

Arvuteooria 3. praktikumi ülesanded

1. Leia kõik algarvud vahemikus $[80, 130]$. Kas selles vahemikus on algarvukaksikuid?
2. Tõesta, et iga algarv $p > 3$ on kujul $6k \pm 1$, kus $k \in \mathbb{N}$.
3. Leia kõik arvud $n \in \mathbb{N}$, mille korral $8^n - 1 \in \mathbb{P}$.
4. Milliste $n \in \mathbb{N}$ korral on $n^4 + 4$ algarv?
5. Tõesta ilma Dirichlet' teoreemi kasutamata, et leidub lõpmata palju algarve, millel on kujud $5k - 1$, kus $k \in \mathbb{N}$. Lahendamisel võib ilma tõestuseta kasutada fakti, et suvalise $x \in \mathbb{N}$ korral on arvu $5x^2 - 1$ algtegurid $p > x$ kas kujul $5k + 1$ või $5k - 1$.
6. Leia kõik algarvud, mis on samaaegselt nii kahe algarvu summa kui ka kahe algarvu vahe.
7. Olgu $n > 1$ naturaalarv. Tõesta, et $\sum_{1 \leq k \leq n} k \mid \prod_{1 \leq k \leq n} k$ parajasti siis, kui $n + 1$ on kordarv.
8. Olgu n paaritu naturaalarv. Tõesta, et arvu n algarvude korrutisena esituses on ülimalt $\log_3 n$ kordajat.
9. Tuginedes Dirichlet' teoreemile tõesta, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $p \in \mathbb{P}$ nii, et arvudel $p - 1$ ja $p + 1$ igal juhul on rohkem kui n erinevat positiivset jagajat.
- 10*. Tuginedes Dirichlet' teoreemile tõesta, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $p \in \mathbb{P}$ nii, et arvudel $p - 1$, $p + 1$ ja $p + 2$ igal juhul on vähemalt n erinevat positiivset jagajat.
- 11*. Tõestada, et mistahes naturaalarvude m ja n korral ei saa summa

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n}$$

väärtuseks olla täisarv.