

Arvuteooria 5. praktikumi ülesanded

1. Koosta ringi $\mathbb{Z}_{12}$ korrutustabel.
2. Leia kõik ringi $\mathbb{Z}_{20}$ pööratavad elemendid.
3. Leia elementide $\overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}$ vastandelemendid ning (kui need on olemas) pöördelemendid ringis $\mathbb{Z}_{260}$.
4. Tõesta, et isomorfsetes lõplikes ringides on sama palju pööratavaid elemente.
5. Leia ringide $\mathbb{Z}_{18}$ ja $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$ kõik pööratavad elemendid ja kõik nullitegurid koos vastavate nulli tegurdustega (st. nulliteguri a jaoks tuleb leida b nii, et $ab = 0$). Kas ringid $\mathbb{Z}_{18}$ ja $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$ on isomorfsed? Miks?
6. Leia ringi $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ kõik pööratavad elemendid. Kas ringid $\mathbb{Z}_{18}$ ja $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ on isomorfsed? Miks?
7. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Tõesta, et kõik need jäägiklassid ringis $\mathbb{Z}_n$, mis on iseenda pöördelemendid (st. omadusega $(\overline{x})^{-1} = \overline{x}$), moodustavad rühma korrutamise suhtes.
8. Tähistagu $a(n)$ eelmises ülesandes kirjeldatud rühma elementide arvu. Iga $m = 1, 2, 3, 4, 5$ korral leia maksimaalne arv n nii, et $a(n) = m$ või tõesta, et sellist maksimaalset arvu ei ole.
9. Olgu $p > 2$ selline algarv, et $p \equiv 2 \pmod{3}$. Tõesta, et iga jäägiklass $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p$ avaldub üheselt kujul $\overline{a} = \overline{b}^3$, kus $\overline{b} \in \mathbb{Z}_p$.
- 10*. Mitu elementi võib olla 7. ülesandes kirjeldatud rühmas?
- 11*. Kas sellest, et kahel kommutatiivsel lõplikul ringil on sama palju elemente ja sama palju pööratavaid elemente, järelneb, et need ringid on isomorfsed?