Kokkuvõttes oleme saanud hüperbooli joonise (vt. joonist 25.1). Näeme, et hüperbool koosneb kahest tükist, mida nimetatakse *hüperbooli harudeks*.

Osutub, et hüperbooli joonistamist lihtsustavad kaks sirget. Enne kui me neid vaatleme on vajalik anda joone kaldasümptoodi mõiste.

Definitsioon 25.3. *Olgu joonel, mis on antud ilmutatud funktsiooni $x_2 = f(x_1)$ abil, lõpmatusse ulatuv haru. Kui selle joone punkti $X(x_1, x_2)$ kaugenemisel lõpmatusse tema kaugus mingist sirgest läheneb nullile, siis seda sirget nimetame joone asümptoodiks. Asümptooti taandatud võrrandiga $x_2 = ax_1 + b$, kus $a \neq 0$, nimetame joone kaldasümptoodiks.*

Teoreem 25.2. *Sirged*

$$l_1 : x_2 = \frac{b}{a}x_1, \quad l_2 : x_2 = -\frac{b}{a}x_1$$

on hüperbooli kaldasümptoodid.

Tõestus. Hüperboolil on neli lõpmatusse minevat "otsa". Näitame, et hüperbooli "parempoolse" haru "ülemise otsa" asümptoodiks on sirge l_1 . Sel korral me vaatleme hüperbooli punkte, mille koordinaadid on mittenegatiivsed. Hüperbooli selle osa mistahes punkti $M(m_1, m_2)$ korral tema koordinaadid rahuldavad (25.6):

$$m_2 = b\sqrt{\frac{m_1^2}{a^2} - 1}.$$

Tema kaugus väidetava asümptoodini

$$l_1 : x_2 = \frac{b}{a}x_1 \iff l_1 : bx_1 - ax_2 = 0$$

on valemi (22.2) tõttu

$$\frac{|bm_1 - am_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bm_1 - ab\sqrt{\frac{m_1^2}{a^2} - 1}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b|m_1 - \sqrt{m_1^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Korrutame lugejat ja nimetajat teguriga

$$|m_1 + \sqrt{m_1^2 - a^2}|.$$

Me saame

$$\frac{a^2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{|m_1 + \sqrt{m_1^2 - a^2}|},$$

millest

$$\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \frac{a^2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{|m_1 + \sqrt{m_1^2 - a^2}|} = 0.$$

Seega sirge l_1 on hüperbooli parempoolse haru "ülemise otsa" asümptoodiks. Paneme nüüd tähele, et sirge l_2 on sümmeetriline sirgega l_1 hüperbooli fookusi läbiva sümmeetriatelje suhtes, sest

$$\forall M(m_1, m_2) \in l_1 \iff m_2 = \frac{b}{a}m_1$$

korral sümmeetriline punkt $M'(m_1, -m_2)$ on sirge l_2 punkt, sest

$$m_2 = \frac{b}{a}m_1 \implies -m_2 = -\frac{b}{a}m_1 \implies M'(m_1, -m_2) \in l_2.$$

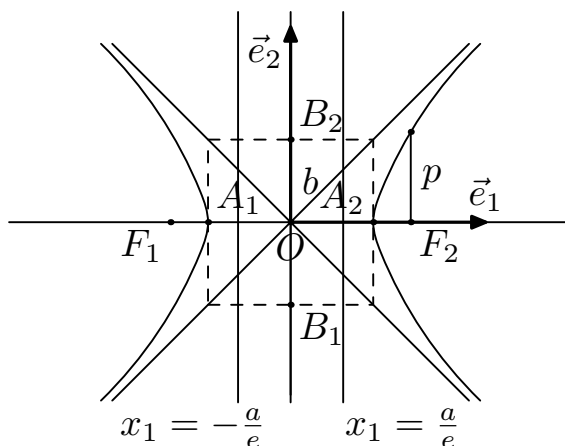
Tõestatud osa tõttu on sirge l_2 hüperbooli "parempoolse" haru "alumise otsa" asümptoodiks. Samuti näeme, et sirged l_1 ja l_2 on vastastikku sümmeetrilised ka hüperbooli teise sümmeetriatelje suhtes, siis samad sirged on hüperbooli "vasakpoolse" haru "ülemise" ja "alumise otsa" asümptootideks. ♠

Selgitame täpsemalt kuidas hüperbool paikneb asümptootide suhtes. Vaatleme esialgu hüperbooli ja asümptoodi l_1 seda osa, kus punktide koordinaadid on mittenegatiivsed. Kui võtame suvalise $m_1 \in [a, \infty)$, siis jutuks oleval asümptoodil ja hüperboolil asuva punkti teine koordinaat vastavalt avaldub

$$m_2 = \frac{b}{a}m_1, \quad \bar{m}_2 = \frac{b}{a}\sqrt{m_1^2 - a^2},$$

millest $m_2 > \bar{m}_2$. Seetõttu vaadeldav hüperbooli osa on asümptoodist l_1 "allpool". Arvestades hüperbooli ja asümptootide sümmeetria omadusi,

saame öelda, et hüperbooli harud paiknevad asümptootide suhtes nii nagu on joonisel 25.2 näidatud.



Joonis 25.2

Lõpuks paneme tähele, et asümptoodid toetuvad teatava ristküliku diagonaalidele. Selle ristküliku küljepaarid on paralleelsed hüperbooli sümmeetriatelgedega ja hüperbooli tipud asuvad selle ristküliku külgedel, igal küljel üks tipp. Hüperbooli puhul antakse veel mitmeid mõisteid, millega me alustame tutvumist.

Definitsioon 25.4. Arvu $e := \frac{c}{a}$ nimetame hüperbooli ekstsentrilisuseks.

Sellest definitsioonist näeme, et kõigi hüperboolide ekstsentrilisus on suurem ühest, sest $0 < a < c$. Sageli on otstarbekas anda ekstsentrilisus hüperbooli pooltelgede a ja b kaudu. Me saame:

$$e = \frac{c}{a} = \left| \frac{c}{a} \right| = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2} \iff$$

$$\iff e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2}. \quad (25.7)$$

Sellest valemist näeme, et kõikidel hüperboolidel, millel on sama pooltelgede suhe, on sama ekstsentrilisus. Seega hüperbooli ekstsentrilisus iseloomustab hüperbooli kuju ainult teataval määral, sest hüperbooli määramiseks on vaja leida kaks suurust, need on hüperbooli poolteljed. Ekstsentrilisuse andmine on ainult üks tingimus, mis ei luba määrata kahte pooltelge, s.o. hüperbooli.

Definitsioon 25.5. Hüperbooli kõrgust fookuse kohal nimetame tema fokaalparameetriks.

Tavaliselt hüperbooli fokaalparameetrit tähistatakse p abil. Leiame valemi tema arvutamiseks. Selleks joonistame fookuse F_2 kohale hüperbooli teljega A_1A_2 ristuva lõigu F_2P nii, et punkt P on hüperboolil. Punkti $P(p_1, p_2)$ esimene koordinaat on sama, mis fookusel F_2 , s.o. $p_1 = c$. Tema teise koordinaadi p_2 leiame tingimusest $P \in h$. Hüperbooli kanoonilise võrrandi abil saame

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 1 \iff p_2^2 = b^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) = b^2 \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Nüüd saame leida hüperbooli fokaalparameetri:

$$p = F_2P = |\overrightarrow{F_2P}| = \sqrt{(c - c)^2 + (p_2 - 0)^2} = \sqrt{p_2^2} = |p_2| = p_2 = \frac{b^2}{a}.$$

Saime

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Saadud valem on sama, mis ellipsi korral.

Definitsioon 25.6. Hüperbooli mistahes punkti kaugusi fookusteni nimetame selle punkti fokaalraadiusteks.

Leiame hüperbooli suvalise punkti $M(m_1, m_2)$ fokaalraadiuste arvutamise valemi. Tähistame punkti M fokaalraadiusi fookuste F_1 ja F_2 korral vastavalt $r_1(M)$ ja $r_2(M)$. Järgnevas me leiame mõlemad fokaalraadiused $r_i(M)$, kus $i=1, 2$, korraga. Seejuures järgnevates rehkendustes ülemine märk vastab juhule $i = 1$ ja alumine märk juhule $i = 2$. Et punkt M on hüperboolil, siis seetõttu

$$\frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 1 \iff m_2^2 = b^2 \left(\frac{m_1^2}{a^2} - 1 \right).$$

Fokaalraadiuste arvutamiseks me kasutame vektoreid. Praegu vektorite

$$\overrightarrow{F_iM} = (m_1 \pm c, m_2)$$

abil saame

$$r_i(M) = F_iM = |\overrightarrow{F_iM}| = \sqrt{(m_1 \pm c)^2 + m_2^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(m_1^2 \pm 2m_1c + c^2) + b^2\left(\frac{m_1^2}{a^2} - 1\right)} = \\
&= \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)m_1^2 \pm 2m_1c + (c^2 - b^2)} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{c}{a}m_1\right)^2 \pm 2m_1c + a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}m_1 \pm a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}m_1 \pm a\right|.
\end{aligned}$$

Saame hüperbooli punkti M fokaalraadiuste leidmiseks valemi

$$r_1(M) = \left|\frac{c}{a}m_1 + a\right|, \quad r_2(M) = \left|\frac{c}{a}m_1 - a\right|.$$

Kasutades definitsiooniga 25.4 antud ekstsentrilisuse mõistet, saame

$$r_1(M) = |em_1 + a|, \quad r_2(M) = |em_1 - a|. \quad (25.8)$$

Samuti ka need valemid on samasugused, mis ellipsi korral.

26. ELLIPSI JA HÜPERBOOLI JUHTSIRGED

Olgu ellips ja hüperbool antud oma kanooniliste võrranditega

$$\epsilon : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad h : \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Definitsioon 26.1. *Paralleelseid sirgeid*

$$l_1 : x_1 = -\frac{a}{e}, \quad l_2 : x_1 = \frac{a}{e} \quad (26.1)$$

nimetatakse ellipsi (hüperbooli) juhtsirgeteks.

Sellest definitsioonist näeme, et ellipsi ja hüperbooli juhtsirged antakse ühesuguste võrranditega. Nad on paralleelsed ellipsi (hüperbooli) sümmeetriateljega, mis on fookuste vahelise lõigu keskristsirge. Ilmselt juhtsirgete, kui paralleelse sirgepaari, vaheline kaugus on $d(l_1, l_2) = 2 \frac{a}{e}$. Teisiti öelduna kummagi juhtsirge kaugus vaadeldavast sümmeetriateljest on $\frac{a}{e}$. Paneme tähele, et ellipsi korral $\frac{a}{e} > a$ ja hüperbooli korral $\frac{a}{e} < a$, sest esimesel juhul $e \in (0, 1)$ ja teisel juhul $e \in (1, \infty)$. Sellest näeme, et ellipsi korral tipud $A_1(-a, 0)$ ja $A_2(a, 0)$ jäävad juhtsirgete vahele ning hüperbooli korral jäävad juhtsirged nende tippude vahele. Seega mõlema joone korral juhtsirged ei lõika ellipsit ega hüperbooli.

Teoreem 26.1. *Ellipsi (hüperbooli) iga punkti M korral*

$$\frac{r_i(M)}{d(l_i, M)} = e, \quad M \in \epsilon \quad (M \in h).$$

Siin $r_i(M)$ on punkti M fokaalraadius F_iM ja $d(l_i, M)$ punkti M kaugus juhtsirgeni l_i . Siin $i = 1, 2$.

Tõestus. Valemitest (24.8) ja (25.8) näeme, et ellipsi ja hüperbooli mistahes punkti M fokaalraadiuste arvutusvalemid on ühesugused. Nimelt

$$r_i(M) = |em_1 \pm a|, \quad i = 1, 2.$$

Punkti M kauguse juhtsirgeni l_i leiame valemi (22.2) abil. Me saame

$$d(l_i, M) = \left| m_1 \pm \frac{a}{e} \right| = \frac{1}{e} |em_1 \pm a| = \frac{1}{e} r_i(M),$$

millest

$$\frac{r_i(M)}{d(l_i, M)} = e, \quad M \in \epsilon \quad (M \in h).$$

Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Teoreem 26.2. *Olgu tasandil fikseeritud sirge l ja temal mitteasuv punkt F . Olgu fikseeritud arv $\bar{e} \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Punktihulk*

$$\left\{ X \mid \frac{r(F, X)}{d(X, l)} = \bar{e} \right\}$$

on $\bar{e} \in (0, 1)$ korral ellips ja $\bar{e} \in (1, \infty)$ korral hüperbool. Saadud ellipsi ja hüperbooli ekstsentrilisuseks on $\bar{e}$.

Tõestus. Teoreemis antud hulga võrrandi saame anda kujul

$$r(F, X) = \bar{e} \cdot d(X, l). \quad (26.2)$$

Et viimast anda koordinaatides, on vaja valida reeper. Me valime ristreeperi, mille võimalikult seome teoreemi algandmetega – sirgega l ja punktiga F . Joonistame läbi punkti F sirge s , mis on risti fikseeritud sirgega l . Nende lõikepunkti võtame valitava reeperi alguspunktiks $O = l \cap s$. Reeperi esimese ühikvektori $\vec{e}_1$ võtame samasuunaliseks vektoriga $\overrightarrow{OF}$. Kuna vektor $\overrightarrow{OF}$ ei ole nullvektor, siis vektor $\vec{e}_1$ määratakse üheselt. Ühikvektori $\vec{e}_2$ võtame ristuvaks juba valitud vektoriga $\vec{e}_1$. Seega vektor $\vec{e}_2$ on sirge l sihivektor ja vektor $\vec{e}_1$ sirge s sihivektor. Valitud ristreeperi korral on sirge l võrrandiks $x_1 = 0$ ja punkti F koordinaatideks on $(k, 0)$ ehk $F(k, 0)$. Siin $k := OF$. Valemissse (26.2) asendamiseks on vaja leida $r(F, X)$ ja $d(X, l)$. Neist $r(F, X)$ leiame vektori

$$\overrightarrow{FX} = (x_1 - k, x_2)$$

abil, saades

$$r(F, X) = \sqrt{(x_1 - k)^2 + x_2^2}.$$

Lõpuks $d(X, l)$ on punkti X kaugus sirgeni l . Valemi (22.2) abil saame

$$d(X, l) = |x_1|.$$

Valemi (26.2) saame nüüd anda koordinaatides. Saame

$$\sqrt{(x_1 - k)^2 + x_2^2} = \bar{e} |x_1|,$$

millest ruutu tõstmise abil saame

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 2kx_1 + k^2) + x_2^2 &= \bar{e}^2 x_1^2 \iff (1 - \bar{e}^2)x_1^2 - 2kx_1 + x_2^2 + k^2 = 0 \iff \\ &\iff x_1^2 - 2\frac{k}{1 - \bar{e}^2}x_1 + \frac{x_2^2}{1 - \bar{e}^2} = -\frac{k^2}{1 - \bar{e}^2} \iff \\ &\iff x_1^2 - 2\frac{k}{1 - \bar{e}^2}x_1 + \frac{k^2}{(1 - \bar{e}^2)^2} + \frac{x_2^2}{1 - \bar{e}^2} = -\frac{k^2}{1 - \bar{e}^2} + \frac{k^2}{(1 - \bar{e}^2)^2} \iff \\ &\iff \left(x_1 - \frac{k}{1 - \bar{e}^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - \bar{e}^2} = \frac{k^2\bar{e}^2}{(1 - \bar{e}^2)^2}. \end{aligned} \quad (26.3)$$

Et saaksime aru, mis kõveraga on tegemist, muudame reeperi alguspunkti, võttes selleks punkti $\bar{O}(\frac{k}{1 - \bar{e}^2}, 0)$. Punkt X saab endale uued koordinaadid $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, kusjuures nad on omavahel seotud järgmiselt:

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{k}{1 - \bar{e}^2}, \quad \bar{x}_2 = x_2. \quad (26.4)$$

Valem (26.3) saab järgmise kuju

$$\bar{x}_1^2 + \frac{\bar{x}_2^2}{1 - \bar{e}^2} = \frac{k^2\bar{e}^2}{(1 - \bar{e}^2)^2}$$

ehk

$$\frac{\bar{x}_1^2}{\left(\frac{k\bar{e}}{|1 - \bar{e}^2|}\right)^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{\frac{(k\bar{e})^2}{1 - \bar{e}^2}} = 1.$$

Tähistame

$$a := \frac{k\bar{e}}{|1 - \bar{e}^2|}.$$

Selle positiivse konstandi abil viimane võrrand saab kuju

$$\frac{\bar{x}_1^2}{a^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{a^2(1 - \bar{e}^2)} = 1. \quad (26.5)$$

Kui $\bar{e} \in (0, 1)$, siis eksisteerib $b := a\sqrt{1 - \bar{e}^2}$. Seejuures $0 < b < a$. Võrrand (26.5) saab kuju

$$\frac{\bar{x}_1^2}{a^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{b^2} = 1. \quad (26.6)$$

Tegemist on ellipsiga. Kui $\bar{e} \in (1, \infty)$, siis eksisteerib $b := a\sqrt{\bar{e}^2 - 1}$. Võrrand (26.3) saab seekord kuju

$$\frac{\bar{x}_1^2}{a^2} - \frac{\bar{x}_2^2}{b^2} = 1. \quad (26.7)$$

Tegemist on hüperbooliga.

Osutub, et teoreemis esinev konstant $\bar{e}$ on ellipsi (hüperbooli) ekstsentrilisus e . Meenutame, et ellipsi (hüperbooli) ekstsentrilisus valemite (24.7) ja (25.7) kohaselt avaldub pooltelgede kaudu vastavalt järgmiselt:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Kasutades saadud ellipsi (hüperbooli) pooltelgi, me vastavalt saame

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2(1 - \bar{e}^2)}{a^2}} = \bar{e}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{a^2(\bar{e}^2 - 1)}{a^2}} = \bar{e}.$$

Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Ellipsi võrrand (26.6) ja hüperbooli võrrand (26.7) on kanoonilised võrrandid. Seega reeper $\{\bar{O}; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, mille suhtes nad on saadud, on kanooniline reeper. Saame öelda, et reeperi alguspunkt $\bar{O}$ on ellipsi (hüperbooli) keskpunkt. Vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ on sümmeetriatelgede sihivektorid. Selgitame viimases teoreemis sirge l ja punkti F geomeetrilise sisu. Selleks leiame sirge l võrrandi ja F koordinaadid kanoonilises reeperis. Me teame, et esialgses reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on

$$l: \quad x_1 = 0, \quad F(k, 0).$$

Ellipsi korral $|1 - e^2| = 1 - e^2$, mistõttu

$$a = \frac{ke}{1 - e^2} \iff \frac{k}{1 - e^2} = \frac{a}{e}.$$

Valemi (26.4) abil saame sirge l võrrandiks

$$l: \quad \bar{x}_1 = -\frac{k}{1 - e^2} \iff l: \quad \bar{x}_1 = \frac{a}{e}.$$

Näeme, et sirge l on ellipsi (26.6) juhtsirge, mida valemis (26.1) on tähistatud l_1 abil. Punkti F esimene koordinaat k teiseneb uueks koordinaadiks $\bar{k}$, mille leiame taas valemi (26.4) abil. Saame

$$\bar{k} = k - \frac{k}{1 - e^2} = -e^2 \frac{k}{1 - e^2} = -e^2 \frac{a}{e} = -ae = -c.$$

Seega $F(-c, 0)$ tõttu on see punkt ellipsi "vasakpoolne" fookus, mida paragrahvis 24 on tähistatud F_1 abil.

Hüperbooli (26.7) korral $|1 - e^2| = e^2 - 1$. Järelikult

$$a = \frac{ke}{e^2 - 1} \iff \frac{k}{e^2 - 1} = \frac{a}{e}.$$

Sirge l võrrandiks on

$$l: \quad \bar{x}_1 = \frac{k}{e^2 - 1} \iff l: \quad \bar{x}_1 = \frac{a}{e}.$$

Seega ka siin sirge l on hüperbooli juhtsirge, mida valemis (26.1) on tähistatud l_2 abil. Punkti F uue esimese koordinaadi $\bar{k}$ leiame valemi (26.4) abil. Saame

$$\bar{k} = k - \frac{k}{e^2 - 1} = e^2 \frac{k}{e^2 - 1} = e^2 \frac{a}{e} = ae = c.$$

Saadu lubab öelda, et punkt F on hüperbooli (26.7) "parempoolne" fookus, mida paragrahvis 25 on tähistatud F_2 abil.

Teoreemid 26.1 ja 26.2 võimaldavad anda ellipsile (hüperboolile) uue definitsiooni, mis on samaväärne definitsiooniga 24.1 (definitsiooniga 25.1).

Olgu tasandil fikseeritud sirge l ja temal mitteasuv punkt F . Olgu tähistatud tasandi mistahes punkti X korral kaugusi selle sirgeni ja punktini vastavalt $d(X, l)$ ja $r(X, F)$. Fikseerime veel ühe positiivse arvu e .

Definitsioon 26.2. *Punktihulka*

$$\left\{ X \mid \frac{r(X, F)}{d(X, l)} = e \right\}$$

tasandil nimetame $0 < e < 1$ korral ellipsiks ja $e > 1$ korral hüperbooliks. Sirget l ja punkti F nimetame vastavalt ellipsi (hüperbooli) juhtsirgeks ja fookuseks.

Kui me käsitleme ellipsit (hüperbooli), lähtudes sellest definitsioonist, siis nende esialgsed definitsioonid muutuvad teoreemideks.

27. PARABOOL

Olgu tasandil antud sirge l ja temal mitteasuv punkt F .

Definitsioon 27.1. *Tasandi selliste punktide hulka, mille iga punkt on võrdsel kaugusel sirgest l ja punktist F , nimetatame parabooliks. Punkti F nimetame parabooli fookuseks ja sirget l parabooli juhtsirgeks.*

Tähistame, nagu varem, tasandi suvalise punkti X kaugust sirgeni l ja punktini F vastavalt $d(X, l)$ ja $r(X, F)$. Parabooli (tähistame $\mathcal{P}$ abil) definitsiooni saame kirja panna valemiga

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathcal{X} \mid \frac{\nabla(\mathcal{X}, \mathcal{F})}{\lceil(\mathcal{X}, \downarrow) \rceil} = \infty \right\}. \quad (27.1)$$

Võrreldes seda valemit eelmise paragrahvi definitsiooniga 26.2, näeme, et parabooli ekstsentrilisus $e = 1$. Järgnevalt on kasulik kirjutada parabooli definitsiooni valem (27.1) järgmiselt

$$r(X, F) = d(X, l). \quad (27.2)$$

Kirjutame selle võrrandi koordinaatides. Selleks et koordinaadid tekiksid, on vaja fikseerida reeper. Fikseerime ristreeperi, mis oleks seotud parabooliga. Selleks joonistame kõigepealt läbi fookuse F sirge s , mis on risti juhtsirgega l . Tähistame tähega K nende lõikepunkti. Lisaks tähistame fookuse F kaugust sirgeni l tähega p . Seega $KF = p$. Valitava ristreeperi alguspunkti O paigutame lõigu KF keskpunkti. Ühikvektori $\vec{e}_1$ võtame samasuunaliseks vektoriga $\overrightarrow{KF}$. Kuna $F \notin l$, siis vektor $\overrightarrow{KF} \neq \vec{0}$, mistõttu ühikvektori $\vec{e}_1$ asend määratakse üheselt. Teise ühikvektori $\vec{e}_2$ võtame ristuvaks juba paika pandud vektoriga $\vec{e}_1$. Valitud ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetame *parabooli kanooniliseks reeperiks*.

Valitud reeperi korral on juhtsirge võrrandiks

$$l : x_1 = -\frac{p}{2} \iff l : x_1 + \frac{p}{2} = 0.$$

Fookuse koordinaatideks on $(\frac{p}{2}, 0)$ ehk $F(\frac{p}{2}, 0)$. Tasandi mistahes punkti $X(x_1, x_2)$ korral tema kaugus juhtsirgeni (vt. (22.2)) ja fookuseni avaldub

$$d(X, l) = \left| x_1 + \frac{p}{2} \right|, \quad r(X, F) = |\overrightarrow{FX}| = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + x_2^2}.$$

Et oleks tegemist parabooli punktiga $X(x_1, x_2)$, peab kehtima (27.2). Viimane koordinaatide kaudu on

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + x_2^2} = \left| x_1 + \frac{p}{2} \right|. \quad (27.3)$$

Ruutu tõstmise abil saame

$$\left(x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4}\right) + x_2^2 = x_1^2 + px_1 + \frac{p^2}{4},$$

millest

$$x_2^2 = 2px_1. \quad (27.4)$$

Kerge on näha, et võrrandid (27.3) ja (27.4) on samaväärsed. Teisiti öelduna: võrrandi (27.3) ruutu tõstmine ei lisanud juurde uusi punkte. Selleks on vaja näidata, et iga punkt $X(x_1, x_2)$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit (27.4) rahuldavad ka võrrandit (27.3). See on tõepoolest nii, sest

$$\sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + x_2^2} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_1} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} = \left| x_1 + \frac{p}{2} \right|.$$

Seega võrrand (27.4) on parabooli võrrand koordinaatides. Kuna ta on saadud kanoonilise reeperi suhtes, siis nimetame võrrandit (27.4) *parabooli kanooniliseks võrrandiks*.

Järgnevas uurime parabooli kanoonilise võrrandi abil tema ehitust. Sellest võrrandist näeme, et parabooli punktide esimene koordinaat on mittemnegatiivne, s.o. $x_1 \geq 0$, sest vasakul pool on x_2 ruudus ja paremal pool p on positiivne. Paneme veel tähele, et parabool on sümmeetriline sirge s suhtes. Praegu on selleks (kanoonilise reeperi valiku tõttu) x_1 -telg. Meil on vaja näidata, et parabooli iga punkti korral alati ka sümmeetriline punkt on parabooli punkt. Parabooli suvalise punkti $M(m_1, m_2)$ korral $m_2^2 = 2pm_1$. Sümmeetrilise punkti $M'(m_1, -m_2)$ korral kehtib

$$(-m_2)^2 = m_2^2 = 2pm_1 \iff M' \in \mathcal{P}.$$

Seega jutuks olev sümmeetria on näidatud.

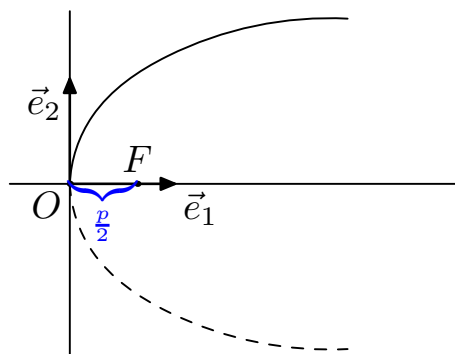
Definitsioon 27.2. *Sirget, mille suhtes parabool on sümmeetriline, nimetatakse parabooli teljeks.*

Seega parabooli teljeks on sirge s . Leiame parabooli tipu(d), s.o. parabooli ja ta telje lõikepunkti(d). Selleks tuleb lahendada võrrandisüsteem, mis koosneb parabooli ja ta telje võrrandist. Saame

$$\begin{cases} x_2^2 = 2px_1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Saime, et paraboolil on ainult üks tipp, milles asub kanoonilise reeperi alguspunkt $O(0,0)$.

Teeme nüüd parabooli joonise (vt. joonist 27.1).

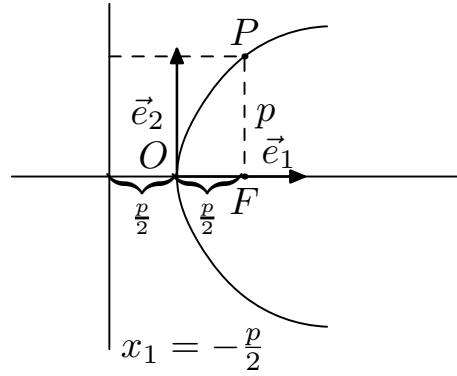


Joonis 27.1

Seda lihtsustab tema sümmeetria oma telje suhtes. Selleks on küllaldane teha parabooli selle osa joonis, mis asub esimeses veerandis. Kuna seal on $x_2 \geq 0$, siis kanoonilisest võrrandist saame

$$x_2 = \sqrt{2px_1}.$$

Lastes koordinaadil x_1 muutuda nullist kuni lõpmatuseni, saame arvutada x_2 , mis samuti muutub nullist lõpmatuseni. Seega kandes joonisele parabooli selle osa punkte, alustame me tipust O ja suundume lõpmatusse. Kasutades sümmeetriat parabooli telje suhtes, saame parabooli puuduva osa.



Joonis 27.2

Leiame lõpuks parabooli fokaalparameetri, s.o. parabooli kõrguse fookuse kohal. Tähistame fookusest tõmmatud parabooli teljega risti oleva lõigu teist otspunkti tähega P . Kuna see punkt on parabooli punkt, siis

$$FP = r(P, F) = d(P, l) = FK = p.$$

Näeme, et parabooli kanoonilises võrrandis (27.4) olev konstant on parabooli kõrgus fookuse kohal ehk *parabooli fokaalparameeter*.

Märkus. Järgnevas paragrahvis on korraks vaja kasutada parabooli võrrandit, mis on saadud kanoonilisest reeperist veidi erineva reeperi suhtes. Nimelt kanoonilises reeperis $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ muudame alguspunkti, lubades teda viia parabooli telje mistahes punkti. Praegu on reeperi alguspunkt parabooli tipus. Teiseks asendame esimese baasivektori tema vastandvektoriga. Öeldu põhjal uut reeperit $\{O'; \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ iseloomustavad valemid

$$O'(c_1, 0); \quad \vec{e}_1' = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2' = \vec{e}_2.$$

Maatriks (16.6) on praegu kujuga

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punkti X uued koordinaadid $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ja vanad koordinaadid (x_1, x_2) valemi (16.8) kohaselt on seotud järgmiselt

$$x_1 = -\bar{x}_1 + c_1, \quad x_2 = \bar{x}_2. \quad (27.5)$$

Siit asendame parabooli kanoonilisse võrrandisse (27.4), mille tulemusena

$$\bar{x}_2^2 = 2p(-\bar{x}_1 + c_1) \iff \bar{x}_2^2 = -2p\bar{x}_1 + 2pc_1.$$

Seega parabooli uueks võrrandiks on

$$\bar{x}_2^2 = -2p\bar{x}_1 + a, \tag{27.6}$$

kus

$$a := 2pc_1.$$

Juhime tähelepanu sellele, et konstant a lubab määrata uuele alguspunktile üleminekul tema esimese koordinaadi. Uue reeperi korral parabooli tipu O vanade koordinaatide $(0, 0)$ abil valem (27.5) lubab määrata uued koordinaadid, saades

$$O(c_1, 0) \iff O\left(\frac{a}{2p}, 0\right). \tag{27.7}$$

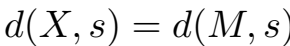
28. ÜLEVAADE TEIST JÄRKU PINDADEST

Selles paragrahvis anname lühiülevaate teatavatest pindadest, täpsemalt teist järku pindadest. Leiame nende võrrandid sobivas ristreeperis. Eelnevalt on vaja kahte mõistet. Üks neist on pöördpinna mõiste ja teine ruumi kokkusurumise mõiste.

Pöördpinna mõiste andmiseks fikseerime ruumis sirge s ja sellise joone γ , et ta koos sirgega s asub ruumi mingil tasandil π . Öeldu põhjal siin $s, \gamma \subset \pi$. Valime nüüd sobiva ristreeperi. Tema alguspunktiks O võtame mistahes punkti sirgel s . Baasiühikvektori $\vec{e}_1$ võtame nii, et ta oleks sirge s' sihivektor. Seejuures sirge s' läbib punkti O , asub tasandil π ja on risti sirgega s . Baasiühikvektori $\vec{e}_2$ võtame ristiolevaks vektoriga $\vec{e}_1$ ja sirgega s . Lõpuks, kolmas baasiühikvektor $\vec{e}_3$ olgu sirge s sihivektor. Kuna reeper on fikseeritud, siis ruumi kõigil punktidel tekivad koordinaadid. Samuti tekivad joontel võrrandid. Näiteks sirge s , mis on praegusel juhul x_3 -telg, määratakse võrranditega $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$. Joon γ , mis asub x_1x_3 -koordinaattasandil, saab samuti kaks võrrandit. Esimeseks nõudeks on asuda nimetatud koordinaattasandil, s.o. $x_2 = 0$. Joon ise sellel tasandil on antav ilmutamata kahemuutuja funktsiooni abil järgmise võrrandiga $F(x_1, x_3) = 0$. Seega

$$\gamma : \begin{cases} F(x_1, x_3) = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} . \quad (28.1)$$

Paneme nüüd joone γ pöörlema ümber sirge s . Siin nõutakse, et joone γ iga punkt M kirjeldaks ringjoone raadiusega $d(M, s)$. Kirjeldatud protsessis joone γ pöörlemisel tekkivat pinda nimetame *pöördpinnaks teljega s ja juhtjoonega γ* . Leiame nüüd valitud ristreeperis pöördpinna võrrandi (vt. joonist 28.1).



Joonis 28.1

Joone γ iga punkti $M(m_1, 0, m_3)$ koordinaadid rahuldavad valemis (28.1) esimest võrrandit. Seega

$$M \in \gamma \iff F(m_1, m_3) = 0. \quad (28.2)$$

Valemis (28.1) teist võrrandit on juba arvestatud, sest punktil M teine koordinaat on võetud nulliks. Pöörlemisel ümber sirge s iga punkt M kirjeldab ringjoone raadiusega $d(M, s)$. Tekkiva ringjoone punktid asuvad tasandil $x_3 = m_3$. Tähistame tähega K selle tasandi lõikepunkti sirgega s . Siis punkti K kaks esimest koordinaati on nullid, aga kolmas on m_3 . Seega $K(0, 0, m_3)$. Tekkinud ringjoone iga punkti $X(x_1, x_2, m_3)$ korral

$$d(X, s) = |\overrightarrow{KX}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

mis peab võrduma kaugusega

$$d(M, s) = \sqrt{m_1^2} = \pm m_1.$$

Saame

$$m_1 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (28.3)$$

Selle valemi korral tuleb arvestada ülemist märki, kui punkti M esimene koordinaat on mittenegatiivne, ja alumist märki, kui punkti M esimene koordinaat on negatiivne. Asendame valemist (28.3) valemisse (28.2). Me saame

$$F(\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, m_3) = 0.$$

Viimane on punkti M poolt pöörlemisel tekkinud ringjoone võrrand. Kui punkt M joonel γ muutub, s.o. $m_3 = x_3$, siis pöördpind ladestub kirjeldatud ringjoontest. Seega pöördpinna võrrandiks saame

$$F(\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3) = 0.$$

Viimase saamiseks saame järgmise reegli: *ilmutamata võrrandis (28.1) tuleb x_1 asendada avaldisega $\pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.*

Anname nüüd ruumi kokkusurumise mõiste. Nimetatud protseduur toimub ruumi mingi tasandi suhtes. Jutuksolevat mõistet on lihtne anda, kui on valitud selline reeper, et tasand, mille suhtes toimub ruumi kokkusurumine, on koordinaattasand. Olgu selleks tasandiks näiteks x_1x_3 -koordinaattasand.

Definitsioon 28.1. *Ruumi kokkusurumiseks x_1x_3 -tasandi suhtes nimetatakse ruumi punktide sellist muutmist, kui ruumi mistahes punkt $X(x_1, x_2, x_3)$ viiakse ruumi punktiks $X'(x'_1, x'_2, x'_3)$ valemitega*

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = kx_2, \quad x'_3 = x_3, \quad (28.4)$$

kus k on positiivne konstant.

Sellega meie eeltöö on lõppenud. Järgnevas me võtame erinevaid jooni, mille abil moodustame esmalt pöördpinna. Seejärel sooritame ruumi kokkusurumise sobiva tasandi suhtes ja sobiva teguriga, mille tulemusena saame meid huvitavad pinnad ruumis.

Esiteks paneme pöörlema ümber x_3 -telje pool ellipsit

$$\gamma: \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 \geq 0.$$

Pöördpinna saamiseks tuleb teha siin asendus

$$x_1 \longrightarrow \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

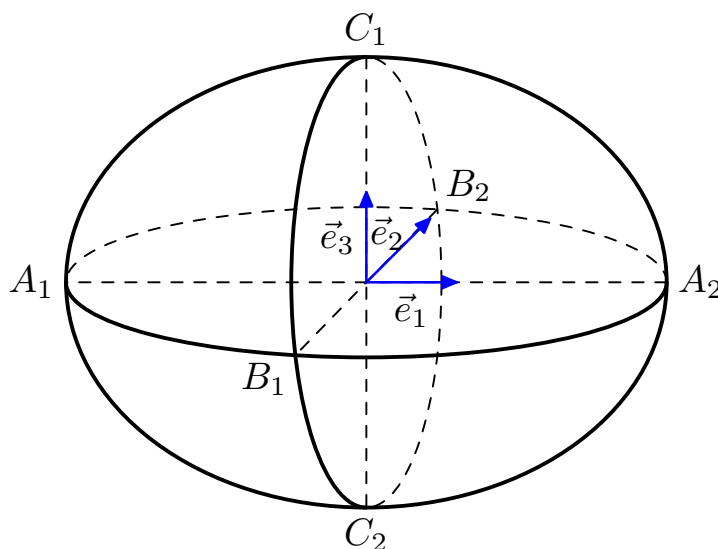
saades pöördpinna võrrandiks

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \quad (28.5)$$

Rakendades kokkusurumist (28.4), saame pinna võrrandiks

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad b := ka. \quad (28.6)$$

Viimases valemis asendasime priimkoordinaadid x'_1, x'_2, x'_3 taas tagasi koordinaatidega x_1, x_2, x_3 . Eespool ei saanud seda teha, sest mõlemad koordinaadid olid samaaegselt kasutusel. *Pinda võrrandiga (28.6), saaduna sobiva ristreeperi suhtes, nimetatakse ellipsoidiks pooltelgedega a , b ja c . Ellipsoidi erijuhtu, kus $a = b$, nimetame pöördellipsoidiks.* Joonisel 28.2 on kujutatud ellipsoidi.



Joonis 28.2

Teiseks paneme pöörlema ümber x_3 -telje poole ellipsi asemel hüperbooli haru

$$\gamma: \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 \geq 0.$$

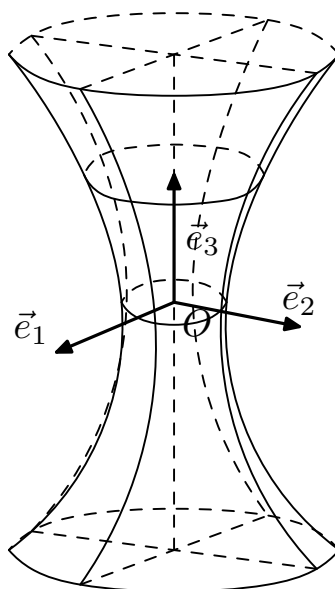
Tekkinud pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

nimetame *ühekatteliseks pöördhüperboloidiks*. Pärast kokkusurumist saame *ühekattelise hüperboloidi võrrandiga*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad b := ka$$

pooltelgedega a , b ja c . Viimast on kujutatud joonisel 28.3.



Joonis 28.3

Kolmandaks paneme pöörlema ümber x_3 -telje hüperbooli harude osad

$$\gamma : \quad -\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_1 \geq 0.$$

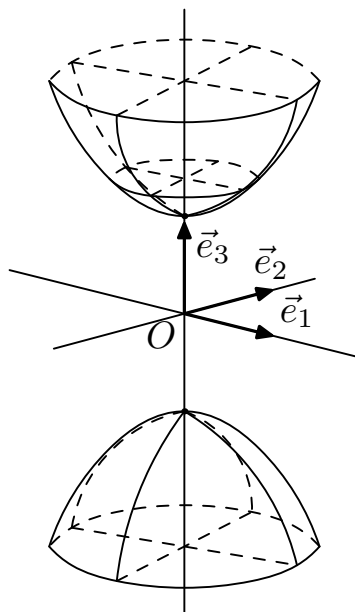
Tekkinud pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1$$

nimetame *kahekatteliseks pöördhüperboloidiks*. Pärast kokkusurumist saame *kahekattelise hüperboloidi võrrandiga*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1, \quad b := ka$$

pooltelgedega a , b ja c . Joonisel 28.4 on kujutatud seda pinda.



Joonis 28.4

Neljandaks paneme pöörloma ümber x_3 -telje parabooli osa

$$\gamma: \quad x_1^2 = 2px_3, \quad x_2 = 0, \quad x_1 \geq 0.$$

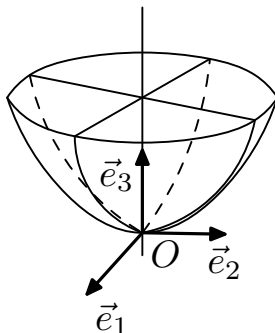
Tekkinud pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_1} = 2x_3, \quad p_1 := p > 0$$

nimetame *elliptiliseks pöördparaboloidiks*. Kokkusurumise tulemusena saadavat pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{p_1} + \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3, \quad p_2 := kp_1$$

nimetame *elliptiliseks paraboloidiks*. Ta on joonisel 28.5.



Joonis 28.5

Viiendaks paneme pöörlema ümber x_3 -telje sirge

$$A_1x_1 + A_3x_3 = 0, \quad A_1 \neq 0, \quad A_3 \neq 0, \quad x_2 = 0.$$

Saame

$$A_1(\pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) = -A_3x_3 \implies A_1^2(x_1^2 + x_2^2) = A_3^2x_3^2$$

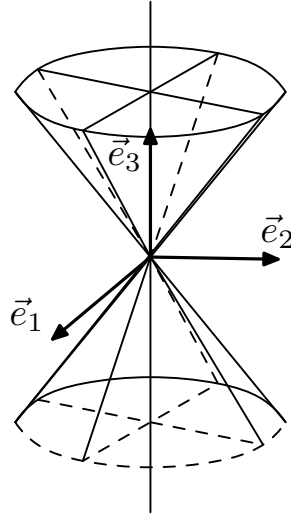
ehk

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \quad a := \frac{1}{|A_1|}, \quad c := \frac{1}{|A_3|}.$$

Pinda viimase võrrandiga nimetatakse *teist järku pöördkoonuseks*. Pärast kokkusurumist saame

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \quad b := ka.$$

Selle võrrandiga määratud pinda nimetame *teist järku koonuseks* (vt. joonist 28.6).



Joonis 28.6

Järgnevad neli pinda moodustame teisel moel kui seni leitud. Kuuen-
da pinna moodustamiseks võtame x_1x_3 -koordinaattasandil parabooli γ_1
võrranditega

$$\gamma_1 : \quad x_1^2 = 2p_1x_3, \quad x_2 = 0, \quad p_1 > 0.$$

Teise parabooli γ_2 võtame tasandil $x_1 = h_1$ võrrandiga

$$\gamma_2 : \quad x_2^2 = -2p_2x_3 + a, \quad p_2 > 0.$$

Et tegemist on parabooliga, seda näeme valemist (27.6). Parabooli γ_2
võrrandis konstandi a valime nii, et tema tipp, mis valemi (27.7) kohaselt
on kirja pandav $K(h_1, 0, \frac{a}{2p_2})$, asub esimesel paraboolil γ_1 . See tähendab,
et tema koordinaadid rahuldavad parabooli γ_1 võrrandit, mistõttu saame

$$h_1^2 = \frac{p_1}{p_2}a \implies a = \frac{p_2}{p_1}h_1^2.$$

Seega parabooli

$$\gamma_2 : \quad x_2^2 = -2p_2x_3 + \frac{p_2}{p_1}h_1^2$$

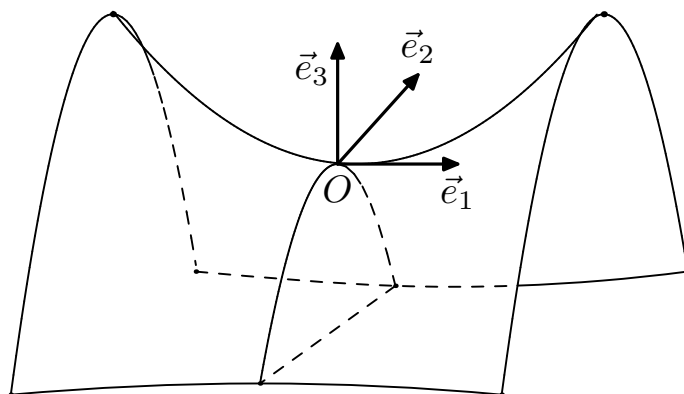
tipp asub paraboolil γ_1 . Viime selle võrrandi kujule:

$$\frac{h_1^2}{p_1} - \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3. \quad (28.7)$$

Vaatleme nüüd parabooli γ_2 kõikidel tasanditel $x_1 = h_1$, siis paraboolidest γ_2 ladestub pind, mille võrrandi saame võrrandist (28.7), asendades konstandi h_1 nüüd juba muutuva suurusega x_1 . Pinda võrrandiga

$$\frac{x_1^2}{p_1} - \frac{x_2^2}{p_2} = 2x_3, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0$$

nimetame *hüperboolseks paraboloidiks* (vt. joonist 28.7).



Joonis 28.7

Järgmiste pindade saamiseks võtame ruumis mingi tasandi π ja sellel mingi joone γ . Selle joone mingis punktis $M \in \gamma$ võtame läbi tema sirge s , mis on risti tasandiga π . Punkti M liikumisel mööda joont γ kirjeldab sirge s liikumine pinna. Tekkinud pinda nimetame *püstsilindriks juhtjoonega γ ja moodustajaga s* . Püstsilindrit, mille juhtjooneks on ellips, hüperbool või parabool, nimetatakse vastavalt elliptiliseks, hüperboolseks või paraboolseks silindriks. Leiame nende silindrite võrrandid sobivas ristreeperis. Esmalt me võtame jutuks olevate joonte kanoonilise reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, mida täiendame kolmanda ühikvektoriga $\vec{e}_3$, mis on valitud vektoritega risti. Valitud ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral me leiamegi oma silindrite võrrandid. Meie juhtjoonte võrranditeks on

$$\epsilon : \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad h : \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad P : \begin{cases} x_2^2 = 2px_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Kui fikseerime punkti M vastavalt ellipsil, hüperboolil või paraboolil, siis

$$\begin{aligned} M(m_1, m_2, 0) \in \epsilon &\iff \frac{m_1^2}{a^2} + \frac{m_2^2}{b^2} = 1, \\ M(m_1, m_2, 0) \in h &\iff \frac{m_1^2}{a^2} - \frac{m_2^2}{b^2} = 1, \\ M(m_1, m_2, 0) \in \mathcal{P} &\iff \updownarrow_{\epsilon}^{\epsilon} = \in \sqrt{\updownarrow_{\infty}^{\infty}}. \end{aligned} \quad (28.8)$$

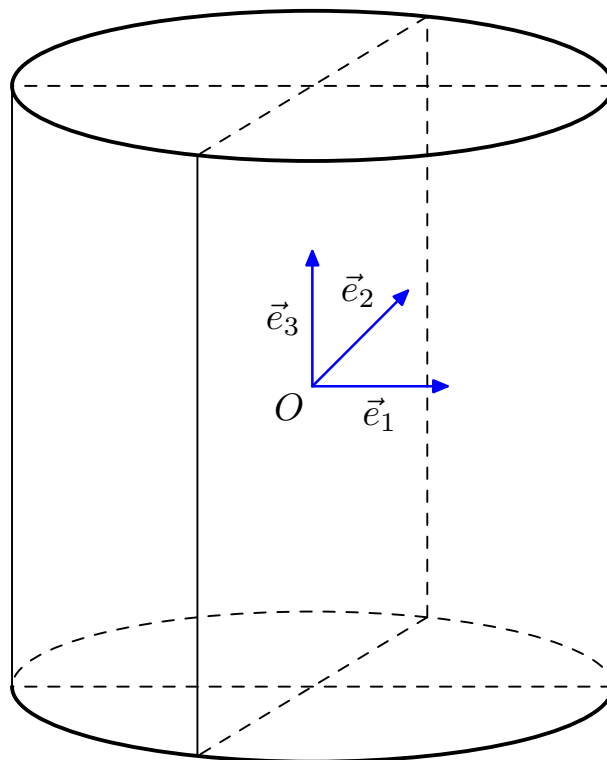
Punkti $M(m_1, m_2, 0)$ läbiva moodustaja sihivektoriks on $\vec{e}_3$. Seega vaadeldava moodustaja parameetrilisteks võrranditeks on

$$s: \quad x_1 = m_1, \quad x_2 = m_2, \quad x_3 = t. \quad (28.9)$$

Laseme punkti $M(m_1, m_2, 0)$ juhtjoonel muutuma, mille tulemusena saame ühe või teise vaatluse all oleva silindri. Asendame valemist (28.9) valemisse (28.8) muutujaks saanud $m_1 = x_1$ ja $m_2 = x_2$. Saame

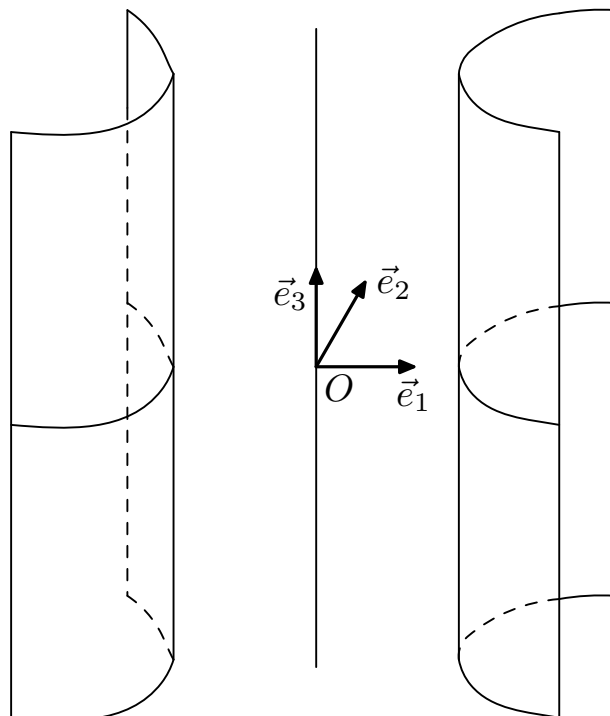
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x_2^2 = 2px_1.$$

Viimased on vastavalt *elliptilise, hüperboolse ja paraboolse silindri võrrandidid*. Neid pindu on kujutatud joonistel 28.8–28.10.

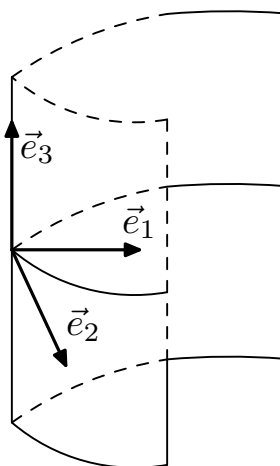


Joonis 28.8

Me vaatlesime üheksat pinda, mille võrrandites muutujate kõrgem aste on kaks. Selliseid pindasid nimetame *teist järku pindadeks*. Teist järku pindasid on üldse seitseteist. Toodud üheksa on neist olulisemad.



Joonis 28.9



Joonis 28.10

Kirjandus

Õpikud

1. **K. Ariva, M. Rahula**, Analüütiline geomeetria I. Tartu, 1968.
2. **A. Borkvell**, Analüütiline geomeetria. Tartu, 1949.
3. **G. Kangro**, Kõrgem algebra. Tallinn, 1962.
4. **M. Kilp**, Algebra I. Tartu, 1998.
5. **Ü. Lumiste, K. Ariva**, Analüütiline geomeetria. Tallinn, 1973.
6. **P. Puusemp**, Lineaaralgebra. Avita, 2000.
7. **R. I. Tõshkevitch, A. S. Fedenko**, Lineinaja algegra i analitičeskaja geometrija. Minsk, 1968 ja 1976 (vene keeles)

Ülesannete kogud

1. **K. Kaarli**, Algebra praktikum (kujutused, maatriksid ja determinandid). Tartu, 1981.
2. **K. Kaarli**, Algebra praktikum (lineaarvõrrandisüsteemid). Tartu, 1986.
3. **L. Tuulmets**, Analüütiline geomeetria I, II, III, IV. Tartu (sobib iga trükk).
4. **I. V. Proskurjakov**, Sbornik zadach po lineinoi algebre. Moskva (sobib iga trükk, vene keeles).
5. **H. D. Ikramov**, Zadachnik po lineinoi algebre. Moskva (sobib iga trükk, vene keeles).

Märkus. Toodud õpikutest ei vasta selle aine õppekavale eriti ükski. Neid tuleb vaadelda täiendava materjalina. Toodud ülesannete kogud katavad analüütiline geomeetria täielikult, algebra kaetakse aga osaliselt.