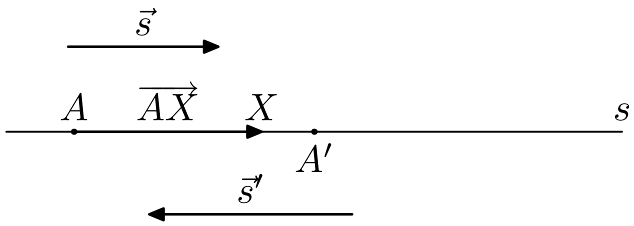
V. SIRGED JA TASANDID

20. SIRGE VÕRRANDID

Sirget me võime vaadelda kas tasandil E_2 või ruumis E_3. Sirget vaadelda sirgel E_1 ei oma mõtet, sest tegemist on ühe ja sama sirgega. Esialgu on meie käsitlus nii E_2 ja E_3 korral ühesugune. Seetõttu me E_2 ja E_3 asemel kirjutame E. Samuti vektorruumide $\mathbf{E}_2$ ja $\mathbf{E}_3$ asemel kirjutame $\mathbf{E}$.

Sirge fikseerimiseks tasandil (ruumis) on mitmeid võimalusi. Näiteks tema kahe erineva punkti abil. Tavaliselt kasutatakse järgmist võimalust: sirgel fikseeritakse üks punkt ja nullvektorist erineva vektori abil antakse sirge siht. Seda vektorit nimetatakse *sirge sihivektoriks*. Tähistame edaspidi sirget tähega s ning temal punkti ja sihivektorit vastavalt A ja $\vec{s}$ abil. Punkt X on sirge s punkt, kui vektor $\overrightarrow{AX}$ on sirge poolt indutseeritud ühemõõtmelise vektorruumi vektor (vt. joonist 20.1).



Joonis 20.1

Selle vektorruumi baasiks kõlbab vektor $\vec{s}$, sest ta pole nullvektor. Seega

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20.1}$$

Et saada sirge s kõik punktid, tuleb nn. *parameetril* t lasta muutuda reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Võrrandit (20.1) nimetame *sirge* s *parameetriliseks vektorvõrrandiks.* Teda võime kirjutada ka järgmiselt:

$$s = \{X|\ \overrightarrow{AX} = t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

ehk

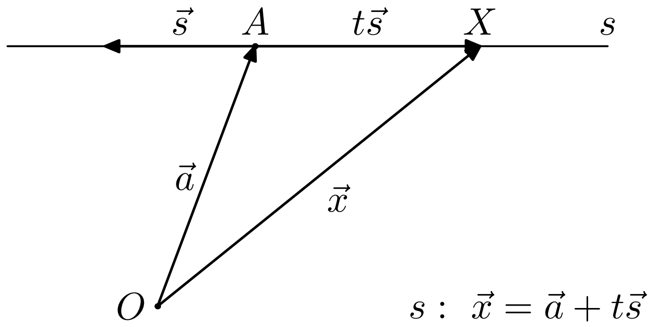
$$s: \quad \overrightarrow{AX} = t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20.2}$$

Juhime tähelepanu sellele, et sirgel s on parameetrilisi vektorvõrrandeid lõpmatult palju, sest juba punkti A fikseerimiseks sirgel s on lõpmatult palju võimalusi. Samuti võib sihivektori $\vec{s}$ asendada mistahes teise vektoriga $\vec{s}\,' = k\vec{s}$, kus k võib olla mistahes nullist erinev reaalarv, ilma et sirge muutuks. Anname sirge võrrandile (20.2) uue temaga samaväärse kuju. Selleks fikseerime mingi punkti $O \in E$, mida nimetame *pooluseks.*

Definitsioon 20.1. *Punkti $X \in E$ kohavektoriks pooluse O suhtes nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OX}$.*

Vektorite liitmise definitsiooni kohaselt (vt. joonist 20.2)

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}. \tag{20.3}$$



Joonis 20.2

Siin vektorid $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OX}$ on sirge s fikseeritud punkti A ja suvalise punkti X kohavektorid. Edaspidi tähistame neid kohavektoreid lühemalt

$$\vec{a} := \overrightarrow{OA}, \quad \vec{x} := \overrightarrow{OX}.$$

Seega valem (20.3) saab sirge võrrandi (20.2) abil kuju

$$\vec{x} = \vec{a} + \overrightarrow{AX} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}.$$

Sirge võrrandit

$$s: \quad \vec{x} = \vec{a} + t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{20.4}$$

nimetatakse *sirge parameetriliseks vektorvõrrandiks punktide kohavektorite kaudu.* Kui võrrandis (20.4) parameeter t muutub reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$, siis seotud vektori $\overline{OX} \in \vec{x}$ otspunkt X kirjeldab sirge s.

Järgnevas anname sirge vektorvõrrandi koordinaatide abil. Viime arutelu läbi ruumis E_3. Tasandi E_2 korral on arutelu samasugune. Seetõttu jätame selle lugeja hooleks. Võtame ruumis E_3 mistahes reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Reeperi alguspunkti (kui pooluse) O suhtes tekivad punktide A ja X kohavektorid

$$\vec{a} := \overrightarrow{OA}, \quad \vec{x} := \overrightarrow{OX}.$$

Avaldades need vektorid reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kaudu, saame avaldised

$$\begin{aligned} \vec{a} =& a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Longleftrightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \\ \vec{x} =& x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \Longleftrightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{20.5}$$

Definitsiooni 16.9 kohaselt on kohavektorite $\vec{a}$ ja $\vec{x}$ koordinaadid vastavalt punktide A ja X koordinaadid. Seega

$$A(a_1, a_2, a_3), \quad X(x_1, x_2, x_3).$$

Kuna punkt A on fikseeritud punkt, siis tema koordinaate a_1, a_2 ja a_3 tuleb vaadelda antuna. Reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes saame leida ka sihivektori $\vec{s}$ koordinaadid, avaldades ta baasi kaudu:

$$\vec{s} = s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + s_3\vec{e}_3 \Longleftrightarrow \vec{s} = (s_1, s_2, s_3). \tag{20.6}$$

Sihivektori $\vec{s}$ koordinaate tuleb samuti vaadelda kui antud reaalarve. Kuna sihivektor $\vec{s}$ pole nullvektor, siis kõik tema koordinaadid pole nullid, sest vastasel juhul $\vec{s} = 0\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 = \vec{0}$, mis on lubamatu. Teisendame eelnevalt sirge vektorvõrrandit:

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{s} \Longleftrightarrow \vec{a} + t\vec{s} - \vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} + t\vec{s} + (-1)\vec{x} = \vec{0}.$$

Teeme nüüd siia asendused valemitest (20.5) ja (20.6). Saame

$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + t(s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + s_3\vec{e}_3) + (-1)(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = \vec{0}$$

ehk

$$(a_1 + ts_1 - x_1)\vec{e}_1 + (a_2 + ts_2 - x_2)\vec{e}_2 + (a_3 + ts_3 - x_3)\vec{e}_3 = \vec{0}. \tag{20.7}$$

Me tahame näidata, et viimases baasivektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kordajad on võrdsed nulliga. See on tõepoolest nii, sest baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on definitsiooni 10.1 kohaselt lineaarselt sõltumatu. Definitsiooni 9.1 kohaselt on seetõttu võrrandil

$$\xi_1\vec{e}_1 + \xi_2\vec{e}_2 + \xi_3\vec{e}_3 = \vec{0}$$

ainult null-lahend $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ ja $\xi_3 = 0$. Seega valemis (20.7) kordajad ei ole viimase võrrandi mingi teine lahend, vaid null-lahend. Seega

$$a_1 + ts_1 - x_1 = 0, \quad a_2 + ts_2 - x_2 = 0, \quad a_3 + ts_3 - x_3 = 0,$$

millest

$$s : \begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1 \\ x_2 = a_2 + ts_2, \quad t \in \mathbb{R}. \\ x_3 = a_3 + ts_3 \end{cases} \tag{20.8}$$

Viimaseid võrrandeid nimetame *sirge s parameetrilisteks võrranditeks koordinaatides.* Iga konkreetse $t = t_\circ$ korral saame leida valemi (20.8) abil

$$\begin{aligned} x_1^\circ &= a_1 + t_\circ s_1, \\ x_2^\circ &= a_2 + t_\circ s_2, \\ x_3^\circ &= a_3 + t_\circ s_3, \end{aligned}$$

mis määravad sirgel s punkti $X = X_\circ$ koordinaatidega x_1°, x_2° ja x_3°. Näiteks $t = 0$ korral võrranditest (20.8) saame $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ ja $x_3 = a_3$, mis on sirge andmiseks kasutatud punkti A koordinaadid.

Enne kui läheme edasi oma arutlustega, teeme ühe tähelepaneku, mis edaspidi lihtsustab meie tööd. Võrreldes valemit (20.4) ja sama valemit (20.8) koordinaatides, paneme tähele, et viimase saamiseks tuleb valemis (20.4) jätta ära kõikjalt vektori märk ning varustada nüüd juba endised vektorid koordinaatide indeksitega, tasandi korral indeksitega 1 ja 2 ning ruumi korral indeksitega 1, 2 ja 3.

Järgnevas leiame sirge jaoks veel ühed võrrandid, esialgu küll eeldusel, et sirge s sihivektori $\vec{s}$ kõik koordinaadid on nullist erinevad. Seega $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ ja $s_3 \neq 0$. Sirge parameetrilistest võrranditest (20.8) igaühest saame avaldada parameetri t. Saame

$$t = \frac{x_1 - a_1}{s_1}, \quad t = \frac{x_2 - a_2}{s_2}, \quad t = \frac{x_3 - a_3}{s_3}.$$

Tehtud eeldusel siin jagamised on teostatavad. Kuna vasakud pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka paremad pooled. Me saame

$$s: \quad \frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{s_2} = \frac{x_3 - a_3}{s_3}. \tag{20.9}$$

Olgugi et viimane on kolmest võrrandist

$$\frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{s_2}, \quad \frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_3 - a_3}{s_3}, \quad \frac{x_2 - a_2}{s_2} = \frac{x_3 - a_3}{s_3}$$

koosnev süsteem, siiski olulisi võrrandeid on kaks, kolmas on juba järeldus. Osutub, et valemit (20.9) saab kasutada ka siis, kui sihivektori mõni koordinaat on võrdne nulliga. Sel korral jagamine nulliga pole muidugi teostatav, vaid tuleb teha teatavad kokkulepped. Sihivektori koordinaatidest võib võrduda nulliga ülimalt kaks, et sihivektor $\vec{s}$ oleks ikka veel nullvektorist erinev. Selgitame öeldut lähemalt. Olgu esmalt sihivektoril $\vec{s}$ näiteks $s_3 = 0$, aga $s_1 \neq 0$ ja $s_2 \neq 0$. Võrranditest (20.8) ainult kahest esimesest saame avaldada parameetri t, saades

$$\frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{s_2}.$$

Viimane võrrand saab kuju

$$x_3 - a_3 = 0.$$

Seega saame

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 - a_1}{s_1} = \dfrac{x_2 - a_2}{s_2} \\ x_3 - a_3 = 0 \end{cases}. \tag{20.10}$$

Formaalselt valem (20.9) näeb välja

$$\frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{s_2} = \frac{x_3 - a_3}{0}. \tag{20.11}$$

Muidugi $\frac{x_3 - a_3}{0}$ ei ole teostatav. Teeme kokkuleppe: kui valemis (20.11) kuskil nimetajas on teostamatu jagamine nulliga, siis jätame valemis (20.11) selle osa ära ning lugeja võtame võrdseks nulliga. Seega võrrand (20.11) saab kuju (20.10). Oletame nüüd, et sihivektoril on nüüd kaks koordinaati võrdsed nulliga, näiteks $s_2 = 0$ ja $s_3 = 0$, siis $s_1 \neq 0$. Valemist (20.8) saame

$$x_2 - a_2 = 0, \quad x_3 - a_3 = 0. \tag{20.12}$$

Esimesest saab küll avaldada t, saades $t = \frac{x_1 - a_1}{s_1}$, aga paraku pole teda mitte millegagi võrduma panna. Seega saame ainult (20.12). Seega

$$\frac{x_1 - a_1}{s_1} = \frac{x_2 - a_2}{0} = \frac{x_3 - a_3}{0}$$

andis (20.12). Kokkuvõtvalt tehtud kokkuleppe raames saame võrrandeid (20.9) kasutada kõikidel juhtudel. Sirge võrrandeid (20.9) nimetame *sirge kanoonilisteks võrranditeks.*

Sellega see ühisosa, kus sirge võrrandid on oma olemuselt ruumis ja tasandil ühesugused, on ammendatud. Tasandil muidugi kolmandaid koordinaate ei ole. Tasandil asuval sirgel on veel terve rida võrrandeid. Seejuures igaühel neist sirge võrranditest on oma eelised. Interpreteerimaks neis võrrandites kordajaid eeldame, et tasandi reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on järgnevas kuni selle paragrahvi lõpuni ristreeper. Seega kasutatavad koordinaadid on ristkoordinaadid.

Lähtume sirge parameetrilistest võrranditest (20.8), mis tasandi korral on järgmised

$$s : \begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1 \\ x_2 = a_2 + ts_2 \end{cases}. \tag{20.13}$$

Püüame viimastes parameetrist t lahti saada. Selleks korrutame esimest võrrandit sihivektori teise koordinaadiga s_2 ja teist sihivektori esimese koordinaadiga s_1 ning seejärel lahutame esimesest võrrandist teise. Me saame

$$s: \quad s_2x_1 + (-s_1)x_2 - (s_2a_1 - s_1a_2) = 0.$$

Tähistame siin konstante järgmiselt

$$A_1 := s_2, \quad A_2 := -s_1, \quad A_3 := -(s_2a_1 - s_1a_2). \tag{20.14}$$

Saame

$$s : A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0. \tag{20.15}$$

Kuna $\vec{s} \neq \vec{0}$, siis valemis (20.15) ei ole valemi (20.14) tõttu kordajad A_1 ja A_2 korraga võrdsed nulliga. Seega saadud sirge võrrand (20.15) on x_1 ja x_2 suhtes esimese astme võrrand. Seda sirge võrrandit nimetame *sirge üldvõrrandiks.* Osutub, et ühel ja samal sirgel on palju üldvõrrandeid. Selgitame öeldut. Eespool määrasime sirge temal fikseeritud punkti A ja sihivektori $\vec{s}$ abil. Me võime punkti $A \in s$ asendada mistahes teise punktiga $A'(a_1', a_2')$ sellel sirgel. Sihivektori $\vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0}$ võime aga asendada mistahes uue vektoriga

$$\vec{s}\,' = k\vec{s}, \quad k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Kui tähistada $\vec{s}\,' = (s_1', s_2')$, siis teoreemi 10.3 kohaselt

$$s_1' = ks_1, \quad s_2' = ks_2. \tag{20.16}$$

Uue punkti A' koordinaadid saame sirge parameetrilistes võrrandites (20.13) parameetri sobival fikseerimisel $t = t_o$. Saame

$$a_1' = a_1 + t_o s_1, \quad a_2' = a_2 + t_o s_2. \tag{20.17}$$

Sama sirge s uuteks parameetrilisteks võrranditeks on

$$s : \begin{cases} x_1 = a_1' + ts_1', \\ x_2 = a_2' + ts_2' \end{cases}. \tag{20.18}$$

Võrrandid (20.13) ja (20.18) on mõlemad sama sirge parameetrilised võrrandid. Nende sisuline erinevus seisneb selles, et nad hakkavad sirgele punkte "paigutama" parameetri t muutumisel reaalarvude hulgas erinevalt. Lõpptulemuseks on ikkagi sama sirge.

Leiame nüüd võrrandite (20.18) abil meie sirge üldvõrrandi. Analoogiliselt võrrandi (20.15) tuletamisele, saame

$$s : \quad A_1'x_1 + A_2'x_2 + A_3' = 0, \tag{20.19}$$

kus

$$A_1' = s_2', \quad A_2' = -s_1', \quad A_3' = -(s_2'a_1' - s_1'a_2').$$

Selgitame, mille poolest erinevad sama sirge s üldvõrrandid (20.15) ja (20.19). Abiks on seejuures valemid (20.16) ja (20.17). Me saame

$$A'_1 = s'_2 = ks_2 = kA_1, \quad A'_2 = -s'_1 = k(-s_1) = kA_2$$

ja

$$A'_3 = -(s'_2 a'_1 - s'_1 a'_2) = -k(s_2 a'_1 - s_1 a'_2) =$$
$$-k[s_2(a_1 + t_o s_1) - s_1(a_2 + t_o s_2)] = k(-(s_2 a_1 - s_1 a_2)) = kA_3.$$

Seega saime

$$A'_1 = kA_1, \quad A'_2 = kA_2, \quad A'_3 = kA_3, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \qquad (20.20)$$

Saime, et kui sirge mingit üldvõrrandit korrutada läbi mistahes nullist erineva reaalarvuga, siis saame ikkagi sama sirge üldvõrrandi. Tänu valemitele (20.20) saame öelda, et kui sirge üldvõrrandis mõni kordajatest A_1, A_2 ja A_3 on võrdne nulliga (ei ole võrdne nulliga), siis on see nii ka tema mistahes teises üldvõrrandis, s.o.

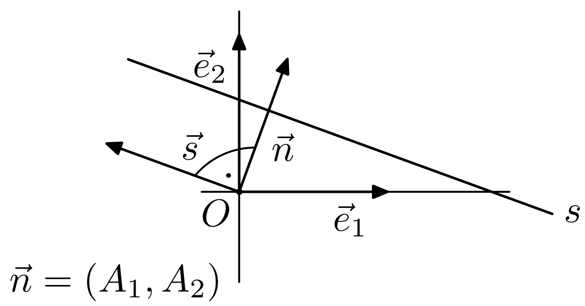
$$A_i = 0 \Longleftrightarrow A'_i = 0, \quad A_i \neq 0 \Longleftrightarrow A'_i \neq 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_3.$$

Definitsioon 20.2. *Vektorit* $\vec{n} = (A_1, A_2)$ *nimetatakse sirge*

$$s: \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 = 0$$

normaalvektoriks.

Kuna sihivektori kõik koordinaadid ei ole korraga nullid, siis normaalvektor ei ole nullvektor. Osutub, et normaalvektor on risti sirgega. Selles veendumiseks on küllaldane näidata, et sirge normaal- ja sihivektor on risti (vt. joonist 20.3).



Joonis 20.3

Omaduse 17.6 tõttu on vaja näidata, et skalaarkorrutis $\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle$ on võrdne nulliga. See on tõesti nii, sest

$$\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle = A_1 s_1 + A_2 s_2 = s_2 s_1 - s_1 s_2 = 0.$$

Nüüd selgitame, mida võime öelda sirge asendi kohta koordinaattelgede suhtes, kui tema üldvõrrandis mõni kordaja on võrdne nulliga. Enne kui me seda teeme, anname koordinaattelje mõiste.

Definitsioon 20.3. *Sirget, mis läbib reeperi alguspunkti O ja mille sihivektoriks on vektor $\vec{e}_i$, nimetame koordinaatteljeks.*

Tasandi korral määrab reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ kaks koordinaattelge ja ruumi korral määrab reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ aga kolm koordinaattelge. *Punkti O ja $\vec{e}_i$ poolt määratud koordinaattelge nimetame $O\vec{e}_i$-teljeks ehk x_i-teljeks.* Hakkame nüüd analüüsima sirge asendit koordinaattelgede suhtes.

Kui $A_3 = 0$, siis sirge üldvõrrand (20.15) saab kuju

$$s: \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0.$$

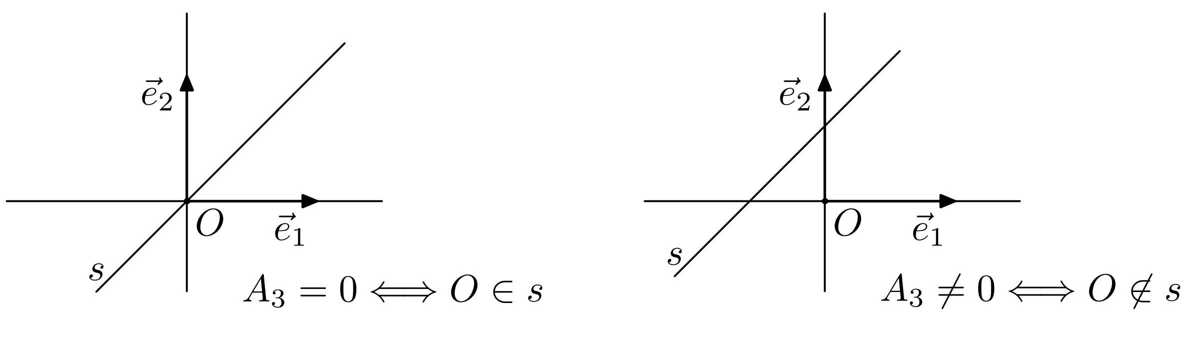
Näeme, et ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ alguspunkti $O(0,0)$ koordinaadid rahuldavad viimast võrrandit. Seega

$$A_3 = 0 \Longrightarrow O \in s.$$

Kehtib ka vastupidi. Kui $O \in s$, siis tema koordinaadid rahuldavad üldvõrrandit (20.15), s.o.

$$A_1 0 + A_2 0 + A_3 = 0 \Longrightarrow A_3 = 0.$$

Saime (vt. joonist 20.4)



Joonis 20.4

$$A_3 = 0 \Longleftrightarrow O \in s.$$

Viimasest saame

$$A_3 \neq 0 \Longleftrightarrow O \notin s.$$

Olgu nüüd sirge üldvõrrandis $A_2 = 0$, s.o.

$$s: \quad A_1 x_1 + A_3 = 0. \tag{20.21}$$

Valemi (20.14) tõttu on $s_1 = 0$. Sirge sihivektori kohta saame

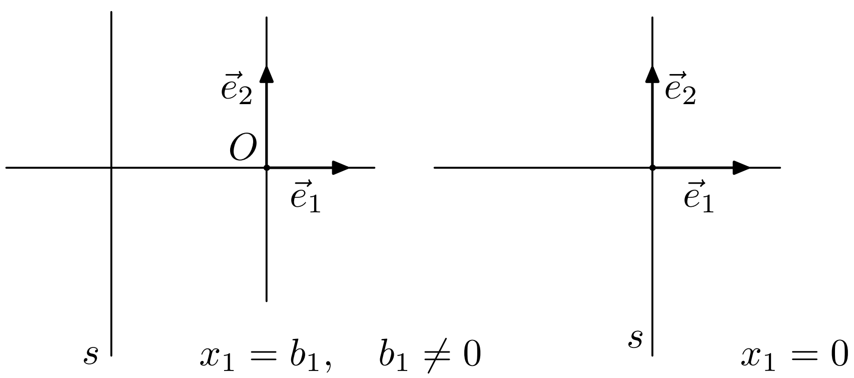
$$\vec{s} = 0\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 = s_2\vec{e}_2 \Longrightarrow \vec{s} = s_2\vec{e}_2.$$

Siin $s_2 \neq 0$, sest $\vec{s} \neq \vec{0}$. Näeme, et sirge sihivektor on kollineaarne teise baasivektoriga. Teisiti öelduna sirge on paralleelne või ühtub koordinaatteljega $O\vec{e}_2$ ehk x_2-teljega. Täpsemalt: meie sirge on paralleelne (ühtub) x_2-teljega, kui $O \notin s$ $(O \in s)$, s.o. $A_3 \neq 0$ $(A_3 = 0)$. Praeguse sirge üldvõrrandi (20.21) asemele võtame samaväärse võrrandi, mis saadakse temast nullist erineva kordajaga $\frac{1}{A_1}$ läbikorrutamisel. Me saame

$$x_1 = b_1, \qquad (20.22),$$

kus

$$b_1 = -\frac{A_3}{A_1}.$$



Joonis 20.5

Kui $b_1 \neq 0$, s.o. $A_3 \neq 0$, siis sirge võrrand (20.22) on x_2-teljega paralleelse sirge võrrand. Kui $b_1 = 0$, s.o. $A_3 = 0$, siis võrrand

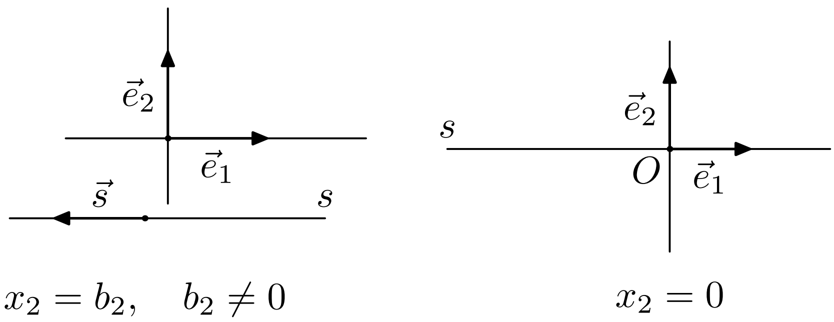
$$x_1 = 0$$

on x_2-telje võrrand (vt. ka joonist 20.5).

Lugeja hooleks jätame analüüsida juhu $A_1 = 0$. Märgime ainult seda, et sirge on paralleelne x_1-teljega või ühtub temaga. Paralleelsus realiseerub $O \notin s$ ehk $A_3 \neq 0$ korral ja ühtumine $O \in s$ ehk $A_3 = 0$ korral. Esimesel juhul (teisel juhul) on sirge võrrandiks

$$x_2 = b_2, \quad b_2 \neq 0 \quad (x_2 = 0).$$

(vt. joonist 20.6)



Joonis 20.6

Definitsioon 20.4. *Me ütleme, et tasandil olev sirge on reeperi suhtes üldasendis, kui ta ei läbi reeperi alguspunkti ja ei ole paralleelne kummagi koordinaatteljega.*

Seega sirge on üldasendis, kui tema üldvõrrandis (20.15) kõik kordajad on nullist erinevad, s.o. $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ ja $A_3 \neq 0$.

Osutub, et tasandil oleval sirgel on veel teisigi võrrandeid.

Järgnevas vaatleme sirgeid, mille üldvõrrandis kordaja A_2 ei ole null. Seega vaatluse alt jäävad välja sirged, mis on paralleelsed x_2-teljega või ühtuvad temaga. Valime selliste sirgete üldvõrrandite (20.19) seast välja sellise, et x_2 kordaja on 1. Seega võrrandit (20.15) tuleb korrutada reaalarvuga $\frac{1}{A_2}$. Saame

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \Longrightarrow x_2 = \Big(-\frac{A_1}{A_2}\Big)x_1 + \Big(-\frac{A_3}{A_2}\Big).$$

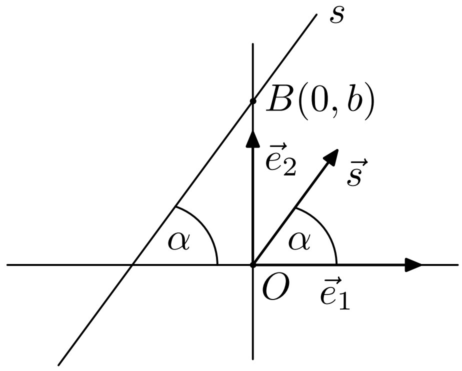
Kuna $A_2 \neq 0$, siis jagatised

$$a := -\frac{A_1}{A_2}, \quad b := -\frac{A_3}{A_2}. \tag{20.23}$$

eksisteerivad. Seega sirge võrrandiks me saame

$$s: \quad x_2 = ax_1 + b. \tag{20.24}$$

Sirge võrrandit (20.24) nimetame *sirge taandatud võrrandiks.* Selgitame taandatud võrrandis (20.24) kordajate a ja b sisu (vt. joonist 20.7).



$x_2 = ax_1 + b; \quad a = tan\ \alpha$

Joonis 20.7

Kuna sirge s ei ole paralleelne x_2-teljega, siis ta lõikab teda mingis punktis B. Kuna see punkt asub x_2-teljel ja sirgel s, siis tema koordinaadid tuleb leida lineaarvõrrandisüsteemist

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = ax_1 + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = b \end{cases} \Longrightarrow B(0, b).$$

Seega sirge taandatud võrrandi (20.24) vabaliige b on punkti B teine koordinaat. Leiame x_2-teljest välja eralduva lõigu OB nn. *telglõigu* pikkuse. Kuna $\overrightarrow{OB} = (0, b)$, siis

$$OB = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{0^2 + b^2} = \sqrt{b^2} = |b| \Longrightarrow OB = |b|.$$

Seega sirge taandatud võrrandis (20.24) vabaliikme b absoluutväärtus on x_2-telje telglõigu pikkus. *Kordajat* b *sirge taandatud võrrandis* (20.24) *nimetatakse sirge* s *algordinaadiks.*

Asume nüüd kordaja a uurimisele. Valemite (20.23) ja (20.14) abil saame

$$a = -\frac{A_1}{A_2} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{|\vec{s}| \sin \angle(\vec{s}, \vec{e}_1)}{|\vec{s}| \cos \angle(\vec{s}, \vec{e}_1)} = \tan \angle(\vec{s}, \vec{e}_1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a = \tan \angle(\vec{s}, \vec{e}_1). \qquad (20.25)$$

Siin nurk $\alpha := \angle(\vec{s}, \vec{e}_1)$ on nurk sirge sihivektori ja esimese baasivektori vahel. *Nurka* α *nimetame sirge* s *tõusunurgaks ja kordajat* a *tõusuks.* Valemist (20.25) näeme, et *sirge tõus on võrdne tõusunurga tangensiga.*

Sirge taandatud võrrandi kohta öeldakse ka täpsemalt, et *sirge taandatud võrrand on antud tõusu ja algordinaadi abil.*

Anname veel ühe sirge võrrandi. Seda ei saa anda kõigi sirgete jaoks. Sirge peab olema üldasendis. Lähtume sirge üldvõrrandist (20.15), s.o.

$$s: \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0.$$

Valime sellise üldvõrrandi, et vabaliige A_3 oleks -1. Selleks tuleb viimast üldvõrrandit korrutada reaalarvuga $-\frac{1}{A_3}$. Viimane eksisteerib $A_3 \neq 0$ tõttu. Me saame

$$s: \quad \Big(-\frac{A_1}{A_3}\Big)x_1 + \Big(-\frac{A_2}{A_3}\Big)x_2 = 1$$

ehk

$$s: \quad \frac{x_1}{-\frac{A_3}{A_1}} + \frac{x_2}{-\frac{A_3}{A_2}} = 1.$$

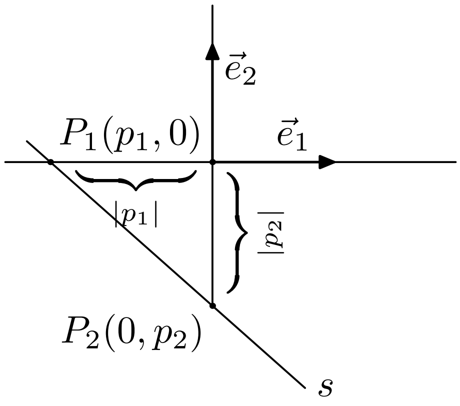
See protseduur on ka võimalik, sest ka $A_1 \neq 0$ ja $A_2 \neq 0$. Tähistame

$$p_1 := -\frac{A_3}{A_1}, \quad p_2 := -\frac{A_3}{A_2}.$$

Sirge võrrand saab kuju

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 1.$$

Saadud sirge võrrandit nimetatakse sirge võrrandiks telglõikudes. Selgitame siin kordajate p_1 ja p_2 sisu (vt. joonist 20.8).



Joonis 20.8

Kuna sirge on üldasendis, siis ta lõikab nii x_1-telge kui ka x_2-telge mingites punktides, mis erinevad reeperi alguspunktist, sest $A_3 \neq 0$. Tähistame lõikepunkti x_1-teljel P_1 abil ja x_2-teljel P_2 abil. Punkti P_1 koordinaadid saame süsteemist

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = p_1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow P_1(p_1, 0)$$

ja punkti P_2 koordinaadid aga süsteemist

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = p_2 \end{cases} \Longrightarrow P_2(0, p_2).$$

Seega p_1 ja p_2 on vastavalt punktide P_1 ja P_2 esimene ja teine koordinaat. Leiame veel koordinaattelgedest välja eraldunud lõikude OP_1 ja OP_2 nn. telglõigude pikkused. Kuna $\overrightarrow{OP_1} = (p_1, 0)$ ja $\overrightarrow{OP_2} = (0, p_2)$, siis

$$OP_1 = |\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{p_1^2 + 0^2} = \sqrt{p_1^2} = |p_1|$$

ja

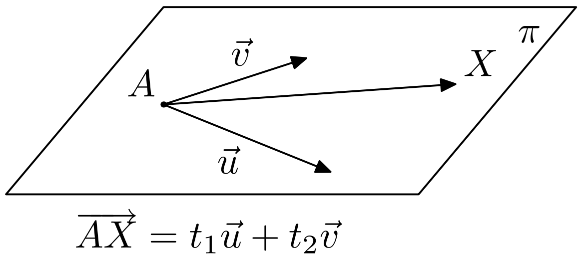
$$OP_2 = |\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{0^2 + p_2^2} = \sqrt{p_2^2} = |p_2|.$$

Nagu näeme on telglõikude pikkused

$$OP_1 = |p_1|, \quad OP_2 = |p_2|.$$

21. TASANDI VÕRRANDID

Nähtavasti tasandit, mida tähistame π abil, saab vaadelda ainult ruumis E_3. Arutleme nagu sirge korral, et millised on vajalikud algandmed tasandi määramiseks. Ilmselt on selleks küllaldane teada tasandil ühte fikseeritud punkti $A \in E_3$ ning veel kahte mittekollineaarset vektorit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{E}_3$ ehk samaväärselt öelduna lineaarselt sõltumatut kahevektorilist vektorsüsteemi $\{\vec{u}, \vec{v}\}$. *Tasandit määravate lineaarselt sõltumatut vektorsüsteemi nimetatakse tasandi rihiks.* Juuresoleval joonisel 21.1 on rihivektorid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ rakendatud punktist A.



Joonis 21.1

Tasandit määravate algandmete kolmik $\{A; \vec{u}, \vec{v}\}$ ei ole mitte midagi muud kui selle tasandi reeper. Ruumi E_3 punkt X on parajasti tasandi π punkt, kui tema kohavektor $\overrightarrow{AX}$ avaldub tema reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ kaudu, s.o. $\overrightarrow{AX} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}$. Saame

$$\pi = \{X| \ \ \overrightarrow{AX} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}\} \tag{21.1}$$

ehk

$$\pi : \quad \overrightarrow{AX} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Saadud võrrandit nimetatakse tasandi parameetriliseks vektorvõrrandiks. Muutujaid t_1 ja t_2 nimetatakse aga parameetriteks. Tasandil π on võrrandeid (21.1) lõpmatult palju, sest punkti A võib tasandil π fikseerida väga erinevalt. Sama olukord on rihivektorite $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ valikuga.

Anname tasandi võrrandi (21.1) kohavektorite abil. Pooluse $O \in E_3$ suhtes olgu punktide A ja X kohavektoreid $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OX}$ tähistatud

$$\vec{a} := \overrightarrow{OA}, \quad \vec{x} := \overrightarrow{OX}.$$

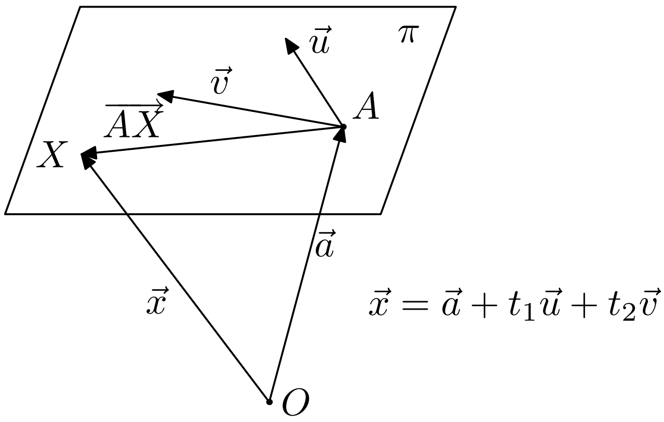
Me saame

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \vec{a} + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

ehk

$$\pi: \quad \vec{x} = \vec{a} + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \tag{21.2}$$

(vt. joonist 21.2).



Joonis 21.2

Seda tasandi võrrandit nimetatakse tasandi π *parameetriliseks vektorvõrrandiks kohavektorite abil.* Kui siin sellest võrrandist saadavad vektorid $\vec{x}$ rakendada punktist O, siis nende lõpp-punktid kirjeldavad tasandi π.

Leiame nüüd tasandi π võrrandi koordinaatides. Selleks tuleb ruumis fikseerida mingi reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Sel korral saavad nii punktid kui ka vektorid koordinaadid. Tekivad avaldised

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \Longleftrightarrow X(x_1, x_2, x_3),$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Longleftrightarrow A(a_1, a_2, a_3)$$

ja

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3, \qquad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3.$$

Teeme siit asendused võrrandisse (21.2). Arutleme analoogiliselt nagu tegime eelmises paragrahvis valemist (20.4) valemi (20.8) saamisel. Me saame

$$\pi : \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + t_1u_1 + t_2v_1 \\ x_2 = a_2 + t_1u_2 + t_2v_2, \\ x_3 = a_3 + t_1u_3 + t_2v_3 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \tag{21.3}$$

Võrrandeid (21.3) *nimetatakse tasandi* π *parameetrilisteks võrranditeks koordinaatides.* Ka tasandi parameetrilised võrrandid pole üheselt määratud, sest (nagu eespool selgitatud) pole punkti A ja rihi $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ valik üheselt määratud.

Meie järgmiseks sammuks on saada võrranditest (21.3) tasandi selline võrrand, mis ei sisalda parameetreid t_1 ja t_2. Selleks korrutame valemis (21.3) võrrandeid vastavalt teguritega

$$A_1 := \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 := -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 := \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \tag{21.4}$$

ning liidame seejärel kokku. Saame

$$\begin{aligned} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 &= (A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3) + \\ t_1(A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3) &+ t_2(A_1v_1 + A_2v_2 + A_3v_3). \end{aligned} \tag{21.5}$$

Osutub, et siin kordajad parameetrite t_1 ja t_2 juures on võrdsed nulliga. Tõepoolest, sest

$$A_1u_1 + A_2u_2 + A_3u_3 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} u_3 =$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

ja

$$A_1v_1 + A_2v_2 + A_3v_3 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} v_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} v_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} v_3 =$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Siin arvutamisel me kasutasime determinantide omadusi. Tähistame konstanti

$$A_4 := -(A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3).$$

Tasandi võrrand (21.5) saab kuju

$$\pi : \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0. \tag{21.6}$$

Viimases võrrandis kordajad A_1, A_2 ja A_3 ei ole korraga nullid. Seda on lihtne põhjendada, kui reeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper. Sel korral valemist (21.4) näeme, et vaadeldavad kordajad on vektorkorrutise $\vec{u} \times \vec{v}$ koordinaadid, s.o.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (A_1, A_2, A_3).$$

Vektorsüsteemi $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ lineaarse sõltumatuse tõttu järeldusest 18.1 saame $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Seega kõik tema koordinaadid ei ole korraga nullid. Nüüd võime öelda, et tasandi võrrand (21.6) on esimese astme võrrand ehk teisiti öelduna lineaarvõrrand. *Tasandi võrrandit* (21.6) *nimetatakse tasandi üldvõrrandiks.* Nagu sirge korral, ei ole ka tasandi üldvõrrand määratud üheselt. Tõestuseta ütleme, et kui muudame tasandit määravaid algandmeid, s.o. tema punkti A ja rihti $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ muutmata seejuures tasandit, siis tasandi üldvõrrand (21.6) korrutub teatava teguriga $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tegur k muutub täies ulatuses märgitud hulgas.

Definitsioon 21.1. *Vektorit* $\vec{n} := \vec{u} \times \vec{v}$ *nimetatakse tasandi normaalvektoriks.*

Normaalvektor ei ole nullvektor ja vektorkorrutise definitsiooni tõttu on risti vektoritega $\vec{u}$ ja $\vec{v}$, seega tasandiga.

Nüüd uurime tasandi asendit reeperi suhtes, kui tema üldvõrrandis mõni kordajatest on võrdne nulliga.

Kui $A_4 = 0$, siis tasandi üldvõrrand (21.6) on kujuga

$$\pi : \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0. \tag{21.7}$$

Näeme, et reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ alguspunkti koordinaadid, mis on võrdsed nulliga, rahuldavad võrrandit (21.7), sest $A_1 0 + A_2 0 + A_3 0 = 0$. Saime

$$A_4 = 0 \Longrightarrow O \in \pi.$$

Kehtib ka vastupidi. Kui $O \in \pi$, siis

$$O \in \pi \Longrightarrow A_1 0 + A_2 0 + A_3 0 + A_4 = 0 \Longrightarrow A_4 = 0.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$O \in \pi \Longleftrightarrow A_4 = 0.$$

Sellest valemist omakorda saame

$$O \notin \pi \Longleftrightarrow A_4 \neq 0.$$

Nüüd oletame, et $A_3 = 0$, siis tasandi üldvõrrand (21.6) on kujuga

$$\pi : \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_4 = 0. \tag{21.8}$$

Praegu

$$\vec{n} = A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2,$$

mistõttu

$$\langle \vec{n}, \vec{e}_3 \rangle = \langle A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = A_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + A_2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = A_1 0 + A_2 0 = 0.$$

Seega $\vec{n} \perp \vec{e}_3$. Saame öelda, et tasand π on paralleelne x_3-teljega või x_3-telg on tasandil. Esimesel juhul reeperi alguspunkt $O \notin \pi$, s.o. $A_4 \neq 0$. Teisel juhul, kui x_3-telg kuulub temale, siis $O \in \pi$ ehk $A_4 = 0$. Võrrand (21.8) saab kuju

$$\pi : \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0.$$

Lugejale jätame kontrollida juhud, kui $A_2 = 0$ või $A_1 = 0$. Meie sõnastame ainult tulemused.

Kui $A_2 = 0$ ja $A_4 \neq 0$, siis tasand

$$\pi : \quad A_1 x_1 + A_3 x_3 + A_4 = 0$$

on paralleelne x_2-teljega. Kui aga $A_2 = 0$ ja $A_4 = 0$, siis x_2-telg asub tasandil

$$\pi : \quad A_1 x_1 + A_3 x_3 = 0.$$

Kui $A_1 = 0$ ja $A_4 \neq 0$, siis tasand

$$\pi: \quad A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$

on paralleelne x_1-teljega. Kui aga $A_1 = 0$ ja $A_4 = 0$, siis tasandil

$$\pi: \quad A_2x_2 + A_3x_3 = 0$$

asub x_1-telg .

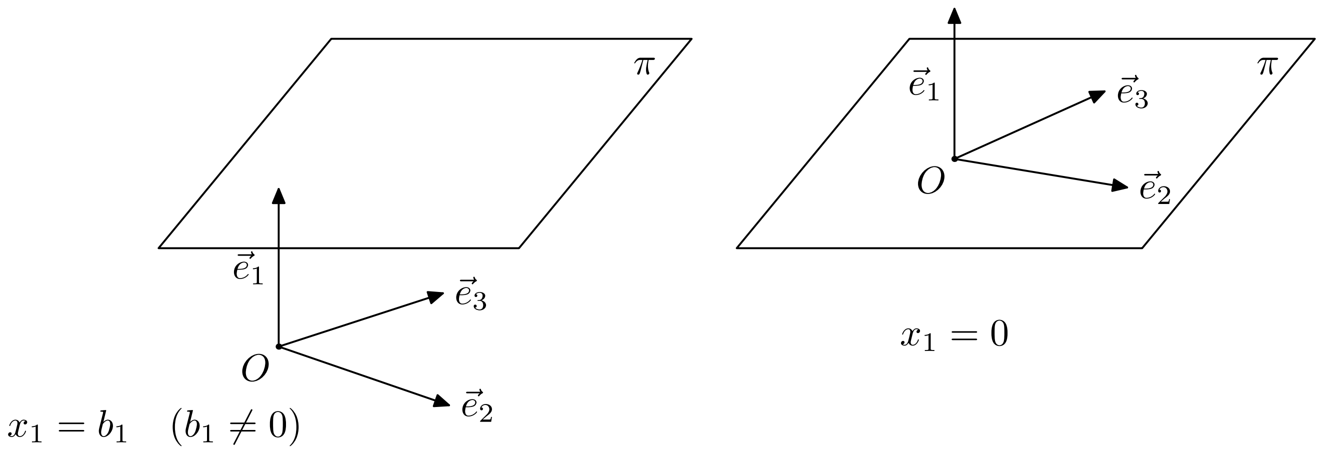
Saadud tulemuste kombineerimisel saame öelda veel järgmist. Kui näiteks $A_2 = 0$ ja $A_3 = 0$, siis $A_1 \neq 0$. Tasandi π üldvõrrandiks on

$$\pi: \quad A_1x_1 + A_4 = 0. \tag{21.9}$$

Kui siin veel lisaks $A_4 \neq 0$, siis tasand π on eespool öeldu põhjal paralleelne samaaegselt x_2-teljega ja x_3-teljega, s.o. x_2x_3-koordinaattasandiga. Viimane on tasand, mis määratakse algandmetega $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Kui aga $A_4 = 0$, siis tasand $\pi: \quad A_1x_1 = 0$ on x_2x_3-koordinaattasand. Tasandi võrrandi (21.9) saame anda ka kujul

$$\pi: \quad x_1 = b_1$$

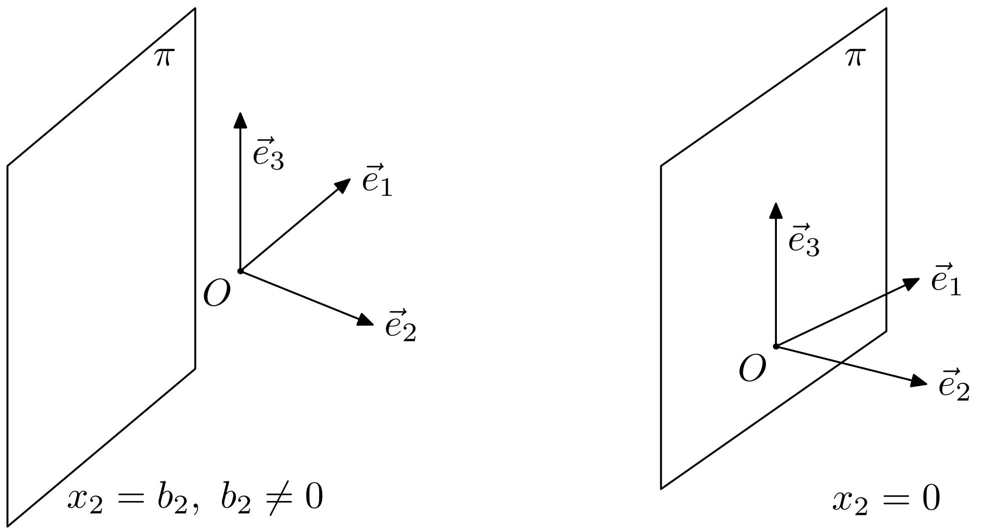
(vt. joonist 21.3).



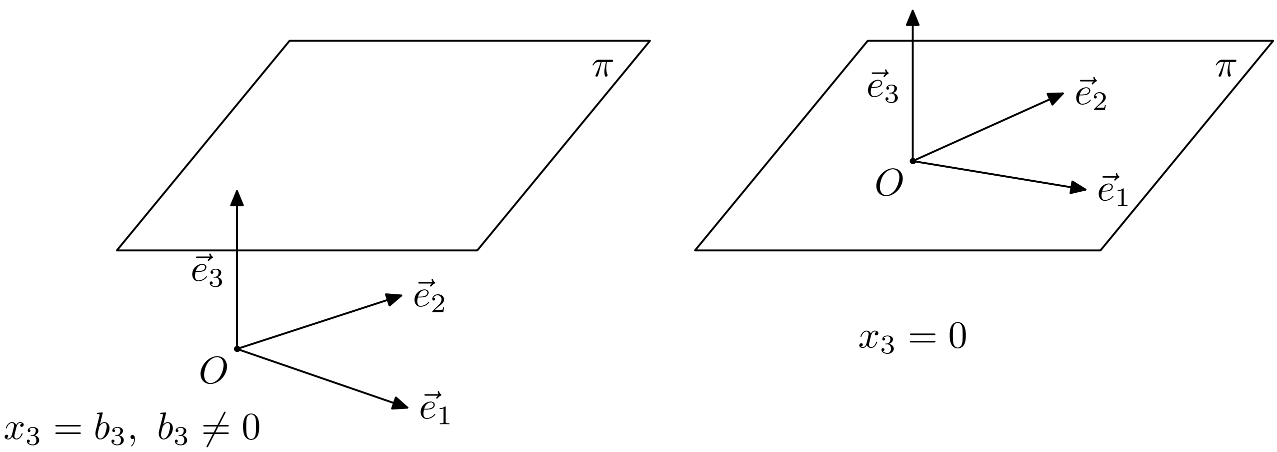
Joonis 21.3

Järelikult $b_1 \neq 0$ korral on tegemist tasandiga, mis on paralleelne x_2x_3-koordinaattasandiga, $b_1 = 0$ korral saame x_2x_3-koordinaattasandi.

Analoogiliselt saame, et tasand $\pi: \quad x_2 = b_2$, kus $b_2 \neq 0$, on paralleelne x_1x_3-koordinaattasandiga, tasand $\pi: \quad x_2 = 0$ on aga x_1x_3-koordinaattasand. Lõpuks tasand $\pi: \quad x_3 = b_3$, kus $b_3 \neq 0$, on paralleelne x_1x_2-koordinaattasandiga ja tasand $\pi: \quad x_3 = 0$ on x_1x_2-koordinaattasand (vt. jooniseid 21.4 ja 21.5).



Joonis 21.4



Joonis 21.5

Definitsioon 21.2. *Me ütleme, et tasand on üldasendis, kui ta ei ole paralleelne mitte ühegi koordinaatteljega ning ei läbi reeperi alguspunkti.*

Seega tasand on üldasendis, kui tema üldvõrrandis kõik neli kordajat on nullist erinevad.

Järgnevas oletamegi, et tasand ongi üldasendis. Tema üldvõrrandis

$$\pi : \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$$

on seega

$$A_1 \neq 0, \quad A_2 \neq 0, \quad A_3 \neq 0, \quad A_4 \neq 0. \tag{21.10}$$

Kuna tasandi üldvõrrand on määratud nullist erineva kordaja täpsuseni, siis on meil õigus teda läbi korrutada nullist erineva teguriga $k = -\frac{1}{A_4}$. Me saame

$$\pi : \quad \Big(-\frac{A_1}{A_4}\Big)x_1 + \Big(-\frac{A_2}{A_4}\Big)x_2 + \Big(-\frac{A_3}{A_4}\Big)x_3 = 1.$$

ehk

$$\pi : \quad \frac{x_1}{-\frac{A_4}{A_1}} + \frac{x_2}{-\frac{A_4}{A_2}} + \frac{x_3}{-\frac{A_4}{A_3}} = 1.$$

Jagatised

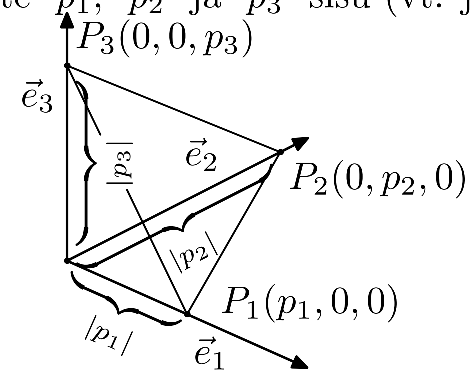
$$p_1 := -\frac{A_4}{A_1}, \quad p_2 := -\frac{A_4}{A_2}, \quad p_3 := -\frac{A_4}{A_3}$$

eksisteerivad (21.10) tõttu. Lõpuks saame

$$\pi : \quad \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 1. \tag{21.11}$$

Seda tasandi võrrandit nimetame tasandi võrrandiks telglõikudes.

Selgitame kordajate p_1, p_2 ja p_3 sisu (vt. joonist 21.6).



Joonis 21.6

Meie tasand oma üldasendi tõttu lõikab igat koordinaattelge. Tähistame P_i abil abil lõikepunkti x_i-teljega, kus $i = 1, 2, 3$. Leiame nende punktide koodinaadid. Punkti P_1 koordinaatide leidmiseks tuleb arvestada, et ta asub tasandil π ja x_1-teljel. Asumine x_1-teljel tähendab asumist koordinaattasandite x_1x_2 ja x_1x_3 lõikejoonel, s.t. $x_3 = 0$ ja $x_2 = 0$. Viimastele tuleb lisada (21.11). Seega meil tuleb lahendada lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_2 =0 \\ x_3 =0 \\ \dfrac{x_1}{p_1}+\dfrac{x_2}{p_2}+\dfrac{x_3}{p_3}=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 =p_1 \\ x_2 =0 \\ x_3 =0 \end{cases} \Longrightarrow P_1(p_1, 0, 0).$$

Analoogiliselt saame

$$P_2(0, p_2, 0), \quad P_3(0, 0, p_3).$$

Saime, et p_i on punkti P_i i-s koordinaat. Leiame veel nn. *telglõikude* OP_1, OP_2 ja OP_3 pikkused. Näeme, et

$$\overrightarrow{OP_1} = (p_1, 0, 0), \quad \overrightarrow{OP_2} = (0, p_2, 0), \quad \overrightarrow{OP_3} = (0, 0, p_3),$$

mistõttu

$$OP_i = |p_i|, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}_3.$$

22. PUNKTI KAUGUS SIRGENI JA TASANDINI

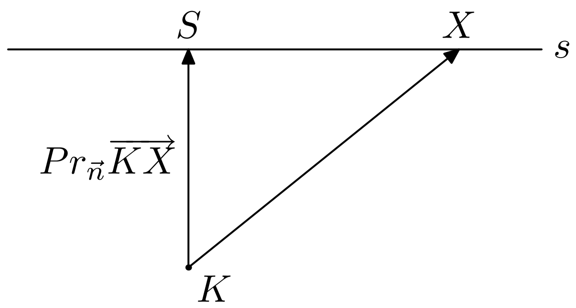
Vaatleme esmalt punkti kaugust sirgeni. Alustame kohe definitsiooni andmisega.

Definitsioon 22.1. *Punkti kauguseks sirgeni nimetame sellest punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkust.*

Asugu esmalt punkt K ja sirge s tasandil E_2. Mistahes ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ korral anname sirge s oma üldvõrrandiga (20.15), s.o.

$$s: \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0, \tag{22.1}$$

ja punkti K koordinaatidega – $K(k_1, k_2)$. Punkti K kaugust sirgeni s tähistame $d(K, s)$ abil (vt. joonist 22.1).



Joonis 22.1

Viimase definitsiooni kohaselt $d(K, s) = KS$. Sirge võrrandist (22.1) saame tema normaalvektori $\vec{n} = (A_1, A_2) \neq \vec{0}$, mis on risti sirgega s. Sirge iga punkti $X \in s$ korral, paragrahvi 15 silmas pidades, on vektori $\overrightarrow{KX}$ ristprojektsiooni vektor $Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{KS}$. Seega

$$d(K, s) = KS = |\overrightarrow{KS}| = |Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX}| = |(pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX})\vec{n}_o| =$$

$$= |pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX}|\,|\vec{n}_o| = |pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX}| = \left|\frac{\langle\vec{n}, \overrightarrow{KX}\rangle}{|\vec{n}|}\right|.$$

Siin me arvestasime, et $|\vec{n}| > 0$, siis tema absoluutväärtus on ikkagi $|\vec{n}|$. Kuna $\overrightarrow{KX} = (x_1 - k_1, x_2 - k_2)$, siis valemi (17.11) kohaselt

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{KX} \rangle = A_1(x_1 - k_1) + A_2(x_2 - k_2) = (A_1x_1 + A_2x_2) - (A_1k_1 + A_2k_2).$$

Arvestame, et $X \in s$, mistõttu tema koordinaadid x_1 ja x_2 rahuldavad sirge võrrandit (22.1). Seega $A_1x_1 + A_2x_2 = -A_3$. Saame

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{KX} \rangle = -(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3).$$

Viimase abil saame

$$d(K, s) = \frac{|-(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3)|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

ehk

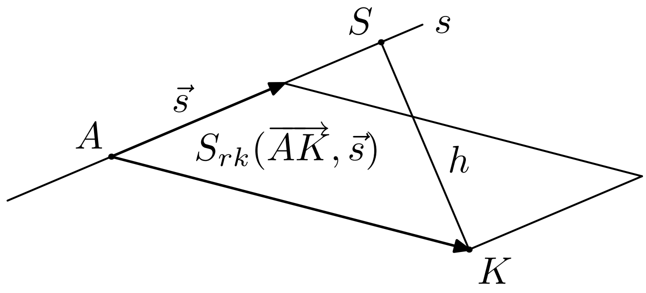
$$d(K, s) = \frac{|A_1k_1 + A_2k_2 + A_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}. \tag{22.2}$$

Viimasest valemist näeme, et punkti K kauguse leidmiseks sirgeni s tuleb asetada punkti K koordinaadid sirge üldvõrrandi vasakusse poolde, võtta absoluutväärtus sellest ja jagada tulemus sirge normaalvektori pikkusega.

Olgu nüüd punkt K ja sirge s ruumis E_3. Kuna ruumi sirgel pole üldvõrrandit, siis probleem ei ole lahendatav nii nagu eespool. Mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral saame sirge s anda parameetriliste võrrandite

$$s : \begin{cases} x_1 = a_1 + ts_1 \\ x_2 = a_2 + ts_2, \quad t \in \mathbb{R} \\ x_3 = a_3 + ts_3 \end{cases}$$

abil. Siin punkt $A(a_1, a_2, a_3)$ on sirgel s ja vektor $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) \neq \vec{0}$ on sama sirge sihivektor. Alljärgneval joonisel 22.2 on sirge sihivektor $\vec{s}$ rakendatud punktist A.



Joonis 22.2

Punkti $K(k_1, k_2, k_3)$ kauguse sirgeni s tähistame ka siin $d(K, s)$ abil. Definitsiooni 22.1 kohaselt on ristlõik KS otsitavaks kauguseks, s.o.

$$d(K, s) = KS.$$

Ehitame vektoritele $\overrightarrow{AK}$ ja $\vec{s}$ rööpküliku. Lõik KS on selle rööpküliku kõrguseks, mis on avaldatav selle rööpküliku pindala kaudu. Saame

$$d(K, s) = \frac{S_{rk}(\overrightarrow{AK}, \vec{s})}{|\vec{s}|}.$$

Vektorkorrutamise omaduse 18.2 abil saame

$$d(K, s) = \frac{|\overrightarrow{AK} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}. \tag{22.3}$$

Anname viimase valemi koordinaatide abil. Kuna

$$\overrightarrow{AK} = (k_1 - a_1, k_2 - a_2, k_3 - a_3), \quad \vec{s} = (s_1, s_2, s_3),$$

siis valemi (18.8) abil saame

$$\overrightarrow{AK} \times \vec{s} = \left(\begin{vmatrix} k_2 - a_2 & k_3 - a_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} k_1 - a_1 & k_3 - a_3 \\ s_1 & s_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} k_1 - a_1 & k_2 - a_2 \\ s_1 & 2_2 \end{vmatrix} \right).$$

Seega

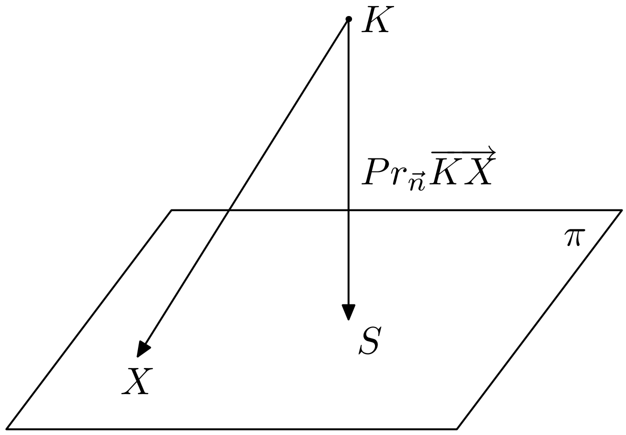
$$d(K, s) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} k_2 - a_2 & k_3 - a_3 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_1 - a_1 & k_3 - a_3 \\ s_1 & s_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} k_1 - a_1 & k_2 - a_2 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}. \tag{22.4}$$

Viimane valem ei ole sobiv meelde jätmiseks. Palju lihtsam on meelde jätta valem (22.3) ja siis valem (22.4) tuletada.

Järgnevas leiame valemi punkti kauguse leidmiseks tasandini. Seda saab leida ainult ruumis E_3. Võttes mingi ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, siis tekib tasandil π üldvõrrand ja punktil K koordinaadid. Seega

$$\pi: \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0, \quad K(k_1, k_2, k_3). \tag{22.5}$$

Definitsioon 22.2. *Punkti kauguseks tasandini nimetatakse sellest punktist tasandini tõmmatud ristlõigu pikkust.*



Joonis 22.3

Tähistame punkti K kaugust tasandini π analoogiliselt nagu eespool $d(K, \pi)$ abil (vt. joonist 22.3). Viimase definitsiooni kohaselt $d(K, \pi) = KS$. Siin punkt S on punktist K tasandini π tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tasandi mistahes punkti $X \in \pi$ korral vektori $\overrightarrow{KX}$ ristprojektsioonivektor tasandi π normaalvektorile $\vec{n} = (A_1, A_2, A_3) \neq \vec{0}$ on üks ja sama vektor, ei sõltu punkti X valikust meie tasandil. Näeme, et

$$Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX} = \overrightarrow{KS}.$$

Analoogiliselt nagu paragrahvi alguses saame

$$d(K, \pi) = KS = |\overrightarrow{KS}| = |Pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX}| = |(pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX})\vec{n}_o| =$$

$$= |(pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX})||\vec{n}_o| = |(pr_{\vec{n}}\overrightarrow{KX})| = \left|\frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{KX}\rangle}{|\vec{n}|}\right|.$$

Kuna

$$\overrightarrow{KX} = (x_1 - k_1, x_2 - k_2, x_3 - k_3),$$

siis

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{KX} \rangle = A_1(x_1 - k_1) + A_2(x_2 - k_2) + A_3(x_3 - k_3) =$$
$$= (A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3) - (A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3).$$

Arvestame, et $X \in \pi$, mistõttu tema koordinaadid x_1, x_2 ja x_3 rahuldavad tasandi üldvõrrandit (22.5). Seega $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = -A_4$. Saame

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{KX} \rangle = -(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3x_3 + A_4).$$

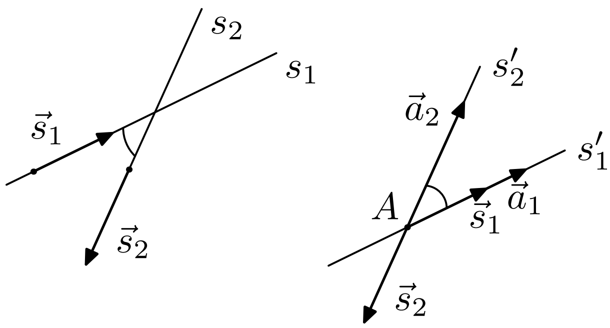
Lõpptulemuseks saame

$$d(K, \pi) = \frac{|A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + A_4|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}.$$

Viimasest valemist näeme, et punkti K *kauguse leidmiseks tasandini* π *tuleb asetada punkti* K *koordinaadid tasandi üldvõrrandi vasakusse poolde, võtta absoluutväärtus sellest ja jagada tulemus tasandi normaalvektori pikkusega.*

23. NURK KAHE SIRGE, KAHE TASANDI, SIRGE JA TASANDI VAHEL

Olgu antud kaks sirget s_1 ja s_2, kusjuures pole oluline kas nad on tasandil või ruumis. Juuresoleval joonisel 23.1 on sirged s_1 ja s_2 ruumi kiivsirged.



Joonis 23.1

Fikseerime mingi punkti A ja joonistame läbi tema kaks sirget s_1' ja s_2', mis on vastavalt paralleelsed sirgetega s_1 ja s_2. Sirged s_1' ja s_2', tekitavad neli nurka. Tähistame neid alates joonisel kaarega märgistatud nurgast päripäeva vastavalt α_1, α_2, α_3 ja α_4 abil. Seejuures $\alpha_3 = \alpha_1$, $\alpha_4 = \alpha_2$ ja $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$ tõttu on olulisi ainult üks.

Definitsioon 23.1 *Sirgete s_1 ja s_2 vaheliseks nurgaks, mida tähistame $\angle(s_1, s_2)$ abil, nimetatakse sirgete s_1' ja s_2' vahelistest nurkadest α_1, α_2, α_3 ja α_4 vähimat.*

Selle definitsiooni kohaselt kahe sirge vaheline nurk on esimese veerandi nurk, s.o.

$$\angle(s_1, s_2) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Leiame nüüd valemid kahe sirge vahelise nurga arvutamiseks. Skalaarkorrutise definitsioonist 17.1 näeme, et lihtne on leida sirgete sihivektorite vahelise nurga koosinust. Viimane annab kas sirgete vahelise nurga $\angle(s_1, s_2)$ või nurga $\pi - \angle(s_1, s_2)$ koosinuse. Viimase kaudu saab siiski leida ka sirgete vahelise nurga. Tähistame sirgete s_1 ja s_2 sihivektoreid vastavalt $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$ abil. Samad sihivektorid on ka abisirgete s_1' ja s_2'

sihivektoriteks. Joonisel on need vektorid rakendatud punktist A. Nagu selgitasime, ei pea sihivektorite vaheline nurk $\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$ alati olema sirgete vaheline nurk. Võtame appi kaks abivektorit $\vec{a}_1$ ja $\vec{a}_2$ nagu joonisel näidatud. Seega nende abivektorite vaheline nurk $\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ on sirgete vaheline nurk $\angle(s_1, s_2)$, s.o.

$$\angle(s_1, s_2) = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2).$$

Valemi (17.1) abil saame

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}. \tag{23.1}$$

Kuna $\angle(s_1, s_2)$ on esimese veerandi nurk, siis

$$\cos\angle(s_1, s_2) \geq 0 \Longleftrightarrow \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \geq 0.$$

Seega teame juba ette, et $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = |\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|$. Valem (23.1) saab kuju

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}.$$

Viimase valemiga sellisel kujul pole midagi peale hakata, sest meil pole ju vektoreid $\vec{a}_1$ ja $\vec{a}_2$. Kuid siiski teame, et

$$\vec{a}_1 \parallel \vec{s}_1, \quad \vec{a}_2 \parallel \vec{s}_2 \Longleftrightarrow \vec{a}_1 = \beta_1\vec{s}_1, \quad \vec{a}_2 = \beta_2\vec{s}_2, \quad \beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0.$$

Valem (23.1) on viidav sihivektorite peale, sest neid me teame kuna sirged s_1 ja s_2 on ju antud. Saame

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \frac{|\langle \beta_1\vec{s}_1, \beta_2\vec{s}_2 \rangle|}{|\beta_1\vec{s}_1||\beta_2\vec{s}_2|}.$$

Kasutades skalaarkorrutamise omadust 17.5, järeldust 17.2 ja kordse vektori definitsiooni 14.11, saame, et

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \frac{|\beta_1\beta_2\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{|\beta_1||\beta_2||\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{|\beta_1||\beta_2||\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{|\beta_1||\beta_2||\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}.$$

Saime

$$\cos\angle(s_1,s_2)=\frac{|\langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}. \tag{23.2}$$

Viimast valemit saab kasutada juhul, kui sirged on antud kas parameetriliste või kanooniliste võrrandite abil, sest siis on käepärast võtta sirgete sihivektorid. Siin pole oluline, kas sirged on tasandil või ruumis.

Sageli on sirged antud üldvõrranditega

$$s_1:\quad A_1x_1+A_2x_2+A_3=0,\quad s_2:\quad A_1'x_1+A_2'x_2+A_3'=0.$$

Siin on tegemist muidugi tasandil olevate sirgetega, sest ruumisirgel pole ju üldvõrrandit. Valemi (20.14) kohaselt meie sirgete sihivektorite kohta saame öelda, et

$$\vec{s}_1=(s_1,s_2)=(-A_2,A_1),\quad \vec{s}_2=(s_1',s_2')=(-A_2',A_1'),$$

mistõttu valemist (23.2) saame

$$\cos\angle(s_1,s_2)=\frac{|\langle\vec{s}_1,\vec{s}_2\rangle|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|s_1s_1'+s_2s_2'|}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}\ \sqrt{(s_1')^2+(s_2')^2}}=$$

$$=\frac{|A_1A_1'+A_2A_2'|}{\sqrt{A_1^2+A_2^2}\ \sqrt{(A_1')^2+(A_2')^2}}=\frac{|\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$

ehk

$$\cos\angle(s_1,s_2)=\frac{|\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}, \tag{23.3}$$

kus vektorid

$$\vec{n}_1=(A_1,A_2),\quad \vec{n}_2=(A_1',A_2')$$

on sirgete s_1 ja s_2 normaalvektorid.

Tavaliselt antakse sirgete vahelise nurga leidmiseks veel üks valem juhu jaoks kui sirged on antud taandatud võrrandite (20.24) abil. Seega

$$s_1: x_2=ax_1+b,\quad s_2: x_2=\bar{a}x_1+\bar{b}.$$

Siit saame leida nende sirgete üldvõrrandid

$$s_1: ax_1+(-1)x_2+b=0,\quad s_2: \bar{a}x_1+(-1)x_2+\bar{b}=0$$

ja nendest meie sirgete normaalvektorid

$$\vec{n}_1 = (a, -1), \quad \vec{n}_2 = (\bar{a}, -1).$$

Valemi (23.3) abil saame

$$\cos\angle(s_1, s_2) = \frac{|a\bar{a} + 1|}{\sqrt{1 + a^2}\ \sqrt{1 + \bar{a}^2}}. \tag{23.4}$$

Tavaliselt antakse siin nurga $\angle(s_1, s_2)$ tangens. Selleks on vaja leida $\sin\angle(s_1, s_2)$. Tegelikult me leiame koosinuse ja siinuse ruudud ning nende abil tangensi ruudu, millest saame lõpuks tangensi. Teeme lubatud arvutused:

$$\cos^2\angle(s_1, s_2) = \frac{(a\bar{a} + 1)^2}{(1 + a)^2(1 + \bar{a})^2},$$

$$\sin^2\angle(s_1, s_2) = 1 - \cos^2\angle(s_1, s_2) = 1 - \frac{(a\bar{a} + 1)^2}{(1 + a^2)(1 + \bar{a}^2)} =$$

$$= \frac{(1 + a^2)(1 + \bar{a}^2) - (a\bar{a} + 1)^2}{(1 + a^2)(1 + \bar{a}^2)} = \frac{a^2 - 2a\bar{a} + \bar{a}^2}{(1 + a^2)(1 + \bar{a}^2)} = \frac{(a - \bar{a})^2}{(1 + a^2)(1 + \bar{a}^2)}$$

ja

$$\tan^2\angle(s_1, s_2) = \frac{\sin^2\angle(s_1, s_2)}{\cos^2\angle(s_1, s_2)} = \frac{(a - \bar{a})^2}{(1 + a\bar{a})^2} \Longrightarrow \tan\angle(s_1, s_2) = \pm\left|\frac{a - \bar{a}}{1 + a\bar{a}}\right|.$$

Valemi (23.2) tõttu nurk $\angle(s_1, s_2)$ on esimese veerandi nurk, siis viimases valemis sobib ainult üks lahend, selline, kus tangens on positiivne. Seega sirgete vahelise nurga arvutamiseks saame valemi

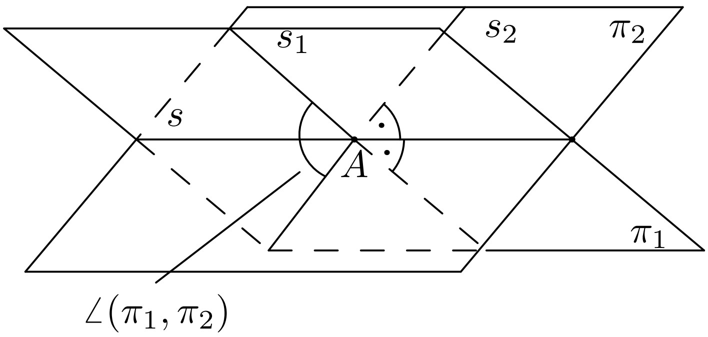
$$\tan\angle(s_1, s_2) = \left|\frac{a - \bar{a}}{1 + a\bar{a}}\right|.$$

Risti olevate sirgete korral $\angle(s_1, s_2) = \frac{\pi}{2}$. Seega $\cos\angle(s_1, s_2) = 0$. Valemist (23.4) saame, et

$$1 + a\bar{a} = 0 \Longleftrightarrow a\bar{a} = -1.$$

Saime, et *ristuvate sirgete tõusude korrutis on* -1.

Järgmisena leiame valemid tasandite vahelise nurga leidmiseks. Esmalt on vaja anda tasandite vahelise nurga mõiste. Teeme seda, nagu sirgete korral, joonise abil (vt. joonist 23.2) ja seda juhul, kui tasandid lõikuvad.



Joonis 23.2

Mängust jäävad välja esialgu paralleelsed tasandid. Võtame tasandite π_1 ja π_2 lõikesirgel $s = \pi_1 \cap \pi_2$ mistahes punkti $A \in s$ ning joonistame läbi tema kaks sirget, millest üks s_1 on tasandil π_1 ja teine s_2 tasandil π_2 ning lisaks mõlemad olgu risti lõikesirgega s.

Definitsioon 23.2. *Tasandite* π_1 *ja* π_2 *vaheliseks nurgaks* $\angle(\pi_1, \pi_2)$ *nimetame sirgete* s_1 *ja* s_2 *vahelist nurka:*

$$\angle(\pi_1, \pi_2) := \angle(s_1, s_2).$$

Paraku on selle definitsiooni abil tasandite vahelist nurka üsna raske leida, sest meil pole sirgete s_1 ja s_2 sihivektoreid, et kasutada valemit (23.2). Olukorra parandamiseks paneme tähele, et sirged s_1 ja s_2 on tasandil, mis läbivad punkti A ja on risti sirgega s. Pöörame sellel tasandil sirgepaari s_1 ja s_2 ümber nende lõikepunkti A nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra, saades uued sirged s_1' ja s_2'. Meie jaoks on siin olulised kaks asjaolu. Esiteks $\angle(s_1, s_2) = \angle(s_1', s_2')$, mistõttu

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(s_1', s_2').$$

Teiseks on sirged s_1' ja s_2' vastavalt risti tasanditega π_1 ja π_2, mistõttu nende tasandite normaalvektorid $\vec{n}_1$ ja $\vec{n}_2$ on sirgete s_1' ja s_2' sihivektoriteks. Normaalvektorid saame aga tasandite π_1 ja π_2 üldvõrranditest

$$\pi_1 : \quad A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0,$$

$$\pi_2: \quad \bar{A}_1 x_1 + \bar{A}_2 x_2 + \bar{A}_3 x_3 + \bar{A}_4 = 0.$$

Nendeks on

$$\vec{n}_1 = (A_1, A_2, A_3), \quad \vec{n}_2 = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3).$$

Nüüd edasi on kõik väga lihtne. Valemi (23.3) abil saame

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \cos\angle(s_1', s_2') = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Seega

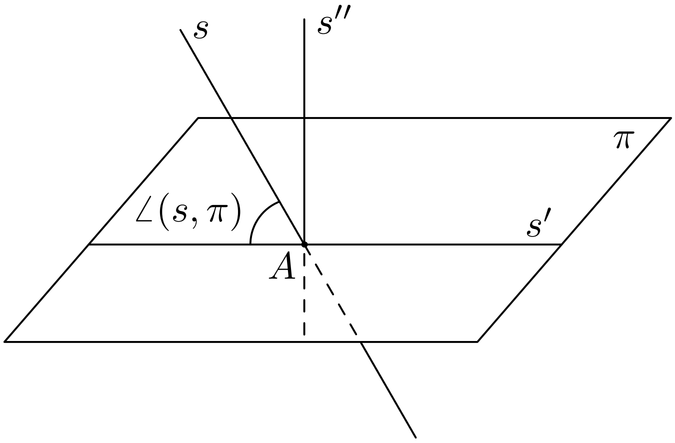
$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

ehk sama valem normaalvektorite koordinaatide kaudu

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_1\bar{A}_1 + A_2\bar{A}_2 + A_3\bar{A}_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\ \sqrt{\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 + \bar{A}_3^2}}.$$

Märgime, et saadud valem on kasutatav ka paralleelsete tasandite korral.

Nüüd on veel jäänud leida valem sirge ja tasandi vahelise nurga leidmiseks. Selgitame esmalt, mida me mõistame sirge s ja tasandi π vahelise nurga $\angle(s, \pi)$ all. Joonis 23.3 kajastab olukorda, kui sirge ja tasand lõikuvad.



Joonis 23.3

Lõikepunkti on tähistatud tähega A. Nüüd projekteerime sirge s tasandile π sirgetega, mis on risti meie tasandiga. Käib see nii, et võtame läbi sirge s suvalise punkti X uue sirge, mis on risti tasandiga π. Tekkinud lõikepunkti X' tasandiga π nimetatakse punkti X ristprojektsiooniks. Punkti X muutumisel sirgel s tekib punktidest X' sirge s' tasandil π.

Definitsioon 23.3. *Sirge s ja tasandi π vaheliseks nurgaks nimetatakse sirgete s ja s' vahelist nurka, s.o.*

$$\angle(s,\pi) := \angle(s,s'). \tag{23.5}$$

Selle definitsiooni puuduseks on asjaolu, et raske on leida sirge s' sihivektorit, et saaks kasutada kahe sirge vahelise nurga leidmise valemit, mis on meil leitud. Sellest ebameeldivusest üle saamiseks võtame läbi punkti A tasandiga π ristuva sirge s''. Tema sihivektoriks on tasandi π normaalvektor $\vec{n}$. Oluline on märgata, et kolm sirget s, s' ja s'' asuvad ühisel tasandil, mistõttu

$$\angle(s,s') + \angle(s,s'') = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \angle(s,s') = \frac{\pi}{2} - \angle(s,s'').$$

Seega valem (23.5) saab kuju

$$\angle(s,\pi) = \frac{\pi}{2} - \angle(s,s'').$$

Kerge on leida nurga $\angle(s,\pi)$ siinust. Saame

$$\sin\angle(s,\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \angle(s,s'')) = \cos\angle(s,s'') = \frac{|\langle\vec{s},\vec{n}\rangle|}{|\vec{s}||\vec{n}|}.$$

Saime

$$\sin\angle(s,\pi) = \frac{|\langle\vec{s},\vec{n}\rangle|}{|\vec{s}||\vec{n}|}. \tag{23.6}$$

Viimane valem on rakendatav ka siis, kui sirge on paralleelne tasandiga või asub hoopis temal. Ilmselt siis $\angle(s,\pi) = 0$. Sama tulemuse saame valemi (23.6) abil, sest siis

$$\vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow \langle\vec{s},\vec{n}\rangle = 0 \Longrightarrow \sin\angle(s,\pi) = 0 \Longrightarrow \angle(s,\pi) = 0.$$