

IV. VEKTORALGEBRA

14. SUUNATUD LÕIKUDE VEKTORRUUM

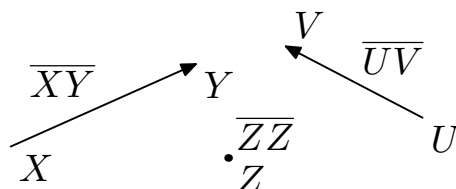
Me tutvume ühe omapärase vektorruumiga – suunatud lõikude vektorruumiga. Võib arvata, et sellele näitele tuginedes, kasvas välja vektorruumide teooria. Vaatluse all on meil ruum, tasand, sirge või punkt meie igapävases ettekujutuses. Seega on nad meie jaoks *defineerimata mõisted*, s.o. *algmõisted*. Punkti on aastatuhandeid näitlikult ette kujutatud, kui pikkuseta ja laiuseta objekti. Punkte tähistame suurte trükitähtedega. Fikseeritud punkti korral kasutame reeglina suuri trükitähti tähestiku algusest, näiteks A , B , C . Kui on tegemist suvalise punktiga, siis tähestiku lõpuosast, näiteks X , Y , Z . Osutub, et ruumi, tasandi kui ka sirge punktide abil saab üsna loomulikult teel anda igaihe korral teatava vektorruumi. Sellele käesolev paragrahv ongi pühendatud. Ruumi, tasandit ja sirget me tähistame järgnevas vastavalt E_3 , E_2 ja E_1 abil. Kuna sageli pole oluline, kas defineeritava vektorruumi korral kasutatakse ruumi, tasandi või sirge punkte, siis seda fakti me järgnevas eriti ei rõhuta. Me kirjutame lihtsalt E . Siin kasutatav täht E on esimene täht sõnast *eukleidiline*. Mistahes kahe punkti $X, Y \in E$ poolt määratud lõiku saame tähistada kahel erineval moel – XY või YX . Seda tüüpi tähistuses esimesel kohal olevat tähte loeme lõigu alguspunktiks ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktiks. Seega XY ei tähista ainult lõiku otspunktidega X ja Y , vaid tähistab lõiku alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y . Lõigul alguspunkti määramine tähendab teisiti öeldes temal suuna määramist. Viimast võime endale ette kujutada liikumisena lõigu alguspunktist lõpp-punkti poole.

Definitsioon 14.1. *Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, s.o. suund, nimetatakse suunatud lõiguks ehk seotud vektoriks. Seotud vektorit alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistame edaspidi $\overline{XY}$ abil.*

Praeguses käsitluses lubame vaadelda ka nn. *kidunud lõike*, s.o. vaadelda selliseid lõike, millel algus- ja lõpp-punkt langevad kokku. Seega on mõeldavad seotud vektorid $\overline{XX}$, $\overline{YY}$, Taoliste seotud vektorite korral pole üheselt määratud seotud vektori suund. Edaspidi tähistame kõigi seotud vektorite hulka sümboli $\overline{E}$ abil.

Definitsioon 14.2. Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse seotud nullvektoriks.

Joonisele seotud vektori kandmisel joonistame teda määrava lõigu, tähistame ära tema otspunktid. Et eristada lõigul algus- ja lõpp-punkti, kujutame seda lõiku noole abil, mis määrab temal suuna. Noole kõrvale kirjutame seotud vektori tähise. Joonisele 14.1 on kantud seotud vektorid $\overline{XY}$, $\overline{UV}$ ja $\overline{ZZ}$. Viimane neist on seotud nullvektor.



Joonis 14.1

Definitsioon 14.3. Seotud vektori $\overline{XY}$ pikkuseks, tähistame $|\overline{XY}|$ abil, nimetame teda määrava lõigu XY pikkust, s.o. $|\overline{XY}| := XY$.

Sellest definitsioonist näeme, et mitte ühegi seotud vektori pikkus ei ole negatiivne. Pikkusega null on ainult seotud nullvektorid ja ainult nemad. Kõigi seotud mittenullvektorite pikkus on positiivne ja seejuures ainult nendel.

Märgime, et iga kahe punkti X ja Y abil saab moodustada kaks seotud vektorit: $\overline{XY}$ ja $\overline{YX}$.

Definitsioon 14.4. Seotud vektorit $\overline{YX}$ nimetame seotud vektori $\overline{XY}$ vastandvektoriks, mida tähistame $-\overline{XY}$ abil, s.o.

$$-\overline{XY} := \overline{YX}.$$

Selle definitsiooni põhjal

$$-(-\overline{XY}) = \overline{XY}, \quad -\overline{XX} = \overline{XX}.$$

Kuna seotud vektor ja tema seotud vastandvektor on seotud sama lõiguga, siis definitsioon 14.3 lubab kirjutada

$$|-\overline{XY}| = |\overline{XY}|.$$

Definitsioon 14.5. Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame kollineaarseks seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui lõik AB on paralleelne lõiguga CD . Öeldut tähistame $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ abil.

Selle definitsiooni kohaselt seotud nullvektor on kollineaarne iga seotud vektoriga, sest nullvektorit määrav "lõik" on paralleelne mistahes seotud vektorit määrava lõiguga. Seotud nullvektoritest erinevate seotud vektorite hulgal, tähistame teda $\overline{\mathbf{E}}_0$ abil, on kollineaarsusel järgmised omadused.

1° *Refleksiivsus*: iga seotud vektor on kollineaarne iseendaga, s.o.

$$\forall \overline{AB} \in \overline{\mathbf{E}}_0 \implies \overline{AB} \parallel \overline{AB}.$$

2° *Transitiivsus*: kui seotud vektor on kollineaarne teise seotud vektoriga ja teine omakorda kolmanda seotud vektoriga, siis esimene seotud vektor on kollineaarne kolmandaga, s.o.

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \quad \overline{CD} \parallel \overline{EF}, \quad \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \in \overline{\mathbf{E}}_0 \implies \overline{AB} \parallel \overline{EF}.$$

3° *Sümmeetria*: kui üks seotud vektor on kollineaarne teise seotud vektoriga, siis teine seotud vektor on kollineaarne esimesega, s.o.

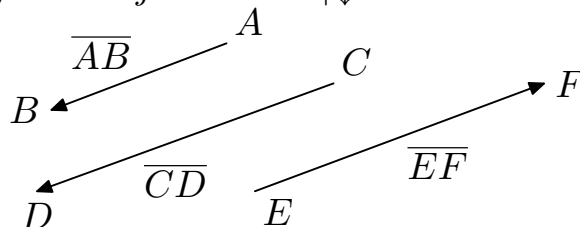
$$\overline{AB} \parallel \overline{CD}, \quad \overline{AB}, \overline{CD} \in \overline{\mathbf{E}}_0 \implies \overline{CD} \parallel \overline{AB}.$$

Tõestus tugineb vahetult kollineaarsuse definitsioonile, mistõttu jätame selle lugeja hooleks.

Kui seotud vektor $\overline{AB}$ ei ole kollineaarne seotud vektoriga $\overline{CD}$, siis seda asjaolu tähistame $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$. Kollineaarsuse sümmeetria tõttu

$$\overline{AB} \nparallel \overline{CD} \iff \overline{CD} \nparallel \overline{AB}.$$

Definitsioon 14.6. Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame samasuunaliseks (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui esiteks $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ja teiseks suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame esimesel juhul $\overline{AB} \uparrow \overline{CD}$ ja teisel juhul $\overline{AB} \updownarrow \overline{CD}$ abil.



Joonis 14.2

Joonisel 14.2 on seotud vektor $\overline{AB}$ samasuunaline seotud vektoriga $\overline{CD}$ ning seotud vektor $\overline{EF}$ on vastassuunaline seotud vektoritega $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$. Viimasest definitsioonist näeme, et seotud nullvektor on samaaegselt samasuunaline kui ka vastassuunaline mistahes teise seotud vektoriga, sest lisaks nende kollineaarsusele võime seotud nullvektori suunda valida nii nagu meil parasjagu vaja on.

Definitsioon 14.7. Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame ekvivalentseks seotud vektoriga $\overline{CD}$, tähistame $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ abil, kui

$$|\overline{AB}| = |\overline{CD}|, \quad \overline{AB} \uparrow \uparrow \overline{CD}.$$

Seotud vektorite hulgal $\overline{\mathbf{E}}_0$ on ekvivalentsil järgmised omadused.

1° *Refleksiivsus*: iga seotud vektor on ekvivalentne iseendaga, s.o.

$$\forall \overline{AB} \in \overline{\mathbf{E}}_0 \implies \overline{AB} \sim \overline{AB}.$$

2° *Transitiivsus*: kui seotud vektor on ekvivalentne teise seotud vektoriga ja teine omakorda kolmanda seotud vektoriga, siis esimene seotud vektor on ekvivalentne kolmandaga, s.o.

$$\overline{AB} \sim \overline{CD}, \quad \overline{CD} \sim \overline{EF}, \quad \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \in \overline{\mathbf{E}}_0 \implies \overline{AB} \sim \overline{EF}.$$

3° *Sümmeetria*: kui üks seotud vektor on ekvivalentne teise seotud vektoriga, siis teine seotud vektor on ekvivalentne esimesega, s.o.

$$\overline{AB} \sim \overline{CD}, \quad \overline{AB}, \overline{CD} \in \overline{\mathbf{E}}_0 \implies \overline{CD} \sim \overline{AB}.$$

Ka siin tõestus tugineb vahetult ekvivalentsuse definitsioonile, mistõttu jätame ka selle lugeja hooleks.

Ekvivalentsuse mõiste seotud vektorite hulgal $\overline{\mathbf{E}}_0$ võimaldab ta jagada alamhulkadeks nn. ekvivalentsiklassideks.

Definitsioon 14.8. Seotud vektoriga $\overline{AB} \in \overline{\mathbf{E}}_0$ ekvivalentsete seotud vektorite hulka $\{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}$ nimetame ekvivalentsiklassiks moodustajaga $\overline{AB}$. Viimast tähistame $\overrightarrow{AB}$ abil. Seega

$$\overrightarrow{AB} := \{\overline{XY} \mid \overline{XY} \sim \overline{AB}\}.$$

Ekvivalentsuse refleksiivsuse tõttu $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{AB}$, mistõttu $\overrightarrow{AB} \neq \emptyset$. Osutub, et ekvivalentsiklass $\overrightarrow{AB}$ ei sõltu moodustaja $\overrightarrow{AB}$ valikust. Nimelt iga $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{AB}$ korral ekvivalentsiklass ei muutu, s.o

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}, \quad \forall \overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{AB}.$$

See on tõepoolest nii. Iga $\overrightarrow{XY} \in \overrightarrow{AB}$ korral $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$. Lisaks teame, et $\overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{AB}$, mistõttu ka $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$. Arvestades ekvivalentsuse kolmandat ja teist omadust, saame $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{CD}$, s.o. $\overrightarrow{XY} \in \overrightarrow{CD}$. Seega $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{CD}$. Teiselt poolt iga $\overrightarrow{XY} \in \overrightarrow{CD}$ korral $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{CD}$. Kuna $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$, siis taas ekvivalentsuse transitiivsuse tõttu $\overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB}$ ehk $\overrightarrow{XY} \in \overrightarrow{AB}$. Seega $\overrightarrow{CD} \subseteq \overrightarrow{AB}$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et

$$\forall \overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.$$

Nüüd paneme tähele, et $\overrightarrow{CD} \notin \overrightarrow{AB}$ korral $\overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{AB} = \emptyset$. Vastasel juhul leidub $\overrightarrow{EF} \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD}$, mistõttu $\overrightarrow{EF} \in \overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{EF} \in \overrightarrow{CD}$. Siit

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{CD} \in \overrightarrow{AB},$$

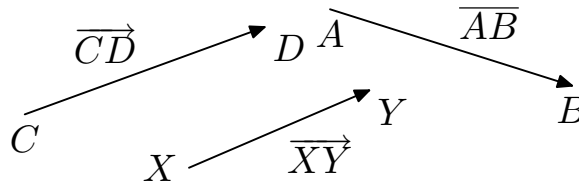
saades vastuolu eeldusega.

Ekvivalentsiklassid tükeldavad seotud vektorite alamhulga $\overline{\mathbf{E}}_0$ omavahel lõikumatu ekvivalentsiklasside ühendiks. See protseduur toimub järgmiselt. Võtame hulgast $\overline{\mathbf{E}}_0$ mingi seotud vektori ja moodustame tema abil ekvivalentsiklassi, seejärel võtame uue seotud vektori, mis eespool moodustatud ekvivalentsiklassi ei kuulu, ja moodustame tema abil taas ekvivalentsiklassi. Viimane eelmise ekvivalentsiklassiga ei lõiku. Nüüd võtame järjekordse seotud vektori, mis ei kuulu eespool moodustatud ekvivalentsiklassidesse ja moodustame järjekordse ekvivalentsiklassi. Seda protseduuri jätkame senikaua, kui enam ei leidu sellist seotud vektorit, mis eelnevalt moodustatud ekvivalentsiklassidesse ei kuulu. Sellega hulk $\overline{\mathbf{E}}_0$ on jaotatud ekvivalentsiklasside ühendiks. Nüüd loeme täiendavalt hulka $\overline{\mathbf{E}}_0$ mittekuuluvad seotud nullvektorid omaette ekvivalentsiklassiks, tähistades seda $\vec{0}$ abil, s.o.

$$\vec{0} := \{\overrightarrow{XX} | X \in E\}. \quad (14.1)$$

Lisades viimase hulga $\overline{\mathbf{E}}_0$ ekvivalentsiklasside hulgale, saame seotud vektorite hulga $\overline{\mathbf{E}}$ jaotuse ekvivalentsiklassideks. Joonisele mistahes ekvivalentsiklassi $\overrightarrow{AB}$ kandmiseks tuleks kanda esmalt joonisele teda määrav

seotud vektor $\overrightarrow{AB}$ ja seejärel kanda joonisele kõik temaga ekvivalentsed seotud vektorid, s.o. võtta suvaline punkt $X \in E$ ja joonistada lõiguga AB paralleelne ja samapikk lõik, mille alguspunktiks on X . Tähistame selle lõigu lõpp-punkti tähega Y . Tuleb veel nõuda, et lõigu XY moodustamisel oleks silmas peetud nõuet $\overrightarrow{XY} \uparrow \overrightarrow{AB}$. Seega ekvivalentsiklassi joonisele kandmiseks on küllaldane kanda sellest klassist mistahes seotud vektor, sest temaga ekvivalentsed vektorid oskame siis juba joonistada. Et vahet teha, kas tegemist on seotud vektoriga või tema poolt määratud ekvivalentsiklassiga, varustame seotud vektori tähise vastavalt kas kriipsuga või noolega. Seega kõrvaloleval joonisel 14.3 seotud vektori juurde kirjutatud $\overrightarrow{AB}$ ütleb, et tegemist on seotud vektoriga. Too-eest $\overrightarrow{CD}$ ütleb, et tegemist on ekvivalentsiklassiga määratuna seotud vektori $\overrightarrow{CD}$ poolt.



Joonis 14.3

Järgnevas on meile oluline seotud vektorite hulga $\overline{\mathbf{E}}$ ekvivalentsiklasside hulk, mida tähistame $\mathbf{E}$ abil. Täpsemalt $\mathbf{E}_i$ abil, kui me oleme lähtunud hulgast E_i , kus $i \in \mathbb{N}_3$. Tema elemente, s.o. ekvivalentsiklasse, nimetame sellest momendist alates *vektoriteks* ehk *vabavektoriteks*. Vektorit $\vec{0}$ nimetame *nullvektoriks*. Kuna vektorit, s.o. ekvivalentsiklassi, määrava seotud vektori võib temast valida vabalt, siis tema ei mängi mingit erilist osa. See on põhjenduseks, mispärast me vektoreid tähistame ka noolega varustatud väikeste ladina tähtedega. Näiteks $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ abil.

Nüüd näitame, et hulga E poolt määratud vektorite hulgas $\mathbf{E}$ tekib loomulikult teel vektorruumi struktuur.

Vektorruumi definitsiooni 7.1 kohaselt tuleb anda vektorite liitmise ning vektori reaalarvuga korrutamise mõiste. Seejärel on vaja kontrollida kas on täidetud kaheksa aksioomi.

I. Vektorite liitmine tähendab kujutuse

$$+ : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}; \quad (\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$$

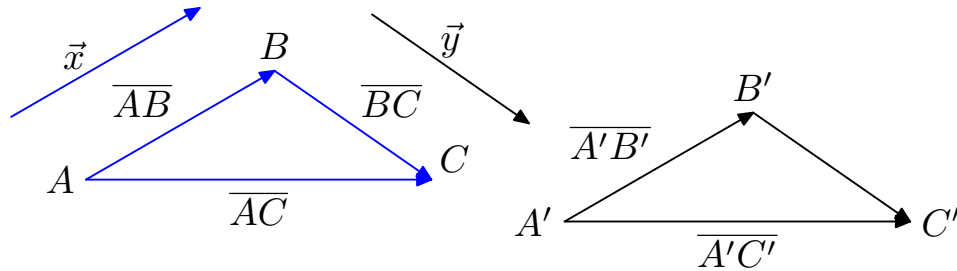
andmist. Seega meil tuleb mistahes kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ korral defineerida nende summa $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{E}$. Teeme seda järgmiselt (vt. joonist 14.4).

Fikseerime vabalt mingi punkti $A \in E$. Moodustame kaks seotud vektorit $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BC}$ nõudega $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{BC} = \vec{y}$. Tekkinud seotud vektori $\overrightarrow{AC}$ abil saab moodustada vektori $\overrightarrow{AC}$. Vektorit $\overrightarrow{AC}$ nimetame vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ summaks, s.o.

$$\vec{x} + \vec{y} := \overrightarrow{AC}. \quad (14.2)$$

Tuleb veel kontrollida, kas vektorite liitmise definitsioon on korrektne, s.o. ta ei sõltu punkti A valikust. Tõepoolest sõltumist ei ole, sest mistahes teise punkti $A' \in E$ korral, moodustame analoogilised seotud vektorid $\overrightarrow{A'B'}$ ja $\overrightarrow{B'C'}$ nõudega $\overrightarrow{A'B'} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{B'C'} = \vec{y}$. Sel korral $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{A'C'}$. Kuna tekkinud kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ vastavad küljed on sama pikad ja omavahel paraleelsed, siis seotud vektorid $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{A'C'}$ on samasuunalised ja sama pikad, s.o. $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$ ehk $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Sellega toodud vektorite liitmise definitsioon on korrektne.

Kirjeldatud viisil vektorite liitmise korral me ütleme, et see toimub *kolmnurga reegli abil*.



Joonis 14.4

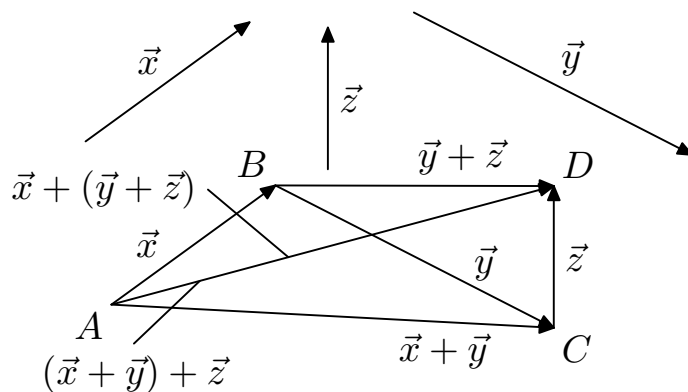
Järgnevas on vaja kontrollida, et antud vektorite liitmise definitsioon rahuldab aksioome (7.2)–(7.5).

1° Vaja on näidata, et vektorite liitmine on assotsiatiivne, s.o.

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}, \quad (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}). \quad (14.3)$$

Viimase tõestamiseks saame kasutada ainult vektorite liitmise definitsiooni, sest hulga $\mathbf{E}$ ehituse kohta midagi muud me veel ei tea. Fikseerime mingi punkti $A \in E$ (vt. joonist 14.5). Leiduvad punktid $B, C, D \in E$ nii, et

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{y}, \quad \overrightarrow{CD} = \vec{z}.$$



Joonis 14.5

Valemi (14.2) abil saame

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

ja

$$\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

millest paremate poolte võrdsuse tõttu saame vasakute poolte võrdsuse. Sellega oleme tõestanud valemi (14.3).

2° Vaja on näidata, et hulgas $\mathbf{E}$ leidub nn. nullvektor, vektor, mis iga $\vec{x} \in \mathbf{E}$ korral rahuldab

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}, \quad \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}. \quad (14.4)$$

Selleks vektoriks sobib valemiga (14.1) antud vektor, mida on juba ennastlikult nimetatud nullvektoriks. Tõepoolest on see nii, sest vabalt võetud punkti $A \in E$ korral leidub selline punkt $B \in E$, et $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$. Lisaks sellele kehtib $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ ja $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Liitmise definitsiooni 14.2 kohaselt saame

$$\vec{x} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{x}$$

ja

$$\vec{0} + \vec{x} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \vec{x}.$$

Seega valem (14.4) on tõestatud.

3° Vaja on näidata, et iga vektor $\vec{x} \in \mathbf{E}$ omab vastandvektorit $-\vec{x}$, s.o. sellist vektorit, et kehtib

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}, \quad (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}.$$

Konstrueerime vektori $\vec{x}$ abil vektori, mis osutub tema vastandvektoriks. Fikseerime mingi punkti $A \in E$. Leidub sobiv punkt $B \in E$, et $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$. Samas on meie käsutuses seotud vektor $\overrightarrow{AB}$. Moodustame tema seotud vastandvektori $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ abil vektori $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Tähistame $-\overrightarrow{AB} := \overrightarrow{-AB}$. Viimane osutubki vektori $\vec{x}$ vastandvektoriks, s.o. $-\vec{x} = \overrightarrow{-AB}$. Tõepoolest, sest

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

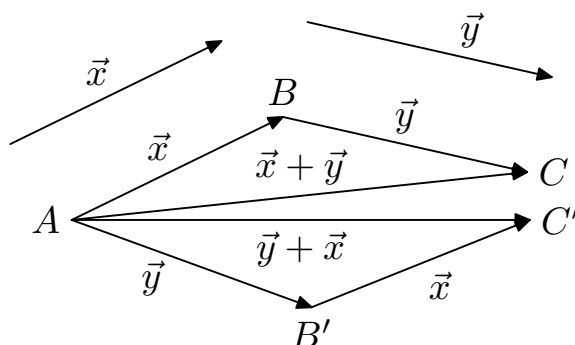
ja

$$(-\vec{x}) + \vec{x} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

4° Vaja on kontrollida, et vektorite liitmine on kommutatiivne, s.o.

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}. \quad (14.5)$$

Tõestuseks fikseerime punkti $A \in E$ (vt. joonist 14.6). Leiduvad sellised sobivad punktid $B, C, B', C' \in E$, et



Joonis 14.6

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{y}; \quad \overrightarrow{AB'} = \vec{y}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \vec{x}.$$

Valemiga (14.2) antud liitmise definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \\ \vec{y} + \vec{x} &= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Nüüd vaatleme murdjoont $CBAB'C'$. Kuna meil $\vec{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'C'}$ ja $\vec{y} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB'}$, siis $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{B'C'}$ ja $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AB'}$. Seotud vektorite ekvivalentsuse definitsiooni 14.7 kohaselt

$$AB = B'C', \quad AB \parallel B'C'; \quad BC = AB', \quad BC \parallel AB'.$$

Seega vaadeldava murdjoone vastasküljed on sama pikad ja paralleelsed, mistõttu on tegemist rööpkülkuga. Järelikult on murdjoon kinnine, s.t. $C' = C$. Nüüd näeme, et valemis (14.6) on paremad pooled võrdsed. Seega on võrdsed ka vasakud pooled. Sellega vektorite liitmise kommutatiivsus (14.5) on tõestatud.

Oleme näidanud, et valemiga (14.2) antud vektorite liitmine rahuldab vajalikke aksioome $1^\circ - 4^\circ$.

II. Nüüd on vaja defineerida vektorite hulgas $\mathbf{E}$ vektori reaalarvuga korrutamine, s.o. iga reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}$ korral on vaja defineerida uus vektor, mida tähistame $\xi\vec{x}$ abil. Enne kui vektori $\xi\vec{x}$ defineerime, on vaja paari uut mõistet.

Mistahes vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}$ korral, lähtudes mingist punktist $A \in E$, leidub selline punkt $B \in E$, et $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$. Tekib ka seotud vektor $\overrightarrow{AB} \in \vec{x}$.

Definitsioon 14.9. Vektori $\vec{x}$ pikkuseks, tähistame $|\vec{x}|$ abil, nimetatakse seotud vektori $\overrightarrow{AB} \in \vec{x}$ pikkust, s.o.

$$|\vec{x}| := |\overrightarrow{AB}|, \quad \overrightarrow{AB} \in \vec{x}.$$

Kuna vektor, kui ekvivalentsiklass, koosneb omavahel ekvivalentsetest seotud vektoritest, mis on pikkuselt võrdsed, siis viimane definitsioon ei sõltu punkti $A \in E$ valikust. Näeme, et vektori pikkus ei ole negatiivne. Saame isegi öelda täpsemalt: nullvektori ja ainult tema pikkus on null, kõigi nullvektoritest erinevate ja ainult nende pikkus on positiivne, s.o.

$$\vec{x} = \vec{0} \iff |\vec{x}| = 0, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \iff |\vec{x}| > 0. \tag{14.7}$$

Mistahes kahe vektori $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ korral, lähtudes punktidest $A, A' \in E$, leiduvad sellised punktid $B, B' \in E$, et

$$\overline{AB} \in \vec{x}, \quad \overline{A'B'} \in \vec{y}.$$

Definitsioon 14.10. Vektorit $\vec{x}$ nimetame 1) kollineaarseks, 2) samasuunaliseks, 3) vastassuunaliseks vektoriga $\vec{y}$, kui

$$1) \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}, \quad 2) \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{A'B'}, \quad 3) \overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{A'B'},$$

ning tähistame

$$1) \vec{x} \parallel \vec{y}, \quad 2) \vec{x} \uparrow\uparrow \vec{y}, \quad 3) \vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}.$$

Paneme nüüd tähele, et vektori määramiseks on küllaldane teada tema pikkust ja tema suunda.

Anname nüüd kujutuse

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}; \quad (\xi, \vec{x}) \longmapsto \xi \vec{x},$$

s.o. reaalarvu ja vektori korrutise, järgmise definitsiooniga.

Definitsioon 14.11. Reaalarvu ξ ja vektori $\vec{x}$ korrutiseks $\xi \vec{x}$ nimetatakse vektorit, mis määratakse tingimustega

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & |\xi \vec{x}| = |\xi| |\vec{x}|, \\ 2^\circ \quad & (\xi \vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x}, \text{ kui } \xi > 0, \quad (\xi \vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}, \text{ kui } \xi < 0. \end{aligned} \tag{14.8}$$

Nüüd tuleb kontrollida, kas antud vektori korrutamise reaalarvuga definitsioon rahuldab kahte aksioomi antuna valemitega (7.7) ja (7.8). Neist esimene, s.o.

$$1 \vec{x} = \vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{E}, \tag{14.9}$$

on kergesti kontrollitav, sest valemi (14.8) kohaselt

$$|1 \vec{x}| = |1| |\vec{x}| = 1 |\vec{x}| = |\vec{x}|; \quad (1 \vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x},$$

sest $1 > 0$, millest saame (14.9). Et kontrollida aksioomi antuna valemiga (7.8), teeme eelnevalt veel mõningad tähelepanekud.

Lause 14.1. Kheativad järgmised valemid

$$0 \vec{x} = \vec{0}, \quad \xi \vec{0} = \vec{0}, \quad (-1) \vec{x} = -\vec{x}. \tag{14.10}$$

Tõestus. Vektorid $0\vec{x}$ ja $\xi\vec{0}$ on pikkusega 0, sest definitsiooni 14.11 kohaselt

$$|0\vec{x}| = |0||\vec{x}| = 0|\vec{x}| = 0, \quad |\xi\vec{0}| = |\xi||\vec{0}| = |\xi|0 = 0.$$

Kuna pikkusega 0 on ainult nullvektor, siis

$$0\vec{x} = \vec{0}, \quad \xi\vec{0} = \vec{0}.$$

Kolmanda omaduse tõestamisel paneme tähele, et vektorid $(-1)\vec{x}$ ja $-\vec{x}$ on võrdse pikkusega, sest

$$|(-1)\vec{x}| = |-1||\vec{x}| = 1|\vec{x}| = |\vec{x}| = |-\vec{x}|.$$

Lisaks vaatluse all olevad vektorid, definitsiooni 14.11 kohaselt, on samasuunalised, sest

$$(-1)\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}, \quad \vec{x} \uparrow\downarrow (-\vec{x}) \implies (-1)\vec{x} \uparrow\uparrow (-\vec{x}).$$

Järelikult $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$. ♠

Sellega on eeltöö lõppenud, et tõestada

$$(\xi\eta)\vec{x} = \xi(\eta\vec{x}), \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{x} \in \mathbf{E}. \quad (14.11)$$

Paneme esmalt tähele, et vektorid $(\xi\eta)\vec{x}$ ja $\xi(\eta\vec{x})$ on võrdse pikkusega, sest

$$|(\xi\eta)\vec{x}| = |\xi\eta||\vec{x}| = (|\xi||\eta|)|\vec{x}| = |\xi|(|\eta||\vec{x}|) = |\xi||\eta\vec{x}| = |\xi(\eta\vec{x})|. \quad (14.12)$$

Märgime, et mõningatel lihtsatel erijuhtudel on valemi (14.11) kehtivus ilmne, kasutamata isegi (14.12). Neid juhte on kolm: $\xi = 0$, $\eta = 0$ ja $\vec{x} = \vec{0}$. See on tõepoolest nii, sest tänu valemile (14.10) saame

$$(0\eta)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}, \quad 0(\eta\vec{x}) = \vec{0} \implies (0\eta)\vec{x} = 0(\eta\vec{x}),$$

$$(\xi 0)\vec{x} = 0\vec{x} = \vec{0}, \quad \xi(0\vec{x}) = \xi\vec{0} = \vec{0} \implies (\xi 0)\vec{x} = \xi(0\vec{x})$$

ja

$$(\xi\eta)\vec{0} = \vec{0}, \quad \xi(\eta\vec{0}) = \xi\vec{0} = \vec{0} \implies (\xi\eta)\vec{0} = \xi(\eta\vec{0}).$$

Järgnevas tuleb uurida olukorda, kui $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ ja $\vec{x} \neq \vec{0}$. Kuna on näidatud, et vektorite $(\xi\eta)\vec{x}$ ja $\xi(\eta\vec{x})$ pikkused on võrdsed, siis on veel vaja näidata, et need vektorid on samasuunalised. Kahjuks tuleb järgnev arutlus jaotada neljaks olenevalt ξ ja η märgist, sest sellest sõltub kordse vektori suund. Siin me kasutame iga juhu puhul definitsiooni 14.11.

Kui $\xi > 0$ ja $\eta > 0$, siis ka $\xi\eta > 0$. Järelikult

$$(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{x}, \quad \xi(\eta\vec{x}) \uparrow\uparrow (\eta\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x} \implies (\xi\eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \xi(\eta\vec{x}).$$

Kui $\xi < 0$ ja $\eta < 0$, siis $\xi\eta > 0$. Järelikult

$$(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{x}, \quad \xi(\eta\vec{x}) \uparrow\downarrow (\eta\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}.$$

Seega

$$(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \xi(\eta\vec{x}).$$

Kui $\xi > 0$ ja $\eta < 0$, siis $\xi\eta < 0$. Järelikult

$$(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}, \quad \xi(\eta\vec{x}) \uparrow\uparrow (\eta\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}.$$

Näeme, et ka siin

$$(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \xi(\eta\vec{x}).$$

Lõpuks kui $\xi < 0$ ja $\eta > 0$, siis $\xi\eta < 0$. Järelikult

$$(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}, \quad \xi(\eta\vec{x}) \uparrow\downarrow (\eta\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x},$$

millest $(\xi\eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \xi(\eta\vec{x})$. Valem (14.11) on tõestatud. Seega vektorruumide aksioomide 5° ja 6° kehtivus on näidatud.

III. Lõpuks tuleb kontrollida distributiivsuse seadusi

$$\xi(\vec{x} + \vec{y}) = \xi\vec{x} + \xi\vec{y} \tag{14.13}$$

ja

$$(\xi + \eta)\vec{x} = \xi\vec{x} + \eta\vec{x}. \tag{14.14}$$

Ka distributiivsuste kontrollimisel vaatleme esmalt lihtsaid erijuhte. Kui $\xi = 0$, $\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{y} = \vec{0}$ või $\vec{y} = -\vec{x}$, siis distributiivsus (14.13) kehtib, sest

$$0(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}, \quad 0\vec{x} + 0\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies 0(\vec{x} + \vec{y}) = 0\vec{x} + 0\vec{y},$$

$$\begin{aligned}\xi(\vec{0} + \vec{y}) &= \xi\vec{y}, \quad \xi\vec{0} + \xi\vec{y} = \vec{0} + \xi\vec{y} = \xi\vec{y} \implies \xi(\vec{0} + \vec{y}) = \xi\vec{0} + \xi\vec{y}, \\ \xi(\vec{x} + \vec{0}) &= \xi\vec{x}, \quad \xi\vec{x} + \xi\vec{0} = \xi\vec{x} + \vec{0} = \xi\vec{x} \implies \xi(\vec{x} + \vec{0}) = \xi\vec{x} + \xi\vec{0}\end{aligned}$$

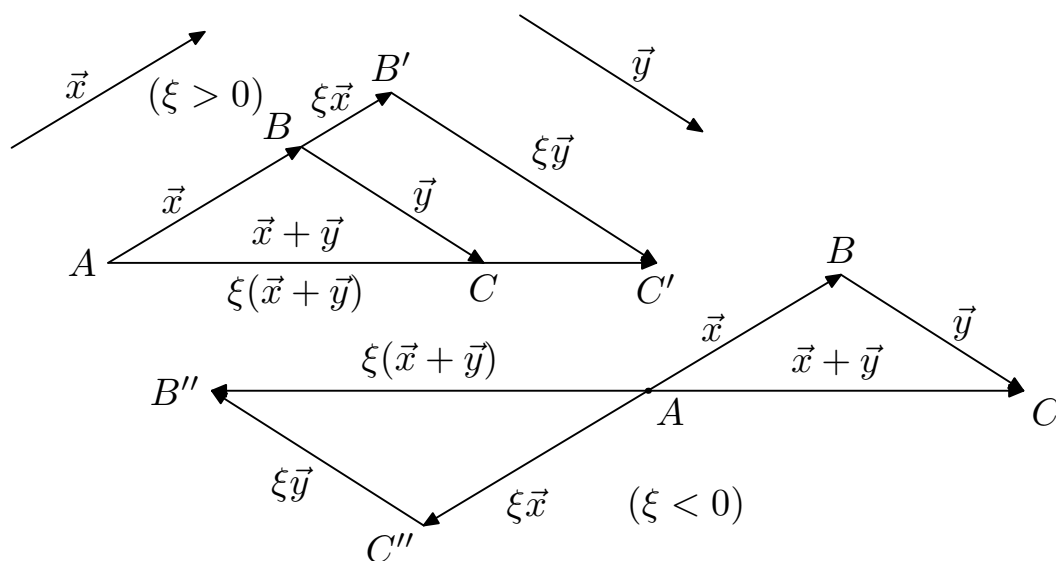
ja

$$\begin{aligned}\xi(\vec{x} + (-\vec{x})) &= \xi\vec{0} = \vec{0}, \quad \xi\vec{x} + \xi(-\vec{x}) = \xi\vec{x} + (\xi(-1))\vec{x} = \xi\vec{x} + ((-1)\xi)\vec{x} = \\ &= \xi\vec{x} + (-1)(\xi\vec{x}) = \xi\vec{x} + (-\xi\vec{x}) = \vec{0} \implies \xi(\vec{x} + (-\vec{x})) = \xi\vec{x} + \xi(-\vec{x}).\end{aligned}$$

Siin me kasutasime valemeid (14.10) ja (14.11).

On jäänud vaadelda põhijuhtu, kus $\xi \neq 0$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ ja $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$. Valime vabalt punkti $A \in E$ (vt. joonist 14.7). Leiduvad sobivad punktid, tähistame $B, C \in E$ abil, et

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{y}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}.$$



Joonis 14.7

Moodustame nüüd $\xi > 0$ ($\xi < 0$) korral meie kolmnurgaga ABC sarnase kolmnurga $B'AC'$ ($B''AC''$) nagu joonisel on näidatud. Seejuures nõuame, et külgede suhe on

$$\frac{B'A}{BA} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} = \xi, \quad \text{kui } \xi > 0,$$

ja

$$\frac{B''A}{BA} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{AC''}{AC} = -\xi, \quad \text{kui } \xi < 0.$$

Definitsioon 14.11 lubab nüüd vektorite jaoks kirjutada

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB'} &= \xi \overrightarrow{AB} = \xi \vec{x}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \xi \overrightarrow{BC} = \xi \vec{y}; \\ \overrightarrow{AC'} &= \xi \overrightarrow{AC} = \xi(\vec{x} + \vec{y}), \quad \text{kui } \xi > 0, \end{aligned} \quad (14.15)$$

ja

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB''} &= \xi \overrightarrow{AB} = \xi \vec{x}, \quad \overrightarrow{B''C''} = \xi \overrightarrow{BC} = \xi \vec{y}; \\ \overrightarrow{AC''} &= \xi \overrightarrow{AC} = \xi(\vec{x} + \vec{y}), \quad \text{kui } \xi < 0. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Vektorite liitmise definitsiooni kohaselt

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}, \quad \overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{AB''} + \overrightarrow{B''C''}.$$

Asendame siia valemitest (14.15) ja (14.16). Mõlemal juhul, olenemata sellest kas $\xi > 0$ või $\xi < 0$, saame

$$\xi(\vec{x} + \vec{y}) = \xi \vec{x} + \xi \vec{y}.$$

Nüüd näitame, et kehtib distributiivsus (14.14). Alustame taas erijuhude vaatlemisega.

Kui $\xi = 0$, $\eta = 0$ või $\vec{x} = \vec{0}$, siis distributiivsus (14.14) kehtib, sest

$$(0 + \eta)\vec{x} = \eta\vec{x}, \quad 0\vec{x} + \eta\vec{x} = \vec{0} + \eta\vec{x} = \eta\vec{x} \implies (0 + \eta)\vec{x} = 0\vec{x} + \eta\vec{x},$$

$$(\xi + 0)\vec{x} = (0 + \xi)\vec{x} = 0\vec{x} + \xi\vec{x} = \xi\vec{x} + 0\vec{x} \implies (\xi + 0)\vec{x} = \xi\vec{x} + 0\vec{x}$$

ja

$$(\xi + \eta)\vec{0} = \vec{0}, \quad \xi\vec{0} + \eta\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \implies (\xi + \eta)\vec{0} = \xi\vec{0} + \eta\vec{0}.$$

Tõestamist vajab veel põhijuht $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ ja $\vec{x} \neq \vec{0}$. Kahjuks tuleb ka siin arutelu jagada alajuhtudeks, et oskaksime hinnata kordse vektori suunda.

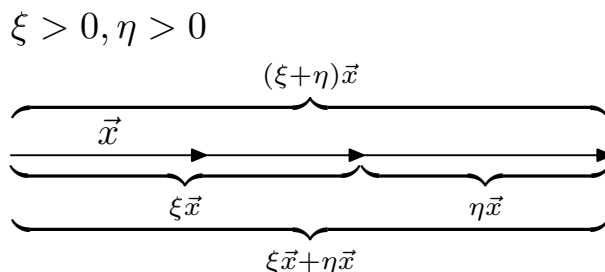
Kui $\xi > 0$ ja $\eta > 0$, siis ka $\xi + \eta > 0$. Me saame öelda, et vaadeldavate vektorite $(\xi + \eta)\vec{x}$ ja $\xi\vec{x} + \eta\vec{x}$ pikkused on võrdsed ning nad on lisaks ka samasuunalised, sest

$$|(\xi + \eta)\vec{x}| = |\xi + \eta||\vec{x}| = (|\xi| + |\eta|)|\vec{x}| = |\xi||\vec{x}| + |\eta||\vec{x}| = |\xi\vec{x}| + |\eta\vec{x}| = |\xi\vec{x} + \eta\vec{x}|$$

ja

$$(\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{x}, \quad (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x} \implies (\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\uparrow (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}).$$

Siin me kasutasime juuresolevat joonist 14.8, absoluutväärtuse omadusi ja definitsiooni 14.11.



Joonis 14.8

Kui $\xi < 0$ ja $\eta < 0$, siis ka $\xi + \eta < 0$. Ka siin saame öelda, et vaadeldavate vektorite $(\xi + \eta)\vec{x}$ ja $\xi\vec{x} + \eta\vec{x}$ pikkused on võrdsed ning nad on samasuunalised, sest

$$|(\xi + \eta)\vec{x}| = |\xi + \eta| |\vec{x}| = (|\xi| + |\eta|) |\vec{x}| = |\xi| |\vec{x}| + |\eta| |\vec{x}| = |\xi\vec{x}| + |\eta\vec{x}| = |\xi\vec{x} + \eta\vec{x}|$$

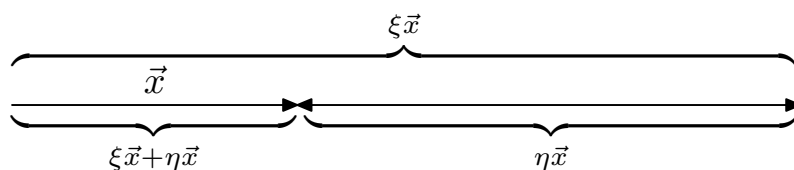
ja

$$(\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}, \quad (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x} \implies (\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\uparrow (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}).$$

Juht $\xi > 0$ ja $\eta < 0$ tuleb aga jagada kolmeks: $\xi + \eta > 0$, $\xi + \eta = 0$ ja $\xi + \eta < 0$.

Esimesel juhul neist (vt. joonist 14.9)

$$\xi > 0, \eta < 0, \xi + \eta > 0$$



Joonis 14.9

$$|(\xi + \eta)\vec{x}| = |\xi + \eta| |\vec{x}| = (|\xi| - |\eta|) |\vec{x}| = |\xi| |\vec{x}| - |\eta| |\vec{x}| = |\xi\vec{x}| - |\eta\vec{x}| = |\xi\vec{x} + \eta\vec{x}| \implies$$

$$\implies |(\xi + \eta)\vec{x}| = |\xi\vec{x} + \eta\vec{x}|$$

ja

$$(\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{x}, \quad (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x} \implies (\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\uparrow (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}).$$

Seega valem (14.14) sellel juhul on tõestatud.

Teisel juhul neist

$$|(\xi + \eta)\vec{x}| = |0\vec{x}| = |\vec{0}| = 0 \implies (\xi + \eta)\vec{x} = \vec{0}$$

ja

$$\xi\vec{x} + \eta\vec{x} = \xi\vec{x} + (-\xi)\vec{x} = \xi\vec{x} + ((-1)\xi)\vec{x} = \xi\vec{x} + (-1)(\xi\vec{x}) = \xi\vec{x} + (-\xi\vec{x}) = \vec{0},$$

millest paremate poolte kokkulangemise tõttu saame taas (14.14).

Kolmandal juhul saame analoogiliselt (vt. joonist 14.10)

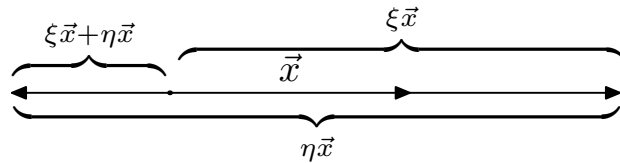
$$\begin{aligned} |(\xi + \eta)\vec{x}| &= |\xi + \eta||\vec{x}| = (|\eta| - |\xi|)|\vec{x}| = |\eta||\vec{x}| - |\xi||\vec{x}| = |\eta\vec{x}| - |\xi\vec{x}| = |\eta\vec{x} + \xi\vec{x}| \implies \\ &\implies |(\xi + \eta)\vec{x}| = |\xi\vec{x} + \eta\vec{x}| \end{aligned}$$

ja

$$(\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{x}, \quad (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x} \implies (\xi + \eta)\vec{x} \uparrow\uparrow (\xi\vec{x} + \eta\vec{x}).$$

Ka sellel juhul valem (14.14) kehtib.

$$\xi > 0, \eta < 0, \xi + \eta < 0$$



Joonis 14.10

Viimase juhu $\xi < 0$ ja $\eta > 0$ saab taandada juba vaadeldud juhule $\xi > 0$ ja $\eta < 0$ tänu reaalarvude ja meie vektorite liitmise kommutatiivsusele, mistõttu

$$(\xi + \eta)\vec{x} = (\eta + \xi)\vec{x} = \eta\vec{x} + \xi\vec{x} = \xi\vec{x} + \eta\vec{x}.$$

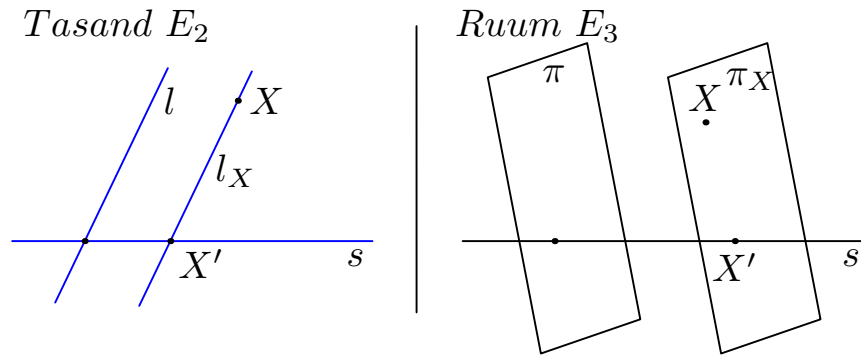
Kokkuvõttes valem (14.14) on tõestatud.

Sellega oleme näidanud, et punktihulga E poolt indutseeritud vektorite hulk $\mathbf{E}$ on tehete (14.2) ja (14.8) suhtes vektorruum.

15. PROJEKTSIOONIVEKTOR. PROJEKTSIOON. OMADUSED

Projektsioonivektorit ja projektsiooni vaadeldakse tasandil E_2 ja ruumis E_3 . Olgu tasandil (ruumis) fikseeritud mingi sirge s (vt. joonist 1.1). Seejärel fikseerime sirge l (tasandi π), nõudes, et ta lõikab sirget s ja seejuures ainult ühes punktis. Mistahes punkti $X \in E_2$ ($X \in E_3$) korral võtame punkti X läbiva sirge l_X (tasandi π_X), mis on paralleelne sirgega l (tasandiga π), s.o.

$$X \in l_X, \quad l_X \parallel l \quad (X \in \pi_X, \quad \pi_X \parallel \pi).$$



Joonis 15.1

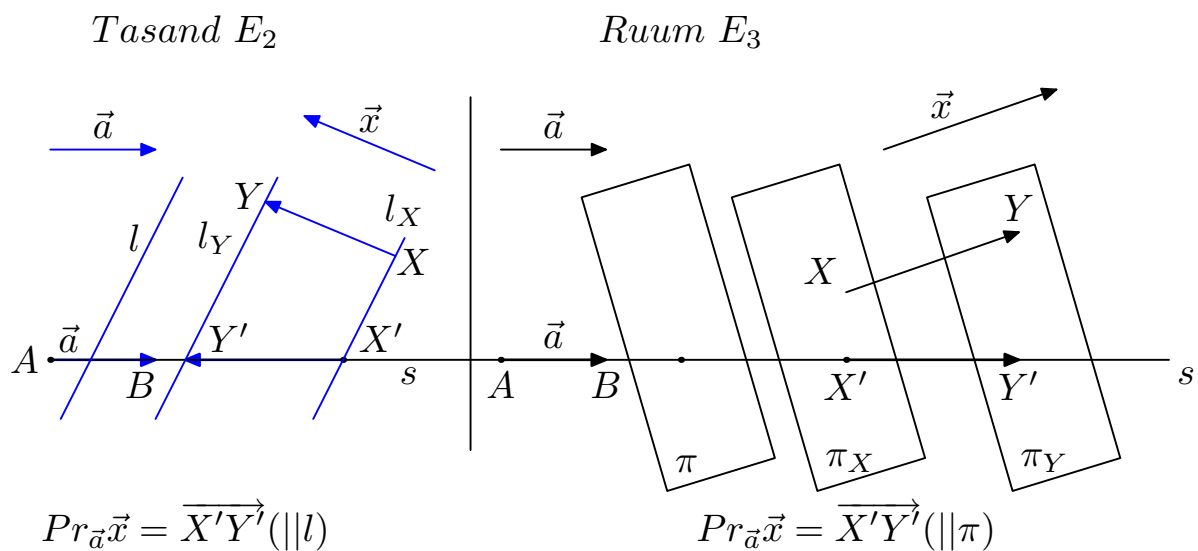
Üheselt määratud lõikepunkti $s \cap l_X$ ($s \cap \pi_X$) tähistame punkti X korral tähega X' . Seega

$$X' = s \cap l_X \quad (X' = s \cap \pi_X).$$

Definitsioon 15.1. Punkti X' nimetame punkti X projektsiooniks sirgel s paralleelselt sirgega l (tasandiga π).

Paneme tähele, et kui $X \in s$, siis $X' = X$. Ka mistahes punkti $Y \in l_X$ ($Y \in \pi_X$) korral $Y' = X'$. Sellega on lõppenud eeltöö, et anda projektsioonivektori mõiste.

Võtame nullvektorist erineva vektori $\vec{a} \in \mathbf{E}_2$ ($\vec{a} \in \mathbf{E}_3$). Teeme nüüd järgmise konstruktsiooni. Fikseerime vabalt mingi punkti $A \in E_2$ ($A \in E_3$) (vt. joonist 15.2). Leidub selline punkt $B \in E_2$ ($B \in E_3$), et $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Kuna vektor $\vec{a}$ ei ole nullvektor, siis punktid A ja B on erinevad. Tekkinud lõik AB määrab üheselt sellise sirge s , et $AB \subset s$. Edasi fikseerime sirge $l \subset E_2$ (tasandi $\pi \subset E_3$) nii, et l (π) lõikab sirget s ainult ühes punktis. Mistahes vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_2$ ($\vec{x} \in \mathbf{E}_3$) korral, lähtudes mingist punktist $X \in E_2$ ($X \in E_3$), saame leida sellise punkti $Y \in E_2$ ($Y \in E_3$), et $\overrightarrow{XY} = \vec{x}$. Projekteerime punktid X ja Y sirgele s paralleelselt sirgega l (tasandiga π), saades sirgel s vastavalt punktid X' ja Y' . Nende abil moodustame vektori $\overrightarrow{X'Y'}$.



Joonis 15.2

Definitsioon 15.2. Vektorit $\overrightarrow{X'Y'}$ nimetame vektori $\vec{x}$ projekt-sioonivektoriks vektori $\vec{a}$ sihile paralleelselt sirgega l (tasandiga π). Projektsioonivektorit $\overrightarrow{X'Y'}$ tähistame $Pr_{\vec{a}}\vec{x}(\parallel l)$ ($Pr_{\vec{a}}\vec{x}(\parallel \pi)$).

Kui tekstist on selge paralleelselt millise sirgega (tasandiga) projekt-sioonivektor leitakse, siis tema tähises jäetakse ära $\parallel l$ ($\parallel \pi$). Seega projektsioonivektori lihtsustatuks tähiseks saame $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ ($Pr_{\vec{a}}\vec{x}$). Jätame lugejale kontrollida, et projektsioonivektori definitsioon ei sõltu punktide A ja X valikust. Abistavalt ütleme, et lähtudes mistahes teisest punkti-paarist, saame seotud vektorite $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{XY}$ ja $\overrightarrow{X'Y'}$ asemele sellised seotud

vektorid, mis on ekvivalentsed nendega. Seetõttu nad määravad sama vektori nagu eelmisest paragrahvist teame. Definiitsioonist 15.2 näeme: kui mingi vektori $\overrightarrow{XY} = \vec{x}$ korral sirged l_X ja l_Y (tasandid π_X ja π_Y) ühtuvad, siis ühtuvad ka punktid X' ja Y' , mistõttu $\overrightarrow{X'Y'} = \vec{0}$. Seega sellise vektori $\vec{x}$ korral $Pr_{\vec{a}}\vec{x} = \vec{0}$. Selline on olukord ka nullvektori $\vec{0}$ korral. Seega

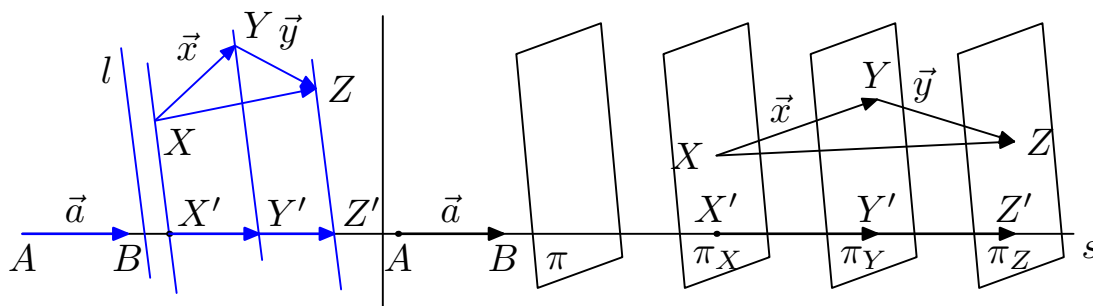
$$Pr_{\vec{a}}\vec{0} = \vec{0}. \quad (15.1)$$

Järgnevas tõestame kaks projektsioonivektori omadust.

Omadus 15.1. *Vektorite summa projektsioonivektor on võrdne nende vektorite projektsioonivektorite summaga, s.o.*

$$Pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}) = Pr_{\vec{a}}\vec{x} + Pr_{\vec{a}}\vec{y}. \quad (15.2)$$

Tõestus. Projektsioonivektori definiitsiooni kohaselt tuleb võtta punkt $A \in E_2$ ($A \in E_3$), seejärel leida selline punkt $B \in E_2$ ($B \in E_3$) nii, et $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (vt. joonist 15.3).



Joonis 15.3

Edasi moodustame sirge s selliselt, et lõik $AB \subset s$ ja sirge l (tasandi π), paralleelselt millega projekteerime punkte sirgele s . Leiame valemis (15.2) olevad projektsioonivektorid. Võtame punktid $X, Y, Z \in E_2$ ($X, Y, Z \in E_3$) nii, et $\overrightarrow{XY} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{YZ} = \vec{y}$. Seejuures $\overrightarrow{XZ} = \vec{x} + \vec{y}$. Tähistame punktide X, Y ja Z projektsioone sirgel s vastavalt X', Y' ja Z' . Projektsioonivektori definiitsiooni 15.2 kohaselt saame

$$Pr_{\vec{a}}\vec{x} = \overrightarrow{X'Y'}, \quad Pr_{\vec{a}}\vec{y} = \overrightarrow{Y'Z'}, \quad Pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}) = \overrightarrow{X'Z'}. \quad (15.3)$$

Vektorite liitmise definiitsiooni kohaselt (antakse valemiga (14.2))

$$\overrightarrow{X'Z'} = \overrightarrow{X'Y'} + \overrightarrow{Y'Z'}.$$

Asendades siia valemist (15.3), saame valemi (15.2). Seega omadus 15.1 on tõestatud. ♠

Omadus 15.2. *Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektori $\vec{x}$ korral*

$$Pr_{\vec{a}}(\xi \vec{x}) = \xi Pr_{\vec{a}} \vec{x}. \quad (15.4)$$

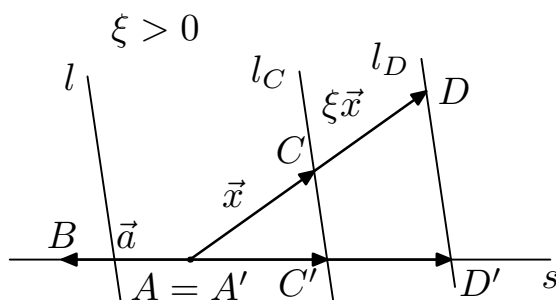
Tõestus. Selle valemi õigsus on ilmne kahel triviaalsel juhul, kui $\xi = 0$ või $\vec{x} = \vec{0}$, sest

$$Pr_{\vec{a}}(0\vec{x}) = Pr_{\vec{a}}\vec{0} = \vec{0} = 0Pr_{\vec{a}}\vec{x}$$

ja

$$Pr_{\vec{a}}(\xi \vec{0}) = Pr_{\vec{a}}\vec{0} = \vec{0} = \xi \vec{0} = \xi Pr_{\vec{a}}\vec{0}.$$

Siin me kasutasime valemeid (14.10) ja (15.1). Nüüd tuleb omadus tõestada põhijuhul, kui $\xi \neq 0$ ja $\vec{x} \neq \vec{0}$. Teeme joonise 15.4.



Joonis 15.4

Joonis kajastab olukorda, kui asume tasandil ja seejuures $\xi > 0$. Lugeja hooleks jääb teha joonis, kui $\xi < 0$. Samuti teha vastavad joonised ruumi korral. Lähtume projektsioonivektori definitsioonist. Selle kohaselt tuleb võtta punkt $A \in E_2$ ($A \in E_3$), seejärel leida selline punkt $B \in E_2$ ($B \in E_3$) nii, et $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Edasi moodustame sirge s , kus $AB \subset s$, ja sirge l (tasandi π), parallelselt millega projekteerime punkte sirgele s . Kanname joonisele ka vektori $\vec{x} \neq \vec{0}$ seekord, lähtudes punktist A . Leiduvad sobivad punktid $C, D \in E_2$ ($C, D \in E_3$), et $\overrightarrow{AC} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{AD} = \xi \vec{x}$. Siin $C \neq A$ ja $D \neq A$. Kui $\xi > 0$ ($\xi < 0$) on

$$\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC} \quad (\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}).$$

Leiame punktide A , C ja D projektsioonid sirgel s paralleelselt sirgega l (tasandiga π). Saame punktid $A' = A$, B' ja C' . Kolmnurgad ADD' ja ACC' on sarnased, kusjuures

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AD'}{AC'} = |\xi|.$$

Kasutades definitsiooni 14.11, saame

$$\overrightarrow{AD'} = \xi \overrightarrow{AC'} \implies Pr_{\vec{a}} \overrightarrow{AD} = \xi Pr_{\vec{a}} \overrightarrow{AC} \implies Pr_{\vec{a}}(\xi \vec{x}) = \xi Pr_{\vec{a}} \vec{x}.$$

Sellega omadus 15.2 on tõestatud. ♠

Järeldus 15.1. *Kehtib valem*

$$Pr_{\vec{a}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m) = Pr_{\vec{a}}\vec{x}_1 + Pr_{\vec{a}}\vec{x}_2 + \dots + Pr_{\vec{a}}\vec{x}_m. \quad (15.5)$$

Tõestuse jätame lugejale. See tuleb läbi viia matemaatilise induktiooni abil vektorite $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ arvu m järgi. Kui $m = 2$ on järeldus tõestatud (vt. (15.2)).

Järeldus 15.2 Kehtib valem

$$Pr_{\vec{a}}(\xi_1 \vec{x}_1 + \xi_2 \vec{x}_2 + \dots + \xi_m \vec{x}_m) = \xi_1 Pr_{\vec{a}}\vec{x}_1 + \xi_2 Pr_{\vec{a}}\vec{x}_2 + \dots + \xi_m Pr_{\vec{a}}\vec{x}_m.$$

Ka siin jätame tõestuse lugejale. Märkime ainult, et tuleb kasutada valemid (15.5) ja (15.4).

Definitsioon 15.3. Projektsioonivektorit $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ nimetame ristprojektsioonivektoriks, kui sirge l (tasand π) on risti sirgega s .

Selle paragrahvi lõpuosa pühendame projektsiooni mõistele ja ta omadustele. Kõigepealt juhime tähelepanu sellele, et projektsioonivektor $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ on kollineaarne vektoriga $\vec{a}$, nagu definitsioonist 15.2 näeme. Seega olenevalt vektorist $\vec{x}$ on projektsioonivektor $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ vektoriga $\vec{a}$ kas samasuunaline või vastassuunaline.

Definitsioon 15.4. Vektori $\vec{x}$ projektsiooniks vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ sihile nimetatakse reaalarvu, mida tähistame $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ abil ja anname valemiga

$$pr_{\vec{a}}\vec{x} := \begin{cases} |Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ -|Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases}. \quad (15.6)$$

Selle valemi rakendamisel projektsioonivektorile $Pr_{\vec{a}}\vec{x} = \vec{0}$ tekib küsimus, kuidas projektsioon $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ leida, sest nullvektor on samasuunaline iga vektoriga. Kuna $\pm|Pr_{\vec{a}}\vec{x}| = \pm|\vec{0}| = \pm 0 = 0$, siis pole oluline kumba juhtu valemis (15.6) projektsiooni $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ leidmiseks me kasutame.

Järgnevas tuletame ühe abivalemi, mis aitab projektsiooni $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ omaduste tõestamisel. Kõigepealt moodustame vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ abil uue vektori $\vec{a}_o := \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. Kuna $\vec{a} \neq \vec{0}$, siis $|\vec{a}| > 0$. Seega eksisteerib $\frac{1}{|\vec{a}|}$, mis on seejuures samuti positiivne. Viimast silmas pidades, näeme, et vektor $\vec{a}_o$ on definitsiooni 14.11 kohaselt samasuunaline vektoriga $\vec{a}$. Sama valemit kasutades, saame

$$|\vec{a}_o| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1.$$

Definitsioon 15.5. Vektorit pikkusega üks nimetatakse ühikvektoriks. Seega vektor $\vec{a}_o$ on vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline ühikvektor. Lõpuks anname abivalemi, milleks on

$$Pr_{\vec{a}}\vec{x} = (pr_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a}_o. \quad (15.7)$$

Veendume selle valemi õigsuses. Juhul $Pr_{\vec{a}}\vec{x} = \vec{0}$ see valem kehtib, sest $pr_{\vec{a}}\vec{x} = 0$. Järgnevas tuleb vaadelda põhijuhtu $Pr_{\vec{a}}\vec{x} \neq \vec{0}$. Paneme esmalt tähele, et

$$Pr_{\vec{a}}\vec{x} \parallel \vec{a}, \quad \vec{a} \parallel \vec{a}_o \implies Pr_{\vec{a}}\vec{x} \parallel \vec{a}_o.$$

Kuna $\vec{a} \neq \vec{0}$, siis valemi (14.8) kohaselt on projektsioonivektor $Pr_{\vec{a}}\vec{x}$ vektori $\vec{a}_o$ kordne. Seega ta avaldub kujul

$$Pr_{\vec{a}}\vec{x} = \lambda \vec{a}_o. \quad (15.8)$$

Kordaja $\lambda \neq 0$, sest projektsioonivektor $Pr_{\vec{a}}\vec{x} \neq \vec{0}$. Leiame viimase valemi abil kordaja λ . Kõigepealt on selge, et

$$\lambda > 0 \iff Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a}_o, \quad \lambda < 0 \iff Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a}_o.$$

Lisaks saame pikkuse abil

$$|Pr_{\vec{a}}\vec{x}| = |\lambda \vec{a}_o| = |\lambda| |\vec{a}_o| = |\lambda| = \begin{cases} \lambda, & \text{kui } \lambda > 0 \\ -\lambda, & \text{kui } \lambda < 0 \end{cases} = \begin{cases} \lambda, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ -\lambda, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases}.$$

Viimasest saame

$$\lambda = \begin{cases} |Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ -|Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases} = pr_{\vec{a}}\vec{x} \implies \lambda = pr_{\vec{a}}\vec{x}.$$

Asendades saadud $\lambda = pr_{\vec{a}}\vec{x}$ valemisse (15.8), saame abivalemi (15.7). Seega valem (15.7) on tõestatud.

Nüüd tõestame projektsiooni kaks omadust.

Omadus 15.3. *Vektorite summa projektsioon on võrdne nende vektorite projektsioonide summaga, s.o.*

$$pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}) = pr_{\vec{a}}\vec{x} + pr_{\vec{a}}\vec{y}. \quad (15.9)$$

Tõestus. Lähtume projektsioonivektori esimesest omadusest (vt. valem (15.2)). Valemi (7.21) tõttu võime selle kirjutada kujul

$$Pr_{\vec{a}}\vec{x} + Pr_{\vec{a}}\vec{y} - Pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}.$$

Abivalemist (15.7) teeme siia asenduse. Saame

$$(pr_{\vec{a}}\vec{x}) \vec{a}_o + (pr_{\vec{a}}\vec{y}) \vec{a}_o - pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}) \vec{a}_o = \vec{0},$$

millest distributiivsuse abil reaalarvude liitmise ja lahutamise suhtes saame

$$(pr_{\vec{a}}\vec{x} + pr_{\vec{a}}\vec{y} - pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y})) \vec{a}_o = \vec{0}.$$

Arvutamise lihtsustamiseks tähistame

$$\alpha := pr_{\vec{a}}\vec{x} + pr_{\vec{a}}\vec{y} - pr_{\vec{a}}(\vec{x} + \vec{y}), \quad (15.10)$$

mille abil viimane saab kuju $\alpha \vec{a}_o = \vec{0}$. See valem saab kehtida vaid $\alpha = 0$ korral, sest

$$|\alpha \vec{a}_o| = |\vec{0}| \implies |\alpha| |\vec{a}_o| = 0 \implies |\alpha| = 0 \implies \alpha = 0.$$

Seega avaldise (15.10) parem pool on võrdne nulliga. ♠

Omadus 15.4. *Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektori $\vec{x}$ korral*

$$pr_{\vec{a}}(\xi \vec{x}) = \xi pr_{\vec{a}}\vec{x}. \quad (15.11)$$

Tõestus. Ta on analoogiline omaduse 15.3 tõestusele. Lähtume valemist (15.4), millest (7.21), (15.7) ja (7.15) abil saame

$$\begin{aligned} Pr_{\vec{a}}(\xi\vec{x}) - \xi Pr_{\vec{a}}\vec{x} = \vec{0} &\implies pr_{\vec{a}}(\xi\vec{x})\vec{a}_o - (\xi pr_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a}_o = \vec{0} \implies \\ (pr_{\vec{a}}(\xi\vec{x}) - \xi pr_{\vec{a}}\vec{x})\vec{a}_o &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Tähistame

$$\alpha := pr_{\vec{a}}(\xi\vec{x}) - \xi pr_{\vec{a}}\vec{x}, \quad (15.12)$$

mistõttu saame $\alpha\vec{a}_o = \vec{0}$. Analoogiliselt nagu eelmise omaduse korral saab viimane kehtida $\alpha = 0$ korral. Seega kehtib valem (15.11), sest avaldise (15.12) parem pool on võrdne nulliga. ♠

Lugejale jätame tõestada järeldustega 15.1 ja 15.2 analoogilised järeldused projektsiooni kohta, s.o. kehtivad valemid

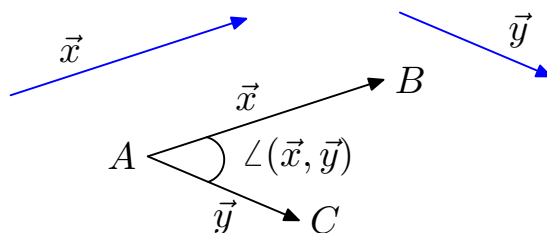
$$pr_{\vec{a}}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m) = pr_{\vec{a}}\vec{x}_1 + pr_{\vec{a}}\vec{x}_2 + \dots + pr_{\vec{a}}\vec{x}_m$$

ja

$$pr_{\vec{a}}(\xi_1\vec{x}_1 + \xi_2\vec{x}_2 + \dots + \xi_m\vec{x}_m) = \xi_1 pr_{\vec{a}}\vec{x}_1 + \xi_2 pr_{\vec{a}}\vec{x}_2 + \dots + \xi_m pr_{\vec{a}}\vec{x}_m.$$

Definitsioon 15.6. Projektsiooni $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ nimetame ristprojektsiooniks, kui sirge l (tasand π) on risti sirgega s .

Sel korral saab anda ristprojektsiooni $pr_{\vec{a}}\vec{x}$ leidmiseks täiendava valem, mis edaspidi on vajalik. Selleks anname kahe vektori vahelise nurga mõiste (vt. joonist 15.5).



Joonis 15.5

Mistahes kahe nullvektorist erineva vektori $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ korral lähtume mingist punktist $A \in E_2$ ($A \in E_3$). Leiduvad sobivad punktid $B, C \in E_2$

($B, C \in E_3$), mis ei ühtu punktiga A , et $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{y}$. Ruumi juhu saame taandada tasandi juhule, sest ruumi korral saame võtta sellise tasandi E_2 , et temale kuuluvad lõigud AB ja AC .

Definitsioon 15.7. Nimetame vektori $\vec{x}$ ja vektori $\vec{y}$ vaheliseks nurgaks $\vec{x} \neq \vec{0}$ ja $\vec{y} \neq \vec{0}$ korral nurka, mis tekib lõigu AB pööramisel ümber punkti A lühemat teed pidi lõigule AC . Tähistame seda nurka $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ abil.

Sellest definitsioonist näeme, et nullvektorist erinevate vektorite vaheline nurk kuulub lõiku $[0, \pi]$.

Definitsioon 15.8. Kui vektoritest $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vähemalt üks on nullvektor, siis nurgaks $\angle(\vec{x}, \vec{y})$ loeme ükskõik millist reaalarvu lõigust $[0, \pi]$.

Kahest viimasest definitsioonist näeme, et vektorite vaheline nurk ei ole märgiga reaalarv. Seega

$$\angle(\vec{y}, \vec{x}) = \angle(\vec{x}, \vec{y}). \quad (15.13)$$

Lisaks sellele

$$\forall \xi > 0, \eta > 0 \quad (\xi < 0, \eta < 0) \implies \angle(\xi\vec{x}, \vec{y}) = \angle(\vec{x}, \eta\vec{y}) = \angle(\vec{x}, \vec{y}) \quad (15.14)$$

ja

$$\forall \xi > 0, \eta < 0 \quad (\xi < 0, \eta > 0) \implies \angle(\xi\vec{x}, \vec{y}) = \angle(\vec{x}, \eta\vec{y}) = \pi - \angle(\vec{x}, \vec{y}). \quad (15.15)$$

Nüüd vaatleme ristprojektsiooni $pr_{\vec{a}}\vec{x}$, kui $\vec{x} \neq \vec{0}$. Nagu näeme

$$|Pr_{\vec{a}}\vec{x}| = \begin{cases} |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{a}), & \text{kui } \angle(\vec{x}, \vec{a}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -|\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{a}), & \text{kui } \angle(\vec{x}, \vec{a}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}.$$

Seega

$$\begin{aligned} |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{a}) &= \begin{cases} |Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } \angle(\vec{x}, \vec{a}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -|Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } \angle(\vec{x}, \vec{a}) \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} = \\ &= \begin{cases} |Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{a} \\ -|Pr_{\vec{a}}\vec{x}|, & \text{kui } Pr_{\vec{a}}\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{a} \end{cases} = pr_{\vec{a}}\vec{x}. \end{aligned}$$

Saime

$$pr_{\vec{a}}\vec{x} = |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{a}). \quad (15.16)$$

See valem on saadud eeldusel $\vec{x} \neq \vec{0}$. Samas aga näeme, et teda saab ka kasutada $\vec{x} = \vec{0}$ korral, sest $pr_{\vec{a}}\vec{0} = 0$ ja $|\vec{0}| = 0$.

Definitsioon 15.9. Me ütleme, et vektor $\vec{x}$ on risti vektoriga $\vec{y}$, kui $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$. Seda asjaolu tähistame $\vec{x} \perp \vec{y}$ abil.

Selle definitsiooni ja kahe vektori vahelise nurga definitsiooni kohaselt nullvektor on risti iga vektoriga. Samadele definitsioonidele tuginedes, saame öelda, et kui vektor $\vec{x}$ on risti vektoriga $\vec{y}$, siis vektor $\vec{y}$ on risti vektoriga $\vec{x}$. Seega

$$\vec{0} \perp \vec{y}, \quad \vec{x} \perp \vec{0}; \quad \vec{x} \perp \vec{y} \iff \vec{y} \perp \vec{x}.$$

16. BAAS. REEPER. PUNKTI KOORDINAADID, NENDE TEISENEMISE VALEMID ÜLEMINEKUL UUELE REEPERILE

Nägime, et sirge E_1 , tasand E_2 ja ruum E_3 indutseerivad vastavalt vektorruumid $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ ja $\mathbf{E}_3$. Edaspidi ütleme lühidalt, et punktihulk E_i indutseerib vektorruumi $\mathbf{E}_i$. Siin $i \in \mathbb{N}_3$. Nendel kolmel vektorruumil on veel üks omadus – omadus, mida vektorruumi definitsioon ei nõua. Selleks on vektori pikkus. Vaatamata sellele on meie käsutuses kõik vektorruumi tulemused teisest peatükist. Esmajoones on meile sealt oluline vektorsüsteemi lineaarse sõltuvuse ja lineaarse sõltumatuse mõiste. Viimase kaudu toodi sisse baasi mõiste (vaata definitsiooni 10.1). Meie kohendame seda definitsiooni oma vektorruumide $\mathbf{E}_i$ juhule. Kõigepealt sõnastame ühest, kahest ja kolmest vektorist koosneva vektorsüsteemi lineaarse sõltuvuse ja lineaarse sõltumatuse tingimused meile sobival kujul. Ühevektorilise vektorsüsteemi korral annab vastuse toereem 9.1 ja järeldus 9.1. Sõnastame nad uuesti.

Teoreem 16.1. Ühevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}$ on nullvektor, s.o. $\vec{a} = \vec{0}$.

Järeldus 16.1. Ühevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}\}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}$ ei ole nullvektor, s.o. $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Järgnevas vaatleme kahe- ja kolmevektorilist vektorsüsteemi.

Teoreem 16.2. Kahevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}_1$ on kollineaarne vektoriga $\vec{a}_2$.

Tõestus. Olgu vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ lineaarselt sõltuv. Kuna vektorsüsteemis on kaks vektorit, siis saame rakendada teoreemi 9.2, mille kohaselt üks vektor avaldub teise kaudu. Avaldugu näiteks vektor $\vec{a}_2$ vektori $\vec{a}_1$ kaudu, s.o.

$$\vec{a}_2 = \alpha \vec{a}_1.$$

Kui vektor $\vec{a}_1$ avaldub vektori $\vec{a}_2$ kaudu, siis on arutelu analoogiline. Valemi (14.8) teise tingimuse kohaselt on vektor $\vec{a}_2$ vektoriga $\vec{a}_1$ samavõti vastassuunaline, s.o. vektor $\vec{a}_1$ on kollineaarne vektoriga $\vec{a}_2$.

Vastupidi. Olgu $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Eraldame esmalt välja ühe kitsa erijuhu, mil eeldus kehtib. Selleks on juht, kui $\vec{a}_1$ või $\vec{a}_2$ on nullvektor. Seega vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ sisaldab nullvektorit, mistõttu järelduse 9.4 kohaselt on ta lineaarselt sõltuv. Põhijuhul on $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ja $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$. Sel korral $|\vec{a}_1| \neq 0$ ja $|\vec{a}_2| \neq 0$. Tähistame

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \alpha.$$

Viimase abil saame eeldust $\vec{a}_2 \parallel \vec{a}_1$ täpsustada: $\vec{a}_1 \uparrow\uparrow \vec{a}_2$ korral $\vec{a}_2 = \alpha\vec{a}_1$ ja $\vec{a}_1 \uparrow\downarrow \vec{a}_2$ korral $\vec{a}_2 = (-\alpha)\vec{a}_1$. Siin me kasutasime valemit (14.8). Teoremi 9.2 kohaselt vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ on lineaarselt sõltuv. ♠

Tarvilikust ja piisavast teoreemist saab teha järgmise tarviliku ja piisava järelduse.

Järeldus 16.2. *Vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor $\vec{a}_1$ ei ole kollineaarne vektoriga $\vec{a}_2$.*

Definitsioon 16.1. *Vektorsüsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ nimetatakse komplanaarseks, kui neid vektoreid määravad lõigud on paralleelsed mingi tasandiga.*

Komplanaarsuse mõiste omab mõtet ainult ruumi E_3 vektorite korral. Viimast definitsiooni võime tõlgendada ka järgmiselt. Iga punkti $A \in E_3$ korral leiduvad sobivad punktid $A_1, A_2, A_3 \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{AA_2} = \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{AA_3} = \vec{a}_3.$$

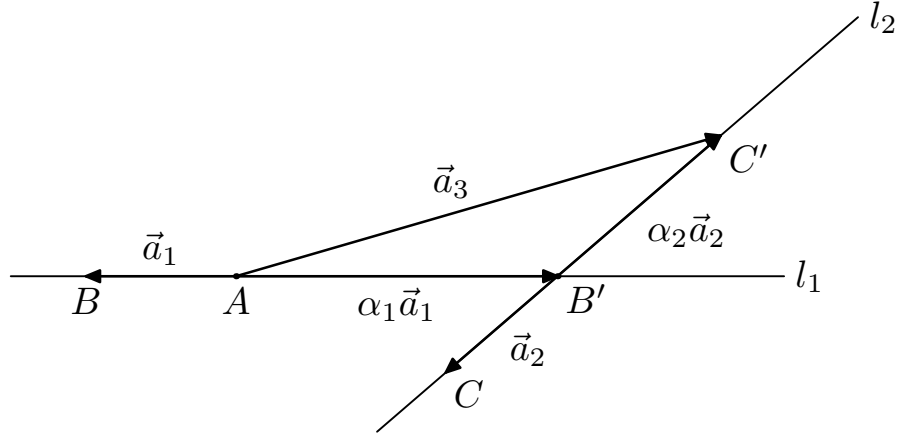
Seega vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on komplanaarne siis ja ainult siis, kui lõigud AA_1 , AA_2 ja AA_3 on ühisel tasandil.

Teoreem 16.3. *Kolmevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui see vektorsüsteem on komplanaarne.*

Tõestus. Olgu vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ lineaarselt sõltuv. Kuna temas on enam kui kaks vektorit, siis teoremi 9.2 kohaselt vektorsüsteemi üks vektoritest avaldub ülejäänute kaudu. Olgu selleks vektoriks näiteks vektor $\vec{a}_3$, s.o.

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2. \quad (16.1)$$

Kui vektorit $\vec{a}_3$ ei saa avaldada, siis saame avaldada kas vektori $\vec{a}_1$ või vektori $\vec{a}_2$ ning seejuures mõttekäigud on analoogilised. Lähtudes mingist punktist $A \in E_3$, konstrueerime valemi (16.1) abil vektori $\vec{a}_3$ (vt. joonist 16.1).



Joonis 16.1

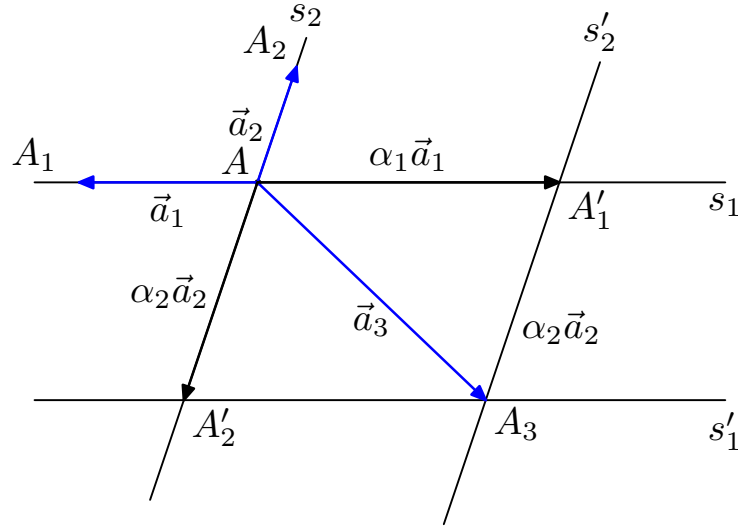
Teeme seda nii, et vektorile $\alpha_1 \vec{a}_2$ saaksime liita vektori $\alpha_2 \vec{a}_2$. Leidub selline punkt $B \in E_3$, et $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1$. Sirgel $l_1 \supset AB$ leidub punkt $B' \in l_1 \subset E_3$, et $\overrightarrow{AB'} = \alpha_1 \vec{a}_1$. Siin me kasutasime valemit (14.8). Vektorite liitmise definitsiooni silmas pidades, lähtume punktist B' . Leidub selline punkt $C \in E_3$, et $\overrightarrow{B'C} = \vec{a}_2$. Edasi tekib sirge $l_2 \supset B'C$ ja sellel sirgel punkt C' , et $\overrightarrow{B'C'} = \alpha_2 \vec{a}_2$. Siin me taas kasutasime valemit (14.8). Vektorite liitmise definitsiooni kohaselt

$$\overrightarrow{AC'} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{a}_3.$$

Nüüd võtame sellise tasandi π , et punktid $A, B', C' \in \pi$. Selline tasand ei pea küll olema üheselt määratud, mis ei ole ka meile vajalik. Sellel tasandil asuvad vektorite $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ja $\vec{a}_3$ poolt määratud seotud vektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C}$ ja $\overrightarrow{AC'}$ kui ka lõigud AB , $B'C$ ja AC' . Seega definitsiooni 16.1 kohaselt vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on komplanaarne.

Arutleme nüüd teises suunas (vt. joonist 16.2). Eeldame, et vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on komplanaarne. Fikseerides mingi punkti $A \in E_3$, leiduvad sellised punktid A_1, A_2 ja A_3 , et

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{AA_2} = \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{AA_3} = \vec{a}_3.$$



Joonis 16.2

Meie vektorsüsteemi komplanaarsuse tõttu asuvad lõigud AA_1 , AA_2 ja AA_3 ühisel tasandil. Tähistame viimast π abil. Seega $AA_1 \subset \pi$, $AA_2 \subset \pi$ ja $AA_3 \subset \pi$. Võime eeldada, et vektorsüsteemil $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ leidub kahevektoriline lineaarselt sõltumatu alamsüsteem, sest vastasel juhul teoreemi 9.2 kohaselt vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on lineaarselt sõltuv, mida oli vaja tõestada. Olgu näiteks alamvektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ lineaarselt sõltumatu. Kui mõni muu kahevektoriline alamvektorsüsteem on lineaarselt sõltumatu, siis järgnev arutelu on analoogiline. Järelduse 16.2 kohaselt $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, seega lõigud AA_1 ja AA_2 ei ole paralleelsed. Nad määravad üheselt neid läbiva tasandi, mida tähistame π abil. Seega $AA_1 \subset \pi$ ja $AA_2 \subset \pi$. Et vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on komplanaarne, siis seotud vektor $\overrightarrow{AA_3}$, samuti ka lõik AA_3 asuvad konstrueeritud tasandil π . Moodustame nüüd üheselt määratud sirged nii, et $s_1 \supset AA_1$ ja $s_2 \supset AA_2$. Läbi punkti A_3 tõmbame sirged s'_1 ja s'_2 , mis on vastavalt paralleelsed sirgetega s_1 ja s_2 . Tekivad üheselt määratud lõikepunktid

$$A'_1 = s_1 \cap s'_2, \quad A'_2 = s_2 \cap s'_1.$$

Konstruktsiooni kohaselt

$$\overrightarrow{AA'_1} \parallel \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{AA'_2} \parallel \vec{a}_2.$$

Kuna $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ ja $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$, siis valemi (14.8) kohaselt võime öelda, et vektor $\overrightarrow{AA'_1}$ on vektori $\vec{a}_1$ kordne ja $\overrightarrow{AA'_2}$ vektori $\vec{a}_2$ kordne. Seega leiduvad

sobivad reaalarvud α_1 ja α_2 , et

$$\overrightarrow{AA'_1} = \alpha_1 \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{AA'_2} = \alpha_2 \vec{a}_2.$$

Vektorite liitmise definitsiooni kohaselt saame

$$\vec{a}_3 = \overrightarrow{AA'_1} + \overrightarrow{A'_1A'_3} = \overrightarrow{AA'_1} + \overrightarrow{AA'_2} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2.$$

Siin me arvestasime, et $\overrightarrow{AA'_2} \sim \overrightarrow{A'_1A'_3}$, mistõttu $\overrightarrow{AA'_2} = \overrightarrow{A'_1A'_3}$. Me saime $\vec{a}_3 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$. Teoreemi 9.2 kohaselt vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on lineaarselt sõltuv. ♠

Järeldus 16.3. Kolmevektoriline vektorsüsteem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui ta ei ole komplanaarne.

Teoreem 16.4. Vektorruumide $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ ja $\mathbf{E}_3$ baasiks on vastavalt mistahes vektorsüsteem $\{\vec{e}_1\}$, mille vektor $\vec{e}_1$ ei ole nullvektor, mistahes kahest mittekollineaarsest vektorist koosnev vektorsüsteem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja mistahes kolmest mittekomplanaarsest vektorist koosnev vektorsüsteem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Tõestus. Definitsiooni 10.1 kohaselt on meil veel vaja näidata, et iga vektor avaldub vaadeldava vektorsüsteemi kaudu. Vaadeldavate vektorsüsteemide lineaarne sõltumatus on aga eeldusega juba tagatud. Meie järgnev tõestus koosneb kolmest juhust.

a) Kui $\vec{x} \in \mathbf{E}_1$, siis veendume, et ta avaldub vektori $\vec{e}_1$ kaudu. Selleks tugineme vektori korrutamise arvuga definitsioonile 14.11. Praegu iga vektori $\vec{x}$ korral $\vec{x} \parallel \vec{e}_1$. Kui seejuures vektor $\vec{x}$ on nullvektor, siis valemi (14.10) abil avaldub ta vektori $\vec{e}_1$ kaudu kujul $\vec{0} = 0\vec{e}_1$. Juhul kui $\vec{x} \neq \vec{0}$, siis leiame

$$\xi := \frac{|\vec{x}|}{|\vec{e}_1|}.$$

Nüüd $\vec{x} \uparrow\uparrow \vec{e}_1$ korral $\vec{x} = \xi \vec{e}_1$ ja $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{e}_1$ korral $\vec{x} = (-\xi) \vec{e}_1$. Seega iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_1$ korral leidub selline reaalarv $x_1 \in \mathbb{R}$, et

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1.$$

b) Kui $\vec{x} \in \mathbf{E}_2$, siis veendume, et ta avaldub mistahes mittekollineaarsest vektoritest koosneva vektorsüsteemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorite kaudu. Juhul kui $\vec{x} = \vec{0}$, on see ilmne, sest valemi (14.10) kohaselt

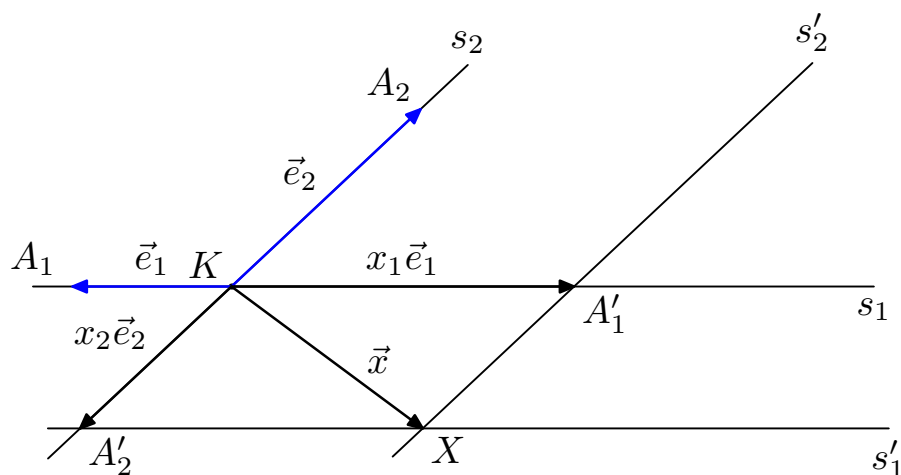
$$\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2.$$

Juhul kui $\vec{x} \neq \vec{0}$, siis on esmalt vaja vaadelda võimalust $\vec{x} \parallel \vec{e}_1$ ($\vec{x} \parallel \vec{e}_2$). Siis juhu a) kohaselt leidub reaalarv $x_1 \in \mathbb{R}$ ($x_2 \in \mathbb{R}$), et

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 = x_1 \vec{e}_1 + 0 \vec{e}_2 \quad (\vec{x} = x_2 \vec{e}_2 = 0 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2).$$

Juhul kui $\vec{x} \parallel \vec{e}_1$ ja $\vec{x} \parallel \vec{e}_2$ (vt. joonist 16.3), siis lähtudes mingist punktist $K \in E_2$, leiduvad tasandil E_2 punktid A_1 , A_2 ja X , et

$$\overrightarrow{KA_1} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{KA_2} = \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{KX} = \vec{x}.$$



Joonis 16.3

Moodustame sirged s_1 ja s_2 nii, et lõigud KA_1 ja KA_2 asuvad vastavalt nendel sirgetel. Kuna $A_1 \neq K$ ja $A_2 \neq K$, siis sirged s_1 ja s_2 määratakse üheselt. Läbi punkti X tõmbame sirged s'_1 ja s'_2 nii, et $s'_1 \parallel s_1$ ja $s'_2 \parallel s_2$. Tekivad punktid

$$A'_1 := s_1 \cup s'_2, \quad A'_2 := s_2 \cup s'_1.$$

Leiduvad sobivad reaalarvud x_1 ja x_2 , et $\overrightarrow{KA'_1} = x_1 \vec{e}_1$ ja $\overrightarrow{KA'_2} = x_2 \vec{e}_2$. Vektorite liitmise definitsiooni kohaselt

$$\vec{x} = \overrightarrow{KX} = \overrightarrow{KA'_1} + \overrightarrow{A'_1X} = \overrightarrow{KA'_1} + \overrightarrow{KA'_2} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

millest

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2.$$

See valem kehtib iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_2$ korral. Seega ka eespool vaadeldud juhtude korral.

c) Olgu vektorsüsteem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ mittekomplanaarne, s.o. lineaarselt sõltumatu. Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ korral on vaja näidata, et ta avaldub vektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kaudu. Mõningatel erijuhtudel on seda näidata lihtne. Nullvektori korral kehtib

$$\vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3,$$

s.o. ta avaldub vektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kaudu. Teiseks erijuhuks on kui vektor $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ kuulub ühele järgmistest lineaarkatetest $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ ja $L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Lineaarkatte definitsiooni 8.2 kohaselt leiduvad iga kord sobivad reaalarvud, et kehtib üks seostest

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3, \\ \vec{x} &= x_1\vec{e}_1 + x_3\vec{e}_3 = x_1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \\ \vec{x} &= x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = 0\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.\end{aligned}\tag{16.2}$$

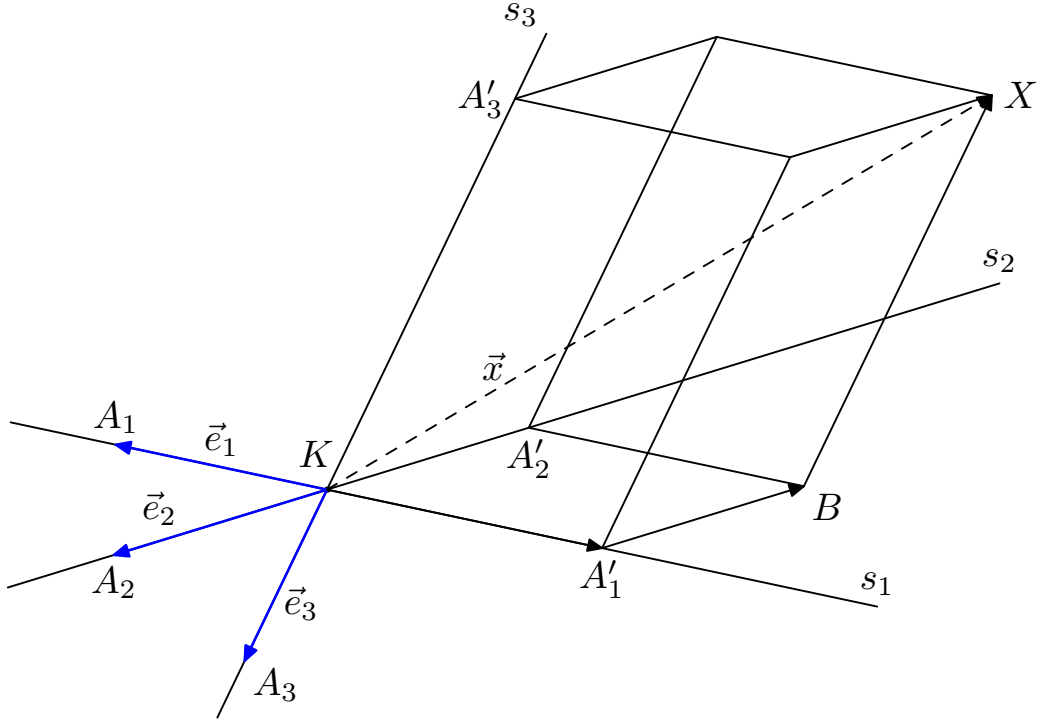
Seega ka sellel juhul vektor $\vec{x}$ avaldub vektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kaudu.

Põhijuhuks on juht, kui vektor $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ ei ole nüüd ühegi lineaarkatte $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ ja $L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vektor, s.o.

$$\vec{x} \notin L(\vec{e}_1, \vec{e}_2), \quad \vec{x} \notin L(\vec{e}_1, \vec{e}_3), \quad \vec{x} \notin L(\vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Fikseerime vabalt punkti K (vt. joonist 16.4). Leiduvad sobivad punktid $A_1, A_2, A_3, X \in E_3$, et

$$\overrightarrow{KA_1} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{KA_2} = \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{KA_3} = \vec{e}_3, \quad \overrightarrow{KX} = \vec{x}.$$



Joonis 16.4

Siin ükski ühise alguspunktiga K lõikude kolmikutest

$$KA_1, KA_2, KX; KA_1, KA_3, KX; KA_2, KA_3, KX$$

ei asu valemi (16.2) tõttu ühisel tasandil. Joonistame rööptahuka, mille tipuks on punkt K ja sellest tipust lähtuvad servad toetuvad meil sirgetele $s_1 \supset KA_1$, $s_2 \supset KA_2$ ja $s_3 \supset KA_3$ ning lõik KX on selle rööptahuka diagonaaliks. Tähistame osa rööptahuka tippudest tähtedega A'_1 , A'_2 ja A'_3 , mis asuvad vastavalt sirgetel s_1 , s_2 ja s_3 . Veel on ühte tippu tähistatud tähega B , nii nagu joonisel näidatud. Vektorid $\overrightarrow{KA'_1}$, $\overrightarrow{KA'_2}$ ja $\overrightarrow{KA'_3}$ on vastavalt lineaarkatete $L(\vec{e}_1)$, $L(\vec{e}_2)$ ja $L(\vec{e}_3)$ vektorid. Seega leiduvad sobivad reaalarvud x_1 , x_2 ja x_3 , et

$$\overrightarrow{KA'_1} = x_1 \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{KA'_2} = x_2 \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{KA'_3} = \vec{e}_3.$$

Vektorite liitmise definitsiooni kohaselt

$$\vec{x} = \overrightarrow{KX} = \overrightarrow{KA'_1} + \overrightarrow{A'_1B} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{KA'_1} + \overrightarrow{KA'_2} + \overrightarrow{KA'_3}.$$

Seega

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

Kui arvestada ka triviaalseid juhte, siis viimane kehtib iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ korral. Sellega teoreem on tõestatud. ♠

Definitsiooni 10.3 kohaselt on sirge E_1 , tasandi E_2 ja ruumi E_3 poolt indutseeritud vektorruumide $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ ja $\mathbf{E}_3$ mõõtmeks vastavalt 1, 2 ja 3.

Definitsioon 16.2. *Hulki $\{O; \vec{e}_1\}$, $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nimetatakse vastavalt sirge E_1 , tasandi E_2 ja ruumi E_3 reeperiks ehk koordinaatsüsteemiks, kui $\{\vec{e}_1\}$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on vastavalt vektorruumide $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ ja $\mathbf{E}_3$ baasid. Punkti $O \in E_i$ nimetatakse reeperi ehk koordinaatsüsteemi alguspunktiks.*

Reeperi alguspunkti võib tähistada mistahes tähega, tavaliselt tähistatakse tähega O . Seejuures ei tohi tähte O segi ajada arvuga 0.

Definitsioon 16.3. *Baasi nimetame ristbaasiks, kui temasse kuuluvad vektorid on paarikaupa risti ja pikkusega 1.*

Definitsioon 16.4. *Reeperit nimetame ristreeperiks, kui temasse kuuluv baas on ristbaas.*

Olgu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vektorruumi $\mathbf{E}_2$ baas. Rakendame need vektorid mingist punktist $K \in E_2$. Leiduvad sobivad punktid $A_1, A_2 \in E_2$, et

$$\overrightarrow{KA_1} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{KA_2} = \vec{e}_2.$$

Definitsioon 16.5. *Vektorruumi $\mathbf{E}_2$ baasi nimetame parema käe (vasaku käe) baasiks kui seotud vektori $\overrightarrow{KA_1}$ pööre lühemat teed pidi ümber punkti K seotud vektorini $\overrightarrow{KA_2}$ toimub kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).*

Olgu nüüd $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vektorruumi $\mathbf{E}_3$ baas. Rakendame need vektorid mingist punktist $K \in E_3$. Leiduvad punktid $A_1, A_2, A_3 \in E_3$, et

$$\overrightarrow{KA_1} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{KA_2} = \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{KA_3} = \vec{e}_3.$$

Definitsioon 16.6. *Vektorruumi $\mathbf{E}_3$ baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nimetatakse parema käe (vasaku käe) baasiks, kui seotud vektori $\overrightarrow{KA_1}$ pööre lühemat teed pidi seotud vektorini $\overrightarrow{KA_2}$ jälgituna seotud vektori $\overrightarrow{KA_3}$ lõpppunktist A_3 toimub kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).*

Definitsioon 16.7. *Ruumi reeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nimetame parema käe (vasaku käe) reeperiks, kui temasse kuuluv baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on parema käe (vasaku käe) baas.*

Nüüd pärast reeperi mõistet avaneb võimalus anda punkti koordinaatide mõiste. Kuna see on sirge E_1 , tasandi E_2 ja ruumi E_3 korral analoogiline, siis teeme seda ainult ruumi E_3 korral. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi E_3 reeper.

Definitsioon 16.8. *Mistahes punkti $X \in E_3$ kohavektoriks reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OX} \in \mathbf{E}_3$.*

Ilmselt igal punktil X on olemas kohavektor ja seejuures ainult üks. Lisaks sellele iga vektor $\vec{x} \in \mathbf{E}_3$ määrab sellise punkti X , millele ta on kohavektoriks. Tõepoolest. Rakendades vektori $\vec{x}$ punktist O , tekib üheselt määratud punkt X nii, et $\overrightarrow{OX} = \vec{x}$. Järelikult leitud punkt $X \in E_3$ on selline, et tema kohavektoriks on vektor $\vec{x}$. Kokkuvõttes ruumi E_3 punktide ja indutseeritud vektorruumi $\mathbf{E}_3$ vektorite vahel on üks-ühene vastavus. See annab võimaluse punktide uurimise taandada nende kohavektorite uurimisele.

Definitsioon 16.9. *Punkti $X \in E_3$ koordinaatideks valitud reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes nimetatakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ koordinaate reeperisse kuuluva baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ suhtes.*

Vektori koordinaatide mõiste on aga meile tuntud mõiste, mis on antud definitsiooniga 10.4. Samuti teame, et vektori koordinaadid teoreemi 10.2 kohaselt määratakse üheselt antud baasil $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Seega avaldises

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

kordajad, s.o. koordinaadid, x_1, x_2 ja x_3 antud reeperi suhtes määratakse üheselt. Punkti X koordinaatidega x_1, x_2 ja x_3 tähistame $X(x_1, x_2, x_3)$ abil.

Definitsioon 16.10. *Vektori koordinaate ristbaasi suhtes nimetatakse tema ristkoordinaatideks.*

Definitsioon 16.11. *Punkti koordinaate ristreeperi suhtes nimetatakse tema ristkoordinaatideks.*

Definitsioon 16.12. *Vektori koordinaate parema käe (vasaku käe) baasi suhtes nimetatakse parema käe (vasaku käe) koordinaatideks.*

Definitsioon 16.13. *Punkti koordinaate parema käe (vasaku käe) reeperi suhtes nimetatakse punkti parema käe (vasaku käe) koordinaatideks.*

Ilmselt punkti koordinaadid sõltuvad reeperist. Järgnevas selgitame kuidas muutuvad punkti koordinaadid üleminekul ühelt reeperilt teisele. Seda üleminekut tähistame sümboolselt järgmiselt

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}.$$

Nimetame kokkuleppeliselt esimest reeperit vanaks ja teist uueks. Suvalisel punktil $X \in E_3$ on kummagi reeperi, nii vana kui ka uue, suhtes koordinaadid. Selleks tuleb kohavektorid $\overrightarrow{OX}$ ja $\overrightarrow{O'X}$ avaldada reeperisse kuuluva baasi kaudu. Seega vastavalt baaside $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ kaudu. Tekivad avaldised

$$\overrightarrow{OX} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

ja

$$\overrightarrow{O'X} = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3. \quad (16.3)$$

Me võime ka kirjutada $X(x_1, x_2, x_3)$ ja $X(x'_1, x'_2, x'_3)$. Et saada punkti X vanade koordinaatide x_1, x_2, x_3 ja uute koordinaatide x'_1, x'_2, x'_3 vaheline seos, tuleb uut reeperit kirjeldada vana reeperi suhtes. Uue reeperi alguspunkt O' pannakse paika, kui leiame tema koordinaadid, s.o. tema kohavektori $\overrightarrow{OO'}$ koordinaadid vana reeperi baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kaudu. Saame avaldise kujul

$$\overrightarrow{OO'} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3. \quad (16.4)$$

Siin on kordajad uue reeperi alguspunkti O' koordinaadid vana reeperi suhtes, seega $O'(c_1, c_2, c_3)$. Nüüd avaldame uue reeperi baasivektorid $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$ ja $\vec{e}'_3$ vana reeperi baasivektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kaudu. Saame

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Soovitame lugejal võrrelda siin kirjapandut valemiga (10.6). Nende vektorite koordinaatidest saame moodustada baasiteisenduse maatriksi (vaata valemit (10.7))

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (16.6)$$

Seega uue reeperi asendit vana reeperi suhtes kirjeldavad valemid (16.4) ja (16.6). Nüüd on vaja leida valem, mis seob punkti X vanu ja uusi koordinaate. Selleks lähtume valemist

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X} \implies \overrightarrow{O'X} + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OX} = \vec{0}.$$

Asendame siia valemitest (16.3) ja (16.4). Saame

$$(x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3) + (c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3) - (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = \vec{0}.$$

Nüüd asendame vektorid $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$ ja $\vec{e}'_3$ valemitest (16.5). Selle tulemusena saame

$$\begin{aligned} & x'_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + x'_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + \\ & + x'_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) + (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) - (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Pärast korrastamist saame

$$\begin{aligned} & (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + c_1 - x_1)\vec{e}_1 + \\ & + (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + c_2 - x_2)\vec{e}_2 + \\ & + (a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + c_3 - x_3)\vec{e}_3 = \vec{0}. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Kuna baasivektorite vektorsüsteem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on lineaarselt sõltumatu, siis saadud (16.7) kehtib ainult juhul, kui vektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kordajad on võrdsed nulliga. Saame

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + c_1, \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + c_2, \\ x_3 &= a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + c_3. \end{aligned} \tag{16.8}$$

Olemegi saanud punkti koordinaatide teisenemise valemid. Seejuures oleme avaldanud punkti vanad koordinaadid uute kaudu.

Lõpuks vaatleme nende valemite kahte erijuhtu.

a) Läheme üle uuele reeperile muutmata reeperi alguspunkti, s.o.

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}, \quad O' = O.$$

Sel korral valem (16.4) täpsustub, saades

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO} = \vec{0} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \implies c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.$$

Valemid (16.8) veidike lihtsustuvad. Saame

$$x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3,$$

$$x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3,$$

$$x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3.$$

b) Läheme üle uuele reeperile muutmata baasivektoreid. *Sel korral me ütleme, et läksime üle uuele reeperile rööplükke ehk paralleellükke teel.* Me saame kirjutada

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \longrightarrow \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}, \quad \vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_3 = \vec{e}_3.$$

Nüüd saame täpsustada valemeid (16.5):

$$\vec{e}'_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3.$$

Baasiteisenduse maatriks (16.6) on ühikmaatriks. Koordinaatide teisendamise valemid (16.8) on seekord imelihtsad:

$$x_1 = x'_1 + c_1, \quad x_2 = x'_2 + c_2, \quad x_3 = x'_3 + c_3.$$

17. SKALAARKORRUTAMINE

Meie järgnev tegevus toimub sirge E_1 , tasandi E_2 või ruumi E_3 poolt indutseeritud vektorruumides $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ või $\mathbf{E}_3$. Kuna pole oluline millises neist, siis seetõttu tähistame neid vektorruume lihtsalt $\mathbf{E}$ abil näitamata vektorruumi mõõdet.

Definitsioon 17.1. Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ skalaarkorrutiseks $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ nimetatakse reaalarvu

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}). \quad (17.1)$$

Viimase abil saame tõestada kaks lihtsat skalaarkorrutamise omadust.

Omadus 17.1. Kui skalaarkorrutises üks vektoritest on nullvektor, siis skalaarkorrutis on võrdne nulliga, s.o.

$$\langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = 0, \quad \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0. \quad (17.2)$$

Tõestus. Omaduse õigsus järeldeb valemist (17.1), sest

$$\langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = |\vec{0}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{0}, \vec{y}) = 0 |\vec{y}| \cos \angle(\vec{0}, \vec{y}) = 0$$

ja

$$\langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = |\vec{x}| |\vec{0}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{0}) = 0.$$

Sellega omadus on tõestatud. ♠

Omadus 17.2. Skalaarkorrutamine on kommutatiivne, s.o.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle.$$

Tõestus. Kui üks vektoritest on nullvektor, siis eelmise omaduse tõttu skalaarkorrutamise kommutatiivsus kehtib. Jääb vaadelda veel põhijuhtu $\vec{x} \neq \vec{0}$ ja $\vec{y} \neq \vec{0}$. Arvestades valemit (15.13) ja skalaarkorrutamise definitsiooni, saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{y}| |\vec{x}| \cos \angle(\vec{y}, \vec{x}) = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle.$$

Sellega omadus on tõestatud. ♠

Omadus 17.3. *Skalaarkorrutamise ja ristprojektsiooni on seotud järgmiselt*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| pr_{\vec{x}} \vec{y}, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \quad (17.3)$$

ja

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{y}| pr_{\vec{y}} \vec{x}, \quad \vec{y} \neq \vec{0}. \quad (17.4)$$

Tõestus. Valemi (15.16) kohaselt

$$pr_{\vec{x}} \vec{y} = |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}), \quad \vec{x} \neq \vec{0}; \quad pr_{\vec{y}} \vec{x} = |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}), \quad \vec{y} \neq \vec{0}.$$

Nõue $\vec{x} \neq \vec{0}$ või $\vec{y} \neq \vec{0}$ lisandub projektsiooni definitsioonist. Skalaarkorrutise definitsiooni kohaselt saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| (|\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})) = |\vec{x}| pr_{\vec{x}} \vec{y}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Skalaarkorrutamise kommutatiivsuse abil viimasest saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = |\vec{y}| pr_{\vec{y}} \vec{x}, \quad \vec{y} \neq \vec{0}.$$

Seega omadus 17.3 on tõestatud. ♠

Omadus 17.4. *Iga $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbf{E}$ korral kehtib*

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle.$$

Tõestus. Kui vektor $\vec{y} = \vec{0}$, siis valemi (17.2) tõttu

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{0} \rangle = 0, \quad \langle \vec{x}_1, \vec{0} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{0} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Paremate poolte võrdsuse tõttu saame

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{0} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{0} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{0} \rangle.$$

Põhijuhul $\vec{y} \neq \vec{0}$ kasutame valemit (17.4) ja projektsiooni omadust, mis antakse valemiga (15.9). Saame

$$\langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = |\vec{y}| pr_{\vec{y}} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = |\vec{y}| pr_{\vec{y}} \vec{x}_1 + |\vec{y}| pr_{\vec{y}} \vec{x}_2 = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle.$$

Seega omadus on tõestatud. ♠

Järeldus 17.1. Iga $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbf{E}$ korral kehtib

$$\langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle.$$

Tõestus. Tänu skalaarkorrutamise kommutatiivsusele ja omadusele 17.4 saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{y}_1 + \vec{y}_2, \vec{x} \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}_2, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle.$$

Sellega järeldus on tõestatud. ♠

Omadus 17.5. Iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ ja iga $\xi \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\langle \xi \vec{x}, \vec{y} \rangle = \xi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \quad (17.5)$$

Tõestus. Analoogiliselt eelmise omaduse tõestusele jagame ka siin tõestuse kaheks juhuks. Kui $\vec{y} = \vec{0}$, siis omaduse 17.1 abil saame

$$\langle \xi \vec{x}, \vec{0} \rangle = 0, \quad \xi \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle = \xi 0 = 0,$$

millest

$$\langle \xi \vec{x}, \vec{0} \rangle = \xi \langle \vec{x}, \vec{0} \rangle,$$

s.o. omadus 17.5 sel juhul kehtib. Juhul kui $\vec{y} \neq \vec{0}$, siis, kasutades valemeid (17.4) ja (15.11), saame

$$\langle \xi \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{y}| pr_{\vec{y}}(\xi \vec{x}) = |\vec{y}| (\xi pr_{\vec{y}} \vec{x}) = \xi (|\vec{y}| pr_{\vec{y}} \vec{x}) = \xi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Sellega omadus on tõestatud. ♠

Järeldus 17.2. Iga $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}$ ja iga $\xi \in \mathbb{R}$ korral kehtib

$$\langle \vec{x}, \xi \vec{y} \rangle = \xi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \quad (17.6)$$

Tõestus. Kasutame skalaarkorrutamise kommutatiivsust ja viimast omadust. Saame

$$\langle \vec{x}, \xi \vec{y} \rangle = \langle \xi \vec{y}, \vec{x} \rangle = \xi \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle = \xi \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Sellega järeldus on tõestatud. ♠

Omadus 17.6. Vektor $\vec{x}$ on risti vektoriga $\vec{y}$ siis ja ainult siis, kui nende vektorite skalaarkorrutis on null, s.o.

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0. \quad (17.7)$$

Tõestus. Kui eeldame, et $\vec{x} \perp \vec{y}$, siis definitsiooni 15.9 kohaselt $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$. Veendume, et vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ skalaarkorrutis on võrdne nulliga. See on tõepoolest nii, sest valemi (17.1) abil saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{x}| |\vec{y}| 0 = 0.$$

Nüüd eeldame, et $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Seega valemi (17.1) tõttu

$$|\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (17.8)$$

Siin tuleb analüüsida kolme juhtu. Kui $|\vec{x}| = 0$ ($|\vec{y}| = 0$), siis $\vec{x} = \vec{0}$ ($\vec{y} = \vec{0}$), sest pikkusega null on ainult nullvektor. Samas aga on nullvektor risti iga vektoriga. Seetõttu $\vec{0} \perp \vec{y}$ ($\vec{x} \perp \vec{0}$). Kolmandaks võimaluseks on $|\vec{x}| \neq 0$ ja $|\vec{y}| \neq 0$, s.o. $\vec{x} \neq \vec{0}$ ja $\vec{y} \neq \vec{0}$. Niisiis vaadeldaval juhul valem (17.8) annab

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \implies \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2} \implies \vec{x} \perp \vec{y}.$$

Sellega omadus on tõestatud. ♠

Omadus 17.7. Iga vektori $\vec{x} \in \mathbf{E}$ pikkus avaldub valemiga

$$|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}. \quad (17.9)$$

Tõestus. Kui $\vec{x} = \vec{0}$, siis valem (17.9) kehtib. Tõepoolest, sest me teame $|\vec{x}| = 0$ ja $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$. Siin me kasutasime valemit (14.7) ja omadust 17.1. Kui $\vec{x} \neq \vec{0}$, siis taas valemi (14.7) kohaselt $|\vec{x}| > 0$. Lähtume valemist (17.1). Saame

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = |\vec{x}| |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2 \cos 0 = |\vec{x}|^2,$$

millest $|\vec{x}| \geq 0$ tõttu saame valemi (17.9). Omadus on tõestatud. ♠

Paragrahvi lõpuosas leiame skalaarkorrutise arvutamise valemi vektorite ristkoordinaatide abil. Me viime oma arutelu läbi vektorruumi $\mathbf{E} = \mathbf{E}_3$ korral. Vektorruumide $\mathbf{E}_1$ ja $\mathbf{E}_2$ korral on arutelud analoogilised.

Lähtume vektorruumi $\mathbf{E}_3$ mistahes ristbaasist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Definitsiooni 16.3 kohaselt

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3; \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1.$$

Viimased saame omaduste 17.6 ja 17.7 abil kirja panna skalaarkorrutiste abil järgmiselt

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0, \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1. \end{aligned} \tag{17.10}$$

Mistahes vektorid $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ saame avaldada baasi kaudu kujul

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3.$$

Kordajad nendes avaldistes on vektori koordinaadid. Me võime kirjutada ka järgmiselt

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Kasutades skalaarkorrutamise omadusi, samm-sammult me saame

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \langle x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \vec{y} \rangle = \langle x_1 \vec{e}_1, \vec{y} \rangle + \langle x_2 \vec{e}_2, \vec{y} \rangle + \langle x_3 \vec{e}_3, \vec{y} \rangle = \\ &= x_1 \langle \vec{e}_1, \vec{y} \rangle + x_2 \langle \vec{e}_2, \vec{y} \rangle + x_3 \langle \vec{e}_3, \vec{y} \rangle = x_1 \langle \vec{e}_1, y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 \rangle + \\ &\quad + x_2 \langle \vec{e}_2, y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 \rangle + x_3 \langle \vec{e}_3, y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 \rangle = \\ &= x_1 [y_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + y_2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + y_3 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle] + \\ &\quad + x_2 [y_1 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + y_2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle + y_3 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle] + \\ &\quad + x_3 [y_1 \langle \vec{e}_3, \vec{e}_1 \rangle + y_2 \langle \vec{e}_3, \vec{e}_2 \rangle + y_3 \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle]. \end{aligned}$$

Arvestades valemit (17.10), see avaldis väga oluliselt lihtsustub. Me saame

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{17.11}$$

Viimase valemi abil saame nüüd mitmed valemid anda ristkoordinaatides. Näiteks vektori pikkuse valem (17.9) saab kuju

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{17.12}.$$

Skalaarkorrutise kaudu saame arvutada ka ristprojektsiooni. Valemi (17.3) abil saame

$$pr_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}|}. \quad (17.13)$$

Sama valem ristkoordinaatides

$$pr_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Ka ristprojektsioonivektori saame arvutada skalaarkorrutamise kaudu. Valemi (15.7) abil saame

$$Pr_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{pr_{\vec{x}}\vec{y}}{|\vec{x}|}\vec{x} \iff Pr_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}|^2}\vec{x}.$$

Viimane valem koordinaatides

$$Pr_{\vec{x}}\vec{y} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3).$$

Paneme veel kirja vektorite ristseisu tingimuse (17.7). Saame

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Vektorite skalaarkorrutamise abil saame tõlgendada ka vektori ristkoordinaate. Nagu teame on avaldises $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ ristbaasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral kordajad $\{x_1, x_2, x_3\}$ ristkoordinaadid. Vektori $\vec{x}$ skalaarkorrutis baasivektoriga $\vec{e}_i$ annab

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle &= \langle x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \vec{e}_i \rangle = x_1\langle \vec{e}_1, \vec{e}_i \rangle + x_2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_i \rangle + x_3\langle \vec{e}_3, \vec{e}_i \rangle = x_i \implies \\ &\implies x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \end{aligned} \quad (17.14)$$

Saime, et vektori $\vec{x}$ ristkoordinaat x_i on selle vektori skalaarkorrutis baasivektoriga $\vec{e}_i$. Valemite (17.3) ja (17.1) abil saame valemile (17.14) kuju

$$x_i = pr_{\vec{e}_i}\vec{x}, \quad x_i = |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{e}_i). \quad (17.15)$$

Saime, et vektori $\vec{x}$ ristkoordinaat x_i on ka vektori $\vec{x}$ ristprojektsioon baasivektorile $\vec{e}_i$ ehk vektori $\vec{x}$ pikkus korrutatud teguriga $\cos \angle(\vec{x}, \vec{e}_i)$.

Skalaarkorrutamise rakendusena vaatleme veel tasandil vektori koordinaatide teisenemise valemeid üleminekul ühelt ristbaasilt $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ teisele ristbaasile $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ pöörde abil. Tähistame nurka vektorite $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}'_1$ vahel $t = \angle(\vec{e}_1, \vec{e}'_1)$. Valemid (16.5) on praegu kujuga

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Rakendades valemist (17.15) teist, saame

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos t, & a_{21} &= \sin t, \\ a_{12} &= -\sin t, & a_{22} &= \cos t.\end{aligned}$$

Seega vektori ja punkti koordinaadid teisenevad vastavalt valemite

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 \cos t - x'_2 \sin t, \\ x_2 &= x'_1 \sin t + x'_2 \cos t.\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 \cos t - x'_2 \sin t + c_1, \\ x_2 &= x'_1 \sin t + x'_2 \cos t + c_2\end{aligned}$$

abil.

18. VEKTORKORRUTAMINE

Nagu allpool toodavast vektorkorrutamise definitsioonist näeme, on teda võimalik anda ainult vektorruumis $\mathbf{E}_3$.

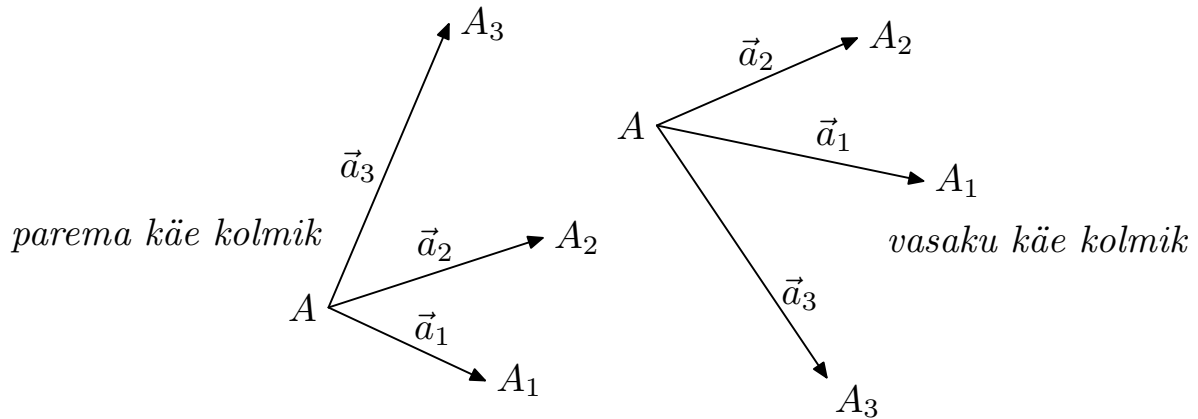
Olgu $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ mittekomplanaarne vektorsüsteem. Lähtudes mingist punktist $A \in E_3$, leiduvad sobivad punktid $A_1, A_2, A_3 \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{AA_2} = \vec{a}_2, \quad \overrightarrow{AA_3} = \vec{a}_3.$$

Samas tekib ka seotud vektorite vektorsüsteem $\{\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AA_2}, \overrightarrow{AA_3}\}$.

Definitsioon 18.1. *Mittekomplanaarset kolmevektorilist vektorsüsteemi $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ nimetame parema (vasaku) käe kolmikuks, kui vaadelduna punktist A_3 toimub seotud vektori $\overrightarrow{AA_1}$ pööre seotud vektorini $\overrightarrow{AA_2}$ lühemat teed pidi kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).*

Kõrvaloleval joonisel 18.1 on toodud nii parema kui vasaku käe vektorsüsteem.



Joonis 18.1

Definitsioon 18.2. *Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ vektorkorrutiseks, mida tähistame $\vec{x} \times \vec{y}$ abil, nimetatakse vektorit, mis määratakse kolme tingimusega: 1) $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$, 2) $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}$, $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}$ ja 3) vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ on parema käe kolmik.*

Selles definitsioonis kolmas tingimus on rakendatav, kui vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ on mittekomplanaarne ehk lineaarselt sõltumatu. Kollineaarse vektorsüsteemi $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ korral ei oska me seda tingimust kasutada. Sel korral peame läbi ajama definitsiooni 18.1 kahe esimese tingimusega. Osutub, et see on ka võimalik.

Omadus 18.1. *Vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektorkorrutis $\vec{x} \times \vec{y}$ on võrdne nullvektoriga.*

Tõestus. a) Olgu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ lineaarselt sõltuv. Siis teoreemi 9.2 kohalt üks vektorsüsteemi vektotritest avaldub selle vektorsüsteemi ülejäänud vektorite kaudu. Avaldugu näiteks vektor $\vec{y}$ vektori $\vec{x}$ kaudu:

$$\vec{y} = \alpha \vec{x}.$$

Teise võimaluse $\vec{x} = \beta \vec{y}$ korral on tõestus analoogiline. Arvutame definitsiooni 18.1 esimese tingimuse kohaselt vektorkorrutise pikkuse. Saame

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x} \times (\alpha \vec{x})| = |\vec{x}| |\alpha \vec{x}| \sin \angle(\vec{x}, \alpha \vec{x}). \quad (18.1)$$

Kui $\alpha = 0$, siis $|0\vec{x}| = |\vec{0}| = 0$ ning seetõttu

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = 0.$$

Nüüd $\alpha > 0$ või $\alpha < 0$ korral on $\vec{x} \uparrow \uparrow \vec{y}$ või $\vec{x} \uparrow \downarrow \vec{y}$ ning seetõttu $\angle(\vec{x}, \alpha \vec{x}) = 0$ või $\angle(\vec{x}, \alpha \vec{x}) = \pi$. Valemi (18.1) kohaselt saame iga $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = 0 \implies \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}.$$

Siin me kasutasime valemit (14.7).

b) Tõestame omaduse teises suunas. Oletame, et vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on selline, et $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$. Näitame, et vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv. Definitsioonist 18.1 saame

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \implies |\vec{x} \times \vec{y}| = 0 \implies |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Siin on kolm võimalust, et kolme arvu korrutis oleks võrdne nulliga. Kui $|\vec{x}| = 0$ või $|\vec{y}| = 0$, s.o. $\vec{x} = \vec{0}$ või $\vec{y} = \vec{0}$, siis järelduse 9.4 tõttu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv. Kolmandal juhul $|\vec{x}| \neq 0$ ja $|\vec{y}| \neq 0$, s.o. $\vec{x} \neq \vec{0}$ ja $\vec{y} \neq \vec{0}$, on $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ või $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$. Siit $\vec{x} \parallel \vec{y}$.

Järelikult vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv. Sellega omadus on tõestatud. ♠.

Järeldus 18.1. Vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$.

Olgu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ lineaarselt sõltumatu. Rakendame selle vektorsüsteemi vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ mingist punktist $A \in E_3$. Leiduvad sobivad punktid $X, Y \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{AY} = \vec{y}.$$

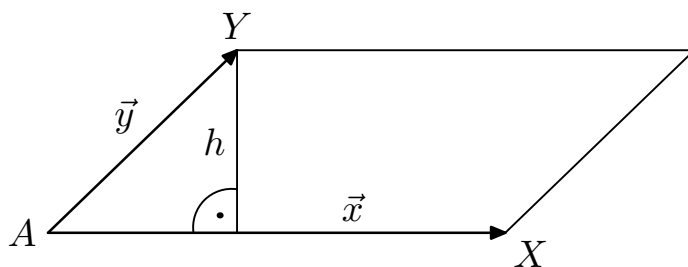
Konstrueerime nüüd rööpküliku, mille servadeks on lõigud AX ja AY . Konstrueeritud rööpküliku puhul ütleme, et ta on ehitatud vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$. Selle rööpküliku saame konstrueerida lähtudes ruumi E_3 mistahes punktist.

Omadus 18.2. Olgu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ lineaarselt sõltumatu. Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindala $S_{rk}(\vec{x}, \vec{y})$ on võrdne servavektorite vektorkorrutise pikkusega, s.o.

$$S_{rk}(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Tõestus. Koolist teame, et rööpküliku pindala on võrdne aluse ja temale tõmmatud kõrguse korrutisega. Seega (vt. joonist 18.2)

$$S_{rk}(\vec{x}, \vec{y}) = AX \cdot h = |\vec{x}| \cdot h = |\vec{x}| \cdot AY \cdot \sin \angle(AX, AY) = |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$



Joonis 18.2

Sellega omadus on tõestatud. ♠.

Omadus 18.3. Vektorkorrutamise on kaldsümmeetiline, s.o.

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}. \quad (18.2)$$

Tõestus. Jaotame oma arutelu kaheks olenevalt sellest, kas $\vec{x} \parallel \vec{y}$ või $\vec{x} \nparallel \vec{y}$. Esimesel juhul saame

$$\vec{x} \parallel \vec{y} \iff \vec{y} \parallel \vec{x},$$

millest vektorsüsteemid $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ ja $\{\vec{y}, \vec{x}\}$ on lineaarselt sõltuvad. Omaduse 18.1 tõttu

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}, \quad -\vec{y} \times \vec{x} = (-1)\vec{y} \times \vec{x} = (-1)\vec{0} = \vec{0}.$$

Siit paremate poolte võrdsuse tõttu on võrdsed ka vasakud pooled. Seega vaadeldaval juhul valem (18.2) kehtib.

Põhijuhul $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ saame

$$\vec{x} \nparallel \vec{y} \iff \vec{y} \nparallel \vec{x},$$

mille tõttu vektorsüsteemid $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ ja $\{\vec{y}, \vec{x}\}$ on lineaarselt sõltumatud. Vektorkorrutamise definitsiooni abil saame

$$\vec{x} \times \vec{y} \uparrow \downarrow \vec{y} \times \vec{x}, \quad \vec{y} \times \vec{x} \uparrow \downarrow (-\vec{y} \times \vec{x}) \implies \vec{x} \times \vec{y} \uparrow \uparrow (-\vec{y} \times \vec{x}).$$

Lisaks sellele

$$\begin{aligned} |-\vec{y} \times \vec{x}| &= |(-1)\vec{y} \times \vec{x}| = |-1||\vec{y} \times \vec{x}| = \\ &= |\vec{y}||\vec{x}| \sin \angle(\vec{y}, \vec{x}) = |\vec{x}||\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} \times \vec{y}|. \end{aligned}$$

Oleme näidanud, et vaadeldavad vektorid on samasuunalised ja sama pikad. Seega nad on võrdsed. Omadus 18.3 on tõestatud. ♠

Omadus 18.4. *Mistahes reaalarvu $\xi \in \mathbb{R}$ ja mistahes vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ korral kehtib*

$$(\xi \vec{x}) \times \vec{y} = \xi(\vec{x} \times \vec{y}). \quad (18.3)$$

Tõestus. Kahel lihtsal erijuhul saame selle valemi tõestada imelihtsalt. Nimelt kui $\vec{x} \parallel \vec{y}$, siis ka $(\xi \vec{x}) \parallel \vec{y}$. Omaduse 18.1 kohaselt

$$(\xi \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{0}, \quad \xi(\vec{x} \times \vec{y}) = \xi \vec{0} = \vec{0},$$

millest paremate poolte võrdsuse tõttu saame (18.3). Kui nüüd $\vec{x} \nparallel \vec{y}$, aga $\xi = 0$, siis $(0\vec{x}) \parallel \vec{y}$ ehk vektorsüsteem $\{0\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv. Omaduse 18.1 tõttu $(0\vec{x}) \times \vec{y} = \vec{0}$. Teiselt poolt $0(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0}$. Paremate poolte võrdsuse tõttu kehtib taas (18.3).

Tõestame valemi (18.3) põhijuhul, s.o. kui $\xi \neq 0$ ja $\vec{x} \nparallel \vec{y}$. Paneme esmalt tähele, et vektorid $(\xi\vec{x}) \times \vec{y}$ ja $\xi(\vec{x} \times \vec{y})$ on võrdse pikkusega. Tõepoolest, sest

$$\begin{aligned} |(\xi\vec{x}) \times \vec{y}| &= |\xi\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\xi\vec{x}, \vec{y}) = |\xi| (|\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\xi\vec{x}, \vec{y})) = \\ &= |\xi| |\vec{x}| |\vec{y}| \cdot \begin{cases} \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}), & \text{kui } \xi > 0 \\ \sin(\pi - \angle(\vec{x}, \vec{y})), & \text{kui } \xi < 0 \end{cases} = \\ &= |\xi| (|\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})) = |\xi| |\vec{x} \times \vec{y}| = |\xi(\vec{x} \times \vec{y})|. \end{aligned}$$

Seega

$$|(\xi\vec{x}) \times \vec{y}| = |\xi(\vec{x} \times \vec{y})|.$$

Veendume, et jutuksolevad vektorid on samasuunalised. Et $\vec{x} \nparallel \vec{y}$, siis $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$ ning $\xi > 0$ ($\xi < 0$) korral $(\xi\vec{x}) \uparrow\uparrow \vec{x}$ ($(\xi\vec{x}) \uparrow\downarrow \vec{x}$), millest definitsiooni 18.1 kohaselt

$$(\xi\vec{x}) \times \vec{y} \uparrow\uparrow \vec{x} \times \vec{y} \quad ((\xi\vec{x}) \times \vec{y} \uparrow\downarrow \vec{x} \times \vec{y})$$

ning

$$\xi(\vec{x} \times \vec{y}) \uparrow\uparrow \vec{x} \times \vec{y} \quad (\xi(\vec{x} \times \vec{y}) \uparrow\downarrow \vec{x} \times \vec{y}).$$

Kahest viimasest saame

$$(\xi\vec{x}) \times \vec{y} \uparrow\uparrow \xi(\vec{x} \times \vec{y}).$$

Omadus 18.4 on tõestatud. ♠

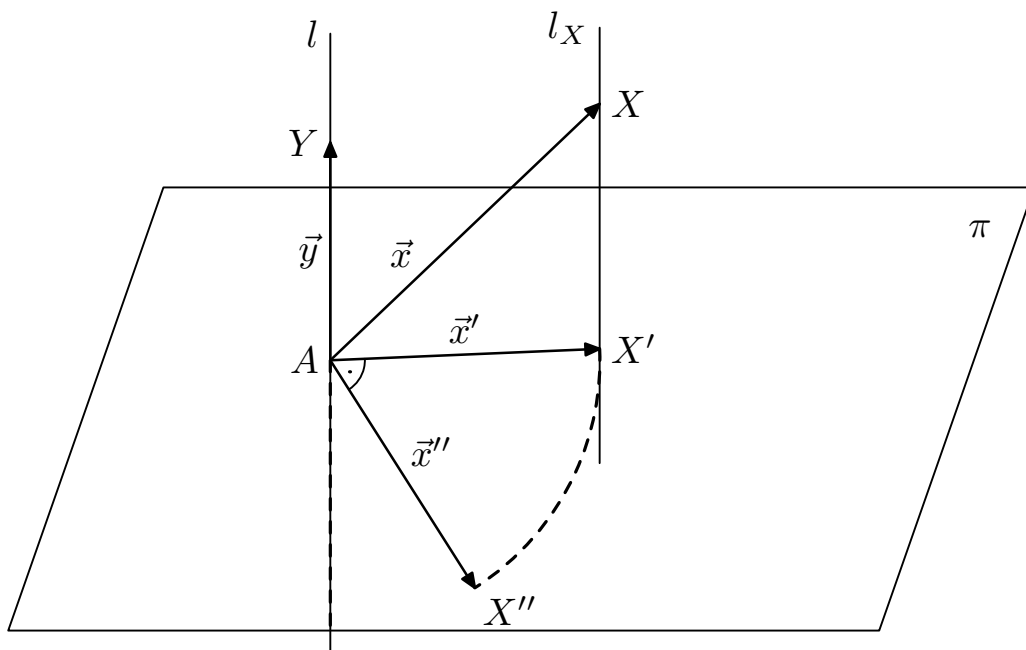
Järeldus 18.2. *Kehtib valem*

$$\vec{x} \times (\xi\vec{y}) = \xi(\vec{x} \times \vec{y}).$$

Tõestus. Me kasutame omadusi 18.3 ja 18.4. Saame

$$\vec{x} \times (\xi\vec{y}) = -(\xi\vec{y}) \times \vec{x} = (-1)[(\xi\vec{y}) \times \vec{x}] = (-1)[\xi(\vec{y} \times \vec{x})] = [(-1)\xi](\vec{y} \times \vec{x}) =$$

$$= [\xi(-1)](\vec{y} \times \vec{x}) = \xi(-\vec{y} \times \vec{x}) = \xi(\vec{x} \times \vec{y}). \quad \spadesuit$$



Joonis 18.3

On jäänud veel tõestada üks vektorkorrutise omadus, seejuures kõige keerulisem. Enne kui sõnastame selle omaduse anname ühe võtte, lisaks definitsioonile 18.1, vektorkorrutise määramiseks. Seejuures teeme seda ühel täiendaval eeldusel. Nõuame, et vektorkorrutises $\vec{x} \times \vec{y}$ teine vektor $\vec{y}$ on pikkusega $|\vec{y}| = 1$. Oma konstruktsiooni andmiseks fikseerime vabalt punkti $A \in E_3$ (vt. joonist 18.3). Leidub selline punkt $Y \in E_3$, et $\overrightarrow{AY} = \vec{y}$. Kuna $\vec{y} \neq \vec{0}$, siis punktid A ja Y on erinevad. Seetõttu sirge $l \supset AY$ määratakse üheselt. Nüüd joonistame tasandi π , mis läbib punkti A ja on risti sirgega l . Punktist A rakendame ka vektori $\vec{x}$, s.o. leidub punkt X , et $\overrightarrow{AX} = \vec{x}$. Nüüd konstrueerime teatava vektori, mis osutub vektorkorrutiseks $\vec{x} \times \vec{y}$. Selleks projekteerime punktid A ja X tasandile π paraleelselt sirgega l . Seejuures punkt A ei muutu. Punkti X projektsiooni tähistame tähega X' . Tekib vektor $\vec{x}' := \overrightarrow{AX'}$. Pöörame tasandil π seotud vektorit $\overrightarrow{AX'}$ ümber punkti A kellaosuti liikumise suunas nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra. Punkt X' saab uue asendi X'' . Tekib uus vektor $\vec{x}'' := \overrightarrow{AX''}$. Osutub, et konstrueeritud vektor $\vec{x}''$ on vektorkorrutis $\vec{x} \times \vec{y}$, s.o.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x}''.$$

Veendume selles. Uurime esmalt vektori $\vec{x}''$ pikkust. Saame

$$\begin{aligned} |\vec{x}''| &= |\vec{x}'| = |\vec{x}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{x}') = |\vec{x}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \angle(\vec{x}, \vec{y})\right) = \\ &= |\vec{x}| |\vec{y}| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} \times \vec{y}|. \end{aligned}$$

Näeme, et vektorid $\vec{x}''$ ja $\vec{x} \times \vec{y}$ on võrdse pikkusega:

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}''|.$$

Jääb veel näidata, et vektorid $\vec{x}''$ ja $\vec{x} \times \vec{y}$ on samasuunalised. Konstruktsoonist saame, et $\vec{x}'' \perp \vec{x}'$ ja $\vec{x}'' \perp \vec{y}$. Kuna lõigud AY , AX ja AX' on ühisel tasandil, siis $\vec{x}'' \perp \vec{x}$. Meile pakub kolmest ristseisust huvi kaks järgmist

$$\vec{x}'' \perp \vec{x}, \quad \vec{x}'' \perp \vec{y}.$$

Samuti näeme, et vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}''\}$ on parema käe kolmik. Nii nagu vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ on risti vektoritega $\vec{x}$ ja $\vec{y}$, nii on ka vektor $\vec{x}''$ risti samade vektoritega. Seega $\vec{x}'' \parallel \vec{x} \times \vec{y}$. Et ka vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}\}$ definitsiooni 18.1 kohaselt on parema käe kolmik, siis öeldut saab täpsustada: $\vec{x}'' \uparrow \vec{x} \times \vec{y}$. Sellega oleme näidanud, et $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x}''$. Nüüd sõnastame vektorkorrutamise viimase omaduse.

Omadus 18.5. *Mistahes kolme vektori $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbf{E}_3$ korral kehtib valem*

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y} = \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y}. \quad (18.4)$$

Tõestus. Omadus on ilmne $\vec{y} = \vec{0}$ korral, sest järelduse 9.4 kohaselt on vektorsüsteemid

$$\{\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{0}\}, \quad \{\vec{x}_1, \vec{0}\}, \quad \{\vec{x}_2, \vec{0}\}.$$

lineaarselt sõltuvad. Omaduse 18.1 tõttu võime aga kirjutada

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{0} = \vec{0}, \quad \vec{x}_1 \times \vec{0} + \vec{x}_2 \times \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

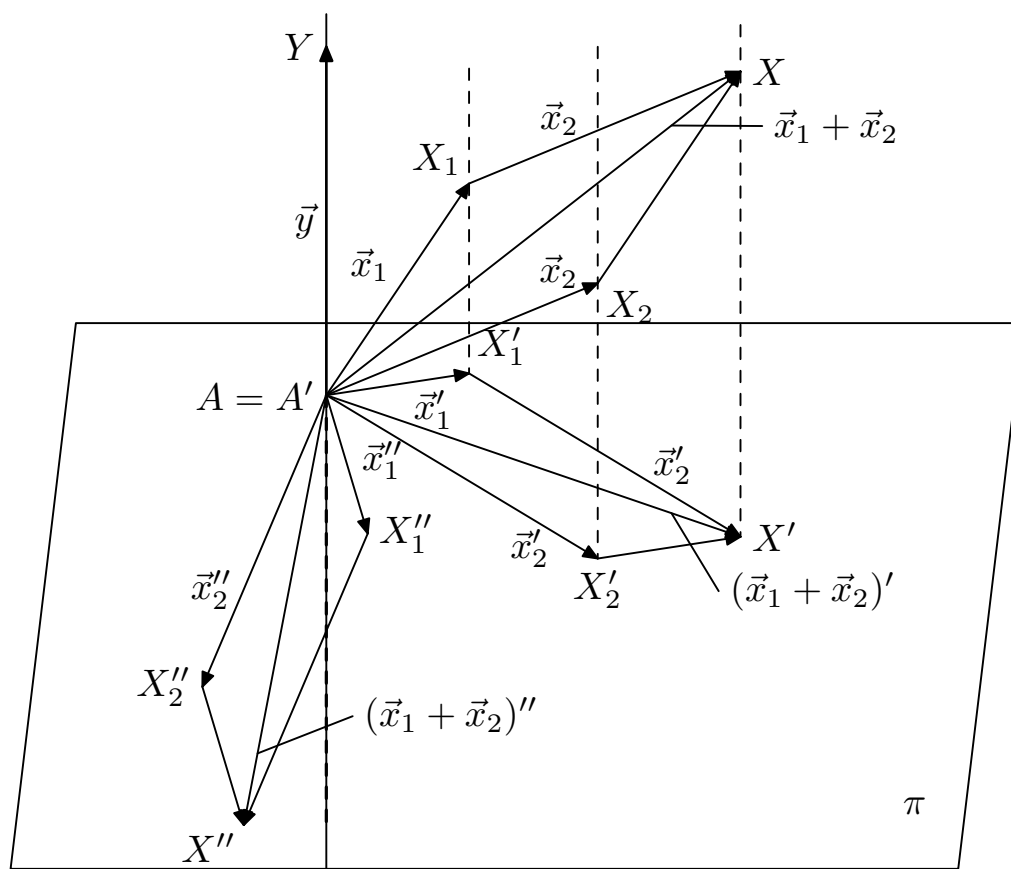
Paremate poolte võrdsuse tõttu on võrdsed ka vasakud pooled. Seega $\vec{y} = \vec{0}$ korral kehtib valem (18.4).

Põhijuhul $\vec{y} \neq \vec{0}$ vaatleme esmalt olukorda $|\vec{y}| = 1$. Me saame konstrueerida vektorkorrutised

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y}, \quad \vec{x}_1 \times \vec{y}, \quad \vec{x}_2 \times \vec{y}$$

eespool antud konstruktsiooni abil. Võtame mingi punkti $A \in E_3$ (vt. joonist 18.4). Leiduvad sobivad punktid $X_1, X_2, Y \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AX_1} = \vec{x}_1, \quad \overrightarrow{AX_2} = \vec{x}_2, \quad \overrightarrow{AY} = \vec{y}.$$



Joonis 18.4

Joonistame rööpküliku AX_1XX_2 servadega AX_1 ja AX_2 . Vektori mõiste kohaselt $\overrightarrow{X_1X} = \vec{x}_2$. Nüüd omakorda vektorite liitmise definitsiooni tõttu

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{AX_2} = \overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X} = \overrightarrow{AX} \implies \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \overrightarrow{AX}.$$

Projekteerime rööpküliku paralleelselt sirgega $l \supset AY$ tasandile π . Selleks on küllaldane projekteerida rööpküliku tipud. Projekteerimisel tekib tasandil π uus rööpkülik, mille tippe oleme tähistanud vastavalt

$$A' = A, \quad X_1 \longrightarrow X'_1, \quad X_2 \longrightarrow X'_2, \quad X \longrightarrow X'.$$

Tekivad vektorid

$$\begin{aligned} \vec{x}'_1 &:= \overrightarrow{AX'_1}, \quad \vec{x}'_2 := \overrightarrow{AX'_2}, \quad (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)' = \overrightarrow{AX'} = \\ &= \overrightarrow{AX'_1} + \overrightarrow{X_1X'} = \overrightarrow{AX'_1} + \overrightarrow{AX'_2} = \vec{x}'_1 + \vec{x}'_2. \end{aligned}$$

Saime

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)' = \vec{x}'_1 + \vec{x}'_2.$$

Pöörame tasandil π asuvaid lõike AX'_1 , AX'_2 ja AX' ümber punkti A kellaosuti liikumise suunas täisnurga võrra. Selle tulemusena tasandil π asuv rööpkülik $AX'_1X'X'_2$ läheb uueks sama tasandi rööpkülikuks $AX''_1X''X''_2$. Tekivad vektorid

$$\vec{x}''_1 := \overrightarrow{AX''_1}, \quad \vec{x}''_2 := \overrightarrow{AX''_2}, \quad (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)'' = \overrightarrow{AX''}.$$

Viimasest rööpkülikust vektorite liitmise definitsiooni abil saame

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)'' = \overrightarrow{AX''} = \overrightarrow{AX''_1} + \overrightarrow{AX''_2} = \vec{x}''_1 + \vec{x}''_2.$$

Siit

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y} = \vec{x}''_1 + \vec{x}''_2 = \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y}.$$

Seega $|\vec{y}| = 1$ korral valem (18.4) kehtib.

Lõpuks vaatleme olukorda $\vec{y} \neq \vec{0}$. Seega $|\vec{y}| > 0$. Moodustame vektoriga $\vec{y}$ samasuunalise ühikvektori $\vec{y}_o = \frac{1}{|\vec{y}|}\vec{y}$, millest

$$\vec{y} = |\vec{y}|\vec{y}_o. \tag{18.5}$$

Nüüd on juba lihtne tõestada valemit (18.4), sest

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y} = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times (|\vec{y}|\vec{y}_o) = |\vec{y}|(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y}_o = |\vec{y}|(\vec{x}_1 \times \vec{y}_o + \vec{x}_2 \times \vec{y}_o) =$$

$$= |\vec{y}| \vec{x}_1 \times \vec{y}_o + |\vec{y}| \vec{x}_2 \times \vec{y}_o = \vec{x}_1 \times (|\vec{y}| \vec{y}_o) + \vec{x}_2 \times (|\vec{y}| \vec{y}_o) = \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y}.$$

Sellega on omadus 18.5 tõestatud. ♠.

Järeldus 18.3. *Kehtib valem*

$$\vec{x} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \times \vec{y}_1 + \vec{x} \times \vec{y}_2. \quad (18.6)$$

Tõestus. Viimase tõestus on analoogiline eelmise järelduse tõestusega. Me saame

$$\begin{aligned} \vec{x} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= -[(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \times \vec{x}] = (-1)(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \times \vec{x} = (-1)[\vec{y}_1 \times \vec{x} + \vec{y}_2 \times \vec{x}] = \\ &= (-1)\vec{y}_1 \times \vec{x} + (-1)\vec{y}_2 \times \vec{x} = \vec{x} \times \vec{y}_1 + \vec{x} \times \vec{y}_2. \end{aligned}$$

Järeldus on tõestatud. ♠

Lisame tõestuseta, et valemid (18.5) ja (18.6) kehtivad ka siis, kui summas $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ on vektoreid enam kui kaks. Seega kehtivad valemid

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_m) \times \vec{y} = \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y} + \dots + \vec{x}_m \times \vec{y}$$

ja

$$\vec{x} \times (\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \dots + \vec{y}_m) = \vec{x} \times \vec{y}_1 + \vec{x} \times \vec{y}_2 + \dots + \vec{x} \times \vec{y}_m.$$

Need kaks valemit tõestatakse matemaatilise induktsiooni abil vektorite arvu m järgi summas.

Selle paragrahvi lõpuosas leiame vektorkorrutise koordinaadid, kui teame vektorite parema käe ristkoordinaate. Seega baas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mille suhtes leitakse vektorite koordinaadid, on parema käe ristbaas. Leiame kõigepealt tema kõikvõimalike baasivektorite paaride vektorkorrutised. Selliseid paare on kokku üheksa. Olulisi paare on tegelikult kolm. Kuna vektorsüsteemid $\{\vec{e}_1, \vec{e}_1\}$, $\{\vec{e}_2, \vec{e}_2\}$ ja $\{\vec{e}_3, \vec{e}_3\}$ on kollineaarsed ehk lineaarselt sõltuvad, siis omaduse 18.1 tõttu

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Vektorkorrutamise definitsiooni 18.1 abil saame, et

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad (18.7)$$

sest

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \sin \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1 \cdot 1 \sin \frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{e}_3|$$

ja analoogiliselt

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_3| = |-\vec{e}_2|, \quad |\vec{e}_2 \times \vec{e}_3| = |\vec{e}_1|.$$

Lisaks sellele suundade kohta saame, et

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \uparrow\uparrow (-\vec{e}_2), \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \uparrow\uparrow \vec{e}_1.$$

Lõpuks arvestades vektorkorrutamise kaldsümmeetriat, s.o. omadust 18.2, me saame valemi (18.7) abil

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1.$$

Asume nüüd vektorkorrutise koordinaate leidma. Avaldame vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ parema käe ristbaasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kaudu. Saame

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$$

ehk samaväärselt

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3).$$

Nüüd leiame vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ koordinaadid. Lugeja hooleks jätame selgitada, milliseid vektorkorrutise omadusi ja vektorite omadusi siin kasutame. Me saame

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \times \vec{y} = (x_1 \vec{e}_1) \times \vec{y} + (x_2 \vec{e}_2) \times \vec{y} + (x_3 \vec{e}_3) \times \vec{y} = \\ &= x_1(\vec{e}_1 \times \vec{y}) + x_2(\vec{e}_2 \times \vec{y}) + x_3(\vec{e}_3 \times \vec{y}) = x_1 \vec{e}_1 \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) + \\ &\quad + x_2 \vec{e}_2 \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) + x_3 \vec{e}_3 \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) = \\ &= x_1[\vec{e}_1 \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3)] + x_2[\vec{e}_2 \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3)] + \\ &\quad + x_3[\vec{e}_3 \times (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3)] = x_1(y_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + y_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + y_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)) + \\ &\quad + x_2(y_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + y_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + y_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x_3(y_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + y_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + y_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)) = \\
& = x_1[y_2\vec{e}_3 + y_3(-\vec{e}_2)] + x_2[y_1(-\vec{e}_3) + y_3\vec{e}_1] + x_3[y_1\vec{e}_2 + y_2(-\vec{e}_1)] = \\
& = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Saime

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3$$

ehk

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \left(- \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \right) \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Seega vektorite

$$\vec{x} = (x_1, \quad x_2, \quad x_3),$$

$$\vec{y} = (y_1, \quad y_2, \quad y_3).$$

korral

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right). \quad (18.8)$$

Formaalselt saab vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ koordinaadid leida järgmiselt. Kirjutame vektori $\vec{x}$ alla vektori $\vec{y}$ oma koordinaatidega nagu on seda tehtud mõni rida kõrgemal. Kattes seal järgimööda kinni esimesed, teised ja kolmandad koordinaadid, moodustame nähtavatest koordinaatidest teist järku determinandid, millest teise võtame miinusmärgiga.

19. SEGAKORRUTAMINE

Segakorrutamine antakse skalaarkorrutamise ja vektorkorrutamise kaudu. Kuna vektorkorrutamine on antav vektorruumis $\mathbf{E}_3$, siis on ka segakorrutamine antav ainult vektorruumis $\mathbf{E}_3$.

Definitsioon 19.1. Kolme vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}_3$ segakorrutiseks nimetatakse reaalarvu, mida tähistatakse $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ abil ja mis antakse valemiga

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} := \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle. \quad (19.1)$$

Järgnevas sõnastame segakorrutise omadused.

Omadus 19.1. Vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui segakorrutis $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$.

Tõestus. a) Olgu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ lineaarselt sõltuv. Teoreemi 9.2 kohaselt selle vektorsüsteemi mingi vektor avaldub selle vektorsüsteemi ülejäänud vektorite kaudu. Seega leiab aset vähemalt üks järgmistest avaldistest

$$\vec{z} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \quad \vec{y} = \gamma\vec{x} + \delta\vec{z}, \quad \vec{x} = \phi\vec{y} + \psi\vec{z}.$$

Kasutame vektorkorrutamise ja skalaarkorrutamise omadusi ning arvutame segakorrutise $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ kõigil kolmel juhul.

Esimesel juhul saame

$$\begin{aligned} \vec{x}\vec{y}\vec{z} &= \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \alpha\vec{x} \rangle + \langle \vec{x} \times \vec{y}, \beta\vec{y} \rangle = \\ &= \alpha\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle + \beta\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Vektorkorrutise definitsiooni 18.1 kohaselt

$$\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}, \quad \vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}.$$

Samas ristuvate vektorite skalaarkorrutis omaduse 17.6 kohaselt on võrdne nulliga. Seega

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \alpha\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{x} \rangle + \beta\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \rangle = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$

Teisel ja kolmandal juhul analoogiliselt saame

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \times (\gamma\vec{x} + \delta\vec{z}), \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} \times (\gamma\vec{x}), \vec{z} \rangle + \langle \vec{x} \times (\delta\vec{z}), \vec{z} \rangle = \\ &= \gamma\langle \vec{x} \times \vec{x}, \vec{z} \rangle + \delta\langle \vec{x} \times \vec{z}, \vec{z} \rangle = \gamma\langle \vec{0}, \vec{z} \rangle + \delta\vec{0} = 0\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle (\phi\vec{y} + \psi\vec{z}) \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle (\phi\vec{y}) \times \vec{y}, \vec{z} \rangle + \langle (\psi\vec{z}) \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \\ &= \phi\langle \vec{y} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle + \psi\langle \vec{z} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \phi\langle \vec{0}, \vec{z} \rangle + \psi\vec{0} = 0.\end{aligned}$$

Seega omadus on ühes suunas tõestatud.

b) Nüüd eeldame, et $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$. Vaja on näidata, et vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltuv. Meie käsutuses on seega

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0 \iff \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0. \quad (19.2)$$

Skalaarkorrutamise omaduse 17.1 kohaselt kehtib eeldus ühel väga kitsal erijuhul, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ või $\vec{z} = \vec{0}$. Esimesel juhul omaduse 18.1 kohaselt vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on lineaarselt sõltuv. Teoreemi 9.3 kohaselt on lineaarselt sõltuv ka vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$. Ka teisel juhul järelduse 9.4 tõttu on seesama vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ lineaarselt sõltuv, sest sisaldab nullvektorit $\vec{z}$. Tuleb veel uurida põhijuhtu $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$ ja $\vec{z} \neq \vec{0}$. Eeldusest (19.2) saame $\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{z}$. Samas vektorkorrutamise definitsiooni 18.1 tõttu ka

$$\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x} \quad \vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{y}.$$

Kuna $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$, siis temaga risti olevate vektorite süsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on komplanaarne, s.o. lineaarselt sõltuv. Omadus on tõestatud. ♠

Järeldus 19.1. *Vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui segakorrutis $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$ on nullist erinev.*

Olgu nüüd vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ lineaarselt sõltumatu. Mistahes punkti $A \in E_3$ korral leiduvad sobivad punktid $X, Y, Z \in E_3$, et

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x}, \quad \overrightarrow{AY} = \vec{y}, \quad \overrightarrow{AZ} = \vec{z}.$$

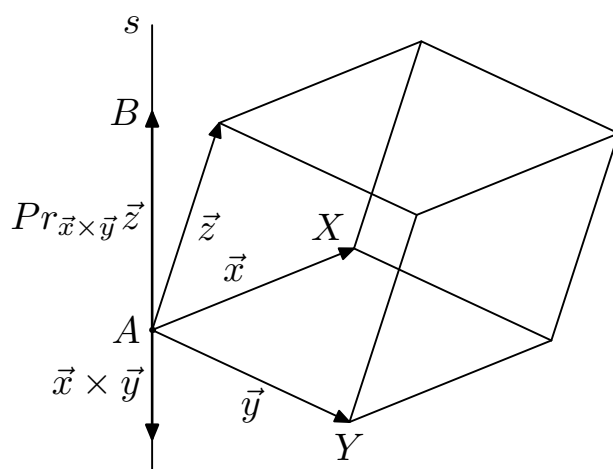
Moodustame rööptahuka, mille servadeks on AX , AY ja AZ . Nimetame seda rööptahukat vektoritele $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ ehitatud rööptahukaks. Selline

rööptahukas tekib, lähtudes mistahes punktist $A \in E_3$. Tähistame edaspidi vektoritele $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumala $V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ abil.

Omadus 19.2. *Mittekomplanaarse vektorsüsteemi $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ vektoritele ehitatud rööptahuka ruumala $V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on võrdne*

$$V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{cases} \vec{x}\vec{y}\vec{z}, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ -\vec{x}\vec{y}\vec{z}, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \end{cases}.$$

Tõestus. Kuna vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltumatu, siis järelduse 9.3 kohaselt tema alamvektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ on ka lineaarselt sõltumatu.



Joonis 19.1

Nüüd omakorda järelduse 18.1 tõttu $\vec{x} \times \vec{y} \neq \vec{0}$. Seetõttu eksisteerib ristprojektsioonivektor $Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}$. Oluline on märgata (vt. joonist 19.1), et $Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z} \parallel \vec{x} \times \vec{y}$ tõttu on

$$Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z} \perp \vec{x}, \quad Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z} \perp \vec{y}.$$

Ristprojektsioonivektori $Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}$ definitsiooni kohaselt on tema pikkus $|Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}| = AB$ meie rööptahuka kõrguseks, sest lõik AB on risti paralleelse põhjapaariga ning ulatub ühest põhjast teiseni. Nagu koolist teame on vektoritele $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumala $V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ võrdne põhja pindala korda kõrgus. Seega omaduse 18.2, valemite (15.7) ja (14.8) abil saame

$$V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = S_{rk}(\vec{x}, \vec{y}) |Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}| = |\vec{x} \times \vec{y}| |Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}| =$$

$$= |\vec{x} \times \vec{y}| |pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z} (\vec{x} \times \vec{y})_\circ| = |\vec{x} \times \vec{y}| |pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}| |(\vec{x} \times \vec{y})_\circ|.$$

Kuna $|(\vec{x} \times \vec{y})_\circ| = 1$, siis valemite (15.6), (17.3) ja (19.1) abil saame

$$\begin{aligned} V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= |\vec{x} \times \vec{y}| |pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}| = \begin{cases} |\vec{x} \times \vec{y}| |pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}|, & \text{kui } Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z} \uparrow \uparrow \vec{x} \times \vec{y} \\ -|\vec{x} \times \vec{y}| |pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z}|, & \text{kui } Pr_{\vec{x} \times \vec{y}} \vec{z} \uparrow \downarrow \vec{x} \times \vec{y} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ -\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \vec{x} \vec{y} \vec{z}, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ -\vec{x} \vec{y} \vec{z}, & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \end{cases}. \end{aligned}$$

Sellega omadus on tõestatud. ♠

Viimasest omadusest vahetult saame

$$V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = |\vec{x} \vec{y} \vec{z}|.$$

Segakorrutise abil saame leida veel selliste kujundite, mis on seotud rööptahukaga, ruumala. Näiteks vektoritele $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ ehitatud prisma ruumala $V_{pr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ja tetraeedri ruumala $V_{te}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Kuna teame

$$V_{pr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{2} V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

ja

$$V_{te}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{3} V_{pr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).$$

Seega

$$V_{pr}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{2} |\vec{x} \vec{y} \vec{z}|.$$

ja

$$V_{te}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \frac{1}{6} |\vec{x} \vec{y} \vec{z}|.$$

Järeldus 19.2. *Kehtib valem*

$$\vec{x} \vec{y} \vec{z} = \begin{cases} V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ -V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \end{cases}. \quad (19.3)$$

Tõestus. Jätame tõestada lugejale. Tõestuseks tuleb kasutada omadust 19.2. ♠

Sellest järeldusest näeme, et kui lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on parema käe kolmik (vasaku käe kolmik), siis $\vec{x}\vec{y}\vec{z} > 0$ ($\vec{x}\vec{y}\vec{z} < 0$).

Omadus 19.3. *Segakorrutamise sõltuv vektorite järjekorrast järgmiselt:*

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \vec{y}\vec{z}\vec{x} = \vec{z}\vec{x}\vec{y} = -\vec{y}\vec{x}\vec{z} = -\vec{z}\vec{y}\vec{x} = -\vec{x}\vec{z}\vec{y}. \quad (19.4)$$

Tõestus. Esmalt vaatleme juhtu, kui vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltuv, s.o. komplanaarne. Seega on komplanaarsed ka järgmised vektorsüsteemid

$$\{\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}\}, \quad \{\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}\}, \quad \{\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}\}, \quad \{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\}, \quad \{\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}\}.$$

Teoreemi 16.3 kohaselt need vektorsüsteemid on ka lineaarselt sõltuvad. Seega omaduse 19.1 tõttu

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0, \quad \vec{y}\vec{z}\vec{x} = 0, \quad \vec{z}\vec{x}\vec{y} = 0, \quad -\vec{y}\vec{x}\vec{z} = -0 = 0,$$

$$-\vec{z}\vec{y}\vec{x} = -0 = 0, \quad -\vec{x}\vec{z}\vec{y} = -0 = 0.$$

Paremate poolte võrdsuse tõttu on võrdsed ka vasakud pooled. Seega, kui vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on lineaarselt sõltuv, siis omadus kehtib. Olgu nüüd vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ lineaarselt sõltumatu, s.o. mittekomplanaarne. Seega on mittekomplanaarsed ka ülejäänud vektorsüsteemid

$$\{\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}\}, \quad \{\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}\}, \quad \{\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}\}, \quad \{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\}, \quad \{\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}\}.$$

Seega koos lähtevektorsüsteemiga on need vektorsüsteemid lineaarselt sõltumatud. Tõestame valemis (19.4) ühe võrduse, näiteks

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = -\vec{z}\vec{y}\vec{x}. \quad (19.5)$$

Paneme esmalt tähele, et kui vektorsüsteem $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on parema käe kolmik (vasaku käe kolmik), siis vektorsüsteem $\{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\}$ on vasaku käe kolmik (parema käe kolmik). Paneme veel tähele, et vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ja $\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}$ ehitatud rööptahukad on samad. Seega nende ruumalad on võrdsed:

$$V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = V_{rt}(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}). \quad (19.6)$$

Seega valemi (19.3) abil

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{cases} V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ -V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \end{cases}$$

ja

$$\vec{z}\vec{y}\vec{x} = \begin{cases} -V_{rt}(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}), & \text{kui } \{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \\ V_{rt}(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}), & \text{kui } \{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\} \text{ on parema käe kolmik} \end{cases}.$$

Arvestades valemit (19.6), võime kirjutada

$$\begin{aligned} \vec{z}\vec{y}\vec{x} &= \begin{cases} -V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \\ V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\} \text{ on parema käe kolmik} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on parema käe kolmik} \\ V_{rt}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), & \text{kui } \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\} \text{ on vasaku käe kolmik} \end{cases} = -\vec{x}\vec{y}\vec{z}. \end{aligned}$$

Seega (19.5) on tõestatud. Analoogilised tõestatakse omaduse ülejäänud võrdused, mille jätame lugeja hooleks. ♠

Omadus 19.4. *Kehtivad valemid*

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)\vec{y}\vec{z} = \vec{x}_1\vec{y}\vec{z} + \vec{x}_2\vec{y}\vec{z}, \quad (19.7)$$

$$\vec{x}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)\vec{z} = \vec{x}\vec{y}_1\vec{z} + \vec{x}\vec{y}_2\vec{z}$$

ja

$$\vec{x}\vec{y}(\vec{z}_1 + \vec{z}_2) = \vec{x}\vec{y}\vec{z}_1 + \vec{x}\vec{y}\vec{z}_2.$$

Tõestus. Arvestame valemid (19.1), (18.4) ja omadust 17.4. Esimesel juhul me saame

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)\vec{y}\vec{z} = \langle (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}_1 \times \vec{y} + \vec{x}_2 \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \vec{x}_1\vec{y}\vec{z} + \vec{x}_2\vec{y}\vec{z}.$$

Seega (19.7) on tõestatud. Lugejale jätame ülejäänud valemite tõestuse. ♠

Omadus 19.5. *Kehtivad valemid:*

$$(\xi \vec{x}) \vec{y} \vec{z} = \xi \vec{x} \vec{y} \vec{z},$$

$$\vec{x}(\xi \vec{y}) \vec{z} = \xi \vec{x} \vec{y} \vec{z}$$

ja

$$\vec{x} \vec{y}(\xi \vec{z}) = \xi \vec{x} \vec{y} \vec{z}.$$

Tõestus. Kuna tõestused on analoogilised, siis tõestame ainult viimase valemi kehtivuse. Kahe esimese valemi tõestuse jätame lugejale. Viimase puhul saame:

$$\vec{x} \vec{y}(\xi \vec{z}) = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \xi \vec{z} \rangle = \xi \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \xi \vec{x} \vec{y} \vec{z}.$$

Sellega omadus on tõestatud. ♠

Lõpuks leiame segakorrutise, kui teame vektorite parema käe ristkoordinaate. Olgu

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{z} = (z_1, z_2, z_3).$$

Segakorrutamise definitsiooni 19.1 kohaselt tuleb esmalt leida vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ koordinaadid ja seejärel skalaarkorrutise $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle$ koordinaadid. Valemi (18.8) abil saame esmalt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

ja seejärel valemi (17.11) abil

$$\vec{x} \vec{y} \vec{z} = \langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Saime

$$\vec{x} \vec{y} \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$