Viktor Abramov

Diferentsiaalgeomeetria

Kõverad - Pinnad - Muutkonnad - Füüsika

Tartu Ülikool

Sisukord

Osa I

Kõverateooria

Peatükk 1

Tasandiliste kõverate teooria

1.1 Tasandi geomeetria

Käesolevas peatükis meie vaatleme kõverjooni eukleidilisel tasandil. Eukleidilist tasandit tähistame E^2 ja tasandi punkte hakkame tähistama ladina tähestiku suurte tähtedega. Kui $P, Q \in E_2$ on tasandi punktid, siis suunatud lõiku $\overrightarrow{PQ}$ nimetame *seotud vektoriks* alguspunktiga punktis P ja lõpppunktiga punktis Q.

Pikkused, nurgad ja ristkoordinaadid. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad struktuurid on kaugused ja nurgad. Kuna meie vaatleme eukleidilist tasandit, siis tasandil E^2 on määratud kaugused ja nurgad. Kui on antud tasandi punktid P, Q, siis on määratud kaugus punktide vahel ja see on reaalarv. Vastavat arvu tähistame $d(P, Q)$. Kaugusel on järgmised omadused:

1. $d(P, Q) \geq 0$, kusjuures $d(P, Q) = 0$ parajasti siis, kui $P = Q$;
2. $d(P, Q) = d(Q, P)$;
3. $d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R)$, st kaugus rahuldab kolmnurga võrratust.

Seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ pikkuseks nimetame punktide P ja Q vahelist kaugust ja tähistame $|\overrightarrow{PQ}|$. Seega $|\overrightarrow{PQ}| = d(P, Q)$. Olgu antud kaks seotud vektorit $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ alguspunktiga punktis P. Nurgaks seotud vektorite $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ vahel nimetatakse nurka, mis tekib seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ pööramisel ümber punkti P lühemat teed pidi seotud vektorini $\overrightarrow{PR}$. Nurka seotud vektorite $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ vahel tähistame $\angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$. Mainime, et suvalise tasandi punkti P korral ja suvaliste seotud vektorite $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ alguspunktiga punktis P korral sellisel teel defineeritud nurk seotud vektorite vahel rahuldab võrratust $0 \leq \angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \leq \pi$.

Olgu P tasandi mingi punkt ja T_PE^2 seotud vektorite alguspunktiga punktis P hulk, st

$$T_PE^2 = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E^2\}.$$

Olgu antud kaks vektorit $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ alguspunktiga punktis P ja olgu $PQSR$ seotud vektoritele $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ ehitatud rööpkülik. Seotud vektorit $\overrightarrow{PS} \in T_PE^2$ nimetatakse vektorite $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{PR}$ summaks, st $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$. Olgu $a \in \mathbb{R}$ reaalarv ja $\overrightarrow{PQ}$ seotud vektor. Seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ korrutiseks reaalarvuga λ nimetatakse seotud vektorit $\lambda\,\overrightarrow{PQ}$, kus $|\lambda\,\overrightarrow{PQ}| = |\lambda|\,|\overrightarrow{PQ}|$ ja $\lambda\,\overrightarrow{PQ}$ on samasuunaline seotud vektoriga $\overrightarrow{PQ}$, kui $\lambda > 0$, ning $\lambda\,\overrightarrow{PQ}$ on vastassuunaline seotud vektoriga $\overrightarrow{PQ}$, kui $\lambda < 0$. On ilmne, et $\lambda\,\overrightarrow{PQ}$ on seotud null-vektor punktis P, kui $\lambda = 0$. On lihtne kontrollida, et T_PE^2 on kahemõõtmeline vektorruum (üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$) seotud vektorite liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes. Vektorruumi T_PE^2 järgnevas nimetame tasandi seotud vektorite alguspunktiga punktis P vektorruumiks. Selle vektorruumi tähtis struktuur on seotud vektorite skalaarkorrutis. Olgu $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ kaks seotud vektorit alguspunktiga punktis P. Vektorite skalaarkorrutist tähistame $<\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}>$ ja määrame valemiga

$$<\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}> = |\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{PR}|\,\cos\angle\,(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}). \qquad (1.1.0.1)$$

Kahemõõtmeline vektorruum T_PE^2 varustatud seotud vektorite skalaarkorrutisega (1.1.0.1) moodustab eukleidilise vektorruumi.

Iga seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$ tekitab võrdsete seotud vektorite klassi ja vastavat klassi (ekvivalentsiklassi) nimetatakse *vabaks vektoriks* või lihtsalt *vektoriks*. Vektorite tähistamiseks kasutame ladina tähestiku väikesi tähti. Näiteks, kui vektor on indutseeritud seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ abil, siis vastavat vektorit võime tähistada $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. Kui on antud tasandi punkt P ja vektor $\vec{a}$, siis võrdsete vektorite klassis $\vec{a}$ alati leidub üks ja ainult üks seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$ selline, et $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. Sellisel viisil moodustatud seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ kohta öeldakse, et seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$ on vektor $\vec{a}$ rakendatud punktist P. Seega, kui on antud tasandi vektor $\vec{a}$ ja tasandi punkt P, meie võime rakendada vektorit $\vec{a}$ punktist P ja selle operatsiooni tulemuseks on seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$, mida järgnevas tähistame $(P; \vec{a})$. Seega kehtib $\overrightarrow{PQ} = (P; \vec{a})$.

Vektori pikkust defineerime valemiga $|\vec{a}| = |\overrightarrow{PQ}|$, kus $\overrightarrow{PQ}$ on suvaline seotud vektor võrdsete seotud vektorite klassist $\vec{a}$. Sellest järeldub, et kehtib $|\vec{a}| = |(P; \vec{a})|$. Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ tasandi vektorid. Fikseerime suvaliselt tasandi punkti P. Rakendame vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ punktist P ja tähistame vastavaid seotuid vektoreid $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$. Nurgaks vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahel nimetame seotud vektorite $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ vahelist nurka. Seega $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle\,(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})$. Tasandi vektorite skalaarkorrutist defineerime valemiga

$$<\vec{a}, \vec{b}> = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}). \qquad (1.1.0.2)$$

Seotud vektorite liitmine ja reaalarvuga korrutamine tekitab vektorite liitmist ja reaalarvuga korrutamist ning on lihtne veenduda, et liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes vektorid moodustavad kahemõõtmeelise vektorruumi üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$. Tasandi vektorite vektorruumi tähistame $\mathbb{E}^2$. Vektorruumi $\mathbb{E}^2$ vektorite jaoks on defineeritud sellised mõisted nagu vektori pikkus, vektorite vaheline nurk ja kahe vektori skalaarkorrutis. Järelikult $\mathbb{E}^2$ on eukleidiline vektorruum.

Fikseerime tasandil E^2 ristreeperi $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kus $O \in E^2$ on ristreeperi alguspunkt ja $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on vektorruumi $\mathbb{E}^2$ ortonormeeritud baas, st vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on teineteisega risti ja vektorite pikkus on 1 (ühikvektorid). Lisaks eeldame, et ristreeperi $\mathfrak{R}$ orientatsioon on parema käe orientatsioon. Oletame, et baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on rakendatud alguspunktist O ja vastavad seotud vektorid on $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$. Nüüd pöörame seotud vektorit $\overrightarrow{OP}$ ümber alguspunkti lühemat teed pidi seotud vektorini $\overrightarrow{OQ}$. Kui pööre toimub kellaosuti liikumisele vastupidises suunas (vastu päeva), siis öeldakse, et reeperi orientatsioon on parema käe orientatsioon.

Ristreeper $\mathfrak{R}$ tekitab tasandil E^2 koordinaatteljestikku järgmiselt: abstsisstelg on sihivektoriga $\vec{e}_1$ sirge, ordinaattelg on sihivektoriga $\vec{e}_2$ sirge ja mõlemad sirged läbivad reeperi alguspunkti O. Olgu P tasandi mingi punkt ja $\overrightarrow{OP}$ punkti P kohavektor. Olgu $\mathrm{Pr}_{\vec{e}_1}\overrightarrow{OP}, \mathrm{Pr}_{\vec{e}_2}\overrightarrow{OP}$ kohavektori ristprojektsioonivektorid vastavalt vektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sihile. Kehtib

$$\overrightarrow{OP} = \mathrm{Pr}_{\vec{e}_1}\overrightarrow{OP} + \mathrm{Pr}_{\vec{e}_2}\overrightarrow{OP}.$$

Kasutades vektorite skalaarkorrutamist võime kirjutada

$$\mathrm{Pr}_{\vec{e}_1}\overrightarrow{OP} = <\overrightarrow{OP}, \vec{e}_1> \vec{e}_1, \quad \mathrm{Pr}_{\vec{e}_2}\overrightarrow{OP} = <\overrightarrow{OP}, \vec{e}_2> \vec{e}_1.$$

Kordajaid $x = <\overrightarrow{OP}, \vec{e}_1>$, $y = <\overrightarrow{OP}, \vec{e}_2>$ nimetatakse punkti P ristkoordinaatideks ja tähistatakse $P(x, y)$ abil. Punkti P kohavektor avaldub ristkoordinaatide kaudu järgmiselt

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2.$$

Kui tähistada punkti P kohavektori pikkust r abil, kohavektori $\overrightarrow{OP}$ ja esimese baasivektori $\vec{e}_1$ vahelist nurka ϕ abil, siis

$$\begin{aligned} x &= <\overrightarrow{OP}, \vec{e}_1> = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{e}_1|\,\cos\angle(\overrightarrow{OP}, \vec{e}_1) = r\,\cos\phi, \\ y &= <\overrightarrow{OP}, \vec{e}_2> = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{e}_2|\,\cos\angle(\overrightarrow{OP}, \vec{e}_2) = r\,\sin\phi. \end{aligned}$$

Baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ moodustavad eukleidilise vektorruumi $\mathbb{E}^2$ ortonormeeritud baasi, seega suvalist vektorit $\vec{a}$ saab kirjutada kujul $\vec{a} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2$, kus kordajad x, y on vektori koordinaadid. Kui ristreeper $\mathfrak{R}$ on fikseeritud ja vektori $\vec{a}$ koordinaadid on x, y, siis kirjutame $\vec{a} = (x, y)$. Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}_1 = (x_1, y_1), \vec{a}_2 = (x_2, y_2)$ ja reaalarv λ. Vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ summa, vektori $\vec{a}_1$ korrutis reaalarvuga λ ja vektorite skalaarkorrutis avalduvad vektorite koordinatide kaudu järgmiselt

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 + \vec{a}_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \lambda\, \vec{a}_1 &= (\lambda x_1, \lambda y_1), \\ < \vec{a}_1, \vec{a}_2 > &= x_1\, x_2 + y_1\, y_2. \end{aligned}$$

Valemitest (1.1.0.3) ja (1.1.0.2) järeldub, et vektori $\vec{a} = (x, y)$ pikkuse arvutamiseks võime kasutada valemit $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Seotud vektorite korral kehtivad sarnased valemid. Olgu $\overrightarrow{a}$ seotud vektor, mis on moodustatud vektori $\vec{a}$ rakendamise abil punktist P. Sellisel juhul kirjutame $\overrightarrow{a} = (P; \vec{a})$. Kui vektori $\vec{a}$ koordinaadid on x_1, y_1, st $\vec{a} = (x_1, y_1)$, siis kirjutame $\overrightarrow{a} = (P;\, x_1, y_1)$. Olgu $\overrightarrow{b} = (P;\, x_2, y_2)$ mingi mingi teine seotud vektor punktis P ja λ reaalarv. Kehtivad valemid

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (P; x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \lambda \overrightarrow{a} &= (P;\, \lambda x_1, \lambda y_1), \\ < \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} > &= x_1\, x_2 + y_1\, y_2. \end{aligned}$$

Kui $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ on tasandi punktid, siis kaugus punktide vahel $d(P, Q)$ avaldub punktide ristkoordinaatide kaudu järgmiselt

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \qquad (1.1.0.3)$$

Järgnevas tasandi (ja ruumi) varustamiseks koordinaadisüsteemiga kasutame ainult ristreepereid ja seepärast lihtsustame terminoloogia kasutamist nimetades ristreeperit lihtsalt reeperiks ja ristkoordinaate koordinaatideks.

Tasandi kompleksne struktuur. Olgu $\vec{a} \in \mathbb{E}^2$ vektor. Fikseerime tasandi punkti P ja rakendades vektorit $\vec{a}$ punktist P saame seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$. Nüüd pöörame seotud vektorit $\overrightarrow{PQ}$ ümber punkti P kellaosuti liikumesele vastupidises suunas (vastu päeva) täisnurga võrra ja saadud seotud vektorit tähistame $\overrightarrow{PR}$. Seotud vektori $\overrightarrow{PR}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $\vec{b}$. On ilmne, et sellisel viisil konstrueeritud vektor $\vec{b}$ ei sõltu punkti P valikust. Seega ülalpool kirjeldatud operatsioon, mis tugineb seotud vektorite pöördel täisnurga võrra ümber seotud vektori alguspunkti, on eukleidilise vektorruumi $\mathbb{E}^2$ teisendus. Sellist teisendust nimetatakse *tasandi komplekseks struktuuriks* ja tähistatakse $J : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$. Kompleksne struktuur J on vektorruumi $\mathbb{E}^2$

lineaarteisendus ja see järeldub sellest, et teisendus J baaserub seotud vektorite pöördel. Järelikult suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ ja suvaliste reaalarvude μ, λ korral kehtib

$$J(\mu\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}) = \mu\,J(\vec{a}) + \lambda\,J(\vec{b}).$$

Kui lineaarteisendust J rakendada kaks korda järjest, siis vektor $\vec{a}$ muutub vastandvektoriks $-\vec{a}$. Seega kehtib $J^2 = -\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$, kus $\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}$ on eukleidilise vektorruumi $\mathbb{E}^2$ samasusteisendus ($\mathrm{id}_{\mathbb{E}^2}(\vec{a}) = \vec{a}$). Vektorite skalaarkorrutis sõltub ainult vektorite pikkustest ja nurgast vektorite vahel. On ilmne, et need suurused ei muutu pöörde korral, järelikult lineaarteisendus J säilitab vektorite skalaarkorrutist. On teada, et vektorid on teineteisega risti parajasti siis, kui vektorite skalaarkorrutis on null. Seega meil on tõestatud

Lause 1.1.0.1. *Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ korral kehtivad järgmised omadused:*

1. $J^2 = -id_{\mathbb{E}^2}$;
2. $< J(\vec{a}), J(\vec{b}) > = < \vec{a}, \vec{b} >$;
3. $< J(\vec{a}), \vec{a} > = 0$.

Eeldame, et tasandil on antud reeperi $\mathfrak{R}$ poolt määratud koordinaadisüsteem. Kehtib $J(\vec{e}_1) = \vec{e}_2, J(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1$. Seega lineaarteisenduse J maatriks on

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Järelikult, kui $\vec{a} = (x, y)$, siis lineaarteisendus J teisendab vektorit $\vec{a}$ vektoriks $J(\vec{a})$ koordinaatidega $(-y, x)$. Tõepoolest

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Komplekse struktuuri valem tasandi koordinaatides on $J(x, y) = (-y, x)$.

Näitame, et tasandi kompleksne struktuur J on seotud kompleksarvude korpusega $\mathbb{C}$. Selleks eeldame, et tasandil on antud koordinaadisüsteem. Defineerime kujutust $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{C}$ valemiga $\vec{a} \mapsto z_{\vec{a}}$, kus $\vec{a} = (x, y)$ ja $z_{\vec{a}} = x + i\,y$. On ilmne, et kujutus $\vec{a} \mapsto z_{\vec{a}}$ on bijektsioon (üks-ühene peale kujutus). Suvalise vektori $\vec{a} = (x, y)$ korral kehtib valem

$$z_{J(\vec{a})} = z_{(-y,x)} = -y + i\,x = i\,(x + i\,y) = i\,z_{\vec{a}},$$

mis näitab, et tasandi vektori $\vec{a}$ teisendamine lineaarteisenduse J abil on samaväärne vastava kompleksarvu $z_{\vec{a}}$ korrutamisega imaginaarühikuga i. Bijektsioonil $\vec{a} \mapsto z_{\vec{a}}$ on järgmised omadused:

$$|z_{\vec{a}}| = |\vec{a}|, \quad z_{\vec{a}}\,\bar{z}_{\vec{b}} = < \vec{a}, \vec{b} > + i < \vec{a}, J(\vec{b}) >, \tag{1.1.0.4}$$

kus esimeses valemis $|z_{\vec{a}}|$ on kompleksarvu moodul ja teises valemis vasakul seisab kompleksarvude korrutis.

Mainime, et kompleksset struktuuri saab defineerida tasandi suvalises punktis P. Tõepoolest sellisel juhul vaatleme lineaarteisendust $J_P : T_P E^2 \to T_P E^2$, kus J_P on seotud vektori alguspunktiga punktis P pööre ümber punkti P vastu päeva täisnurga võrra. Seega $J_P(P; \vec{a}) = (P; J(veca))$.

Polaarkoordinaadid. Tasandi teine koordinaadisüsteem, mida laialt kasutatakse tasandiliste kõverate teoorias, on polaarkoordinaadisüsteem. Lühidalt tuletame meelde polaarkoordinaadisüsteemi struktuuri. Fikseerime tasandil ühe punkti O ja sirge L nii, et sirge läbib punkti O ja sirgel on näidatud positiivne suund. Punkti O nimetatakse polaarkoordinaadisüsteemi *pooluseks* ja sirget L *polaarteljeks*. Vaatleme tasandi suvalist punkti P välja arvatud poolus O. Punkti P *polaarraadiuseks* nimetatakse lõiku OP pikkust ja punkti polaarraadiust tavaliselt tähistatakse r. Punkti P *polaarnurgaks* nimetatakse nurka ϕ, mis tekib polaartelje pööramisel ümber poolust O kellaosuti liikumisele vastupidises suunas (vastu päeva) lõiguga OP ühtimiseni. Polaarraadius r ja polaarnurk ϕ on punkti P polaarkoordinaadid. Juhime tähelepanu sellele, et käesoleva raamatu käsitluses polaarkoordinaadid ei ole määratud pooluses. Seega polaarkoordinaadisüsteemi määramispiirkond on $r > 0, 0 \leq \phi < 2\pi$, st polaarkoordinaadisüsteem katab kogu tasandit E^2 välja arvatud poolus O.

Kui tasandil on antud ristkoordinaadisüsteem x, y ja polaarkoordinaadisüsteem r, ϕ, kusjuures poolus asub ristkoordinaadisüsteemi alguspunktis, polaartelg ühtib abstsissteljega, siis punkti ristkoordinaadid x, y avalduvad polaarkoordinaatide kaudu järgmiselt:

$$x = r\,\cos\phi, \quad y = r\,\sin\phi. \tag{1.1.0.5}$$

1.2 Tasandilise kõvera mõiste

Parametriseeritud kõver ristkoordinaatides Antud punktis eeldame, et eukleidiline tasand E^2 on varustatud ristreeperiga $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja vastava koordinaadisüsteemiga. Olgu $I \subset \mathbb{R}$ kas lõplik vahemik (a, b), pool-lõpmatu vahemik $(-\infty, b), (a, +\infty)$ või lõpmatu vahemik $(-\infty, +\infty)$.

Definitsioon 1.2.0.2. Kujutust $\alpha : I \to E^2$, kus $\alpha(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I$, nimetatakse *tasandiliseks parametriseeritud kõveraks*, kui funktsioonid $x(t)$,$y(t)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Vahemikku I nimetatakse parametriseeritud kõvera *määramispiirkonnaks*, kujutuse α kujutist (punktihulka $\operatorname{Im}\alpha \subset E^2$) nimetatakse *parametriseeritud kõvera jäljeks* ja muutujat t

nimetatakse parameetriks. Valemit $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ nimetatakse parametriseeritud kõvera *parameetriliseks võrrandiks.*

Märkus 1.2.0.3. Parametriseeritud kõvera definitsioonis (1.2.0.2) määramispiirkond I on vahemik, kuid sageli on kasulik vaadelda parametriseeritud kõverat, kus määramispiirkond I on lõik või poollõik. Kui vaadeldava parametriseeritud kõvera $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ määramispiirkond on poollõik $I = (a, b]$, $I = [a, b)$ või lõik $I = [a, b]$, siis eeldame, et leidub parametriseeritud kõver $\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) : \tilde{I} \to E^2$ selline, et

1. $I \subset \tilde{I}$;
2. $\tilde{x}(t)|_I \equiv x(t), \quad \tilde{y}(t)|_I \equiv y(t).$

Märkus 1.2.0.4. Kui on antud lõpmata diferentseeruv funktsioon $y = f(x)$ määramispiirkonnaga I, siis võime moodustada parametriseeritud kõvera $\alpha : I \to E^2$, kus $\alpha(t) = (t, f(t))$. Seega lõpmata diferentseeruv funktsioon $y = f(x)$ tekitab parametriseeritud kõverat. Vastavat parametriseeritud kõverat nimetame funktsiooni $f(x)$ poolt tekitatud parametriseeritud kõveraks. On ilmne, et funktsiooni $f(x)$ graafik ühtib parametriseeritud kõvera α jäljega.

Definitsiooni (1.2.0.2) kohaselt suvalise $t \in I$ korral $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ on eukleidilise tasandi E^2 punkt. Selle punkti kohavektorit tähistame $\vec{\alpha}(t)$. Mainime, et kohavektori koordinaadid on võrdsed punkti $\alpha(t)$ koordinaatidega, st $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$. Antud võrrand määrab kujutust $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{E}^2$, st kujutuse $\vec{\alpha}$ väärtus suvalise $t \in I$ korral on tasandi vektor. Kujutust $\vec{\alpha} : I \to \mathbb{E}^2$ nimetatakse *vektor-funktsiooniks.* Vektor-funktsiooni $\vec{\alpha}(t)$ nimetatakse lõpmata diferentseeruvaks vektor-funktsiooniks, kui $x(t), y(t)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Seega parametriseeritud kõvera parameetriline võrrand $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ määrab lõpmata diferentseeruvat vektor-funktsiooni $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$. Tehted vektoritega (liitmine ja korrutamine arvudega) tekitavad tehted vektor-funktsioonidega ja sellega seoses mõnikord parametriseeritud kõvera uurimiseks on mugavam kasutada vektor-funktsiooni $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$. Olgu

$$\vec{\alpha}(t) = (x_1(t), y_1(t)), \;\; \vec{\beta}(t) = (x_2(t), y_2(t)), \;\; t \in I \subset \mathbb{R},$$

lõpmata diferentseeruvad vektor-funktsioonid ja $f(t), t \in I$ lõpmata diferentseeruv ühemuutuja funktsioon. Defineerime summa, funktsiooniga f korrutist ja vektor-funktsioonide skalaarkorrutist järgmiselt

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta})(t) = \vec{\alpha}(t) + \vec{\beta}(t), \quad (f\,\vec{\alpha})(t) = f(t)\,\vec{\alpha}(t), \qquad (1.2.0.6)$$

$$< \vec{\alpha}, \vec{\beta} > (t) = x_1(t)\,x_2(t) + y_1(t)\,y_2(t), \qquad (1.2.0.7)$$

Definitsioonist ja funktsiooniteooria teoreemidest järeldub, et summa ja funktsiooniga korrutis on lõpmata diferentseeruv vektor-funktsioon ja vektor-funktsioonide skalaarkorrutis on lõpmata diferentseeruv funktsioon. Vektor-funktsiooni tuletist defineeritakse valemiga

$$\vec{\alpha}\,'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Kehtivad järgmised omadused:

1. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})' = \vec{\alpha}' + \vec{\beta}'$;
2. $(f\,\vec{\alpha})' = f'\vec{\alpha} + f\,\vec{\alpha}'$;
3. $< \vec{\alpha}, \vec{\beta} >' = < \vec{\alpha}\,', \vec{\beta} > + < \vec{\alpha}, \vec{\beta}\,' >$.

Näide 1.2.0.5. Olgu antud reaalarv $r > 0$. Parametriseeritud kõverat

$$\alpha(t) = (r\,\cos t, r\,\sin t),\ I = [0, 2\pi],$$

nimetatakse raadiusega r *ringjooneks*. Kui $r = 1$, siis parametriseeritud kõverat nimetatakse *ühikringjooneks*.

Näide 1.2.0.6. Olgu $a > b > 0$ reaalarvud. Parametriseeritud kõverat

$$\alpha(t) = (a\,\cos t, b\,\sin t), \quad I = [0, 2\pi],$$

nimetatakse *ellipsiks*. Reaalarvud a, b on ellipsi poolteljed.

Näide 1.2.0.7. Parametriseeritud kõverat

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \quad I = (-\infty, +\infty).$$

nimetatakse *poolkuupparabooliks*.

Definitsioon 1.2.0.8. Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver, kus $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Parametriseeritud kõvera *kiiruvektoriks* või *puutujavektoriks* kõvera punktis $p = \alpha(t_0),\ t_0 \in I$ nimetatakse seotud vektorit $\overrightarrow{\alpha}\,'(t_0)$ alguspunktiga punktis p, kus

$$\overrightarrow{\alpha}\,'(t_0) = (p; \frac{d\,x}{dt}|_p, \frac{d\,y}{dt}|_p) = (p; x'(t_0), y'(t_0)).$$

Kasutades vektor-funktsiooni $\vec{\alpha} = (x(t), y(t))$, parametriseeritud kõvera kiirusvektori võime kirjutada kujul

$$\overrightarrow{\alpha}\,'(t_0) = (\alpha(t_0); \vec{\alpha}\,'(t_0)),$$

kus $\vec{\alpha}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ on vektor-funktsiooni tuletis punktis $t_0 \in I$. Parametriseeritud kõverat nimetatakse *regulaarseks*, kui parametriseeritud kõvera igas punktis kiirusvektor on seotud null-vektorist erinev vektor, st $\forall t \in I$ kehtib $\overrightarrow{\alpha}'(t) \neq \overrightarrow{0}$. Kui parametriseeritud kõvera $\alpha(t)$ suvalises punktis $t \in I$ kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ on ühikvektor, st suvalise $t \in I$ korral $|\overrightarrow{\alpha}'(t)| = 1$, siis parametriseeritud kõverat nimetatakse *ühikkiirusega parametriseeritud kõveraks.*

Definitsioon 1.2.0.9. Parametriseeritud kõvera $\alpha : I \to E^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ *kiirendusvektoriks* parametriseeritud kõvera punktis $t_0 \in I$ nimetatakse vektorit

$$\overrightarrow{\alpha}''(t_0) = (\alpha(t_0);\, x''(t_0), y''(t_0)).$$

Ellips $\alpha(t) = (a\,\cos t, b\,\sin t)$ on regulaarne parametriseeritud kõver. Tõepoolest kehtib

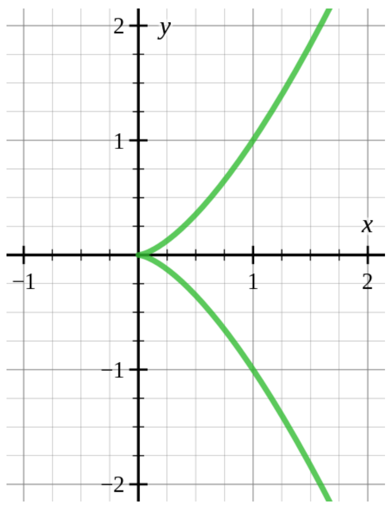
$$\overrightarrow{\alpha}'(t) = (\alpha(t); -a\,\sin t, b\,\cos t).$$

Arvestame, et $a > b > 0$. Seega

$$|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^2 = a^2\,\sin^2 t + b^2\,\cos^2 t = (a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2 > 0,$$

kust järeldub, et suvalise $t \in [0, 2\pi]$ korral $\overrightarrow{\alpha}'(t) \neq \overrightarrow{0}$.

Uurime poolkuupparabooli $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ regulaarsust. Leiame $\overrightarrow{\alpha}'(t) = (\alpha(t); 2\,t, 3\,t^2)$. Valemist järeldub, et poolkuupparabool on regulaarne suva-



Joonis 1.1: Poolkuupparabool

lise t väärtuse korral välja arvatud $t = 0$, kus kiirusvektor on null-vektor.

Parameetri t väärtusele 0 vastab tasandi punkt koordinaatidega $(0,0)$. Seega koordinaadisüsteemi alguspunktis poolkuupparabooli kiirusvektor on null-vektor ja poolkupparabool ei ole regulaarne, st punkt $O(0,0)$ on parametriseeritud kõvera singulaarne punkt (vt joonis 1.1). Poolkuupparabool muutub regulaarseks parametriseeritud kõveraks, kui määramispiirkonnaks valime vahemikut $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, st reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ eemaldatud punktiga 0.

Järgnevas eeldame, et regulaarsuse tingimus on täidetud, st kiirusvektor kõvera suvalises punktis on null-vektorist erinev vektor, ja seetõttu kasutame terminit "parametriseeritud kõver"vaikselt eeldades, et parametriseeritud kõver on regulaarne.

Parametriseeritud kõvera parameetriline võrrand $\alpha(t)$ ei ole üheselt määratud, st on võimalik, et parametriseeritud kõverad $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ja $\beta(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ on erinevad, kuid nende jäljed langevad kokku $\mathrm{Im}\ \alpha = \mathrm{Im}\ \beta$. Sellisel juhul on loomulik rääkida sellest, et α ja β on ühe ja sama tasandi punktihulga erinevad parametriseerimised. Näiteks, parametriseeritud kõverad $\alpha(t) = (a\ \cos t, b\ \sin t)$ ja $\beta(t) = (a\ \sin t, b\ \cos t)$ on ühe ja sama ellipsi erinevad parametriseerimised.

Definitsioon 1.2.0.10. Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver ja $h : J \to I$ lõpmata diferentseruv funktsioon, kus vahemik $J \subset \mathbb{R}$ on funktsiooni h määramispiirkond, vahemik $I \subset \mathbb{R}$ on funktsiooni h muutumispiirkond (st $h(I) = J$) ja $h'(\tau) \neq 0,\ \forall \tau \in J$. Tähistame $t = h(\tau)$, kus $t \in I, \tau \in J$. Parametriseeritud kõverat

$$\beta = \alpha \circ h : J \to E^2, \quad \beta(\tau) = \alpha(h(\tau)),$$

nimetatakse punktihulga Im α *ümberparametriseerimiseks* funktsiooni h abil.

Kui kasutatakse parametriseeritud kõvera $\alpha(t)$ vektor-funktsiooni $\vec{\alpha}(t)$, siis $t = h(\tau), h : J \to J$ nimetatakse vektor-funktsiooni muutujavahetuseks, st kui vektor-funktsioonist $\vec{\alpha}(t)$ minnakse üle vektor-funktsioonile $\vec{\beta}(\tau) = \vec{\alpha}(h(\tau))$, siis öeldakse, et toimub vektor-funktsiooni muutujavahetus.

Definitsioonist järeldub, et $\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Im}\,\beta$, st ümderparametriseerimisel parametriseeritud kõvera jälg jääb samaks. Uurime, kuidas teiseneb parametriseeritud kõvera kiirusvektor, kui toimub ümberparametriseerimine.

Lause 1.2.0.11. *Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver ja $\beta = \alpha \circ h : J \to E^2$ selle ümberparametriseerimine. Kehtib*

$$\overrightarrow{\beta}'(\tau) = h'(\tau)\, \overrightarrow{\alpha}'(h(\tau)). \tag{1.2.0.8}$$

Valemit (1.2.0.8) nimetatakse parametriseeritud kõvera ahelreegliks.

Tõestus. Olgu $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, siis $\beta(\tau) = (x(h(\tau)), y(h(\tau)))$. Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimist, leiame

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\beta}'(\tau) &= (\alpha(h(\tau)); \frac{dx(h(\tau))}{d\tau}, \frac{dy(h(\tau))}{d\tau}) = (\alpha(h(\tau)); \frac{dh}{d\tau}\frac{dx}{dt}, \frac{dh}{d\tau}\frac{dy}{dt}) \\ &= h'(\tau)\,(\alpha(h(\tau)); \frac{dx}{dt}|_{t=h(\tau)}, \frac{dy}{dt}|_{t=h(\tau)}) = h'(\tau)\,\overrightarrow{\alpha}'(h(\tau)). \quad \square\end{aligned}$$

Tõestatud teoreemist järeldub, et $\beta = \alpha \circ h$ on regulaarne parametriseeritud kõver parajasti siis, kui α on regulaarne.

Funktsiooni tasemejoon. Tasandilise joone määramiseks võrrandi abil võime kasutada joone ilmutamata võrrandit. Olgu $F(x, y)$ lõpmata diferentseeruvat kahemuutuja funktsiooni, kus $D \subset E^2$ on selle funktsiooni määramispiirkond.

Definitsioon 1.2.0.12. Olgu $p \in D$. Funktsiooni $F(x, y)$ *gradiendiks* punktis p nimetatakse seotud vektorit $\overrightarrow{\nabla} F\big|_p$ alguspunktiga punktis p, kus

$$\overrightarrow{\nabla} F\big|_p = (p; \frac{\partial F}{\partial x}\big|_p, \frac{\partial F}{\partial y}\big|_p).$$

Seega $\overrightarrow{\nabla} F\big|_p \in T_pE^2$.

Definitsioon 1.2.0.13. Olgu $c \in \mathbb{R}$. Tasandi punktihulka

$$\mathscr{C} = F^{-1}(c) = \{p(x, y) \in E^2 : \ F(x, y) = c\},$$

nimetatakse *funktsiooni F tasemejooneks kõrgusega c*, kui on täidetud järgmised tingimused:

1. võrrandi $F(x, y) = c$ lahendihulk $\mathscr{C}$ ei ole tühi, st leidub vähemalt üks tasandi punkt $p(x, y)$, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit $F(x, y) = c$;
2. funktsiooni F gradient $\overrightarrow{\nabla} F\big|_p$ on null-vektorist erinev vektor punktihulga $\mathscr{C}$ igas punktis p.

Võrrandit $F(x, y) = c$ nimetatakse tasemejoone $\mathscr{C}$ *ilmutamata võrrandiks.*

Näide 1.2.0.14. Olgu $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ kahemuutuja funktsioon, kus $a > b$ on positiivsed reaalarvud. $F(x, y)$ on teise astme kahemuutuja polünoom, seega $F(x, y)$ on lõpmata diferentseeruv funktsioon tasandi suvalises punktis. Olgu $c = 1$. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y) = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.2.0.9)$$

Selle võrrandi lahendihulk ei ole tühi, sest näiteks punkti $p(a,0)$ koordinaadid rahuldavad võrrandit (1.2.0.9). Uurime funktsiooni $F(x,y)$ gradienti. Tasandi suvalises punktis $p(x,y)$ kehtib

$$\overrightarrow{\nabla} F\big|_p = 2\,(p; \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}).$$

Seega gradient on null-vektor tasandi ainult ühes punktis $O(0,0)$, kuid koordinaadisüsteemi alguspunkt O ei kuulu võrrandi (1.2.0.9) lahendihulka. Järelikult võrrandi (1.2.0.9) lahendihulga igas punktis gradient on null-vektorist erinev vektor. Seega definitsiooni (1.2.0.13) kõik tingimused on täidetud ja $\mathscr{C} = F^{-1}(1)$ on funktsiooni F tasemejoon kõrgusega 1. Tasemejoont $\mathscr{C}$ nimetatakse ellipsiks. Teame, et parametriseeritud kõver $\alpha(t) = (a\ \cos t, b\ \sin t)$ on ellipsi parametriseerimine.

Järgmine teoreem näitab, et iga tasemejoon on lokaalselt parametriseeritav, st lokaalselt tasemejoon on parametriseeritud kõver.

Lemma 1.2.0.15. *Olgu $\mathscr{C} = F^{-1}(c)$ funktsiooni $F(x,y)$ tasemejoon kõrgusega c ja $p(x_0,y_0)$ tasemejoone punkt, st $F(x_0,y_0) = c$. Leidub punkti $p(x_0,y_0)$ ümbrus $U \subset D$, kus D on funktsiooni F määramispiirkond, ja regulaarne parametriseeritud kõver $\alpha : I \to U$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ selline, et*

1. *$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$, kus $t_0 \in I$ (α läbib punkti p);*
2. *$F(x(t), y(t)) \equiv c$.*

Parametriseeritud kõverat α nimetatakse funktsiooni $F(x,y)$ tasemejoone kõrgusega c lokaalseks parametriseerimiseks punkti $p(x_0,y_0)$ ümbruses.

Tõestus. Tõestus baaserub ilmutamata funktsiooni teoreemil. Tuletame meelde, et funktsiooni tasemejoone definitsiooni kohaselt funktsiooni $F(x,y)$ gradient punktis $p(x_0,y_0)$ on null-vektorist erinev vektor. Seega funktsiooni $F(x,y)$ vähemalt üks osatuletis punktis p on nullist erinev. Oletame, et $\frac{\partial F}{\partial y}|_p \neq 0$. Ilmutamata funktsiooni teoreem väidab, et leidub punkti $p(x_0,y_0)$ ümbrus $U \subset D$, kus võrrand $F(x,y) = c$ määrab y kui x funktsiooni, st $y = y(x)$, kus funktsiooni $y(x)$ määramispiirkond on $I \subset \mathbb{R}$, muutumispiirkond on J ja kehtib

1. $x_0 \in I$, $y_0 \in J$, $I \times J \subset U$;
2. $y = y(x)$ on lõpmata diferentseeruv funktsioon ja $y_0 = y(x_0)$;
3. $F(x, y(x)) \equiv c$, kus $x \in I$.

Moodustame parametriseeritud kõvera $\alpha(t) = (t, y(t)), t \in I$. Funktsiooni $y(x)$ omadustest järeldub, et $\alpha : I \to U$, $\alpha(x_0) = (x_0, y_0)$, st parametriseeritud kõver α läbib punkti p, ja

$$\overrightarrow{\alpha}'(x_0) = (p;\, 1, y'(x_0)) \neq \overrightarrow{0},$$

st α on regulaarne parametriseeritud kõver. Juhul kui $\frac{\partial F}{\partial x}|_P \neq 0$ tõestus on analoogiline. □

Teoreem 1.2.0.16. *Olgu $\mathscr{C} = F^{-1}(c)$ funktsiooni $F(x, y)$ tasemejoon kõrgusega c, $p(x_0, y_0)$ tasemejoone punkt ja $\alpha : I \to \mathscr{C}$ tasemejoone lokaalne parametriseerimine punkti p ümbruses, kus $\alpha(t_0) = p$, $t_0 \in I$. Parametriseeritud joone kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'(t_0)$ on risti funktsiooni F gradiendiga punktis p, st*

$$\overrightarrow{\alpha}'(t_0) \perp \overrightarrow{\nabla} F\big|_p.$$

Tõestus. Olgu $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Kehtib $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0, t_0 \in I$ ja $F(x(t), y(t)) \equiv c$. Diferentseerime samasust $F(x(t), y(t)) \equiv c$ t järgi ja paneme $t = t_0$. Saame

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_p\, x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_p\, y'(t_0) = 0.$$

Saadud valemi vasakpool on funktsiooni F gradiendi punktis p ja parametriseeritud kõvera α kiirusvektori punktis P skalaarkorrutis. Seega

$$< \overrightarrow{\nabla} F\big|_p, \overrightarrow{\alpha}'(t_0) >= 0.$$

Järelikult kiirusvektor on risti funktsiooni gradiendiga. □

Tasemejoon on lokaalselt parametriseeritav, kuid parametriseerimine ei ole üheselt määratud. Teoreemist (1.2.0.16) järeldub, et tasemejoone lokaalsete parametriseerimiste (punkti p ümbruses) kiirusvektorid on risti gradiendiga ja seega nad on kollineaarsed. Järelikult kiirusvektorid tekitavad ühte ja sama sirget, mis läbib tasemejoone punkti p (puutepunkt), kui kasutame neid sirge sihivektoriteks. Vastavat sirget nimetatakse tasemejoone *puutujasirgeks*.

Definitsioon 1.2.0.17. Olgu $\mathscr{C} = F^{-1}(c)$ funktsiooni $F(x, y)$ tasemejoon kõrgusega c, $p(x_0, y_0)$ tasemejoone punkt ja $\alpha : I \to E^2$ tasemejoone $\mathscr{C}$ lokaalne parametriseerimine punkti p ümbruses, kus $\alpha(t_0) = (x_0, y_0) = p$. Tasemejoone $\mathscr{C}$ *puutujasirgeks* joone punktis p nimetatakse punkti p läbivat sirget sihivektoriga $\vec{\alpha}(t_0)$.

Leiame tasemejoone puutujasirge võrrand. Funktsiooni gradient on puutujasirge normaalvektor, seega puutujasirge võrrand tasemejoone $F(x, y) = c$ punktis $p(x_0, y_0)$ on

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_p (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_p (y - y_0) = 0.$$

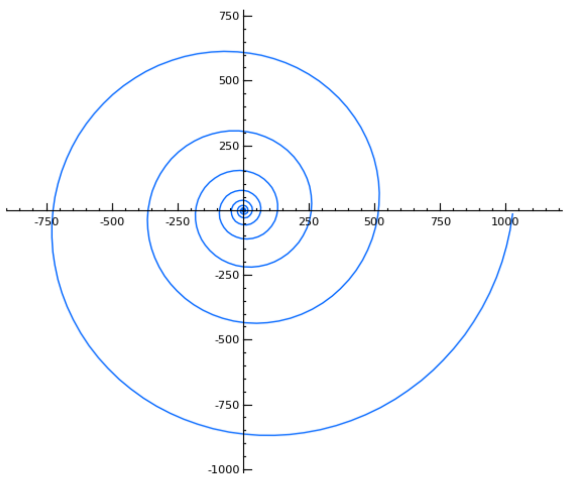
Parametriseeritud kõver polaarkoordinaatides. Paljude kõverate võrrandite kuju on kompaktsem ja lihtsam polaarkoordinaatides ja selle pärast neid määratakse polaarkoordinaatide abil. Sellisel juhul parameetrilise võrrandi parameetriks valitakse polaarnurka. Olgu tasandil E^2 antud polaarkoordinaadisüsteem, mille koordinaadid on tähistatud r, ϕ.

Definitsioon 1.2.0.18. Parametriseeritud kõveraks tasandi polaarkoordinaatides r, ϕ nimetatakse kujutust $\alpha : I \to E^2$, kus kujutuse määramispiirkond I on vahemik, $\alpha(\phi) = (r(\phi), \phi)$ ja $r(\phi)$ on lõpmata diferentseeruv funktsioon. Parametriseeritud kõvera parameetriliseks võrrandiks polaarkoordinaatides nimetatakse võrrandit $r = r(\phi)$.

Näide 1.2.0.19. Parametriseeritud kõverat, mis on määratud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = a\, e^{b\,\phi},$$

kus a, b on positiivsed reaalarvud, nimetatakse *logaritmiliseks spiraaliks.*



Joonis 1.2: Logaritmiline spiraal

1.3 Kaarepikkus. Loomulik parameeter

Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver, kus $I = [a, b]$.

Definitsioon 1.3.0.20. Parametriseeritud kõvera $\alpha : I \to E^2$ *pikkuseks* nimetatakse reaalarvu s_α, mis määratakse valemiga

$$s_\alpha = \int_a^b |\overrightarrow{\alpha}'(t)| \, dt. \tag{1.3.0.10}$$

Näitame, et parametriseeritud kõvera pikkus ei sõltu parametriseerimisest.

Lause 1.3.0.21. *Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver, kus $I = [a, b]$. Olgu $\beta = \alpha \circ h : J \to E^2$ parametriseeritud kõvera α ümberparametriseerimine funktsiooni $t = h(\tau)$ abil, kus $J = [c, d]$ ja $h(J) = I$. Kehtib*

$$s_\alpha = s_\beta.$$

Tõestus. Oletame, et $h' > 0$. Kasutades integraali omadusi ja parametriseeritud kõvera ahelreeglit, saame

$$\begin{aligned} s_\beta &= \int_c^d |\overrightarrow{\beta}'(\tau)| \, d\tau = \int_c^d |h'(\tau) \, \overrightarrow{\alpha}'(h(\tau))| \, d\tau \\ &= \int_c^d |\overrightarrow{\alpha}'(h(\tau))| \; \underbrace{h'(\tau)d\tau}_{dt} = \int_a^b |\overrightarrow{\alpha}'(t)| \, dt = s_\alpha(P, Q). \end{aligned}$$

Juhul, kui $h' < 0$ tõestus on analoogiline. □

Definitsioon 1.3.0.22. Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver ja $c \in I$. Parametriseeritud kõvera *kaarepikkuse funktsiooniks* alguspunktiga punktis c nimetatakse funktsiooni

$$s_\alpha(t) = \int_c^t |\overrightarrow{\alpha}'(u)| \, du.$$

Parametriseeritud kõvera pikkust saab kasutada parametriseeritud kõvera jälje parametriseerimiseks.

Teoreem 1.3.0.23. *Olgu $\alpha : [a, b] \to E^2$ regulaarne parametriseeritud kõver. Leidub parametriseeritud kõvera α ühikkiirusega ümberparametriseerimine.*

Tõestus. Vaatleme parametriseeritud kõvera α kaarepikkuse funktsiooni $s_\alpha(t)$ alguspunktiga punktis a, kus

$$s_\alpha(t) = \int_a^t |\overrightarrow{\alpha}'(u)| \; du, \quad a \le t \le b.$$

Kaarepikkuse funktsiooni tuletise t järgi arvutamiseks kasutame valemit: kui on antud parameetrist t sõltuv integraal

$$g(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(u,t)\,du, \tag{1.3.0.11}$$

kus $\psi(t), \phi(t), f(u,t)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid, siis selle integraali tuletis parameetri t järgi avaldub järgmiselt

$$g'(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f'_t(u,t)\,du + \psi'(t)\,f(\psi(t),t) - \phi'(t)\,f(\phi(t),t), \tag{1.3.0.12}$$

kus $f'_t(u,t)$ on funktsiooni $f(u,t)$ osatuletis t järgi. Kaarepikkuse funtsiooni korral $\phi(t) = a, \psi(t) = t$ ja integraali all seisav funktsioon t ei sõltu. Seega $\phi'(t) = 0, \psi'(t) = 1, (|\overrightarrow{\alpha}\,'(u)|)'_t = 0$. Kasutades valemit (1.3.0.12) leiame

$$s'_\alpha(t) = |\overrightarrow{\alpha}\,'(t)|.$$

Teoreemi eelduse kohaselt α on regulaarne parametriseeritud kõver, järelikult $s'_\alpha(t) > 0$. Pöördfunktsiooni teoreemist järeldub, et sellisel juhul leidub kaarepikkuse funktsiooni $s_\alpha(t)$ pöördfunktsioon $t = t(s)$, kus pöördfunktsioon on lõpmata diferentseeruv, $0 \leq s \leq s_\alpha(b)$ ja

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s'_\alpha(t)}\Big|_{t=t(s)} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{ds} > 0.$$

Moodustame parametriseeritud kõvera $\beta(s) = \alpha(t(s)) : [0, s_\alpha(b)] \to E^2$. On ilmne, et β on parametriseeritud kõvera α ümberparametriseerimine funktsiooni $t(s)$ abil. Nüüd näitame, et β on ühikiirusega parametriseeritud kõver. Tõepoolest kehtib

$$|\overrightarrow{\beta}\,'(s)| = |\frac{dt}{ds}\,\overrightarrow{\alpha}\,'(t(s))| = |\frac{dt}{ds}||\overrightarrow{\alpha}\,'(t(s))| = \frac{1}{s'_\alpha(t)}\Big|_{t=t(s)} s'_\alpha(t(s)) = 1. \;\square$$

Teoreemi (1.3.0.23) tõestuses kasutatud ühikkiirusega parametriseerimist nimetatakse *loomulikuks parametriseerimiseks*. Sellisel juhul parameetrit s nimetatakse parametriseeritud kõvera *loomulikuks parameetriks*.

Näide 1.3.0.24. Olgu antud funktsioon $y = a\,\cosh(\frac{x}{a})$, kus $a > 0$ on positiivne reaalarv. Moodustame parametriseeritud kõvera

$$\alpha(t) = (t, a\,\cosh(\frac{t}{a})). \tag{1.3.0.13}$$

Parametriseeritud kõverat (1.3.0.13) nimetatakse *aheljooneks*. Aheljoon tekib teoreetilises mehaanikas vabalt ripuva ahela kuju uurimisel ([4]). Leiame aheljoone ühikkiirusega parametriseerimise. Aheljoone kiirusvektor ja selle pikkus on

$$\overrightarrow{\alpha}'(t) = (\alpha(t); 1, \sinh\frac{t}{a}), \quad |\overrightarrow{\alpha}'(t)| = \sqrt{1 + (\sinh\frac{t}{a})^2} = \cosh\frac{t}{a}.$$

Seega kaarepikkuse funktsioon (alguspunktiga punktis $t = 0$) on

$$s(t) = \int_0^t \cosh\frac{u}{a}\,du = a\int_0^t \cosh\frac{u}{a}\,d(\frac{u}{a}) = a\,\sinh\frac{u}{a}\Big|_0^t = a\,\sinh\frac{t}{a}.$$

Kaarepikkuse funktsiooni pöördfunktsioon on $t = a\ \text{arcsinh}\,\frac{s}{a}$. Aheljoone parametriseerimine kaarepikkuse abil on

$$\beta(s) = (a\ \text{arcsinh}\,\frac{s}{a}, a\,\cosh(\text{arcsinh}\,\frac{s}{a})).$$

Parameetrilise võrrandi funktsiooni $a\,\cosh(\text{arcsinh}\,\frac{s}{a})$ võime lihtsustada kasutades tuntud samasust

$$\cosh(\text{arcsinh}\,x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

Lõplikult saame

$$\beta(s) = (a\ \text{arcsinh}\,\frac{s}{a}, \sqrt{s^2 + a^2}).$$

Lause 1.3.0.25. *Olgu $\beta : I \to E^2$ ühikkiirusega parametriseeritud kõver. Suvalise $s \in I$ korral kiirendusvektor $\overrightarrow{\beta}''(s)$ on risti kiirusvektoriga $\overrightarrow{\beta}'(s)$, st $\overrightarrow{\beta}''(s) \perp \overrightarrow{\beta}'(s)$.*

Tõestus. Suvalise $s \in I$ korral kehtib $|\overrightarrow{\beta}'(s)|^2 = 1$ või $< \overrightarrow{\beta}'(s), \overrightarrow{\beta}'(s) >= 1$. Diferentseerime selle võrduse mõlemad pooled s järgi. Vasakul saame

$$\begin{aligned}(< \overrightarrow{\beta}'(s), \overrightarrow{\beta}'(s) >)' &= < \overrightarrow{\beta}''(s), \overrightarrow{\beta}'(s) > + < \overrightarrow{\beta}'(s), \overrightarrow{\beta}''(s) > \\ &= 2 < \overrightarrow{\beta}'(s), \overrightarrow{\beta}''(s) > .\end{aligned}$$

Võrduse parempoole tuletis võrdub nulliga, seega

$$< \overrightarrow{\beta}'(s), \overrightarrow{\beta}''(s) >= 0,$$

kust järeldub, et kiirendusvektor $\overrightarrow{\beta}''(b)$ on risti kiirusvektoriga $\overrightarrow{\beta}'(s)$. $\square$

Leiame parametriseeritud kõvera pikkuse arvutamise valemi polaarkoordinaatides. On antud polaarkoordinaadisüsteem r, ϕ ja parametriseeritud kõvera võrrand polaarkoordinaatides $r = r(\phi)$, $\phi_0 \le \phi \le \phi_1$. Valime ristkoordinaadisüsteemi nii, et ristkoordinaadisüsteemi alguspunkt asub pooluses ja

x-koordinaattelg ühtib polaarteljega. Sellisel juhul ristkoordinaadid avalduvad polaarkoordinaatide kaudu järgmiselt

$$x = r\,\cos\phi, \quad y = r\,\sin\phi.$$

Seega parametriseeritud kõvera parameetriline võrrand ristkoordinaatides on

$$\alpha(\phi) = (r(\phi)\,\cos\phi, r(\phi)\,\sin\phi), \quad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1.$$

Parametriseeritud kõvera kiirusvektor on

$$\overrightarrow{\alpha}'(\phi) = (\alpha(t); r'\,\cos\phi - r\,\sin\phi, r'\,\sin\phi + r\,\cos\phi),$$

kust leiame

$$|\overrightarrow{\alpha}'(\phi)|^2 = (r')^2 + r^2.$$

Järelikult kaarepikkuse valem ristkoordinaatides on

$$s_\alpha = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\phi.$$

1.4 Tasandilise joone kõverus ja evoluut

Antud paragrahvis käsitletakse tasandilise joone kõveruse mõistet. Eelmises paragrahvis on tõestatud, et suvalise regulaarse parametriseeritud kõvera korral leidub selle ühikkiirusega parametriseerimine. Seega parametriseeritud joone kõveruse mõiste uurimist võime alustada eeldades, et joon on parametriseeritud kaarepikkuse abil. Olgu antud ühikkiirusega parametriseeritud kõver $\beta : I \to E^2$, st $|\overrightarrow{\beta}'(s)| = 1,\ \forall s \in I$. Kasutades klassikalise mehaanika lähenemist, võime vaadelda parametriseeritud kõverat β liikuva punkti trajektoorina. Kui punkt liigub piki parametriseeritud kõverat, siis üldiselt kiirusvektori suund muutub ja kiirusvektori suuna muutmise põhjustab joone kõverus. On ilmne, et mida rohkem joon on kõverdunud, seda kiiremini kiirusvektori suund muutub, kui punkt liigub piki joont. Kiirusvektori suuna muutmise kiiruse mõõtmiseks kasutame kiirusvektori tuletise pikkust, st kasutame kiirendusvektori pikkust $|\overrightarrow{\beta}''(s)|$. Ülalpool tehtud eeldus, et parametriseeritud kõver on ühikkiirusega, on tähtis. Tõepoolest sellisel juhul punkti liikumisel piki joont β kiirusvektori $\overrightarrow{\beta}'(s)$ pikkus ei muutu (joone igas punktis $|\overrightarrow{\beta}'(s)| = 1$), järelikult kiirendusvektori pikkus näitab ainult kiirusvektori suuna muutmise kiirust.

Kõverus. Olgu $\beta : I \to E^2$ ühikkiirusega parametriseeritud joon. Tuletame meelde, et kiirendusvektor $\overrightarrow{\beta}''(s)$ on risti kõvera kiirusvektoriga $\overrightarrow{\beta}'(s)$. Järelikult kiirendusvektor $\overrightarrow{\beta}''(s)$ on kollineaarne vektoriga $J(\overrightarrow{\beta}'(s))$, kus J on tasandi E^2 kompleksne struktuur.

Definitsioon 1.4.0.26. Tasandilise parametriseeritud joone *kõveruseks* nimetatakse funktsiooni $\kappa(s)$, mis määratakse tingimusega

$$\overrightarrow{\beta}''(s) = \kappa(s)\, J(\overrightarrow{\beta}'(s)). \tag{1.4.0.14}$$

Lause 1.4.0.27. *Tasandilise parametriseeritud joone kõverus on null parajasti siis, kui parametriseeritud joon on sirge.*

Tõestus. Analüütilises geomeetrias näidatakse, et tasandilise sirge parameetriline vektorvõrrand on $\vec{r}(t) = t\,\vec{a} + \vec{r}_0$, kus $\vec{r}(t)$ on sirge muutuva punkti kohavektor, $\vec{a}$ on sirge sihivektor, $\vec{r}_0$ on sirge mingi fikseeritud punkti kohavektor ja t on parameeter. Märgime, et sirge parametriseerimiseks on mugavam kasutada vektor-funktsiooni $\vec{r}(t)$. Kui sirge sihivektoriks on valitud ühikvektor $\vec{e}$, kus

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

siis vektorvõrrand $\vec{r}(s) = s\,\vec{e} + \vec{r}_0$ on sirge ühikiirusega parametriseerimine. Kehtib

$$\vec{r}'(s) = \vec{e}, \quad \vec{r}''(s) = \vec{0},$$

kust järeldub, et sirge kõverus on null. Nüüd eeldame, et parametriseeritud joone kõverus on null, st $\kappa(s) \equiv 0$ ($\kappa(s) = 0$ suvalise s korral). Parametriseeritud joone kõveruse definitsioonist järeldub, et

$$|\vec{\beta}''(s)| = |\kappa(s)|\,|J(\vec{\beta}'(s))| = |\kappa(s)|,$$

st parametriseeritud joone kõveruse absoluutväärtus on võrdne kiirendusvektori pikkusega. Seega, kui $\kappa(s)$ samaselt võrdub nulliga, siis $|\vec{\beta}''(s)| = 0$, kust järeldub $\vec{\beta}''(s) = \vec{0}$. Kui $y = f(x)$ on harilik reaalväärtustega funktsioon ja selle funkltsiooni teine tuletis võrdub nulliga, siis funktsioon on lineaarne, st $f(x) = a\,x + b$. See kehtib ka vektor-funktsioonide korral. Seega $\vec{\beta}(s) = s\,\vec{e} + \vec{\beta}_0$, kus $\vec{e}, \vec{\beta}_0$ on konstantsed vektorid ja $\vec{e}$ on ühikvektor. Järelikult parametriseeritud joon on sirge. □

Valemiga (1.4.0.14) defineeritud tasandilise joone kõverus on märgiga kõverus. Olgu parametriseeritud joon β ei ole sirge. Kõveruse definitsioonist järeldub, et, kui kiirendusvektor $\overrightarrow{\beta}''$ on samasuunaline vektoriga $J(\overrightarrow{\beta}')$, siis joone kõverus on positiivne ning, kui nad on vastassuunalised vektorid, siis joone kõverus on negatiivne. Kehtib

$$\kappa(s) = \begin{cases} > 0, & \text{kui } \overrightarrow{\beta}'' \uparrow\uparrow J(\overrightarrow{\beta}'), \\ < 0, & \text{kui } \overrightarrow{\beta}'' \uparrow\downarrow J(\overrightarrow{\beta}'). \end{cases}$$

Parametriseeritud joone kõverus on defineeritud tingimusel, et parametriseeritud joon on ühikkiirusega joon. Vaatamata sellele, et eelmises paragrahvis on tõestatud regulaarse parametriseeritud kõvera ühikiirusega ümberparametriseerimise olemasolu, ühikkiirusega ümberparametriseerimise arvutamine on sageli tehiliselt raske. Näiteks ellipsi korral kaarepikkuse funktsioon on elliptiline integraal ja pöördfunktsioni leidmine on raske. Leiame parametriseeritud joone kõveruse arvutamise valemi, kui on antud joone suvaline parametriseerimine.

Olgu antud regulaarne parametriseeritud joon $\alpha : I \to E^2$ ja $[a, b] \subset I$. Eelmises paragrahvis on tõestatud, et leidub parametriseeritud joone $\alpha : [a, b] \to E^2$ ühikiirusega parametriseerimine $\beta : [0, s_\alpha] \to E^2$, kus s_α on parametriseeritud joone pikkus. Olgu $s(t), t \in [a, b]$ parametriseeritud joone α kaarepikkuse funktsioon ja $t = t(s), s \in [0, s_\alpha]$ kaarepikkuse funktsiooni pöördfunktsioon. Parametriseeritud joone $\beta(s)$ kõverust $\kappa(s)$ defineeritakse valemiga

$$\overrightarrow{\beta}''(s) = \kappa(s)\, J(\overrightarrow{\beta}'(s)).$$

Selle võrduse mõlemad pooled skalaarselt korrutame vektoriga $J(\overrightarrow{\beta}'(s))$

$$< \overrightarrow{\beta}''(s), J(\overrightarrow{\beta}'(s)) >= \kappa(s)\, |J(\overrightarrow{\beta}'(s))|^2.$$

Arvestades, et $J(\overrightarrow{\beta}'(s))$ on ühikvektor, saame

$$\kappa(s) =< \overrightarrow{\beta}''(s), J(\overrightarrow{\beta}'(s)) > . \tag{1.4.0.15}$$

Definitsioon 1.4.0.28. Parametriseeritud joone $\alpha(t)$ kõverust $\kappa(t)$ defineeritakse valemiga $\kappa(t) = \kappa(s(t))$.

Kõveruse definitsioonist (1.4.0.28) ja valemist (1.4.0.15) järeldub, et parametriseeritud joone $\alpha(t)$ kõveruse arvutamise valem on

$$\kappa(t) = \kappa(s(t)) =< \overrightarrow{\beta}''(s(t)), J(\overrightarrow{\beta}'(s(t))) > . \tag{1.4.0.16}$$

Selles valemis $\overrightarrow{\beta}''(s(t)), \overrightarrow{\beta}'(s(t))$ on parametriseeritud joone $\beta(s)$ kiirendusvektor ja kiirusvektor (diferentseerimine s järgi), milles s on asendatud kaarepikkuse funktsiooniga $s(t)$. Kehtib $\alpha(t) = \beta(s(t))$, kus $s(t)$ on kaarepikkuse funktsioon. Diferentseerime parameetri t järgi ja kasutame parametriseeritud joone ahelreeglit. Saame

$$\overrightarrow{\alpha}'(t) = s'(t)\,\overrightarrow{\beta}'(s(t)) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{\beta}'(s(t)) = \frac{\overrightarrow{\alpha}'(t)}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|}. \tag{1.4.0.17}$$

Nüüd diferentseerime viimast valemit t järgi

$$s'(t)\,\overrightarrow{\beta}''(s(t)) = \frac{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|\,\overrightarrow{\alpha}''(t) - (|\overrightarrow{\alpha}'(t)|)'\,\overrightarrow{\alpha}'(t))}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^2},$$

kust leiame

$$\overrightarrow{\beta}''(s(t)) = \frac{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|\,\overrightarrow{\alpha}''(t) - (|\overrightarrow{\alpha}'(t)|)'\,\overrightarrow{\alpha}'(t))}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^3}. \tag{1.4.0.18}$$

Märgime, et kehtib

$$J(\overrightarrow{\beta}'(s(t))) = J(\frac{\overrightarrow{\alpha}'(t)}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|}) = \frac{J(\overrightarrow{\alpha}'(t))}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|}.$$

Asendame (1.4.0.17), (1.4.0.18) valemisse (1.4.0.16)

$$\kappa(t) = \frac{< \overrightarrow{\alpha}''(t), J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) > - |\overrightarrow{\alpha}'(t)|^{-1}(|\overrightarrow{\alpha}'(t)|)' \; < \overrightarrow{\alpha}'(t), J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) >}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^3}.$$

Kehtib $\overrightarrow{\alpha}'(t) \perp J(\overrightarrow{\alpha}'(t))$, kust järeldub $< \overrightarrow{\alpha}'(t), J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) >= 0$ ja murru lugeja teine liige võrdub nulliga. Seega

$$\kappa(t) = \frac{< \overrightarrow{\alpha}''(t), J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) >}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^3}. \tag{1.4.0.19}$$

Näide 1.4.0.29. Leiame ellipsi kõveruse. Olgu $a > 0$ ellipsi suurem pooltelg ja $b > 0$ väiksem pooltelg, kus $a > b$. Ellipsi parameetriline võrrand on

$$\alpha(t) = (a\ \cos t, b\ \sin t), \quad I = [0, 2\pi].$$

Ellipsi kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ ja kiirendusvektor $\overrightarrow{\alpha}''(t)$ avalduvad järgmiselt

$$\overrightarrow{\alpha}'(t) = (\alpha(t);\, -a\ \sin t, b\ \cos t), \quad \overrightarrow{\alpha}''(t) = (\alpha(t);\, -a\ \cos t, -b\ \sin t).$$

Seega $J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) = (\alpha(t);\, -b\ \cos t, -a\ \sin t)$ ja

$$< \overrightarrow{\alpha}''(t), J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) = ab.$$

Ellipsi kõverus on antud valemiga

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Uurime ellipsi kõveruse valemit. Kirjutame kõveruse valemi kujul

$$\kappa(t) = \frac{ab}{[(a^2 - b^2)\,\sin^2 t + b^2\,]^{3/2}}.$$

Sellest valemist järeldub, et ellipsi kõveruse väärtus on maksimaalne nendes punktides, kus funktsiooni $\sin t$ väärtus on minimaalne ja kõveruse väärtus on minimaalne nendes punktides, kus funktsiooni $\sin t$ väärtus on maksimaalne. Seega ellipsi tippudes, mis asuvad y-koordinaatteljel ($t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$), kõverus on minimaalne

$$\kappa(\frac{\pi}{2}) = \kappa(\frac{3\pi}{2}) = \frac{b}{a^2},$$

ja ellipsi tippudes, mis asuvad x-koordinaatteljel ($t = 0, \pi$), ellipsi kõverus on maksimaalne

$$\kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{a}{b^2}.$$

Ellipsi kõverus rahuldab võrratust $\frac{b}{a^2} \leq \kappa(t) \leq \frac{a}{b^2}$.

Kui $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, siis

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\alpha}'(t) &= (\alpha(t); x'(t), y'(t)), \quad \overrightarrow{\alpha}''(t) = (\alpha(t); x''(t), y''(t)),\\
J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) &= (\alpha(t); -y'(t), x'(t)), \quad |\overrightarrow{\alpha}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.
\end{aligned}$$

Siit leiame

$$< \overrightarrow{\alpha}''(t), J(\overrightarrow{\alpha}'(t)) = x'(t)\, y''(t) - x''(t) y'(t) = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & x''(t) \end{vmatrix}. \quad (1.4.0.20)$$

Asendades valemisse (1.4.0.19), saame tasandilise parametriseeritud joone kõveruse arvutamise valemi

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t) y'(t)}{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{3/2}}, \quad (1.4.0.21)$$

või

$$\kappa(t) = \frac{1}{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{3/2}} \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & x''(t) \end{vmatrix}. \quad (1.4.0.22)$$

Kooldumisringjoon ja evoluut. Olgu antud parametriseeritud kõver $\alpha : I \to E^2$, kus $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I$. Parametriseeritud kõvera α poolt määratud vektor-funktsioon on $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$. Fikseerime parametriseeritud kõvera α parameetri t ühe väärtuse $t_0 \in I$. Punktis $t = t_0$ kehtib

$$\vec{\alpha}(t) = \vec{\alpha}(t_0) + \Delta\, t \cdot\ \vec{\alpha}'(t_0) + \vec{r}(\Delta\, t),$$

kus

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(\Delta\, t)}{\Delta\, t} = 0.$$

Selle valemi liige $\Delta\, t \cdot\ \vec{\alpha}'(t_0)$ on esimest järku lõpmata väike vektor-funktsioon. Sellega seose öeldakse, et parametriseeritud kõvera kiirusvektor $\vec{\alpha}'(t_0)$ määrab esimest järku puutumist parametriseeritud kõveraga.

Leiame sellise ringjoone, mis läbib parametriseeritud kõvera punkti $\alpha(t_0) = P$ ja määrab teist järku puutumist parametriseeritud kõveraga α. Eeldame, parametriseeritud kõvera α punktis $\alpha(t_0) = P$ kõverus on nullist erinev $\kappa(t_0) \neq 0$. Olgu $C(a, b)$ selle ringjoone keskpunkt ja R ringjoone raadius. Olgu $t_0, t_0 + \Delta\, t \in I$ ja $\alpha(t_0 + \Delta\, t) = Q$ parametriseeritud kõvera punkt. Punktide C, Q läbiva sirge lõikepunkti ringjoonega tähistame K. Lõigu QK pikkus $|QK|$ näitab ringjoone hälbimist (deviatsiooni) parametriseeritud joonest α. Ringjoone teist järku puutumine parametriseeritud kõveraga α punktis P tähendab, et $|QK|$ on vähemalt kolmandat järku lõpmata väike suurus $\Delta\, t$ suhtes, st peab kehtima

$$\lim_{\Delta\, t \to 0} \frac{|KQ|}{(\Delta\, t)^2} = 0. \tag{1.4.0.23}$$

Kehtib $|QK| = |CK| - |CQ|$. Näitame, et $|CK| - |CQ|$ ja $|CK|^2 - |CQ|^2$ on ekvivalentsed lõpmata väikesed suurused, kui $\Delta\, t \to 0$. Tõepoolest

$$\frac{|CK|^2 - |CQ|^2}{|CK| - |CQ|} = \frac{(|CK| + |CQ|)(|CK| - |CQ|)}{|CK| - |CQ|} = |CK| + |CQ|,$$

ja, kui $\Delta\, t \to 0$, siis $K \to P, Q \to P$ ning

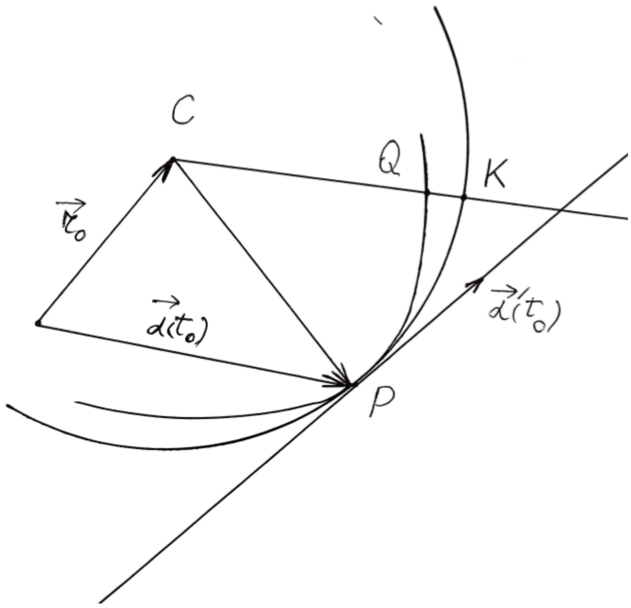
$$\lim_{\Delta\, t \to 0} (|CK| + |CQ|) = 2\, R.$$

Olgu $\vec{r}_0 = (a, b)$ ringjoone keskpunkti kohavektor. Moodustame funktsiooni

$$F(t) = R^2 - |\vec{\alpha}(t) - \vec{r}_0|^2. \tag{1.4.0.24}$$

Funktsiooni $F(t)$ väärtused on võrdsed $|CK|^2 - |CQ|^2$ parametriseeritud kõvera punktides. Näiteks, kui $t = t_0 + \Delta\, t$, siis

$$|\vec{\alpha}(t_0 + \Delta\, t) - \vec{r}_0|^2 = |CQ|^2, \quad |CK|^2 = R^2.$$



Joonis 1.3: Teist järku puutumine

Seega $F(t_0 + \Delta t) = R^2 - |\vec{\alpha}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_0|^2 = |CK|^2 - |CQ|^2$. Kehtib $\vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 = \overrightarrow{CP}$, kust järeldub $|\vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0| = R^2$ ja $F(t_0) = R^2 - R^2 = 0$.

Arendame funktsiooni $F(t)$ astmeritta punktis $t = t_0$

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)\,\Delta t + \frac{1}{2}\,F''(t_0)\,(\Delta t)^2 + O(\Delta t), \qquad (1.4.0.25)$$

kus

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{O(\Delta t)}{(\Delta t)^2} = 0.$$

Eespool näitasime, et $F(t_0) = 0$. Seega teist järku puutumise tingimus (1.4.0.23) on täidetud, kui

$$F'(t_0) = 0, \qquad (1.4.0.26)$$
$$F''(t_0) = 0. \qquad (1.4.0.27)$$

Kasutades vektor-funktsioonide skalaarkorrutise diferentseerimist, leiame funktsiooni $F(t)$ esimese tuletise punktis $t = t_0$

$$F'(t_0) = -2 < \vec{\alpha}'(t_0), \vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 > .$$

Seega esimese võrrandi (1.4.0.26) kuju on järgmine

$$< \vec{\alpha}'(t_0), \vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 > = < \vec{\alpha}'(t_0), \overrightarrow{CP} > = 0.$$

Järelikult $\vec{\alpha}'(t_0) \perp \overrightarrow{CP}$. Seega ringjoone keskpunkt C asub parametriseeritud kõvera normaalil, kus parametriseeritud kõvera normaal on sirge, mis läbib parametriseeritud kõvera punkti ja on risti parametriseeritud kõvera puutujaga.

Arvutame funktsiooni $F(t)$ teise tuletise. Leiame

$$F''(t_0) = -2\big(< \vec{\alpha}''(t_0), \vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 > + |\vec{\alpha}'(t_0)|^2 \big).$$

Seega teist järku puutumise tingimused (1.4.0.26),(1.4.0.27) on samaväärsed võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} < \vec{\alpha}'(t_0), \vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 > & = 0, \\ < \vec{\alpha}''(t_0), \vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 > + |\vec{\alpha}'(t_0)|^2 & = 0, \end{cases}$$

kus ringjoone keskpunkti kohavektor $\vec{r}_0$ on otsitav. Esimese võrrandi võime lahendada järgmiselt

$$\vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0 = \lambda\, J(\vec{\alpha}'(t_0)), \qquad (1.4.0.28)$$

kus λ on mingi nullist erinev arv. Eelmise võrrandi kirjutame kujul

$$\vec{r}_0 = \vec{\alpha}(t_0) + \lambda\, J(\vec{\alpha}'(t_0)),$$

ja kordaja λ leidmiseks asendame võrrandisüsteemi teisse võrrandisse, kus leiame

$$\lambda = \frac{|\vec{\alpha}'(t_0)|^2}{< \vec{\alpha}''(t_0), J(\vec{\alpha}'(t_0)) >}. \qquad (1.4.0.29)$$

Võrrandisüsteemi lahend on leitud

$$\vec{r}_0 = \vec{\alpha}(t_0) + \frac{|\vec{\alpha}'(t_0)|^2}{< \vec{\alpha}''(t_0), J(\vec{\alpha}'(t_0) >} J(\vec{\alpha}'(t_0)). \qquad (1.4.0.30)$$

Uurime leitud ringjoont. Esiteks, kasutades parametriseeritud kõvera kõveruse valemit (1.4.0.20), valemi (1.4.0.29) võime kirjutada kujul

$$\lambda = \frac{1}{\kappa(t_0)|\vec{\alpha}'(t_0)|}. \qquad (1.4.0.31)$$

Ringjoone raadius R on võrdne vektori $\vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0$ pikkusega, seega

$$R = |\vec{\alpha}(t_0) - \vec{r}_0| = |\lambda|\, |J(\vec{\alpha}'(t_0))| = |\lambda|\, |\vec{\alpha}'(t_0)| = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}.$$

Definitsioon 1.4.0.30. Arvu

$$R = \frac{1}{|\kappa(t_0)|}$$

nimetatakse parametriseeritud joone α *kõveruse raadiuseks* joone punktis $\alpha(t_0)$. Ringjoont raadiusega R ja keskpunkti kohavektoriga (1.4.0.30) nimetatakse parametriseeritud kõvera α *kooldumisringjooneks* punktis $\alpha(t_0)$.

Kasutades kõveruse valemit, kirjutame valemi (1.4.0.30) kujul

$$\vec{r}_0 = \vec{\alpha}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} J(\frac{\vec{\alpha}'(t_0)}{|\vec{\alpha}'(t_0)|}). \tag{1.4.0.32}$$

Definitsioon 1.4.0.31. Parametriseeritud kõverat

$$\vec{r}(t) = \vec{\alpha}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} J(\frac{\vec{\alpha}'(t)}{|\vec{\alpha}'(t)|}), \quad t \in I,$$

nimetatakse parametriseeritud kõvera $\alpha : I \to E^2$ *evoluudiks.*

Bartels-Frenet-Serret valemid. Olgu $\alpha : I \to E^2$ parametriseeritud kõver. Kujutust X, mis seab parametriseeritud kõvera igale punktile $\alpha(t)$ vastavusse üheselt määratud seotud vektori punktis $\alpha(t)$, nimetatakse *vektorväljaks piki parametriseeritud kõverat* α. Vektorvälja saab kirjutada kujul $X(t) = (\alpha(t); \xi(t), \eta(t))$, kus $\xi(t), \eta(t)$ on ühemuutuja funktsioonid määramispiirkonnaga I. Funktsioone $\xi(t), \eta(t)$ nimetatakse vektorvälja komponentideks. Kui vektorvälja komponendid on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid, siis vektorvälja nimetatakse lõpmata diferentseeruvaks vektorväljaks. Järgnevas vaatleme ainult lõpmata diferentseeruvaid vektorvälju. Olgu X vektorväli piki parametriseeritud kõverat α. Kui parametriseeritud kõvera suvalises punktis $\alpha(t)$ vektor $X(t)$ on kollineaarne (risti) parametriseeritud kõvera kiirusvektoriga $\overrightarrow{\alpha}'(t)$, siis vektorvälja X nimetatakse puutujavektorväljaks (normaalvektorväljaks) piki parametriseeritud kõverat α. Kui parametriseeritud kõvera suvalises punktis $\alpha(t)$ kehtib $|X(t)| = 1$, siis vektorvälja X nimetatakse ühikvektorväljaks piki parametriseeritud kõverat α.

Olgu X, Y vektorväljad piki parametriseeritud kõverat $\alpha : I \to E^2$, kus $X(t) = (\alpha(t); \xi(t), \eta(t))$ ja $Y(t) = (\alpha(t); \zeta(t), \chi(t))$. Vektorväljade X, Y summa defineerime valemiga

$$(X + Y)(t) = (\alpha(t); \xi(t) + \zeta(t), \eta(t) + \chi(t)). \tag{1.4.0.33}$$

On ilmne, et summa $X+Y$ on (lõpmata diferentseeruv) vektorväli piki parametriseeritud kõverat α. Olgu $f : I \to \mathbb{R}$ lõpmata diferentseeruv funktsioon. Defineerime funktsiooni f ja vektorvälja X korrutist $f \cdot X$ järgmiselt:

$$(f \cdot X)(t) = (\alpha(t); f(t)\,\xi(t), f(t)\,\eta(t)).$$

Korrutis $f \cdot X$ on (lõpmata diferentseeruv) vektorväli piki parametriseeritud kõverat α. Kahe vektorvälja skalaarkorrutist $< X, Y >$ defineeritakse valemiga

$$< X, Y > (t) =< X(t), Y(t) > .$$

Definitsioonist järeldub, et kahe vektorvälja skalaarkorrutis on (lõpmata diferentseeruv) funktsioon (määramispiirkonnaga I).

Vektorvälja X tuletist X' defineeritakse järgmiselt:

$$X'(t) = (\alpha(t); \xi'(t), \eta'(t)).$$

Vektorvälja tuletis on (lõpmata diferentseeruv) vektorväli piki kõverat α. Kehtivad valemid

$$(f \cdot X)' = f' \cdot X + f \cdot X', \qquad (1.4.0.34)$$
$$(< X, Y >)' = < X', Y > + < X, Y' > . \qquad (1.4.0.35)$$

Lause 1.4.0.32. *Kui X on ühikvektorväli piki parametriseeritud kõverat $\alpha : I \to E^2$, siis $X' \perp X$, st parametriseeritud kõvera α suvalises punktis $\alpha(t)$ vektor $X'(t)$ on risti vektoriga $X(t)$.*

Tõestus. X on ühikvektorväli, seega $< X, X >= 1$. Diferentseerides t järgi, saame $< X', X > + < X, X' >= 0$, kust järeldub $X' \perp X$. $\square$

Olgu $\beta : I \to E^2$ ühikkiirusega parametriseeritud kõver. Defineerime vektorvälja T piki kõverat β valemiga $T(s) = \overrightarrow{\beta}\,'(s), s \in I$. T on ühikpuutujavektorväli piki kõverat β. Defineerime vektorvälja N piki kõverat β valemiga $N(s) = J(\overrightarrow{\beta}\,'(s))$. N on ühiknormaalvektorväli piki parametriseeritud kõverat β.

Lause 1.4.0.33. *Kehtivad valemid*

$$T' = \kappa \cdot N, \qquad (1.4.0.36)$$
$$N' = -\kappa \cdot T, \qquad (1.4.0.37)$$

kus κ on parametriseeritud kõvera β kõverus.

Tõestus. Vektorväli T on defineeritud valemiga $T(s) = \overrightarrow{\beta}'(s)$. Diferentseerides s järgi, saame $T'(s) = \overrightarrow{\beta}''(s) = \kappa(s)\, J(\overrightarrow{\beta}'(s)) = \kappa(s)\, N(s)$ ja esimene valem (2.1.0.1) on tõestatud.

Kehtib $T \perp N$. Seega $< T, N >= 0$ ja $(< T, N >)' = 0$. Kasutades valemit (1.4.0.35), saame

$$< T', N > + < T, N' >= 0 \;\Rightarrow < T, N' >= - < T', N > .$$

Kehtib $T' = \kappa \cdot N$ ja, asendades ülalpool tuletatud valemisse, saame

$$< T, N' >= -\kappa. \qquad (1.4.0.38)$$

Lausest (1.4.0.32) järeldub, et $N' \perp N$. Seega $N' || T$, st N' on kollineaarne T. Järelikult leidub funktsioon $f : I \to \mathbb{R}$ nii, et $N' = f \cdot T$. Asendades valemisse (1.4.0.38), saame $f = -\kappa$. Seega $N' = -\kappa \cdot T$ ja teine valem on tõestatud. $\square$

Valemeid (2.1.0.1), (2.1.0.2) nimetatakse *Bartels-Frenet-Serret* valemiteks tasandiliste kõverate korral.

Peatükk 2

Ruumiliste kõverate teooria

2.1 Ruumilise joone kõverus

Antud peatükis geomeetriliseks ruumiks on eukleidiline kolmemõõtmeline ruum E^3. Vabade vektorite kolmemõõtmelist vektorruumi tähistame $\mathbb{E}^3$. Seotud vektorite alguspunktiga punktis $P \in E^3$ kolmemõõtmelist vektorruumi tähistame $T_P E^3$ ja edaspidi nimetame ruumi E^3 puutujarrumiks punktis P. Seega $T_P E^3 = \{\overrightarrow{PQ} : Q \in E^3\}$. Suvalise seotud vektori $\overrightarrow{PQ}$ alguspunktiga punktis P võime kirjutada kujul $\overrightarrow{PQ} = (P; \vec{a})$, kus $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} \in \mathbb{E}^3$ on vaba vektor. Kui seotud vektor on kirjutatud kujul $\overrightarrow{PQ} = (P; \vec{a})$, kus P on selle alguspunkt ja $\vec{a}$ on vaba vektor, siis ütleme, et seotud vektor $\overrightarrow{PQ}$ on vaba vektor $\vec{a}$ rakendatud punktist P ja seotud vektori lõpp-punkti tähistame $P + \vec{a}$, st $Q = P + \vec{a}$. Järgnevas eeldame, et ruumis E^3 on antud parema käe orientatsiooniga ristreeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, mis määrab ristkoordinaadisüsteemi.

Parametriseeritud joone kõverus. Ruumilise parametriseeritud kõvera mõiste on sarnane tasandilise parametriseeritud kõvera mõistega. Parametriseeritud kõveraks ruumis E^3 nimetatakse kujutust $\alpha : I \to E^3$, kus $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ja $x(t), y(t), z(t)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid määramispiirkonnaga I. Parametriseeritud kõvera kiirusvektorit punktis $\alpha(t_0)$ tähistame $\overrightarrow{\alpha}'(t_0)$, kus

$$\overrightarrow{\alpha}'(t_0) = (\alpha(t_0); x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Järgnevas eeldame, et parametriseeritud kõver on regulaarne, st suvalise $t \in I$ korral on täidetud $\overrightarrow{\alpha}'(t) \neq \overrightarrow{0}$. Parametriseeritud kõvera $\alpha : I \to E^3$ ümberparametriseerimiseks funktsiooni h abil nimetatakse parametriseeritud kõverat $\beta : J \to E^3$, kus $\beta = \alpha \circ h$, $h : J \to I, h(J) = I, h'(\tau) \neq 0, \forall \tau \in J$.

Olgu $\alpha : [a,b] \to E^3$ parametriseeritud kõver. Nii, nagu tasandiliste kõverate korral (vt valem (1.3.0.10)), ruumilise parametriseeritud kõvera α pikkust s_α määratakse valemiga

$$s_\alpha = \int_a^b |\overrightarrow{\alpha}'(t)|\, dt.$$

Antud valemi võime kirjutada kujul

$$s_\alpha = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Eelmises peatükis on tõestatud, et parametriseeritud kõvera pikkus ei sõltu parametriseerimisest ja suvalise (regulaarse) parametriseeritud kõvera korral leidub ühikkiirusega ümberparametriseerimine. Need teoreemid kehtivad ka kolmemõõtmelises ruumis E^3, kuna vastavate teoreemide tõestused ei sõltu ruumi dimensioonist.

Olgu $\alpha : I \to E^3$ parametriseeritud kõver. Vektorväli piki kõverat α on kujutus X, mis seab parametriseeritud kõvera α igale punktile $\alpha(t)$ vastavusse üheselt määratud seotud vektori $X(t)$ punktis $\alpha(t)$. Suvalise vektorvälja X piki parametriseeritud kõvera α võime kirjutada kujul $X(t) = (\alpha(t); \xi(t), \eta(t), \zeta(t))$. Edaspidi eeldame, et vektorvälja koordinaatfunktsioonid $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ on lõpmata diferentseeruvad. Tehteid vektorväljadega piki parametriseeritud kõverat α ja vektorväljade tuletist parameetri t järgi defineeritakse nii, nagu see on näidatud eelmises peatükis tasandiliste kõverate korral. Kui X on ühikvektorväli piki ruumilist parametriseeritud kõverat α, siis $X' \perp X$. Antud väide on tõestatud eelmises peatükis tasandiliste joonte korral, kuid tõestuses kehtib suvalise dimensiooniga ruumis ja seega väide kehtib ka ruumis E^3.

Olgu $\beta : I \to E^3$ ühikkiirusega parametriseeritud kõver ruumis E^3.

Definitsioon 2.1.0.34. Parametriseeritud kõvera $\beta(s)$ kõverust $\kappa(s)$ defineeritakse valemiga

$$\kappa(s) = |\overrightarrow{\beta}''(s)|,$$

kus $\overrightarrow{\beta}''(s)$ on parametriseeritud kõvera β kiirendusvektor.

Lause 2.1.0.35. *Olgu $\beta : I \to E^3$ ühikiirusega parametriseeritud kõver. Parametriseeritud kõvera β kõverus samaselt võrdub nulliga $\kappa \equiv 0$ parajasti siis, kui β on sirge ruumis E^3.*

Tõestus on analoogiline tasandiliste kõverate korral antud tõestusega (Lause 1.4.0.27).

Bartels-Frenet-Serret valemid. Olgu $\beta : I \to E^3$ ühikkiirusega parametriseeritud kõver. Vektorvälja T piki parametriseeritud kõverat β määrame valemiga $T(s) = \overrightarrow{\beta}\,'(s)$. Vektorvälja T nimetatakse *puutujavektorväljaks* piki parametriseeritud kõverat β. On ilmne, et puutujavektorväli T on ühikvektorväli piki parametriseeritud kõverat β, st $|T(s)| = 1, \forall s \in I$. Vektorvälja T tuletis on vektorväli T' (piki parametriseeritud kõverat β) ja T' on risti vektorväljaga T. Suvalise $s \in I$ korral kehtib $|T'(s)| = \kappa(s)$.

Oletame, et parametriseeritud kõvera β suvalises punktis kõverus on nullist erinev, st kehtib $\kappa(s) \neq 0$ suvalise $s \in I$ korral. Defineerime vektorvälja N piki parametriseeritud kõverat β järgmiselt:

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\,T'(s).$$

Vektorvälja N nimetatakse *peanormaalvektorväljaks* piki parametriseeritud kõverat β. Peanormaalvektorväli N on ühikvektorväli $|N(s)| = 1, \forall s \in I$, ja ta on risti puutujavektorväljaga T, st $N(s) \perp T(s)$ suvalise $s \in I$ korral.

Puutujavektorväli T määrab parametriseeritud kõvera β igas punktis $\beta(s)$ seotud vektorit $T(s)$ (parametriseeritud kõvera β kiirusvektor) ja peanormaalvektorväli N määrab parametriseeritud kõvera β igas punktis $\beta(s)$ seotud vektorit $N(s)$. Moodustame seotud vektorite $T(s)$ ja $N(s)$ vektorkorrutise $B(s) = T(s) \times N(s)$, kus $B(s)$ on seotud vektor alguspunktiga parametriseeritud kõvera β punktis $\beta(s)$. Nüüd parametriseeritud kõvera β igas punktis $\beta(s)$ on määratud seotud vektor $B(s)$, seega B on vektorväli piki parametriseeritud kõverat β. Vektorvälja B nimetatakse *binormaalvektorväljaks* piki parametriseeritud kõverat β. Binormaalvektorväli B on ühikvektorväli piki kõverat β ja $B \perp T,\ B \perp N$. Tõepoolest vektorkorrutise definitsioonist järeldub, et suvalise $s \in I$ korral $B(s) \perp T(s), B(s) \perp N(s)$ ja

$$|B(s)| = |T(s)|\,|N(s)|\,\sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Vektorväljad T, N, B moodustavad parametriseeritud kõvera β igas punktis $\beta(s)$ parema käe orientatsiooniga ristreeperi $\{T(s), N(s), B(s)\}$.

Definitsioon 2.1.0.36. Kolmikut $\{T, N, B\}$ nimetatakse *Bartels-Frenet-Serret reeperväljaks piki parametriseeritud kõverat β.*

Teoreem 2.1.0.37. *Olgu $\beta : I \to E^3$ ühikiirusega parametriseeritud kõver ja $\kappa(s) > 0, \forall s \in I$. Kehtivad valemid*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa \cdot N, && (2.1.0.1)\\ N' &= -\kappa \cdot T + \tau \cdot B, && (2.1.0.2)\\ B' &= -\tau \cdot N, && (2.1.0.3) \end{aligned}$$

kus funktsiooni $\tau : I \to \mathbb{R}$ nimetatakse parametriseeritud kõvera β väändeks. Valemeid (2.1.0.1),(2.1.0.2),(2.1.0.3) nimetatakse Bartels-Frenet-Serret valemiteks.

Tõestus. Analüütilises geomeetrias näidatakse, et, kui kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 on antud ristreeper $\{O; \vec{e}, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, siis suvalise vektori $\vec{a}$ koordinaatide a_1, a_2, a_3 arvutamiseks võime kasutada valemit

$$a_1 =< \vec{a}, \vec{e}_1 >,\ a_2 =< \vec{a}, \vec{e}_2 >,\ a_3 =< \vec{a}, \vec{e}_3 > .$$

Seega suvalise vektori $\vec{a}$ korral kehtib valem

$$\vec{a} =< \vec{a}, \vec{e}_1 > \vec{e}_1 + < \vec{a}, \vec{e}_2 > \vec{e}_2 + < \vec{a}, \vec{e}_3 > \vec{e}_3. \qquad (2.1.0.4)$$

Analoogiline valem kehtib vektorväljade korral. Olgu X suvaline vektorväli piki parametriseeritud kõverat β. Parametriseeritud kõvera β igas punktis $\beta(s)$ vektorväljad T, N, B moodustavad ristreeperi $T(s), N(s), B(s)$. Seega kehtib valemiga (2.1.0.4) analoogiline valem

$$X =< X, T > \cdot T + < X, N > \cdot N + < X, B > \cdot B. \qquad (2.1.0.5)$$

Kui selles valemis $X = T'$, siis

$$T' =< T', T > \cdot T + < T', N > \cdot N + < T', B > \cdot B. \qquad (2.1.0.6)$$

Puutujavektorväli T on ühikvektorväli, järelikult $T' \perp T$ ja $< T', T >= 0$. Seega valemi (2.1.0.6) esimene liige võrdub nulliga. Teise liikme kordaja leidmiseks kasutame peanormaalvektorvälja definitsiooni $N = \frac{1}{\kappa} \cdot T'$. Seega

$$< T', N >=< T', \frac{1}{\kappa} \cdot T' >= \frac{1}{\kappa}\, |T'|^2 = \frac{1}{\kappa} |\overrightarrow{\beta}\,''|^2 = \frac{1}{\kappa}\, \kappa^2 = \kappa.$$

Peanormaalvektorvälja N definitsioonist järeldub, et N on kollineaarne vektorväljaga T'. Binormaalvektorväli B on risti peanormaalvektorväljaga N, seega B on risti vektorväljaga T', kust järeldub $< T', B >= 0$ ja valemi (2.1.0.6) viimane liige on null. Seega

$$T' = \kappa \cdot N,$$

ja Bartels-Frenet-Serret esimene valem on tõestatud.

Olgu nüüd valemis (2.1.0.5) $X = N'$, st

$$N' =< N', T > \cdot T + < N', N > \cdot N + < N', B > \cdot B. \qquad (2.1.0.7)$$

Kehtib $< N, T >= 0$. Diferentseerides antud valemit, saame $< N', T >= - < N, T' >$. Mainime, et analoogiliselt näidatakse, et kehtivad valemid

$$< N', B >= - < N, B' >, < B', T >= - < B, T' > .$$

Kasutades tõestatud valemit $T' = \kappa \cdot N$, leiame

$$< N', T >= - < N, T' >= - < N, \kappa \cdot N >= -\kappa \, |N|^2 = -\kappa.$$

Valemi teise liikme kordaja $< N', N >$ võrdub nulliga selle pärast, et N on ühikvektorväli ja $N' \perp N$. Valemi (2.1.0.7) kolmanda liikme kordajat $< N', B >$ tähistame τ, st $\tau =< N', B >$. Seega

$$N' = -\kappa \cdot T + \tau \cdot B,$$

ja teine Bartels-Frenet-Serret valem on tõestatud.

Kui valemis (2.1.0.5) $X = B'$, siis

$$B' =< B', T > \cdot T + < B', N > \cdot N + < B', B > \cdot B.$$

Kolmas liige võrdub nulliga selle pärast, et binormaalvektorväli B on ühikvektorväli ja $B' \perp B$. Näitame, et esimene liige on null. Tõepoolest kehtib

$$< B', T >= - < B, T' >= - < B, \kappa \cdot N >= -\kappa < B, N >= 0.$$

Kordaja $< B', N >$ arvutame järgmiselt:

$$< B', N >= - < B, N' >= - < B, -\kappa \cdot T + \tau \cdot B >= -\tau \, |B|^2 = -\tau.$$

Järelikult

$$B' = -\tau \cdot N. \square$$

Bartels-Frenet-Serret üldistatud valemid. Olgu $\alpha : I \to E^3$ parametriseeritud joon ja $\beta : J \to E^3$ selle parametriseeritud joone ühikkiirusega parametriseerimine, kus $\alpha(t) = \beta(s(t))$ ning $s : J \to I$ parametriseeritud joone α kaarepikkuse funktsioon. Kehtib $s'(t) = |\overrightarrow{\alpha}'(t)|$. Olgu $\kappa_\beta(s), \tau_\beta(s)$ parametriseeritud joone β kõverus ja vääne. Olgu $\kappa_\beta(s)$ ühikkiirusega parametriseeritud joone β kõverusefunktsioon ja $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ parametriseeritud joone β Bartels-Frenet-Serret reepervälja vektorväljad.

Definitsioon 2.1.0.38. Parametriseeritud joone $\alpha : I \to E^3$ kõveruseks nimetatakse $\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s(t))$ ja väändeks $\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(\beta(s(t)))$. Puutujavektorväljaks T_α piki parametriseeritud joont α nimetatakse vektorvälja $T_\alpha(t) =$

$T_\beta(s(t))$. Peanormaalvektorväljaks N_α piki parametriseeritud joont α nimetatakse vektorvälja $N_\alpha(t) = N_\beta(s(t))$. Binormaalvektorväljaks B_α piki parametriseeritud joont α nimetatakse vektorvälja $B_\alpha(t) = B_\beta(s(t))$. Kolmikut $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ nimetatakse Bartels-Frenet-Serret reeperväljaks piki parametriseeritud joont α.

Definitsioonist järeldub, et kõik vektorväljad $T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha$ on ühikvektorväljad, nad on paarikaupa risti ja vektorväljade kolmik $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ on parema käe orientatsiooniga.

Teoreem 2.1.0.39. *Olgu funktsioon $v : I \to \mathbb{R}$ määratud valemiga $v(t) = |\overrightarrow{\alpha}'(t)|$. Kehtivad valemid*

$$\begin{aligned} T'_\alpha &= v\,\kappa_\alpha \cdot N_\alpha, && (2.1.0.8)\\ N'_\alpha &= -v\,\kappa_\alpha \cdot T_\alpha + v\,\tau_\alpha \cdot B_\alpha, && (2.1.0.9)\\ B'_\alpha &= -v\,\tau_\alpha \cdot N_\alpha. && (2.1.0.10) \end{aligned}$$

Valemeid (2.1.0.8),(2.1.0.9),(2.1.0.10) nimetatakse üldistatud Bartels-Frenet-Serret valemiteks.

Tõestus. Kasutame puutujavektorvälja T_α definitsiooni $T_\alpha(t) = T_\beta(s(t))$. Vektorvälja piki joont korral kehtib ahelreegel, seega diferentseerides t järgi, saame

$$T'_\alpha(t) = \big(T_\beta(s(t))\big)' = s'(t)\,T'_\beta(s)\big|_{s=s(t)}.$$

Kehtib $s'(t) = |\overrightarrow{\alpha}'(t)| = v(t)$. Kasutame Bartels-Frenet-Serret esimest valemit (2.1.0.1)

$$T'_\beta(s)\big|_{s=s(t)} = \big(\kappa_\beta(s) \cdot N_\beta(s)\big)\big|_{s=s(t)} = \kappa_\alpha(t) \cdot N_\alpha(t),$$

kust järeldub üldistatud Bartels-Frenet-Serret esimene valem. Ülejäänud valemite tõestus on analoogiline. □

Lemma 2.1.0.40. *Olgu $\alpha : I \to E^3$ regulaarne parametriseeritud joon. Kehtivad valemid*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\alpha}' &= v \cdot T_\alpha, && (2.1.0.11)\\ \overrightarrow{\alpha}'' &= v' \cdot T_\alpha + v^2\,\kappa_\alpha \cdot N_\alpha. && (2.1.0.12) \end{aligned}$$

Tõestus. Kehtib $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Kasutades ahelreeglit, saame

$$\overrightarrow{\alpha}'(t) = s'(t)\,\overrightarrow{\beta}'(s)\big|_{s=s(t)} = v(t)\,T_\beta(s)\big|_{s=s(t)} = v(t)\,T_\alpha(t).$$

Diferentseerides tuletatud valemit t järgi ja kasutades üldistatud Bartels-Frenet-Serret esimest valemit (2.1.0.8), saame

$$\overrightarrow{\alpha}''(t) = v'(t)\,T_\alpha(t) + v(t)\,T'_\alpha(t) = v'(t)\,T_\alpha(t) + (v(t))^2\,\kappa_\alpha(t)\,N_\alpha(t). \quad \square$$

Teoreem 2.1.0.41. *Olgu $\alpha : I \to E^3$ regulaarne parametriseeritud joon ja suvalise $t \in I$ korral $\kappa_\alpha(t) > 0$. Kehtivad parametriseeritud joone α Bartels-Frenet-Serret reepervälja $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ arvutamise valemid*

$$T_\alpha = \frac{\overrightarrow{\alpha}'}{|\overrightarrow{\alpha}'|}, \qquad N_\alpha = B_\alpha \times T_\alpha, \qquad B_\alpha = \frac{\overrightarrow{\alpha}' \times \overrightarrow{\alpha}''}{|\overrightarrow{\alpha}' \times \overrightarrow{\alpha}''|},$$

ja kõveruse κ_α ja väände τ_α arvutamise valemid

$$\kappa_\alpha = \frac{|\overrightarrow{\alpha}' \times \overrightarrow{\alpha}''|}{|\overrightarrow{\alpha}'|^3}, \qquad \tau_\alpha = \frac{(\overrightarrow{\alpha}', \overrightarrow{\alpha}'', \overrightarrow{\alpha}''')}{|\overrightarrow{\alpha}' \times \overrightarrow{\alpha}''|^2},$$

kus $(\overrightarrow{\alpha}', \overrightarrow{\alpha}'', \overrightarrow{\alpha}''')$ on vektorite segakorrutis.

Osa II

Pinnateooria

Peatükk 3

Vektorväljad

3.1 Vektorväljad

Antud paragrahvis vaatleme eukleidilist ruumi E^n, kus $n = 2$ (ruumi E^2 nimetame tasandiks) või $n = 3$ (E^3 nimetame kolmemõõtmeliseks ruumiks). Eukleidilise ruumiga E^n assotsieerub vabade vektorite vektorruum $\mathbb{E}^n$. Eukleidilises ruumis E^n on antud ristreeper $\{o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, kus $o \in E^n$ on reeperi alguspunkt ja vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ moodustavad eukleidilise vektorruumi $\mathbb{E}^n$ ortonormeeritud baasi. Ristreeper tekitab ruumis E^n koordinaadisüsteemi järgmiselt: kui $p \in E^n$ on eukleidilise ruumi suvaline punkt, siis selle kohavektor $\overrightarrow{op}$ on esitatav kujul $\overrightarrow{op} = p^1\vec{e}_1 + p^2\vec{e}_2 + \ldots + p^n\vec{e}_n$ ja kordajaid $p^1, p^2, \ldots, p^n$ nimetatakse punkti p koordinaatideks. Reeperi poolt tekitatud koordinaadisüsteemi koordinaadid tähistame $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Juhul, kui eukleidiline ruum on tasand E^2, koordinaadid tähistame $x = x^1, y = x^2$ ja kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 tähistame $x = x^1, y = x^2, z = x^3$.

Olgu $U \subset E^n$ lahtine alamhulk. Lõpmata diferentseeruvate (siledate) funktsioonide määramispiirkonnaga U hulka tähistame $C^\infty(U)$.

Definitsioon 3.1.0.42. Kujutust $\mathtt{X} : p \mapsto T_pE^n$, mis seab hulga U igale punktile p vastavusse üheselt määratud seotud vektori $\mathtt{X}_p = (p; \vec{v}) \in T_pE^n$, kus $\vec{v} \in \mathbb{E}^n$, nimetatakse *vektorväljaks* hulgal U.

Kui $\mathtt{X}, \mathtt{Y}$ on vektorväljad hulgal U ja λ on reaalarv, siis vektorväljade summaks nimetatakse vektorvälja $\mathtt{X} + \mathtt{Y}$, kus suvalises punktis $p \in U$

$$(\mathtt{X} + \mathtt{Y})_p = \mathtt{X}_p + \mathtt{Y}_p, \tag{3.1.0.1}$$

ja vektorvälja $\mathtt{X}$ korrutiseks reaalarvuga λ nimetatakse vektorvälja $\lambda\,\mathtt{X}$, kus

$$(\lambda\,\mathtt{X})_p = \lambda\,\mathtt{X}_p. \tag{3.1.0.2}$$

Olgu $f : U \to \mathbb{R}$ mingi funktsioon määramispiirkonnaga U. Vektorvälja $\mathtt{X}$ korrutist funktsiooniga f defineerime valemiga

$$(f\,\mathtt{X})_p = f(p)\,\mathtt{X}_p. \tag{3.1.0.3}$$

On ilmne, et $f\,\mathtt{X}$ on vektorväli. On lihtne kontrollida, et korrutamisel funktsioonidega on järgmised omadused:

1. $f\,(\mathtt{X} + \mathtt{Y}) = f\,\mathtt{X} + f\,\mathtt{Y}$,
2. $(f + g)\,\mathtt{X} = f\,\mathtt{X} + g\,\mathtt{X}$,
3. $(fg)\,\mathtt{X} = f\,(g\,\mathtt{X})$.

Eukleidilise ruumi E^n suvalises punktis p on määratud seotud vektor $(p; \vec{e_i})$, kus $i = 1, 2, \ldots, n$. Seega kujutus $p \mapsto (p; \vec{e_i})$ määrab vektorvälja ja vastavat vektorvälja tähistame $\mathtt{U}_i$. Kehtib $(\mathtt{U}_i)_p = (p; \vec{e_i})$. Olgu $\mathtt{X}$ mingi vektorväli hulgal U ja seotud vektor $(p; \vec{v})$ vektorvälja $\mathtt{X}$ väärtus $\mathtt{X}_p$ punktis p, st $X_p = (p; \vec{v})$. Vaba vektori $\vec{v}$ võime kirjutada kujul

$$\vec{v} = v^1\,\vec{e}_1 + v^2\,\vec{e}_2 + \ldots + v^n\,\vec{e}_n,$$

kus $v^1, v^2, \ldots, v^n$ on vektori $\vec{v}$ koordinaadid. Seega

$$\begin{aligned} \mathtt{X}_p &= (p; v^1\,\vec{e}_1 + v^2\,\vec{e}_2 + \ldots + v^n\,\vec{e}_n) \\ &= v^1\,(p; \vec{e}_1) + v^2\,(p : \vec{e}_2) + \ldots + v^n\,(p; \vec{e}_n) \\ &= v^1\,(\mathtt{U}_1)_p + v^2\,(\mathtt{U}_2)_p + \ldots + v^n\,(\mathtt{U}_n)_p \end{aligned} \tag{3.1.0.4}$$

Vektorvälja definitsioonist järeldub, et kordajad v^i avaldises (3.1.0.4) sõltuvad hulga U punktist p (või selle koordinaatidest). Järelikult hulgal U on määratud n funktsiooni $X^1, X^2, \ldots, X^n$ ja nende funktsioonide väärtused punktis p on kordajad $v^1, v^2, \ldots, v^n$, st

$$X^1(p) = v^1,\; X^2(p) = v^2,\; \ldots\; X^n(p) = v^n.$$

Valemi (3.1.0.4) võime kirjutada kujul

$$\mathtt{X}_p = X^1(p)\,(\mathtt{U}_1)_p + X^2(p)\,(\mathtt{U}_2)_p + \ldots + X^n(p)\,(\mathtt{U}_n)_p,$$

ja sellest valemist järeldub

$$\mathtt{X} = X^1\,\mathtt{U}_1 + X^2\,\mathtt{U}_2 + \ldots + X^n\,\mathtt{U}_n, \tag{3.1.0.5}$$

kus korrutis $X^i\,\mathtt{U}_i$ on defineeritud valemis (3.1.0.3). Valem (3.1.0.5) näitab, et suvaline vektorväli $\mathtt{X}$ hulgal U on määratud n funktsiooniga $X^1, X^2, \ldots, X^n$, kus iga funktsiooni X^i määramispiirkond on U ehk $X^i : U \to \mathbb{R}$. Funktsioone $X^1, X^2, \ldots, X^n$ nimetatakse vektorvälja komponentideks. Vektorvälja $\mathtt{X}$ nimetatakse lõpmata diferentseeruvaks või siledaks vektorväljaks, kui selle komponendid on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid. Järgnevas vaatleme ainult siledaid vektorvälju. Siledate vektorväljade (hulgal U) hulka tähistame $\mathfrak{D}(U)$. On lihtne näidata, et $\mathfrak{D}(U)$ on vektorruum üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ vektorväljade liitmise (3.1.0.1) ja korrutamise reaalarvuga (3.1.0.2) suhtes.

Definitsioon 3.1.0.43. Vektorväljade süsteemi $\{\mathtt{E}_1, \mathtt{E}_2, \ldots, \mathtt{E}_n\}$, kus $\mathtt{E}_i \in \mathfrak{D}(U)$, nimetatakse *reeperväljaks* hulgal U, kui U suvalises punktis $p \in U$ seotud vektorid $(\mathtt{E}_1)_p, (\mathtt{E}_2)_p, \ldots, (\mathtt{E}_n)_p$ moodustavad ruumi E^n puutujaruumi T_pE^n baasi.

Kui $\{\mathtt{E}_1, \mathtt{E}_2, \ldots, \mathtt{E}_n\}$ on reeperväli hulgal U, siis suvalise vektorvälja $X|in\mathfrak{D}(U)$ võime kirjutada kujul

$$X = X^1\, E_1 + X^2\, E_2 + \ldots + X^n\, E_n.$$

On ilmne, et $\{\mathtt{U}_1, \mathtt{U}_2, \ldots, \mathtt{U}_n\}$ on ruumi E^n reeperväli ja antud reepervälja nimetatakse ruumi E^n *kanooniliseks reeperväljaks.*

Definitsioon 3.1.0.44. Olgu $f \in C^\infty(U)$. *Funktsiooni gradiendiks* nimetatakse vektorvälja

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\, \mathtt{U}_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\, \mathtt{U}_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\, \mathtt{U}_n.$$

On ilmne, et lõpmata diferentseeruva funktsiooni korral gradient on lõpmata diferentseeruv ehk sile vektorväli, st $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{D}(U)$. Gradiendi väärtus mingis punktis $p \in U$ on seotud vektor alguspunktiga puntis p

$$(\operatorname{grad} f)_p = (p; \frac{\partial f}{\partial x^1}\Big|_p, \frac{\partial f}{\partial x^2}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_p).$$

3.2 Kovariantne tuletis

Funktsiooni suunatuletis. Olgu $U \subset E^n$ lahtine alamhulk ruumis E^n, $f \in C^\infty(U)$, $p \in U$ ja $\overrightarrow{v} = (p; \vec{v}) \in T_pE^n$, kus $\vec{v} = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$. Vektor $\vec{v}$ määrab sirget $\alpha(t) = p + t\,\vec{v}$, kus $\vec{v}$ on selle sirge sihivektor. Sirge α läbib punkti p. Tõepoolest, kui $t = 0$, siis $\alpha(0) = p$. Selle sirge parameetriline võrrand on $\alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$, kus $x^i(t) = p^i + t\,v^i$ ja $p^1, p^2, \ldots, p^n$ on punkti p koordinaadid.

Definitsioon 3.2.0.45. Funktsiooni *suunatuletiseks* punktis p seotud vektori $\vec{v}$ suunas nimetatakse arvu

$$\vec{v}[f] = \frac{d}{dt}\big(f(p + t\,\vec{v})\big)\big|_{t=0}.$$

Kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise valemit, leiame

$$\vec{v}[f] = \frac{d}{dt}\big(f(p + t\,\vec{v})\big)\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p \frac{d}{dt}(p^i + t\,v^i)\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p\, v^i.$$

Järelikult

$$\vec{v}[f] =< (\mathrm{grad}\, f)_p, \vec{v} > . \qquad (3.2.0.6)$$

Funktsiooni suunatuletisel on järgmised omadused:

i) $\vec{v}[a\,f + b\,g] = a\,\vec{v}[f] + b\,\vec{v}[g]$, kus $f, g \in C^\infty(U)$ ja $a, b \in \mathbb{R}$;

ii) $\vec{v}[f \cdot g] = \vec{v}[f]\,g(p) + f(p)\vec{v}[g]$.

Olgu $\mathtt{X}$ sile vektorväli hulgal U. Vektorväli $\mathtt{X}$ hulga U suvalises punktis p määrab seotud vektorit $\mathtt{X}_p \in T_pE^n$. Seega, kui $f : U \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon, siis hulga U igas punktis on määratud arv $\mathtt{X}_p[f]$, st hulgal U on määratud funktsioon $\mathtt{X}[f]$, mille väärtus punktis p on $\mathtt{X}_p[f]$. Valemist (3.2.0.6) järeldub, et kehtib valem

$$\mathtt{X}[f] =< \mathtt{X}, \mathrm{grad}\, f > . \qquad (3.2.0.7)$$

Kahe sileda vektorvälja skalaarkorrutis on sile funktsioon ja valemist (3.2.0.7) järeldub, et $\mathtt{X}[f]$ on sile funktsioon. Seega vektorväli $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$ määrab siledate funktsioonide algebra $C^\infty(U)$ teisendust $\mathtt{X} : f \mapsto \mathtt{X}[f]$ ja suunatuletise esimesest omadusest järeldub, et vektorvälja poolt määratud teisendus on vektorruumi C^∞ lineaarteisendus. Suunatuletise teisest omadusest järeldub

$$\mathtt{X}[f \cdot g] = [f] \cdot g + f \cdot \mathtt{X}[g]. \qquad (3.2.0.8)$$

Algebra lineaarteisendust, mis rahuldab tingimust (3.2.0.8), nimetatakse algebra *derivatsiooniks*. Järelikult iga vektorväli $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$ määrab funktsioonide algebra $C^\infty(U)$ derivatsiooni ja järgnevas vektorvälja vaatleme, kui funktsioonide algebra derivatsiooni. Valemist (3.2.0.7) vahetult järeldub, et kanoonilise reepervälja vektorväljade $\mathtt{U}_i$ korral kehtib valem

$$\mathtt{U}_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

kus f on suvaline sile funktsioon. Järelikult, kui vaatleme vektorvälja $\mathtt{U}_i$ funktsioonide algebra derivatsioonina, siis võime kirjutada

$$\mathtt{U}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.2.0.9}$$

Järelikult suvalise funktsiooni korral kehtib

$$\mathtt{U}_i[f] = \frac{\partial}{\partial x^i}[f] = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Suvaline vektorväli $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$ on esitatav kujul

$$\mathtt{X} = X^1\,\mathtt{U}_1 + X^2\,\mathtt{U}_2 + \ldots + X^n\,\mathtt{U}_n.$$

Kasutades valemit (3.2.0.9), antud valemi võime kirjutada kujul

$$\mathtt{X} = X^1\,\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2\,\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + X^n\,\frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{3.2.0.10}$$

Suvalise funktsiooni $f \in C^\infty(U)$ korral kehtib

$$\mathtt{X}[f] = X^1\,\frac{\partial f}{\partial x^1} + X^2\,\frac{\partial f}{\partial x^2} + \ldots + X^n\,\frac{\partial f}{\partial x^n} =< \mathtt{X}, \mathrm{grad}\, f >, \tag{3.2.0.11}$$

ja saime veel kord enne tuletatud valemi (3.2.0.7).

Vektorvälja kovariantne tuletis. Olgu $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$ vektorväli hulgal U, $p \in U$ mingi punkt, $\overrightarrow{v} = (p; \vec{v}) \in T_pE^n$ seotud vektor alguspunktiga punktis p. Olgu $\alpha(t) = p + t\,\vec{v}$ sirge, mis läbib punkti p ja $\vec{v}$ on selle sirge sihivektor. Kui vektorvälja $\mathtt{X}$ ahendame sirgele α, siis $\mathtt{X}(t) = \mathtt{X}(\alpha(t))$ on vektorväli piki sirget α.

Definitsioon 3.2.0.46. Vektorvälja $\mathtt{X}$ *kovariantseks tuletiseks* punktis p nimetatakse seotud vektorit $\nabla_v\,\mathtt{X} \in T_pE^n$ punktis p, kus

$$\nabla_v\,\mathtt{X} = \mathtt{X}'(t)\big|_{t=0} = \mathtt{X}'(p + t\,\vec{v})\big|_{t=0}.$$

Olgu $\mathtt{X} = X^1\,\mathtt{U}_1 + X^2\,\mathtt{U}_2 + \ldots + X^n\,\mathtt{U}_n$. Kehtib

$$\mathtt{X}(t) = \mathtt{X}(\alpha(t)) = (\alpha(t); X^1(\alpha(t)), X^2(\alpha(t)), \ldots, X^n(\alpha(t))).$$

Kasutame vektorvälja piki joont tuletise definitsiooni

$$\nabla_v\,\mathtt{X} = \mathtt{X}'(t)\big|_{t=0} = \Big(p; \frac{d}{dt}X^1(\alpha(t))\big|_{t=0}, \ldots, \frac{d}{dt}X^n(\alpha(t))\big|_{t=0}\Big).$$

Kui nüüd kasutame funktsiooni suunatuletise definitsiooni, siis näeme, et vektorvälja $\mathtt{X}$ komponentide $X^1, X^2, \ldots, X^n$ tuletised t järgi punktis $t = 0$ on vastavate funktsioonide $X^1, X^2, \ldots, X^n$ suunatuletised punktis p seotud vektori $\overrightarrow{v}$ suunas. Tõepoolest

$$\frac{d}{dt}X^i(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}X^i(p + t\,\vec{v})\Big|_{t=0} = \overrightarrow{v}[X^i].$$

Järelikult võime kirjutada

$$\nabla_v\,\mathtt{X} = (p; \overrightarrow{v}[X^1], \overrightarrow{v}[X^2], \ldots, \overrightarrow{v}[X^n]). \tag{3.2.0.12}$$

Kasutades suunatuletise valemit (3.2.0.6), eelmise valemi võime kirjutada kujul

$$\nabla_v\,\mathtt{X} = (p; <\overrightarrow{v}, (\mathrm{grad}\,X^1)_p>, \ldots, <\overrightarrow{v}, (\mathrm{grad}\,X^n)_p>). \tag{3.2.0.13}$$

Kovariantsel tuletisel on järgmised omadused:

i) kui $a, b \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in T_pE^n$ ja $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$, siis kehtib

$$\nabla_{av+bw}\,\mathtt{X} = a\,\nabla_v\,\mathtt{X} + b\,\nabla_w\,\mathtt{X},$$

ii) kui $a, b \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{v} \in T_pE^n$, $\mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \mathfrak{D}(U)$, siis kehtib

$$\nabla_v(a\cdot\mathtt{X} + b\cdot\mathtt{Y}) = a\cdot\nabla_v\,\mathtt{X} + b\cdot\nabla_v\,\mathtt{Y},$$

iii) kui $f \in C^\infty(U), \mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U), \overrightarrow{v} \in T_pE^n$, siis kehtib

$$\nabla_v(f\cdot\mathtt{X}) = \overrightarrow{v}[f]\,\mathtt{X}_p + f(p)\,\nabla_v\,\mathtt{X},$$

iv) kui $\overrightarrow{v} \in T_pE^n, \mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \mathfrak{D}(U)$, siis kehtib

$$v[<\mathtt{X}, \mathtt{Y}>] = <\nabla_v\,\mathtt{X}, \mathtt{Y}_p> + <\mathtt{X}_p, \nabla_v\,\mathtt{Y}>.$$

Kovariantse tuletise omadused saab tõestada kasutades suunatuletise omadusi ja valemeid (3.2.0.12),(3.2.0.13).

Olgu $\mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \mathfrak{D}(U)$ vektorväljad. Vektorväli $\mathtt{X}$ alamhulga U igas punktis p määrab seotud vektorit $\mathtt{X}_p \in T_pE^n$ ja vektorvälja $\mathtt{Y}$ kovariantne tuletis $\nabla_{\mathtt{X}_p}\mathtt{Y}$ punktis p seotud vektori $\mathtt{X}_p$ suunas on seotud vektor punktis p. Järelikult kovariantne tuletis määrab kujutust $p \in U \mapsto \nabla_{\mathtt{X}_p}\mathtt{Y} \in T_pE^n$ ja definitsioni kohaselt see on vektorväli hulgal U. Vastavat vektorvälja tähistame $\nabla_{\mathtt{X}}\mathtt{Y}$ ja edaspidi nimetame *vektorvälja* $\mathtt{Y}$ *kovariantseks tuletiseks vektorvälja* $\mathtt{X}$ *järgi.*

Kovariantse tuletise omadused i) - iv) kehtivad ka vektorväljade korral:

1) kui $f, g \in C^\infty(U)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{D}(U)$, siis kehtib

$$\nabla_{f\cdot \mathtt{X}+g\cdot \mathtt{Y}}\,\mathtt{Z} = f\cdot \nabla_{\mathtt{X}}\,\mathtt{Z} + g\cdot \nabla_{\mathtt{Y}}\,\mathtt{Z},$$

2) suvaliste reaalarvude a, b ja suvaliste vektorväljade $\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}$ korral kehtib

$$\nabla_{\mathtt{X}}(a\cdot \mathtt{Y} + b\cdot \mathtt{Z}) = a\cdot \nabla_{\mathtt{X}}\,\mathtt{Y} + b\cdot \nabla_{\mathtt{X}}\,\mathtt{Z},$$

3) kui $f \in C^\infty(U)$ ja $\mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \mathfrak{D}(U)$, siis kehtib

$$\nabla_{\mathtt{X}}\,(f\cdot \mathtt{X}) = \mathtt{X}[f]\cdot \mathtt{Y} + f\cdot \nabla_{\mathtt{X}}\,\mathtt{Y},$$

4) suvaliste vektorväljade $\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}$ korral kehtib

$$\mathtt{X}[<\mathtt{Y}, \mathtt{Z}>] = <\nabla_{\mathtt{X}}\,\mathtt{Y}, \mathtt{Z}> + <\mathtt{Y}, \nabla_{\mathtt{X}}\,\mathtt{Z}> .$$

Märgime, et valemid (3.2.0.12), (3.2.0.13) kehtivad hulga U igas punktis p. Seega nad kehtivad ka siis, kui seotud vektorit $\overrightarrow{v}$ asendada valemites vektorväljaga $\mathtt{Y}$. Järelukult kehtivad kovariantse tuletise arvutamise valemid

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathtt{Y}}\,\mathtt{X} &= \mathtt{Y}\,[X^1]\,\mathtt{U}_1 + \mathtt{Y}\,[X^2]\,\mathtt{U}_2 + \ldots + \mathtt{Y}\,[X^n]\,\mathtt{U}_n \\ &= \mathtt{Y}\,[X^1]\,\frac{\partial}{\partial x^1} + \mathtt{Y}\,[X^2]\,\frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + \mathtt{Y}\,[X^n]\,\frac{\partial}{\partial x^n},\end{aligned} \quad (3.2.0.14)$$

ja

$$\nabla_{\mathtt{Y}}\mathtt{X} = \sum_{i=1}^{n} <\mathtt{Y}, \operatorname{grad} X^i>\,\mathtt{U}_i = \sum_{i=1}^{n} <\mathtt{Y}, \operatorname{grad} X^i>\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.2.0.15)$$

Näide 3.2.0.47. Olgu $n = 2$, st eukleidiline ruum on tasand E^2 ristkoordinaatidega x, y. Tasandi kanooniline reeperväli koosneb kahest vektorväljast $\mathtt{U}_1, \mathtt{U}_2$, kus

$$\mathtt{U}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathtt{U}_2 = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Suvaline vektorväli $\mathtt{X}$ tasandil avaldub kujul

$$\mathtt{X} = X^1(x, y)\,\mathtt{U}_1 + X^2(x, y)\,\mathtt{U}_2 = X^1(x, y)\,\frac{\partial}{\partial x} + X^2(x, y)\,\frac{\partial}{\partial y},$$

kus $X^1(x, y), X^2(x, y)$ on lõpmata diferentseeruvad (siledad) kahemuutuja funktsioonid. Vaatleme vektorvälja $\mathtt{X}$, kus $X^1(x, y) = -y, X^2(x, y) = x$, st

$$\mathtt{X} = -y\,\mathtt{U}_1 + x\,\mathtt{U}_2 = -y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

Leiame kovariantsed tuletised $\nabla_{\mathtt{U}_1}\mathtt{X}, \nabla_{\mathtt{U}_2}\mathtt{X}$. Kasutame valemit (3.2.0.14)

$$\nabla_{\mathtt{U}_1}\mathtt{X} = \mathtt{U}_1[-y]\,\mathtt{U}_1 + \mathtt{U}_1[x]\,\mathtt{U}_2.$$

Leiame

$$\mathtt{U}_1[-y] = \frac{\partial}{\partial x}(-y) = 0, \quad \mathtt{U}_1[x] = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1.$$

Järelikult

$$\nabla_{\mathtt{U}_1}\mathtt{X} = \mathtt{U}_2.$$

Analoogiliselt leiame

$$\nabla_{\mathtt{U}_2}\mathtt{X} = -\mathtt{U}_1.$$

Peatükk 4

Diferentsiaalvormid

4.1 Diferentsiaalvormi mõiste

Vektorruumi kaasruum. Olgu V n-mõõtmeline vektorruum üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$.

Definitsioon 4.1.0.48. Kujutust $\varphi : V \to \mathbb{R}$ nimetatakse *kovektoriks*, kui φ on lineaarkujutus, st rahuldab lineaarsuse tingimust

$$\varphi(a\,\vec{v} + b\,\vec{w}) = a\,\varphi(\vec{v}) + b\,\varphi(\vec{w}),$$

kus $a, b \in \mathbb{R}$ on reaalarvud ja $\vec{v}, \vec{w} \in V$ on vektorruumi V vektorid.

Seega antud definitsiooni kohaselt kovektor on lineaarfunktsioon $\varphi(\vec{v})$, mille argumendiks on vektorruumi V vektor. Olgu φ, ψ kovektorid ja $a \in \mathbb{R}$ reaalarv. Kovektorite summa $\varphi + \psi$ ja korrutist reaalarvuga $a \cdot \varphi$ määratakse valemitega

$$(\varphi + \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) + \psi(\vec{v}), \quad (a \cdot \varphi)(\vec{v}) = a \cdot \varphi(\vec{v}), \tag{4.1.0.1}$$

kus $\vec{v}$ on vektorruumi V suvaline vektor. Liitmine ja reaalarvuga korrutamine (4.1.0.1) määrab kovektorite hulgas vektorruumi struktuuri ja järgnevas kovektorite vektorruumi tähistame V^*. Kovektorite vektorruumi V^* nimetatakse vektorruumi V *kaasruumiks*. Kaasruum on lõplikumõõtmeline vektorruum ja selle dimensioon on võrdne lähtevektorruumi dimensioonga, st $\dim V = \dim V^* = n$. Olgu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ vektorruumi V baas. Defineerime kovektoreid $e^1, e^2, \ldots, e^n$ valemitega $e^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$, kus δ^i_j on Kroneckeri sümbol. Kovektorid $e^1, e^2, \ldots, e^n$ moodustavad kaasruumi V^* baasi ja suvalise kovektori φ võime kirjutada kujul

$$\varphi = \varphi_1\,e^1 + \varphi_2\,e^2 + \ldots + \varphi_n\,e^n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i\,e^i. \tag{4.1.0.2}$$

Kaasruumi V^* baasi nimetatakse vektorruumi V baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ *duaalseks baasiks.*

Esimest järku diferentsiaalvormid. Olgu E^n n-mõõtmeline eukleidiline ruum ja $\{o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ selle ruumi ristreeper. Olgu $U \subset E^n$ eukleidilise ruumi lahtine alamhulk. Eukleidilise ruumi E^n puutujaruum punktis $p \in E^n$ on tähistatud T_pE^n ja T_pE^n on seotud vektorite alguspunktiga punktis p vektorruum. Puutujaruumi T_pE^n kaasruumi tähistame $T^*_pE^n$. Kaasruumi $T^*_pE^n$ elemendid on kovektorid $\varphi : T^*_pE^n \to \mathbb{R}$.

Definitsioon 4.1.0.49. Kujutust $\omega : p \in U \to\ \omega_p \in T^*_pE^n$, mis seab lahtise hulga U igale punktile vastavusse üheselt määratud kovektori $\omega_p \in T^*_pE^n$ punktis p, nimetatakse *esimest järku diferentsiaalvormiks* või *1-diferentsiaalvormiks.* Olgu $\mathtt{X}$ sile vektorväli hulgal U, st $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$. Defineerime funktsiooni $\omega(\mathtt{X}) : U \to \mathbb{R}$ valemiga $\omega(\mathtt{X})(p) = \omega_p(\mathtt{X}_p)$, kus $p \in U$. 1-diferentsiaalvormi ω nimetatakse siledaks 1-diferentsiaalvormiks, kui suvalise sileda vektorvälja $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$ korral funktsioon $\omega(\mathtt{X})$ on sile funktsioon, st $\omega(\mathtt{X}) \in C^\infty(U)$.

Siledate 1-diferentsiaalvormide hulgal U hulka tähistame $\Omega^1(U)$. 1-diferentsiaalvorm $\omega \in \Omega^1(U)$ on täielikult määratud, kui suvalise vektorvälja $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(U)$ korral on näidatud, kuidas tuleb leida funktsiooni $\omega(\mathtt{X}) \in C^\infty(U)$. Näiteks valemid

$$(\omega_1 + \omega_2)(\mathtt{X}) = \omega_1(\mathtt{X}) + \omega_2(\mathtt{X}), \quad (a\,\omega)(\mathtt{X}) = a\,\omega(\mathtt{X}), \tag{4.1.0.3}$$

on 1-diferentsiaavormide ω_1, ω_2 summa ja 1-diferentsiaalvormi ω korrutise reaalarvuga a korrektsed definitsioonid. Valemitest järeldub, et suvaliste 1-diferentsiaalvormide ω_1, ω_2 summa $\omega_1 + \omega_2$ on sile 1-diferentsiaalvorm ja analoogiliselt korrutis $a\,\omega$ on sile 1-diferentsiaalvorm. 1-diferentsiaalvormide liitmine ja korrutamine arvuga määravad siledate 1-diferentsiaalvormide hulgal vektorruumi struktuuri. Seega $\Omega^1(U)$ on vektorruum.

Olgu $f \in C^\infty(U)$ sile funktsioon ja $\omega \in \Omega^1(U)$ sile 1-diferentsiaalvorm.

Definitsioon 4.1.0.50. 1-diferentsiaalvormi ω korrutiseks funktsiooniga f nimetatakse 1-diferentsiaalvormi, mis määratakse valemiga

$$(f \cdot \omega)(\mathtt{X}) = f\,\omega(\mathtt{X}),$$

kus valemi paremalpoolel seisab kahe finktsiooni korrutis. On ilmne, et $f \cdot \omega$ on sile 1-diferentsiaalvorm.

Korrutamise funktsiooniga omadused:

1. $f\cdot(a\,\omega_1+b\,\omega_2)=a\,(f\cdot\omega_1)+b\,(f\cdot\omega_2)$, kus $a,b\in\mathbb{R}$, $f\in C^\infty(U)$, $\omega_1,\omega_2\in\Omega^1(U)$,
2. $(a\,f+b\,g)\cdot\omega=a\,(f\cdot\omega)+b\,(g\cdot\omega)$, kus $a,b\in\mathbb{R}$, $f,g\in C^\infty(U),\omega\in\Omega^1(U)$,
3. $(f\,g)\cdot\omega=f\cdot(g\cdot\omega)$, kus $f,g\in C^\infty(U),\omega\in\Omega^1(U)$,
4. kui $\mathbb{1}$ on ühikfunktsioon, st hulga U suvalises punktis p kehtib $\mathbb{1}(p)=1$, siis $\mathbb{1}\cdot\omega=\omega$.

Näide 4.1.0.51. Olgu $f\in C^\infty(U)$ sile funktsioon. Defineerime 1-diferentsiaalvormi df valemiga

$$df(\mathtt{X})=\mathtt{X}[f]. \tag{4.1.0.4}$$

Valemist (3.2.0.7) järeldub, et

$$df(\mathtt{X})=<\mathtt{X},\mathrm{grad}\,f>. \tag{4.1.0.5}$$

Kui

$$\mathtt{X}=\sum_{i=1}^n X^i\,\frac{\partial}{\partial x^i},$$

siis

$$df(\mathtt{X})=\sum_{i=1}^n X^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{4.1.0.6}$$

On ilmne, et df on sile 1-diferentsiaalvorm, st $df\in\Omega^1(U)$. Seega sile funktsioon f tekitab 1-diferentsiaalvormi df.

Seotud vektorid $(p;\,\vec{e}_i)$, kus $i=1,2,\dots,n$, moodustavad puutujaruumi T_pE^n baasi ja iga baasivektor $(p;\,\vec{e}_i)$ tekitab eukleidilise ruumi E^n vektorvälja $\mathtt{U}_i$, kus $(\mathtt{U}_i)_p=(p;\,\vec{e}_i)$. Kasutades suunatuletise mõistet, võime samastada

$$\mathtt{U}_i\equiv\frac{\partial}{\partial x^i},\quad(\mathtt{U}_i)_p\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p.$$

Järelikult vektorid

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p,$$

moodustavad eukleidilise ruumi E^n puutujaruumi T_pE^n punktis p baasi. Selle baasi duaalse baasi kovektoreid tähistame $dx^1|_p,dx^2|_p,\dots,dx^n|_p$. Seega kehtib

$$dx^i|_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p)=\delta^i_j. \tag{4.1.0.7}$$

Eukleidilise ruumi E^n igas punktis p on määratud n kovektorit

$$dx^1|_p,dx^2|_p,\dots,dx^n|_p.$$

Järelikult sellega on määratud n siledat 1-diferentsiaalvormi $dx^1,dx^2,\dots,dx^n$.

Teoreem 4.1.0.52. *Olgu* $\omega \in \Omega^1(U)$ *sile 1-diferentsiaalvorm. Leiduvad üheselt määratud siledad funktsioonid* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in C^\infty(U)$ *sellised, et*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i.$$

Tõestus. $\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i})$.

Tõestatud teoreemist järeldub, et suvaline sile 1-diferentsiaalvorm ω eukleidilises ruumis E^n on üheselt esitatav kujul

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i, \tag{4.1.0.8}$$

kus kordajateks (funktsioonide) ω_i leidmiseks kasutame valemit

$$\omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}).$$

Valemit (4.1.0.8) nimetatakse 1-diferentsiaalvormi kanooniliseks kujuks. Näiteks leiame 1-diferentsiaalvormi *df* kanoonilise kuju. Leiame kanoonilise kuju kordajad järgmiselt:

$$df(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Seega 1-diferentsiaalvormi *df* kanooniline kuju on

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \, dx^i.$$

Märgime, et antud valem on sarnane funktsiooni täisdiferentsiaali valemiga, kuid juhime tähelepanu sellele, et kaasaegses diferentsiaalgeomeetrias antud valemile antakse teine tähendus, kus dx^i on mitte koordinaatide diferentsiaalid, vaid 1-diferentsiaalvormid. Järgnevas näitame, kasutades välisdiferentsiaali mõistet, et dx^i on *koordinaatfunktsioonide* x^i *välisdiferentsiaal.*

Peatükk 5

Pind

5.1 Pinna mõste

Käesolevas paragrahvis kasutame kahte eukleidilist ruumi, kus esimene ruum on tasand E^2 ja teine ruum on kolmemõõtmeline ruum E^3. Eeldame, et nii esimeses ruumis, kui ka teises on antud ristreeper, mis tekitab ristkoordinaadisüsteemi. Tasandi E^2 muutuva punkti koordinaadid tähistame u, v ja ruumi E^3 mutuva punkti koordinaadid x, y, z.

Parametriseeritud pind. Olgu $U \subset E^2$ tasandi lahtine alamhulk ja $\phi : U \to E^3$ kujutus, kus

$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \tag{5.1.0.1}$$

ja $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ on lõpmata diferentseeruvad funktsioonid määramispiirkonnaga U.

Definitsioon 5.1.0.53. Kujutust $\phi : U \to E^3$ nimetatakse *parametriseeritud pinnaks* eukleidilises ruumis E^3 ja valemit (5.1.0.1) nimetatakse parametriseeritud pinna *parameetriliseks võrrandiks*. Kui kasutatakse parametriseeritud pinna punkti $\phi(u, v)$ kohavektorit $\vec{\phi}(u, v)$, siis parameetrilise võrrandi kirjutatakse kujul

$$\vec{\phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Tasandi hulga U kujutist $S = \phi(U) \subset E^3$ ruumis E^3 nimetatakse *lihtpinnaks*. Tasandi E^2 koordinaatidega u, v nimetatakse parametriseeritud pinna *parameetrite tasandiks* ja alamhulka $U \subset E^2$ nimetatakse parametriseeritud pinna määramispiirkonnaks.

Näide 5.1.0.54. Olgu $\phi : U \to E^3$, kus

$$\begin{aligned} U &= \{(u,v) \in E^2 : 0 < u < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\}, \\ \phi(u,v) &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v). \end{aligned} \tag{5.1.0.2}$$

Võrrandit (5.1.0.2) nimetatakse *ühiksfääri* parameetriliseks võrrandiks..

Moodustame maatriksi

$$\mathfrak{J}_\phi = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}, \tag{5.1.0.3}$$

kus

$$x'_u = \frac{\partial x}{\partial u},\ x'_v = \frac{\partial x}{\partial v},\ y'_u = \frac{\partial y}{\partial u},\ y'_v = \frac{\partial y}{\partial v},\ z'_u = \frac{\partial z}{\partial u},\ z'_v = \frac{\partial z}{\partial v},$$

on parameetrilise võrrandi funktsioonide $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ osatuletised u, v järgi. Maatriksit (5.1.0.3) nimetatakse kujutuse $\phi : U \to E^3$ *Jacobi maatriksiks*. Jacobi maatriksi esimese veeru elementidest moodustame ruumi E^3 seotud vektori

$$\overrightarrow{\phi}'_u = (\phi(u,v); x'_u, y'_u, z'_u), \tag{5.1.0.4}$$

ja teise veeru elementidest vektori

$$\overrightarrow{\phi}'_v = (\phi(u,v); x'_v, y'_v, z'_v). \tag{5.1.0.5}$$

Tähistame

$$E =< \overrightarrow{\phi}'_u, \overrightarrow{\phi}'_u >,\ F =< \overrightarrow{\phi}'_u, \overrightarrow{\phi}'_v >,\ G =< \overrightarrow{\phi}'_v, \overrightarrow{\phi}'_v > . \tag{5.1.0.6}$$

Definitsioon 5.1.0.55. Olgu $q = (u_0, v_0)$ tasandi alamhulga U mingi punkt ja $p = \phi(u_0, v_0)$ ruumi E^3 punkt. Parametriseeritud pinna punkti p nimetatakse *regulaarseks punktiks*, kui on täidetud üks ekvivalentsetest tingimustest:

i) Jacobi maatriksi $\mathfrak{J}_\phi$ astak tasandi punktis q on 2, st $\operatorname{rank} \mathfrak{J}_\phi(q) = 2$,

ii) seotud vektorid $\overrightarrow{\phi}'_u, \overrightarrow{\phi}'_v$ punktis p on lineaarselt sõltumatud,

iii) $\overrightarrow{\phi}'_u \times \overrightarrow{\phi}'_v \neq \overrightarrow{0}$,

iv) punktis q kehtib

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = E\,G - F^2 \neq 0.$$

Parametriseeritud pinda nimetatakse regulaarseks, kui parametriseeritud pinna iga punkt on regulaarne.

Näide 5.1.0.56. Olgu $\alpha : I \to E^3$ regulaarne tasandiline parametriseeritud kõver, kus $\alpha(u) = (x(u), y(u), 0), u \in I$ parametriseeritud kõvera parameeter on tähistatud u-ga). On ilmne, et $\alpha(I) \subset E^2_{xy}$, kus E^2_{xy} on xy-koordinaattasand. Eeldame, et parametriseeritud kõvera igas punktis kehtib $y(u) > 0$, st parametriseeritud kõvera α jälg asub pooltasandil $E^2_{xy^+}$, kus

$$E^2_{xy^+} = \{(x, y, z) \in E^3 : y > 0, z = 0\}.$$

Kui parametriseeritud kõverat pöörame ümber x-koordinaattelje, siis pööramisel tekib parametriseeritud pind

$$\phi(u, v) = (x(u), y(u) \cos v, y(u) \sin v), \tag{5.1.0.7}$$

kus $(u, v) \in I \times [0, 2\pi]$. Parametriseeritud pinda (5.1.0.7) nimetatakse *parametriseeritud pöördpinnaks*. Näidake, et parametriseeritud pöördpind on regulaarne.

Olgu $\phi : U \to E^3$ parametriseeritud pind ja $S = \phi(U) \subset E^3$.

Definitsioon 5.1.0.57. Parametriseeritud pinda $\phi : U \to E^3$ nimetatakse *koordinaatpinnaks*, kui

1. U on tasandi E^2 lahtine alamhulk,
2. parametriseeritud pind $\phi : U \to E^3$ on regulaarne,
3. kujutus $\phi : U \to S$ on bijektiivne kujutus,
4. pöördkujutus $\phi^{-1} : S \to U$ on pidev kujutus, st leidub ruumi E^3 lahtine alamhulk W ja pidev kujutus $\psi : W \to E^2$ sellised, et $S \subset W, U \subset \psi(W), \psi|_S = \phi^{-1}$.

Kujutuse diferentsiaal. Olgu $\psi : U \to E^3$ lõpmata diferentseeruv kujutus, kus $U \subset E^2$. Olgu $q \in U, \overrightarrow{w} = (q; \vec{w}) \in T_pE^2$. Vaba vektor $\vec{w}$ määrab tasandi sirget $q + t\,\vec{w}$, mis läbib tasandi punkti q ja $\vec{w}$ on selle sirge sihivektor. Kui kujutust ψ ahendame sirgele $q + t\,\vec{w}$, siis $\psi(q + t\,\vec{w})$ on parametriseeritud kõver ruumis E^3.

Definitsioon 5.1.0.58. Kujutuse $\psi : U \to E^2$ *diferentsiaaliks* või *puutujakujutuseks* punktis $q \in U$ nimetatakse kujutust $(\psi_*)_p$, mis seab tasandi igale E^2 puutujavektorile $\overrightarrow{w} = (q; \vec{w}) \in T_pE^2$ punktis q üheselt määratud ruumi E^3 puutujavektori $(\psi_*)_q(\overrightarrow{w}) \in T_{\psi(q)}E^3$ punktis $p = \psi(q)$, kus

$$(\psi_*)_q(\overrightarrow{w}) = \frac{d}{dt}\Big(\psi(q + t\,\vec{w})\Big)\Big|_{t=0}, \tag{5.1.0.8}$$

st kujutuse ψ diferentsiaal punktis q seab tasandi puutujavektorile $\overrightarrow{w}$ vastavusse parametriseeritud joone $\psi(q + t\,\vec{w})$ kiirusvektori punktis $p = \psi(q)$.

Tähistame tasandi E^2 kanoonilise reepervälja $\{\tilde{\mathtt{U}}_1, \tilde{\mathtt{U}}_2\}$ ja ruumi E^3 kanoonilise reepervälja $\{\mathtt{U}_1, \mathtt{U}_2, \mathtt{U}_3\}$. Olgu

$$\overrightarrow{w} = (q; \vec{w}) = (q; w^1, w^2) = w^1\,(\tilde{\mathtt{U}}_1)_q + w^2\,(\tilde{\mathtt{U}}_2)_q,$$

ja

$$\psi(u,v) = \big(\xi(u,v), \eta(u,v), \zeta(u,v)\big).$$

Teoreem 5.1.0.59. *Kujutuse $\psi : U \to E^3$ diferentsiaal $(\psi_*)_q : T_qE^2 \to T_{\psi(q)}E^3$ tasandi punktis $q \in U$ suvalise tasandi puutujavektori $\overrightarrow{w} \in T_qE^2$ korral avaldub järmiselt:*

$$(\psi_*)_q(\overrightarrow{w}) = w^1\,\overrightarrow{\psi}_u' + w^2\,\overrightarrow{\psi}_u'. \tag{5.1.0.9}$$

Kujutuse diferentsiaal U igas punktis on lineaarkujutus $(\psi_*)_q : T_qE^2 \to T_{\psi(q)}E^3$ ja selle maatriks on kujutuse ψ Jacobi maatriks.

Tõestus. Definitsioonist järeldub

$$\begin{aligned}
(\psi_*)_q(\overrightarrow{w}) &= \frac{d}{dt}\Big(\psi(q + t\,\vec{w})\Big)\Big|_{t=0} \\
&= \big(p; \frac{d}{dt}(\xi(q+t\,\vec{w}))\big|_{t=0}, \frac{d}{dt}(\eta(q+t\,\vec{w}))\big|_{t=0}, \frac{d}{dt}(\zeta(q+t\,\vec{w}))\big|_{t=0}\big) \\
&= \big(p; \overrightarrow{w}[\xi], \overrightarrow{w}[\eta], \overrightarrow{w}[\eta]\big), \\
&= \big(p; <\overrightarrow{w}, \operatorname{grad}\xi|_q>, <\overrightarrow{w}, \operatorname{grad}\eta|_q>, <\overrightarrow{w}, \operatorname{grad}\zeta|_q>\big)
\end{aligned} \tag{5.1.0.10}$$

Viimases avaldises $\operatorname{grad}\xi|_q = \xi_u'\,(\tilde{\mathtt{U}}_1)_q + \xi_v'\,(\tilde{\mathtt{U}}_2)_q$, osatuletised ξ_u', ξ_v' on arvutatud tasandi punktis q ja funktsioonide η, ζ gradiendid avalduvad analoogiliselt. Järelikult

$$\begin{aligned}
<\overrightarrow{w}, \operatorname{grad}\xi|_q> &= w^1\,\xi_u' + w^2\,\xi_v', \\
<\overrightarrow{w}, \operatorname{grad}\eta|_q> &= w^1\,\eta_u' + w^2\,\eta_v', \\
<\overrightarrow{w}, \operatorname{grad}\zeta|_q> &= w^1\,\zeta_u' + w^2\,\zeta_v',
\end{aligned}$$

ja, asendades valemisse (5.1.0.10), saame

$$(\psi_*)_q(\overrightarrow{w}) = w^1\,(p; \xi_u', \eta_u', \zeta_u') + w^2\,(p; \xi_v', \eta_v', \zeta_v'),$$

kust järeldub valem (5.1.0.9).

Tõestatud valemist järeldub, et tasandi hulga U igas ounktis kujutuse diferentsiaal on lineaarkujutus. Kujutuse diferentsiaali maatriksi leidmiseks kasutame tasandi E^2 ja ruumi E^3 kanoonilist reepervälja. Definitsiooni kohaselt lineaarkujutuse maatriksi esimese veeru elemendid on ruumilise vektori

$(\psi_*)_q((\tilde{\mathtt{U}}_1)_q)$ koordinaadid reeperis $\{(\mathtt{U}_1)_p, (\mathtt{U}_2)_p, (\mathtt{U}_3)_p\}$. Vektori $(\tilde{\mathtt{U}}_1)_q$ korral $w^1 = 1, w^2 = 0$ ja rumilise vektori $(\psi_*)_q((\tilde{\mathtt{U}}_1)_q)$ koordinaatide leidmiseks kasutame valemit (5.1.0.9), kus $w^1 = 1, w^2 = 0$. Saame

$$(\psi_*)_q((\tilde{\mathtt{U}}_1)_q) = \overrightarrow{\psi}_u' = \xi_u' \, (\mathtt{U}_1)_p + \eta_u' \, (\mathtt{U}_2)_p + \zeta_u' \, (\mathtt{U}_1)_p.$$

Seega kujutuse diferentsiaali maatriksi esimese veeru elemendid on $\xi_u', \eta_u', \zeta_u'$ ja analogiliselt leiame, et teise veeru elemendid on $\xi_v', \eta_v', \zeta_v'$. Järelikult kujutuse diferentsiaali maatriks on

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \xi_u' & \xi_v' \\ \eta_u' & \eta_v' \\ \zeta_u' & \zeta_v' \end{pmatrix},$$

ja see on kujutuse ψ Jacobi maatriks. $\square$

Parametriseeritud pinna puutujatasand. Olgu $\phi : U \to E^3$ parametriseeritud pind, $q \in U$ parameetrite tasandi mingi punkt ja $p = \phi(q) \in S$, kus $S = \phi(U)$. Kui p on parametriseeritud pinna ϕ regulaarne punkt, siis kujutuse ϕ Jacobi maatriksi astak on maksimaalne, st $\operatorname{rank} J_\phi = 2$. Eelmises punktis on tõestatud (teoreem 5.1.0.10), et kujutuse ϕ diferentsiaali maatriks on Jacobi maatriks. Seega kujutuse ϕ diferentsiaali ϕ_* maatriksi astak punktis $q \in U$ on maksimaalne, kust järeldub, et kujutuse diferentsiaal $(\phi_*)_q : T_qE^2 \to T_pE^3$ parametriseeritud pinna regulaarses punktis q on injektiivne kujutus. Tähistame $(\phi_*)_q(T_qE^2) = T_pS \subset T_pE^3$. On ilmne, et T_pS on vektorruumi T_pE^3 alamruum ja T_pS on isomorfne vektorruumiga T_qE^2. Seega $\dim T_pS = 2$.

Definitsioon 5.1.0.60. Olgu $\phi : U \to E^3$ regulaarne parametriseeritud pind. Vektorruumi T_pS nimetatakse parametriseeritud pinna *puutujatasandiks* punktis p ja vektorruumi T_pS vektorit nimetatakse parametriseeritud pinna puutujavektoriks.

Parametriseeritud pinna puutujatasand on väga tähtis parametriseeritud pinna uurimiseks diferentsiaalgeomeetria meetodite abil. Puutujatasand on määratud parametriseeritud pinna regulaarses punktis. Seega järgnevas vaikselt eeldame, et parametriseeritud pind on regulaarne.

Teoreemi 5.1.0.59 tõestusest järeldub, et vektorid $\overrightarrow{\phi}_u', \overrightarrow{\phi}_v'$ on parametriseeritud pinna ϕ puutujavektorid, st $\overrightarrow{\phi}_u', \overrightarrow{\phi}_v' \in T_pS$. Kui parametriseeritud pind ϕ on regulaarne, siis puutujavektorid $\overrightarrow{\phi}_u', \overrightarrow{\phi}_v'$ on lineaarselt sõltumatud ja seega moodustavad parametriseeritud pinna puutujatasandi reeperi. Valem (5.1.0.10) näitab, et parametriseeritud pinna suvaline puutujavektor $\overrightarrow{s} \in T_pS$ parametriseeritud pinna punktis p on puutujavektorite $\overrightarrow{\phi}_u', \overrightarrow{\phi}_v'$ lineaarkombinatsioon.

Lause 5.1.0.61. *Kui on antud (regulaarse) parametriseeritud pinna $\phi : U \to E^3$ suvaline puutujavektor $\overrightarrow{s} \in T_pS$ punktis $p = \phi(q)$, siis leidub parametriseeritud kõver $\alpha : I \to E^3$ selline, et $\alpha(I) \subset S = \phi(U)$ (parametriseeritud kõvera α iga punkt $\alpha(t)$ asub lihtpinnal S), parametriseeritud kõver α läbib punkti p ($\alpha(0) = p$) ja parametriseeritud kõvera kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}\,'(0)$ on $\overrightarrow{s}$.*

Tõestus. Kujutuse ϕ diferentsiaal $(\phi_*)_q : T_qE^2 \to T_pS$ punktis q on vektorruumide isomorfism, seega suvalise vektori $\overrightarrow{s} \in T_pS$ korral leidub tasandi E^2 puutujavektor $\overrightarrow{w}$ punktis q nii, et $(\phi_*)_q(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{s}$. Moodustame tasandi sirge $q + t\,\vec{w}$, kus $t \in I = \{t : |t| < \delta\}$. Sirge läbib punkti q ja $\vec{w}$ on sirge sihivektor. Kujutus $t \in I \mapsto \phi(q + t\,\vec{w}) \in S$ määrab ruumilist parametriseeritud kõverat $\alpha : I \to E^3$. On ilmne, et parametriseeritud kõvera α jälg asub lihtpinnal S ja α läbib punkti p, kui $t = 0$. Näitame, et parametriseeritud kõvera α kiirusvektor on $\overrightarrow{s}$. Tõepoolest kehtib

$$\overrightarrow{\alpha}\,'(0) = \frac{d}{dt}\Big(\phi(q + t\,\vec{w})\Big)\Big|_{t=0} = (\psi_*)_q(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{s}. \qquad \square$$

Pinna mõiste. Olgu $M \subset E^3$ ruumi alamhulk.

Definitsioon 5.1.0.62. Ruumi E^3 alamhulka M nimetatakse *pinnaks*, kui suvalise punkti $p \in M$ korral leidub selle punkti lahtine ümbrus V ruumis E^3 ja koordinaatpind $\phi : U \to E^3$ selline, et $\phi(U) = M \cap V$. Koordinaatpinda $\phi : U \to E^3$ nimetatakse *pinna parametriseerimiseks* pinna punkti p ümbruses ja tähistatakse (ϕ, U).

Olgu $\phi : U \to E^3$ koordinaattpind. On ilmne, et $\phi(U) \subset E^3$ on pind.

Lause 5.1.0.63. *Olgu $\phi : U \to E^3$ regulaarne parametriseeritud pind, kus U on E^2 lahtine alamhulk. Lihtpind $\phi(U) \subset E^3$ on pind.*

Näide 5.1.0.64. Olgu $z = f(x, y)$ sile kahemuutuja funktsioon ja $U \subset E^2_{xy}$ selle funktsiooni määramispiirkond. Moodustame parametriseeritud pinna $\phi : U \to E^3$ järgmiselt:

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u, v)). \tag{5.1.0.11}$$

Näitame, et ϕ on regulaarne parametriseeritud pind. Leiame

$$\overrightarrow{\phi}_u' = (\phi(u, v); 1, 0, f_u'), \;\; \overrightarrow{\phi}_v' = (\phi(u, v); 0, 1, f_v'),$$

ja

$$\overrightarrow{\phi}_u' \times \overrightarrow{\phi}_v' = (\phi(u, v); -f_u', -f_v', 1) \neq \overrightarrow{0}.$$

Seega (5.1.0.11) on regulaarne parametriseeritud pind. Järelikult $\phi(U)$ on pind ja vastavat pinda nimetatakse *Monge'i pinnaks*.

Olgu $V \subset E^3$ ruumi lahtine alamhulk ja $F : V \to \mathbb{R}$ sile funktsioon.

Definitsioon 5.1.0.65. Olgu $c \in \mathbb{R}$ reaalarv. Punktihulka

$$M = F^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in E^3 : F(x, y, z) = c\} \subset E^3$$

nimetatakse funktsiooni F tasemepinnaks (kõrgusega c), kui

1. $F^{-1}(c) \neq \emptyset$,
2. suvalise punkti $p \in S = F^{-1}(c)$ korral on täidetud tingimus

$$\operatorname{grad} F\Big|_p \neq \overrightarrow{0}.$$

$F(x, y, z) = c$ nimetatakse tasemepinna M võrrandiks.

Näide 5.1.0.66. Olgu $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ja $c = 1$. Funktsiooni $F(x, y, z)$ tasemepinda kõrgusega 1 nimetatakse ühiksfääriks (sfäär raadiusega 1) ja tähistatakse S^2. Seega ühiksfääri võrrand on

$$S^2 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Teoreem 5.1.0.67. *Tasemepind on pind.*

Pinna puutujatasand. Olgu M pind, $\phi : U \to M, \tilde{\phi} : \tilde{U} \to M$ pinna M koordinaatpinnad, $S = \phi(U), \tilde{S} = \tilde{\phi}(\tilde{U})$, $S \cap \tilde{S} \neq \emptyset$ ja $p \in S \cap \tilde{S}$.

Teoreem 5.1.0.68. *Koordinaatpinna $\phi : U \to M$ puutujatasand T_pS punktis $p \in M$ ühtib koordinaatpinna $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to M$ puutujatasandiga $T_p\tilde{S}$ punktis p, st $T_pS = T_p\tilde{S}$.*

Tõestus. Olgu $q = \phi^{-1}(p) \in U, \tilde{q} = \tilde{\phi}^{-1}(p) \in \tilde{U}$ ja

$$V = \phi^{-1}(S \cap \tilde{S}) \subset E^2, \quad \tilde{V} = \tilde{\phi}^{-1}(S \cap \tilde{S}) \subset E^2.$$

On ilmne, et $q \in V, \tilde{q} \in \tilde{V}$. Moodustame kujutuste korrutise

$$\chi = \tilde{\phi}^{-1} \circ \phi : V \to \tilde{V}.$$

On võimalik näidata, et χ on difeomorfism. Näitame, et $T_pS \subset T_p\tilde{S}$. Olgu $\overrightarrow{s} \in T_pS$. Kujutuse ϕ diferentsiaal ϕ_* on vektorruumide isomorfism U suvalises punktis, seega leidub $\overrightarrow{w} \in T_qE^2$ selline, et $(\phi_*)_q(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{s}$. Moodustame tasandi puutujavektori $\overrightarrow{w}' = (\chi_*)_q(\overrightarrow{w}) \in T_{\tilde{q}}E^2$. Kehtib $(\tilde{\phi}_*)_{\tilde{q}}(\overrightarrow{w}') = \overrightarrow{s}$, kust järeldub, et $\overrightarrow{s} \in T_p\tilde{S}$. Analoogiliselt saab näidata, et $T_p\tilde{S} \subset T_pS$. Seega $T_pS = T_p\tilde{S}$. $\square$

Definitsioon 5.1.0.69. Olgu M pind, $p \in M$, $\phi : U \to M$ pinna M koordinaatpind punkti p ümbruses ja $S = \phi(U)$. Pinna M puutujatasandiks punktis p nimetatakse koordinaatpinna (ϕ, U) puutujatasandit T_pS.

Teoreem 5.1.0.70. *Olgu $M = F^{-1}(c)$ funktsiooni F tasemepind ja $p \in M$. Suvalise tasemepinna puutujavektori $\overrightarrow{s} \in T_pM$ korral kehtib $\overrightarrow{s} \perp \mathit{grad}\, F\big|_p$, st pinna M suvaline puutujavektor punktis p on risti vektorväljaga $\mathit{grad}\, F$ punktis p. Vektorvälja $\mathit{grad}\, F$ punktis tasemepinna punktis p nimetatakse tasemepinna normaalvektoriks.*

Tõestus. Olgu (ϕ, U) pinna M koordinaatpind punkti p ümbruses ja

$$\overrightarrow{s} = (p; s^1, s^2, s^3) \in T_pM.$$

Lausest 5.1.0.61 järeldub, et leidub parametriseeritud kõver $\alpha : I \to S = \phi(U) \subset M$ selline, et $\alpha(0) = p, \overrightarrow{\alpha}'(0) = \overrightarrow{s}$. Olgu $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ selle parametriseeritud kõvera parameetriline võrrand. Kehtib

$$x'(0) = s^1, \;\; y'(0) = s^2, \;\; z'(0) = s^3.$$

Moodustame liitfunktsiooni $F(\alpha(t))$. Parametriseeritud kõver α asub tasemepinnal M. Järelikult liitfunktsioon $F(\alpha(t))$ on konstantne funktsioon ja suvalise t korral $F(\alpha(t)) = c$. Seega liitfunktsiooni tuletis t järgi samaselt võrdub nulliga. Teiselt poolt, liitfunktsiooni tuletis punktis $t = 0$ avaldub järgmiselt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(F(\alpha(t))\big)\big|_{t=0} &= \frac{\partial F}{\partial x}\big|_p x'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}\big|_p y'(0) + \frac{\partial F}{\partial z}\big|_p z'(0) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\big|_p s^1 + \frac{\partial F}{\partial y}\big|_p s^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\big|_p s^3 \\ &= <\mathrm{grad}\, F|_p, \overrightarrow{s}> . \end{aligned} \tag{5.1.0.12}$$

Seega $<\mathrm{grad}\, F|_p, \overrightarrow{s}> = 0$ ja $\overrightarrow{s} \perp \mathrm{grad}\, F\big|_p$. □

Olgu M funktsiooni F tasemepind, p tasemepinna punkt, (x_0, y_0, z_0) punkti p koordinaadid ja $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ punkti p kohavektor. Olgu $\vec{r} = (x, y, z)$ tasemepinna puutujatasandi T_pM punktis p suvalise punkti kohavektor. Siis

$$(p; \vec{r} - \vec{r}_0) = (p; x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in T_pM$$

on tasemepinna puutujavektor punktis p ja tõestatud teoreemist järeldub, et peab rahuldama tingimust

$$\frac{\partial F}{\partial x}\big|_p (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\big|_p (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\big|_p (z - z_0) = 0. \tag{5.1.0.13}$$

Võrrand (5.1.0.13) on tasemepinna puutujatasandi punktis $p(x_0, y_0, z_0)$ võrrand.

Vektorväljad pinnal. Olgu $\phi : U \to E^3$ parametriseeritud pind.

Definitsioon 5.1.0.71. Kujutust $\mathtt{X} : U \to \phi(U) \times \mathbb{E}^3$, kus

$$\mathtt{X}(u,v) = (\phi(u,v); \overrightarrow{\mathtt{X}}(u,v)), \quad (u,v) \in U \tag{5.1.0.14}$$

ja $\overrightarrow{\mathtt{X}}(u,v) = (X^1(u,v), X^2(u,v), X^3(u,v))$,, nimetatakse *vektorväljaks parametriseeritud pinnal* $\phi : U \to E^3$. Kui $X^1(u,v), X^2(u,v), X^3(u,v)$ on siledad funktsioonid, siis vektorvälja $\mathtt{X}$ nimetatakse siledaks vektorväljaks.

Definitsioonist järeldub, et vektorväli $\mathtt{X}$ parametriseeritud pinnal $\phi : U \to E^3$ seab parametriseeritud pinna igale punktile $p = \phi(u,v)$ vastavusse seotud vektori $\mathtt{X}_p = (p; \overrightarrow{\mathtt{X}}(p)) \in T_pE^3$ punktis p. Kui parametriseeritud pinna igas punktis $\mathtt{X}_p$ on pinna puutujavektor, siis vektorvälja $\mathtt{X}$ parametriseeritud pinnal nimetatakse puutujavektorväljaks. Olgu $\tilde{\mathtt{X}}$ vektorväli hulgal $U \subset E^2$. Kasutades kujutuse ϕ diferentsiaali ϕ_* moodustame vektorvälja $\mathtt{X}$ parametriseeritud pinnal $\phi_U \to E^3$ järgmiselt:

$$\mathtt{X} = \phi_*(\tilde{\mathtt{X}}).$$

On ilmne, et sellisel viisil moodustatud vektorväli parametriseeritud pinnal $\phi : U \to E^3$ on puutujavektorväli. Parameetrite tasandi E^2 vektorväljad $\tilde{\mathtt{U}}_1, \tilde{\mathtt{U}}_2$ moodustavad tasandi reepervälja. Seega vektorväljad $\phi_*(\tilde{\mathtt{U}}_1), \phi_*(\tilde{\mathtt{U}}_2)$ on puutujavektorväljad parametriseeritud pinnal $\phi : U \to E^3$. Tuletame meelde, et parametriseeritud pinna igas punktis on määratud kaks puutujavektorit $\overrightarrow{\phi_u}', \overrightarrow{\phi_v}'$. Seega kujutus $(u,v) \in U \to \overrightarrow{\phi_u}'$ määrab vektorvälja parametriseeritud pinnal $\phi : U \to E^3$, mida tähistame ϕ'_u. Analoogiliselt kujutus $(u,v) \in U \to \overrightarrow{\phi_v}'$ määrab vektorvälja parametriseeritud pinnal $\phi : U \to E^3$, mida tähistame ϕ'_v. Teoreemist kujutuse diferentsiaalist järeldub, et kehtib

$$\phi_*(\tilde{\mathtt{U}}_1) = \phi'_u, \quad \phi_*(\tilde{\mathtt{U}}_2) = \phi'_v.$$

Vektorvälja $\mathtt{N}$ parametriseeritud pinnal $\phi : U \to E^3$ nimetatakse *normaalvektorväljaks*, kui U igas punktis (u,v) seotud vektor $\mathtt{N}(u,v))$ on risti parametriseeritud pinna puutujutasandiga T_pS, kus $p = \phi(u,v)$ ja $S = \phi(U)$. Kui parametriseeritud pinna igas punktis $\mathtt{N}_p$ on ühikvektor, st $|\mathtt{N}_p| = 1$, siis normaalvektorvälja $\mathtt{N}$ nimetatakse parametriseeritud pinna *orientatsiooniks*. Parametriseeritud pinda $\phi : U \to E^3$ nimetatakse *orienteeritavaks*, kui parametriseeritud pinnal leidub ühiknormaalvektorväli. Parametriseeritud pind on orienteeritav. Tõepoolest sellisel juhul puutujavektorväljade ϕ'_u, ϕ'_v vektorkorrutis $\phi'_u \times \phi'_v$ on normaalvektorväli ja parametriseeritud pinna igas punktis $\overrightarrow{\phi_u}' \times \overrightarrow{\phi_v}' \neq \overrightarrow{0}$, kust järeldub, et vektorväli

$$\mathtt{N} = \frac{1}{|\phi'_u \times \phi'_v|}\, \phi'_u \times \phi'_v,$$

on määratud parametriseeritud pinna igas punktis ja $\mathtt{N}$ on ühiknormaalvektorväli.

Definitsioon 5.1.0.72. Olgu M pind. Vektorväljaks pinnal M nimetatakse kujutust $\mathtt{X} : M \to M \times \mathbb{E}^3$, kus pinna igas punktis $\mathtt{X} : p \mapsto \mathtt{X}_p = (p; \vec{s}) = \overrightarrow{s} \in T_pE^3$, st vektorväli $\mathtt{X}$ pinaal M seab pinna igale punktile p vastavusse ruumi E^3 puutujavektori $\mathtt{X}_p$ pinna punktis p.

Olgu $p \in M$ pinna suvaline punkt, (ϕ, U) koordinaatpind punkti p ümbruses ja $\mathtt{X}$ vektorväli pinnal M. On ilmne, et $\mathtt{X} \circ \phi$ on vektorväli koordinaatpinnal $\phi : U \to M$. Vektorvälja $\mathtt{X}$ pinnal M nimetatakse siledaks vektorväljaks, kui pinna suvalise punkti p korral ja selle ümbruses suvalise koordinaatpinna (ϕ, U) korral vektorväli $\mathtt{X} \circ \phi$ parametriseeritud pinnal on sile vektorväli. Siledate vektorväljade pinnal M hulka tähistame $\mathfrak{D}(M)$ ja järgnevas vaatleme ainult siledaid vektorvälju.

Olgu $W \subset E^3$ kolmemõõtmelise ruumi lahtine alamhulk ja $M \subset W$. Olgu $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(W)$ sile vektorväli hulgal W. Kui vektovälja $\mathtt{X}$ ahendame pinnale M, siis $\mathtt{X}|_M$ on vektorväli pinnal M. On lihtne näidata, et $\mathtt{X}|_M$ on sile vektorväli pinnal M.

Olgu M pind. Pinna igas punktis p on määratud pinna puutujatasand T_pM. Moodustame hulga

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM,$$

ja defineerime kujutust $\pi : TM \to M$ järgmiselt: kui $\overrightarrow{s} = (p; \vec{s}) \in T_pM$ on pinna puutujavektor punktis p, siis $\pi(\overrightarrow{s}) = p$. Hulka TM nimetatakse pinna M *puutujakihtkonnaks* ja kujutust $\pi : TM \to M$ nimetatakse puutujakihtkonna *projektsiooniks* pinnale.

Definitsioon 5.1.0.73. Puutujavektorväljaks pinnal M nimetatakse kujutust

$$\mathtt{X} : M \to TM,$$

mis rahuldab tingimust $\pi \circ \mathtt{X} = \mathrm{id}_M$, kus $\mathrm{id}_M : M \to M$ on pinna samasusteisendus. Puutujavektorvälja $\mathtt{X}$ pinnal M nimetatakse siledaks vektorväljaks, kui pinna suvalise punkti p korral ja selle ümbruses suvalise koordinaatpinna (ϕ, U) korral vektorväli $\mathtt{X} \circ \phi$ parametriseeritud pinnal on sile vektorväli.

Vektorvälja $\mathtt{N}$ pinnal M nimetatakse normaalvektorväljaks, kui pinna suvalises punktis p kehtib $\mathtt{N}_p \perp T_pM$. Ühiknormaalvektorvälja pinnal M nimetatakse pinna orientatsiooniks. Kui selline vektorväli leidub, siis pinda M nimetatakse orienteeritavaks pinnaks. Mainime, et suvaline pind M on orienteeritav lokaalselt, st suvalise pinna punkti p ümbruses. Tõepoolest lokaalselt pind on parametriseeritav koordinaatpinna abil, kuid suvaline koordinaatpind on orienteeritav. Kui pind M on joonsidus, siis M on orienteeritav pind ja pinnal eksisteerib ainult kaks orientatsiooni.

5.2 Weingarteni operaator

Antud paragrahvis eeldame, et pind M on orienteeritav pind ja $\mathtt{N}$ on ühiknormaalvektorväli pinnal M.

Vektorvälja pinnal kovariantne tuletis. Olgu p pinna M mingi punkt ja $\mathbf{s} = (p; \vec{s}) \in T_pM$ pinna puutujavektor punktis p. Eelmises paragrahvis tõestatud lausest 5.1.0.61 ja pinna definitsioonist järeldub, et leidub parametriseeritud kõver $\alpha : I \to M$ selline, et $\alpha(0) = p$ ja $\overrightarrow{\alpha}'(0) = \mathbf{s}$.

Definitsioon 5.2.0.74. Olgu f sile funktsioon pinnal M. Funktsiooni suunatuletist $\mathbf{s}[f]$ punktis p puutujavektori $\mathbf{s}$ suunas määratakse valemiga

$$\mathbf{s}[f] = \frac{d}{dt}\big(f(\alpha(t))\big|_{t=0}.$$

Kui $f : W \to \mathbb{R}$ on sile funktsioon, kus $W \subset E^3$ on ruumi lahtine alamhulk, ja $M \subset W$, siis funktsiooni f ahend $\tilde{f} = f|_M$ pinnale M on sile funktsioon pinnal M. Eelmise paragrahvi suunatuletise valemist järeldub, et

$$\mathbf{s}[\tilde{f}] = < \mathbf{s}, \mathrm{grad}\, f|_p > .$$

Kui (ϕ, U) on pinna M parametriseerimine koordinaatpinna abil ja $p = \phi(q), \mathbf{s} = \phi_*(\mathbf{w})$, kus $\mathbf{w} \in T_qE^2$, siis funktsiooni suunatuletise avaldub järgmiselt:

$$\mathbf{s}[f] = \mathbf{w}[f(u, v)]. \tag{5.2.0.15}$$

Olgu $\mathtt{X} \in \mathfrak{D}(M)$ vektorväli pinnal M.

Definitsioon 5.2.0.75. Vektorvälja $\mathtt{X}$ kovariantseks tuletiseks pinna M punktis p nimetatakse

$$\nabla_{\mathbf{s}}\, \mathtt{X} = \frac{d}{dt}\big(\mathtt{X}(\alpha(t))\big|_{t=0}.$$

Kui $\tilde{\mathtt{X}} = \tilde{X}^1\mathtt{U}_1 + \tilde{X}^2\mathtt{U}_2 + \tilde{X}^3\mathtt{U}_3 \in \mathfrak{D}(W)$ on vektorväli ruumi lahtisel hulgal W ja $M \subset W$, siis $\tilde{\mathtt{X}}$ tekitab vektorvälja $\mathtt{X} = \tilde{\mathtt{X}}|_M$ pinnal M. Sellisel juhul kehtib valem

$$\nabla_{\mathbf{s}}\, \mathtt{X} = (p; < \mathbf{s}, \mathrm{grad}\, \tilde{X}^1|_p >, < \mathbf{s}, \mathrm{grad}\, \tilde{X}^2|_p >, < \mathbf{s}, \mathrm{grad}\, \tilde{X}^3|_p >). \tag{5.2.0.16}$$

Olgu (ϕ, U) pinna M koordinaatpind punkti p ümbruses ja $\mathtt{X}(u,v) = \mathtt{X} \circ \phi(u,v) = (\phi(u,v); X^1(u,v), X^2(u,v), X^3(u,v))$. Leidub $\mathbf{w} \in T_qE^2$, kus $\phi(q) = p$, nii, et $\phi_*(\mathbf{w}) = \mathbf{s}$. Valemist (3.2.0.12) järeldub, et sellisel juhul

$$\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{X} = (p; \mathbf{w}[X^1(u,v)], \mathbf{w}[X^2(u,v)], \mathbf{w}[X^3(u,v)]). \tag{5.2.0.17}$$

Kasutades valemit (5.2.0.17), saame näidata, et kovariantsel tuletisel pinnal M on järgmised omadused:

i) kui $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s}, \mathbf{r} \in T_pM$ ja $\mathtt{X}$ on vektorväli pinnal M, siis kehtib

$$\nabla_{a\mathbf{s}+b\mathbf{r}}\,\mathtt{X} = a\,\nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{X} + b\,\nabla_{\mathbf{r}}\,\mathtt{X},$$

ii) kui $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{s} \in T_pM$, $\mathtt{X}, \mathtt{Y}$ on vektorväljad pinnal M, siis kehtib

$$\nabla_{\mathbf{s}}(a \cdot \mathtt{X} + b \cdot \mathtt{Y}) = a \cdot \nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{X} + b \cdot \nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{Y},$$

iii) kui $f \in C^\infty(M)$, $\mathtt{X}$ on vektorväli pinnal M, $\mathbf{s} \in T_pM$, siis kehtib

$$\nabla_{\mathbf{s}}(f \cdot \mathtt{X}) = \mathbf{s}\,[f]\,\mathtt{X}_p + f(p)\,\nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{X},$$

iv) kui $\mathbf{s} \in T_pM, \mathtt{X}, \mathtt{Y} \in \mathfrak{D}(M)$, siis kehtib

$$\mathbf{s}[< \mathtt{X}, \mathtt{Y} >] = < \nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{X}, \mathtt{Y}_p > + < \mathtt{X}_p, \nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{Y} > .$$

Tõestame viimast omadust. Selleks kasutame pinna parametriseerimist koordinaatpinna abil. Olgu (ϕ, U) koordinaatpind punkti p ümbruses. Tähistame $p = \phi(q), \phi_*(\mathbf{w}) = \mathbf{s}$ ja

$$\begin{aligned} \mathtt{X}(u,v) &= \mathtt{X} \circ \phi(u,v) = (\phi(u,v); X^1(u,v), X^2(u,v), X^3(u,v)), \\ \mathtt{Y}(u,v) &= \mathtt{Y} \circ \phi(u,v) = (\phi(u,v); Y^1(u,v), Y^2(u,v), Y^3(u,v)). \end{aligned}$$

Vektorväljade skalaarkorrutis võrdub

$$< \mathtt{X}(u,v), \mathtt{Y}(u,v) > = \sum_{i=1}^{3} X^i(u,v)\,Y^i(u,v). \tag{5.2.0.18}$$

Kasutame valemit (5.2.0.15) ja suunatuletise tasandil E^2 omadisu

$$\begin{aligned} \mathbf{s}[< \mathtt{X}, \mathtt{Y} >] &= \mathbf{w}[< \mathtt{X}(u,v), \mathtt{Y}(u,v) >] \\ &= \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{w}[X^i(u,v)]\;Y^i(q) + X^i(q)\;\mathbf{w}[Y^i(u,v)]).\end{aligned} \tag{5.2.0.19}$$

Teiselt poolt valemist (5.2.0.17) järeldub, et

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{X} &= (p; \mathbf{w}[X^1(u,v)], \mathbf{w}[X^2(u,v)], \mathbf{w}[X^3(u,v)]),\\ \nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{Y} &= (p; \mathbf{w}[Y^1(u,v)], \mathbf{w}[Y^2(u,v)], \mathbf{w}[Y^3(u,v)]).\end{aligned}$$

Siit leiame

$$< \nabla_{\mathbf{s}}\, \mathtt{X}, \mathtt{Y}_p > \;=\; \sum_{i=1}^{3} \mathbf{w}[X^i(u,v)]\, Y^i(q), \tag{5.2.0.20}$$

$$< \mathtt{X}_p, \nabla_{\mathbf{s}}\, \mathtt{Y} > \;=\; \sum_{i=1}^{3} X^i(q)\ \mathbf{w}[Y^i(u,v)]. \tag{5.2.0.21}$$

Valemite (5.2.0.20), (5.2.0.21) summa on võrdne valemiga (5.2.0.19) ja sellega kovariantse tuletise viimane omadus on tõestatud.

Näide 5.2.0.76. Olgu $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ja S_r funktsiooni F tasemepind $S_r = F^{-1}(r^2)$. Tasemepinna definitsioonist järeldub, et tasemepinna S_r võrrand on

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

ja see on sfäär raadiusega r ja keskpunktiga koordinaadisüsteemi alguspunktis. Funktsiooni F gradient $\operatorname{grad} F$ on vektorväli ruumis E^3. Ruumi E^3 lahtisel hulgal $U = E^3 \setminus \{O\}$ moodustame sileda ühikvektorvälja $\mathtt{X}$ järgmiselt:

$$\mathtt{X} = -\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}. \tag{5.2.0.22}$$

Kui ahendame vektorvälja $\mathtt{X}$ sfääri S_r pinnale, siis $\mathtt{N} = \mathtt{X}|_{S_r}$ on ühiknormaalvektorväli sfääril S_r. Seega sfääril S_r on määratud orientatsioon. Mainime, et sfääri igas punktis ühiknormaalvektorväli $\mathtt{N}$ on suunatud sfääri sissepoole.

Arvutame funktsiooni F gradiendi ja selle pikkuse

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} F &= 2x \cdot \mathtt{U}_1 + 2y \cdot \mathtt{U}_2 + 2z \cdot \mathtt{U}_3,\\ |\operatorname{grad} F| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$

Asendades valemisse (5.2.0.22), saame

$$\mathtt{X} = -\frac{x \cdot \mathtt{U}_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y \cdot \mathtt{U}_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z \cdot \mathtt{U}_3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{5.2.0.23}$$

Arvutame vektorvälja $\mathtt{X}$ sfääri punktis p koordinaatidega $(0,0,r)$, see on sfääri "põhjapoolus". Leiame $\mathtt{X}_p = \mathtt{N}_p = (p; 0, 0, -1)$. See on sfääri ühiknormaalvektor punktis p ja suvaline sfääri puutujavektor punktis p on risti vektoriga $\mathtt{N}_p$. Järelikult vektorid kujuga $\mathbf{s} = (p; s_1, s_2, 0)$, kus s_1, s_2 on suvalised reaalarvud, moodustavad sfääri S_r puutujatasandi T_pS_r punktis p.

Olgu $\mathbf{s} = (p; s_1, s_2, 0)$ sfääri suvaline puutujavektor punktis p. Arvutame ühiknormaalvektorvälja kovariantse tuletise $\nabla_{\mathbf{s}}\,\mathtt{N}$ punktis p. Selleks kasutame valemit (5.2.0.16). Olgu X^1, X^2, X^3 vektorvälja $\mathtt{X}$ komponendid. Leiame

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} X^1 &= -\frac{(y^2+z^2)\cdot \mathtt{U}_1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{xy\cdot \mathtt{U}_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{xz\cdot \mathtt{U}_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
\operatorname{grad} X^2 &= \frac{(xy)\cdot \mathtt{U}_1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{(x^2+z^2)\cdot \mathtt{U}_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{yz\cdot \mathtt{U}_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
\operatorname{grad} X^3 &= \frac{(xz)\cdot \mathtt{U}_1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{(yz)\cdot \mathtt{U}_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{(x^2+y^2)\cdot \mathtt{U}_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Leitud valemitest järeldub, et

$$(\operatorname{grad} X^1)_p = -\frac{1}{r}\cdot (U_1)_p,\quad (\operatorname{grad} X^2)_p = -\frac{1}{r}\cdot (U_2)_p,\quad (\operatorname{grad} X^3)_p = \overrightarrow{0},$$

ja

$$\begin{aligned}
< \mathbf{s}, (\operatorname{grad} X^1)_p > &= -\frac{1}{r}\, s_1,\\
< \mathbf{s}, (\operatorname{grad} X^2)_p > &= -\frac{1}{r}\, s_2,\\
< \mathbf{s}, (\operatorname{grad} X^3)_p > &= 0.
\end{aligned}$$

Ühiknormaalvektorvälja $\mathtt{N}$ kovariantne tuletis punktis p võrdub

$$\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N} = (p; -\frac{1}{r}\, s_1, -\frac{1}{r}\, s_2, 0) = -\frac{1}{r}\,\mathbf{s}. \qquad (5.2.0.24)$$

Leitud kovariantne tuletis näitab, et $(\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N})_p \in T_pS_r$, st sfääri ühiknormaalvektorvälja kovariantne tuletis punktis p on puutujavektor samas punktis p. $\diamond$

Olgu M orienteeritud pind orientatsiooniga $\mathtt{N}$, $p \in M$ pinna mingi punkt, T_pM pinna puutujatasand ja $\mathbf{s} \in T_pM$ pinna puutujavektor punktis p.

Lemma 5.2.0.77. *Suvalise pinna M puutujavektori $\mathbf{s}$ korral $\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}$ on pinna puutujavektor, st $\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N} \in T_pM$. Puutujatasandi teisendus $\mathbf{s} \mapsto \nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}$ on lineaarteisendus.*

Tõestus. Pinna suvalises punktis kehtib $|\mathtt{N}|^2 =< \mathtt{N}, \mathtt{N} >= 1$. Kasutades vektorvälja pinnal kovariantse tuletise punktis p viimast omadust, leiame

$$\mathbf{s}[< \mathtt{N}, \mathtt{N} >] =< \nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}, \mathtt{N}_p > + < \mathtt{N}_p, \nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N} >= 2 < N_p, \nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N} > .$$

Funktsioon $<\mathtt{N},\mathtt{N}>=1$ on konstantne ja seega valemi vasakpool on võrdne nulliga, kust järeldub

$$<\mathtt{N}_p,\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}>=0,$$

ja $\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}\perp\mathtt{N}_p$. Seega $\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}>\in T_pM$. Puutujatasandi teisenduse $\mathbf{s}\mapsto\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}$ lineaarsus järeldub kovariantse tuletise omadustest. □

Definitsioon 5.2.0.78. Orienteeritud pinna M puutujatasandi T_pM lineaarteisendust $\mathbf{s}\mapsto-\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}$ nimetatakse *Weingarteni operaatoriks* punktis p ja tähistatakse $\mathfrak{S}_p(\mathbf{s})=-\nabla_{\mathbf{s}}\mathtt{N}$.

Näites 5.2.0.76 leitud valemist järeldub, et sfääri S_r Weingarteni operaator sfääri põhjapooluses on võrdne $\mathfrak{S}_p(\mathbf{s})=\frac{1}{r}\mathbf{s}$.

Teoreem 5.2.0.79. *Olgu M pind, $\mathtt{N}$ pinna orientatsioon, p pinna punkt ja $\mathbf{s}\in T_pM$ pinna puutujavektor punktis p. Olgu $\alpha:I\to M$ parametriseeritud kõver pinnal M selline, et $\alpha(0)=p,\alpha'(0)=\mathbf{s}$. Kehtib*

$$<\alpha''(0),\mathtt{N}_p>=<\mathfrak{S}_p(\mathbf{s}),\mathbf{s}>.$$

Teoreem 5.2.0.80. *Olgu M pind, $\mathtt{N}$ pinna orientatsioon, $p\in M$ pinna suvaline punkt. Weingarteni operaator $\mathfrak{S}_p:T_pM\to T_pM$ on sümmeetriline operaator, st suvaliste pinna M puutujavektorite $\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2$ korral kehtib*

$$<\mathfrak{S}_p(\mathbf{s}_1),\mathbf{s}_2>=<\mathbf{s}_1,\mathfrak{S}_p(\mathbf{s}_2)>.$$

Tõestus. Tõestame kasutades pinna lokaalset parametriseerimist. Olgu $\phi:U\to M$ pinna M koordinaatpind pinna punkti p ümbruses ja $\phi(q)=p, q\in U\subset E^2$. Ühiknormaalvektorvälja $\mathtt{N}$ parametriseerimist pinna lokaalse koordinaatpinna ϕ abil tähistame $\mathtt{N}(u,v)=\mathtt{N}(\phi(u,v))$. Tuletame meelde, et $\phi'_u=\phi_*(\mathtt{U}_1),\phi'_v=\phi_*(\mathtt{U}_2)$ on pinna M lokaalsed puutujavektorväljad. On ilmne, et teoreem on tõestatud, kui näitame, et kehtib

$$<\mathfrak{S}_p(\phi'_u),\phi'_v>=<\phi'_u,\mathfrak{S}_p(\phi'_v)>. \tag{5.2.0.25}$$

Kasutades Weingarteni operaatori definitsiooni selle valemi võime kirjutada kujul

$$<\nabla_{\phi'_u}\mathtt{N},\phi'_v>=<\phi'_u,\nabla_{\phi'_v}\mathtt{N}>.$$

Olgu $\mathbf{e}_1=(q;1,0)\in T_qE^2,\mathbf{e}_2=(q;0,1)\in T_qE^2$. Kehtivad valemid

$$\nabla_{\phi'_u}\mathtt{N}=\nabla_{\mathbf{e}_1}\mathtt{N}(u,v),\quad \nabla_{\phi'_v}\mathtt{N}=\nabla_{\mathbf{e}_2}\mathtt{N}(u,v). \tag{5.2.0.26}$$

Olgu $N^1(u,v), N^2(u,v), N^3(u,v)$ ühiknormaalvektorvälja $\mathtt{N}$ komponendid (lokaalses parametriseerimises koordinaatpinna ϕ abil). Siis

$$\begin{aligned} \nabla_{\phi'_u}\mathtt{N} &= (p; <\mathbf{e}_1, \mathrm{grad}\, N^1|_q>, <\mathbf{e}_1, \mathrm{grad}\, N^2|_q>, <\mathbf{e}_1, \mathrm{grad}\, N^3|_q>) \\ &= (p;\ \frac{\partial N^1}{\partial u}\Big|_q, \frac{\partial N^2}{\partial u}\Big|_q, \frac{\partial N^3}{\partial u}\Big|_q) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}(\mathtt{N})\Big|_q = \mathtt{N}'_u(q), \end{aligned} \tag{5.2.0.27}$$

ja analoogiliselt

$$\nabla_{\phi'_v}\mathtt{N} = \mathtt{N}'_v(q). \tag{5.2.0.28}$$

Seega teoreem on tõestatud, kui näitame

$$< \mathtt{N}'_u(q), \phi'_v > = < \mathtt{N}'_v(q), \phi'_u > .$$

Meenutame, et $\mathtt{N}$ on pinna ühiknormaalvektorväli ja ϕ'_u, ϕ'_v on pinna puutujavektorväljad. Seega U igas punktis kehtib

$$< \mathtt{N}(u,v), \phi'_u > = 0, \quad < \mathtt{N}(u,v), \phi'_v > = 0.$$

Diferentseerime esimest võrdsust parameetri v järgi ja teist võrdsust parameetri u järgi. Saame

$$< \mathtt{N}'_u(q), \phi'_v > = - < \mathtt{N}(u,v), \phi''_{uv} >, \quad < \mathtt{N}'_v(q), \phi'_u > = - < \mathtt{N}(u,v), \phi''_{uv} > . \tag{5.2.0.29}$$

Teist järku osatuletiste omadusest

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,(g(u,v)) = \frac{\partial^2}{\partial v\,\partial u}\,(g(u,v)),$$

kus $g(u,v)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon, järeldub, et $\phi''_{uv} = \phi''_{vu}$ ja

$$< \mathtt{N}'_u(q), \phi'_v > = < \mathtt{N}'_v(q), \phi'_u > . \quad \square$$

Pinna fundamentaalvormid ja Weingarteni valemid. Olgu (ϕ, U) pinna M lokaalne parametriseerimine pinna punkti $p \in M$ ümbruses. Olgu $\tilde{\alpha} : I \to U \subset E^2$ parametriseeritud kõver, $\tilde{\alpha}(0) = q$, $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$, $\phi(q) = p$. Siis $\alpha = \phi \circ \tilde{\alpha} : I \to M$ on parametriseeritud kõver pinnal M ja α läbib pinna punkti p, st $\alpha(0) = p$. Kõvera α kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ on pinna M puutujavektor punktis $\alpha(t) \in M$, st $\overrightarrow{\alpha}'(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Pinna punkti p ümbruse $\phi(U) \subset M$ parametriseerimine määrab kahte vektorvälja ϕ'_u, ϕ'_v. Pinna suvalises punktis $q \in \phi(U)$ puutujavektorid $\phi'_u\big|_q, \phi'_v\big|_q$ on lineaarselt sõltumatud ja moodustavad puutujatasandi rihi. Seega suvaline puutujavektor on puutujavektorite $\phi'_u\big|_q, \phi'_v\big|_q$ lineaarkombinatsioon. Seega parametriseeritud kõvera igas punktis kehtib

$$\overrightarrow{\alpha}'(t) = \frac{du}{dt}\,\phi'_u + \frac{dv}{dt}\,\phi'_v.$$

Puutujavektori $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ pikkuse ruut avaldub järgmiselt

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\alpha}'(t)|^2 &= <\phi'_u, \phi'_u> \Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 + 2 <\phi'_u, \phi'_v> \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + <\phi'_v, \phi'_v> \Big(\frac{dv}{dt}\Big)^2 \\ &= E\Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 + 2F\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + G\Big(\frac{dv}{dt}\Big)^2 \qquad (5.2.0.30) \end{aligned}$$

Tähistame $g(du, dv) = E\,(du)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,(dv)^2$. On ilmne, et pinna parametriseeritud kõvera $\alpha(t)$ suvalises punktis $g(du, dv)$ on ruutvorm. Valemi (5.2.0.30) võime kirjutada kujul

$$|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^2\,dt^2 = g(du, dv).$$

Tuletame meelde, et korrutis $|\overrightarrow{\alpha}'(t)|\,dt$ on parametriseeritud kõvera kaarepikkuse diferentsiaal ja parametriseeritud kõvera kaarepikkuse diferentsiaali tähistatakse ds. Seega leidsime, et pinna parametriseeritud kõvera kaarepikkuse diferentsiaali ruut avaldub järgmiselt

$$ds^2 = g(du, dv) \qquad (5.2.0.31)$$

Definitsioon 5.2.0.81. Pinna ruutvormi $g(du, dv) = E\,(du)^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,(dv)^2$ nimetatakse pinna *esimeseks fundamentaalvormiks* pinna lokaalses parametriseerimises (ϕ, U). Kordajad E, F, G on pinna parameetrite u, v diferentseeruvad funktsioonid ja neid nimetatakse esimese fundamentaalvormi kordajateks.

Pind asub kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E^3 ja ruumi eukleidiline struktuur pinna suvalises punktis tekitab eukleidilist struktuuri pinnal. Pinna esimene fundamentaalvorm näitab, kuidas pinna eukleidilise struktuuri karakteristikud, st pikkused ja nurgad, avalduvad pinna lokaalse parametriseerimise parameetrite kaudu.

Moodustame skalaarkorrutise $<\mathfrak{S}_p(\overrightarrow{\alpha}'(t)), \overrightarrow{\alpha}'(t)>$. Kehtib

$$\begin{aligned} <\mathfrak{S}_p(\overrightarrow{\alpha}'(t)), \overrightarrow{\alpha}'(t)> &= <\mathfrak{S}_p\Big(\frac{du}{dt}\,\phi'_u + \frac{dv}{dt}\,\phi'_v\Big)\frac{du}{dt}\,\phi'_u + \frac{dv}{dt}\,\phi'_v>, \\ &= <\mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_u> \Big(\frac{du}{dt}\Big)^2 + 2\,<\mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_v> \frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} \\ &\quad + <\mathfrak{S}_p(\phi'_v), \phi'_v> \Big(\frac{dv}{dt}\Big)^2. \qquad (5.2.0.32) \end{aligned}$$

Selle valemi vasakut poolt võime vaadelda ruutvormina, mille muutujad on parameetrite u, v diferentsiaalid du, dv. Tähistame vastavat ruutvormi $h(du, dv) = l\ du^2 + 2m\ du\, dv + n\ dv^2$, kus

$$l =< \mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_u >, \quad m =< \mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_v >, \quad n =< \mathfrak{S}_p(\phi'_v), \phi'_v > . \tag{5.2.0.33}$$

Valemi (5.2.0.32) võime nüüd kirjutada kujul

$$< \mathfrak{S}_p(\overrightarrow{\alpha}'(t)), \overrightarrow{\alpha}'(t) > \ dt^2 = h(du, dv). \tag{5.2.0.34}$$

Definitsioon 5.2.0.82. Ruutvormi $h(du, dv) = l\ du^2 + 2m\ du\, dv + n\ dv^2$ nimetatakse pinna *teiseks fundamentaalvormiks*. Parameetritest u, v sõltuvaid funktsioone l, m, n nimetatakse teise fundamentaalvormi kordajateks.

Teoreemi (5.2.0.80) tõestuses on tuletatud valemid (5.2.0.27), (5.2.0.28)

$$\mathfrak{S}_p(\phi'_u) = -\mathtt{N}'_u, \ \ \mathfrak{S}_p(\phi'_v) = -\mathtt{N}'_v, \tag{5.2.0.35}$$

ja valemid (5.2.0.29)

$$< \mathtt{N}'_u, \phi'_v >= - < \mathtt{N}, \phi''_{uv} >, \ \ < \mathtt{N}'_v, \phi'_u >= - < \mathtt{N}, \phi''_{uv} > .$$

Analoogiliselt saab näidata, et kehtivad

$$< \mathtt{N}'_u, \phi'_u >= - < \mathtt{N}, \phi''_{uu} >, \ \ < \mathtt{N}'_v, \phi'_v >= - < \mathtt{N}, \phi''_{vv} > .$$

Kasutades neid valemeid, võime leida teise fundamentaalvormi kordajate arvutamisevalemid pinna lokaalses parametriseerimises. Tõepoolest

$$\begin{aligned} l &= < \mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_u >= - < \mathtt{N}'_u, \phi'_u >=< \mathtt{N}, \phi''_{uu} >, && (5.2.0.36)\\ m &= < \mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_v >= - < \mathtt{N}'_u, \phi'_v >=< \mathtt{N}, \phi''_{uv} >, && (5.2.0.37)\\ n &= < \mathfrak{S}_p(\phi'_v), \phi'_v >= - < \mathtt{N}'_v, \phi'_v >=< \mathtt{N}, \phi''_{vv} > . && (5.2.0.38) \end{aligned}$$

Olgu

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Weingarteni operaatori maatriks pinna mingis punktis p rihis ϕ'_u, ϕ'_v, st

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_p(\phi'_u) &= A_{11}\ \phi'_u + A_{21}\ \phi'_v, && (5.2.0.39)\\ \mathfrak{S}_p(\phi'_v) &= A_{12}\ \phi'_u + A_{22}\ \phi'_v. && (5.2.0.40) \end{aligned}$$

Mainime, et Weingarteni operaator on sümmeetriline operaator, kust järeldub, et A on sümeetriline maatriks, st $A^T = A$. Esimese valemi skalaarselt läbi korrutame vektoriga ϕ'_u ja vektoriga ϕ'_v, ning samad teisendused teeme teise valemiga. Saame

$$\begin{aligned} l &= <\mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_u >= A_{11}\,E + A_{21}\,F, \\ m &= <\mathfrak{S}_p(\phi'_u), \phi'_v >= A_{11}\,F + A_{21}\,G, \\ m &= <\mathfrak{S}_p(\phi'_v), \phi'_u >= A_{12}\,E + A_{22}\,F, \\ n &= <\mathfrak{S}_p(\phi'_v), \phi'_v >= A_{12}\,F + A_{22}\,G. \end{aligned}$$

Kirjutame maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Siit avaldame

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}. \tag{5.2.0.41}$$

Arvutame pöördmaatriksi

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}. \tag{5.2.0.42}$$

Teoreemi (5.2.0.80) tõestuses on näidatud, et $\nabla_{\phi'_u}\mathtt{N} = \mathtt{N}'_u, \nabla_{\phi'_v}\mathtt{N} = \mathtt{N}'_v$, kust järeldub

$$\mathfrak{S}_p(\phi'_u) = -\mathtt{N}'_u, \quad \mathfrak{S}_p(\phi'_v) = -\mathtt{N}'_v.$$

Asendades valemisse (5.2.0.39),(5.2.0.40) ja kasutades (5.2.0.41), (5.2.0.42), leiame

$$-\mathtt{N}'_u = A_{11}\,\phi'_u + A_{21}\,\phi'_v = \frac{lG - mF}{EG - F^2}\,\phi'_u + \frac{mE - lF}{EG - F^2}\,\phi'_v, \tag{5.2.0.43}$$

$$-\mathtt{N}'_v = A_{12}\,\phi'_u + A_{22}\,\phi'_v = \frac{mG - nF}{EG - F^2}\,\phi'_u + \frac{nE - mF}{EG - F^2}\,\phi'_v. \tag{5.2.0.44}$$

Valemeid (5.2.0.43), (5.2.0.44) nimetatakse *Weingarteni valemiteks.*

Peatükk 6

Kõverused

6.1 Normaalkõverus ja peakõverused

Definitsioon 6.1.0.83. Olgu M pind, p pinna M mingi punkt ja $\mathbf{s} \in T_pM$ pinna ühikpuutujavektor punktis p, st $|\mathbf{s}| = 1$. Pinna *normaalkõveruseks punktis p puutujavektori* $\mathbf{s}$ *sihis nimetatakse reaalarvu*

$$k_p(\mathbf{s}) =< \mathfrak{S}_p(\mathbf{s}), \mathbf{s} > .$$

Pinna ühikpuutujavektorite (punktis p) lõpp-punktid moodustavad ringjoone $S^1_p = \{\mathbf{s} \in T_pM : |\mathbf{s}| = 1\}$. Pinna normaalkõverust punktis p võime vaadelda funktsioonina $k_p : S^1_p \to \mathbb{R}$ ringjoonel S^1_p. On ilmne, et $k_p(\mathbf{s})$ on pidev funktsioon ja S^1_p on puutujatasandi kompaktne alamhulk. Seega leidub pinna M ühikpuutujavektor $\mathbf{s}_1$ punktis p, mille korral normaalkõveruse väärtus $k_p(\mathbf{s}_1)$ on maksimaalne ja analoogiliselt leidub teine pinna M ühikpuutujavektor $\mathbf{s}_2$ selline, et normaalkõveruse väärtus $k_p(\mathbf{s}_2)$ on minimaalne.

Definitsioon 6.1.0.84. Pinna M normaalkõveruse $k_p(\mathbf{s})$ maksimaalset väärtust $k_1(p) = k_p(\mathbf{s}_1)$ ja minimaalset väärtust $k_2(p) = k_p(\mathbf{s}_2)$ punktis p nimetatakse pinna *peakõverusteks pinna punktis p.* Ühikpuutujavektoreid $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ nimetatakse pinna *peasihtideks pinna punktis p.* Kui pinna punktis p normaalkõverus $k_p : S^1_p \to \mathbb{R}$ on konstantne funktsioon, siis punkti p nimetatakse pinna *ümaruspunktiks.*

Teoreem 6.1.0.85. *Olgu M pind, p pinna punkt, k_1, k_2 pinna peakõverused punktis p ning $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ pinna peasihid punktis p.*

1. *Kui p on pinna ümaruspunkt, siis $k_1(p) = k_2(p) = k_p$ ja suvalise pinna puutujavektori $\mathbf{s} \in T_pM$ korral kehtib $\mathfrak{S}_p(\mathbf{s}) = k_p\,\mathbf{s}$;*

2. *Kui p ei ole ümaruspunkt, siis $k_1(p) \neq k_2(p)$, peakõverused $k_1(p), k_2(p)$ on Weingarteni operaatori omaväärtused ning peasihid $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ on vastavad omavektorid, st kehtib*

$$\mathfrak{S}_p(\mathbf{s}_1) = k_1(p)\,\mathbf{s}_1, \quad \mathfrak{S}_p(\mathbf{s}_2) = k_2(p)\,\mathbf{s}_2.$$

Tõestus.

1. Oletame, et p on pinna ümaruspunkt. Siis pinna normaalkõverus $k_p(\mathbf{s})$ ei sõltu puutujatasandi sihist $\mathbf{s}$ ja normaalkõverust võime tähistada k_p. Järelikult suvalise puutujavektori $\mathbf{s}$ korral kehtib $< \mathfrak{S}_p(\mathbf{s}), \mathbf{s} >= k_p$. Olgu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ puutujatasandi T_pM mingi ristreeper, st vektorite $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ alguspunkt on puutujatasandi T_pM puutepunkt p, vektorid $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ on ühikvektorid ja $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Weingarteni operaatori $\mathfrak{S}_p$ maatriks ristreeperis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Maatriks A on sümmeetriline maatriks, st $A^T = A$ või $A_{12} = A_{21}$. Kehtib

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1) &= A_{11}\,\mathbf{e}_1 + A_{21}\,\mathbf{e}_2, \\ \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_2) &= A_{12}\,\mathbf{e}_1 + A_{22}\,\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Esimest valemit skalaarselt korrutame vektoriga $\mathbf{e}_1$ ja teist valemit skalaarselt korrutame vektoriga $\mathbf{e}_2$. Saame

$$A_{11} = A_{22} = k_p.$$

Nüüd korrutame esimest valemit vektoriga $\mathbf{e}_2$ (või teist valemit vektoriga $\mathbf{e}_2$). Saame $A_{21} =< \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 >$. Moodustame puutujavektori

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}.$$

See on ühikvektor $|\mathbf{s}| = 1$. Järelikult $< \mathfrak{S}_p(\mathbf{s}, \mathbf{s}) >= k_p$. Teiselt poolt

$$\begin{aligned} < \mathfrak{S}_p(\mathbf{s}, \mathbf{s}) > &= < \mathfrak{S}_p(\frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}), \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} > \\ &= \frac{1}{2}(< \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 > +2 < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 > + < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 >) \\ &= \frac{1}{2}(k_p + 2 < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 > + k_p) = k_p + < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 > . \end{aligned}$$

Siit järeldub, et $k_p + < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 >= k_p$, seega $< \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 >= 0$ ja $A_{12} = A_{21} = 0$. Leidsime, et Weingarteni operaatori maatriksi kuju on

$$A = \begin{pmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_p \end{pmatrix}.$$

Suvalise puutujavektori $\mathbf{s} = s_1\,\mathbf{e}_1 + s_2\,\mathbf{e}_2$ korral kehtib

$$\mathfrak{S}_p(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_p\,s_1 \\ k_p\,s_2 \end{pmatrix} = k_p\,\mathbf{s},$$

ja teoreemi esimene punkt on tõestatud.

2. Oletame, et p ei ole ümaruspunkt. Järelikult $k_1(p) \neq k_2(p)$. Leidub ühikpuutujavektor $\mathbf{e}_1 \in T_pM$, mille korral normaalkõveruse $k_p(\mathbf{s})$, kui ühikpuutujavektori $\mathbf{s}$ funktsiooni, väärtus on maksimaalne, st $k_p(\mathbf{e}_1) =< \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 >= k_1(p)$. Vektori $\mathbf{e}_1$ võtame puutujatasandi ristreeperi esimeseks vektoriks. Ristreeperi teiseks vektoriks võtame ühikvektori $\mathbf{e}_2$, kus $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_1$ ja vektorid $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ moodustavad puutujatasandi parema käe orientatsiooniga ristreeperi. Mainime, et selliste tingimustega vektor $\mathbf{e}_2$ on üheselt määratud.

Olgu

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Weingarteni operaatori maatriks ristreeperis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Tõestuse esimesest punktist järeldub, et $A_{11} =< S_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 >= k_1(p)$, $A_{12} = A_{21}$ ja $A_{22} =< \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 >$.

Suvalise ühikpuutujavektori $\mathbf{s} \in T_pM$ saame kirjutada kujul

$$\mathbf{s} = \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \tag{6.1.0.1}$$

kusjuures igale väärtusele $\varphi \in [0, 2\pi)$ vastab üks ja ainult üks ühikpuutujavektor. Järelikult normaalkõverust võime vaadelda parameetri φ funktsioonina ja vastavat funktsiooni tähistame $k_p(\varphi)$. Selle funktsiooni määramispiirkond on poollõik $[0, 2\pi)$. Tuletame meelde, et pinna normaalkõverus pinna punktis p sõltub ainult ühikpuutujavektori $\mathbf{s}$ poolt määratud sihist, st $k_p(\mathbf{s}) = k_p(-\mathbf{s})$. See näitab, et funktsioon $k_p(\varphi)$ on perioodiline funktsioon, st $k_p(\varphi + \pi) = k_p(\varphi)$. Seega piisab, kui uurime funktsiooni $k_p(\varphi)$ poollõigul $[0, \pi)$. Kasutades ühikpuutujavektorite parametriseerimist (6.1.0.1), leiame funktsiooni $k_p(\varphi)$ kuju

$$\begin{aligned} k_p(\varphi) &= < \mathfrak{S}_p(\cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2), \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{e}_2 > \\ &= \cos^2\varphi < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1 > + 2\sin\varphi\cos\varphi < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_2 > \\ &\qquad + \sin^2\varphi < \mathfrak{S}_p(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_2 > \\ &= \cos^2\varphi\, k_1(p) + 2\,\sin\varphi\cos\varphi\, A_{12} + \sin^2\varphi\, A_{22}. \end{aligned} \tag{6.1.0.2}$$

Siit leiame, et $k_p(0) = k_1(p)$. Seega punkt $\varphi = 0$ on funktsiooni $k_p(\varphi)$ maksimumpunkt. Järelikult funktsiooni tuletis φ järgi selles punktis on null. Leiame tuletise

$$\frac{d}{d\varphi}(k_p(\varphi)) = 2\sin\varphi\cos\varphi\,(-k_1(p) + A_{22}) + 2\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,A_{12},$$

ja punktis $\varphi = 0$ tuletis on $2\,A_{12}$. Seega $A_{12} = A_{21} = 0$ ja funktsiooni ning selle tuletise kuju on

$$k_p(\varphi) = \cos^2\varphi\,(k_1(p) - A_{22}) + A_{22}, \quad \frac{d}{d\varphi}(k_p(\varphi)) = \sin 2\varphi\,(A_{22} - k_1(p)).$$

Teisest valemist järeldub, et $A_{22} < k_1(p)$. Tõepoolest $k_1(p)$ on funktsiooni $k_p(\varphi)$ maksimaalne väärtus ja seega $A_{22} \leq k_1(p)$. Kuid A_{22} ei saa olla võrdne $k_1(p)$, sest siis funktsiooni $k_p(\varphi)$ tuletis φ järgi on samaselt võrdub nulliga (tuletise valem) ja järelikult funktsioon on konstantne ning p on pinna ümaruspunkt. See on vastuolus tõestuse teise punkti eeldusega. Seega $A_{22} < k_1(p)$ ja $\cos^2\varphi\,(k_1(p) - A_{22}) \geq 0$. Esimesest valemist (funktsiooni kuju) järeldub, et sellisel juhul funktsiooni $k_p(\varphi)$ miinimumpunktid on kohtades, kus $\cos\varphi = 0$. Arvestades, et funktsiooni määramispiirkond on poollõik $[0, \pi)$, näeme, et $\cos\varphi$ on null ainult ühes punktis $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Seega see on miinimumpunkt ja funktsiooni $k_p(\varphi)$ väärtus selles punktis on teine pinna peakõverus $k_2(p)$. Teiselt poolt funktsiooni kujust järeldub, et $k_p(\frac{\pi}{2}) = A_{22}$. Seega $A_{22} = k_2(p)$ ja Weingarteni operaatori maatriksi kuju ristreeperis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ on

$$A = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Antud kuju näitab, et $k_1(p), k_2(p)$ on Weingarteni operaatori omaväärtused ja ristreeperi vektorid $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ on Weingarteni operaatori omavektorid omaväärtustega vastavalt $k_1(p), k_2(p)$. $\square$

6.2 Gaussi ja keskmine kõverus.

Definitsioon 6.2.0.86. Olgu M pind ja p pinna punkt. Pinna *Gaussi kõveruseks* nimetatakse funktsiooni $K : M \to \mathbb{R}$, mille väärtus pinna punktis p on võrdne Weingarteni operaatori determinandiga, st

$$K(p) = \det \mathfrak{S}_p.$$

Pinna *keskmiseks kõveruseks* nimetatakse funktsiooni $H : M \to \mathbb{R}$, mille väärtus pinna punktis p on võrdne Weingarteni operaatori jäljega, st

$$H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathfrak{S}_p.$$

Olgu M orienteeritud pind orientatsiooniga $\mathtt{N}$. Olgu $\mathtt{X}, \mathtt{Y}$ puutujavektorvaljad pinnal M sellised, et pinna suvalises punktis $p \in M$ pinna puutujavektorid $\mathtt{X}_p, \mathtt{Y}_p$ on lineaarselt sõltumatud. Pinna Weingarteni operaator teisendab puutujavektorvälja $\mathtt{X}$ ($\mathtt{Y}$) teiseks pinna puutujavektorväljaks $\mathfrak{S}(\mathtt{X})$ ($\mathfrak{S}(\mathtt{Y})$).

Teoreem 6.2.0.87. *Kehtivad valemid*

$$\mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y}) = K \cdot \mathtt{X} \times \mathtt{Y}, \tag{6.2.0.3}$$

$$\mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathtt{Y} + \mathtt{X} \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y}) = 2\,H \cdot \mathtt{X} \times \mathtt{Y}. \tag{6.2.0.4}$$

Tõestus. Pinna suvalises punktis p puutujavektorid $\mathtt{X}_p, \mathtt{Y}_p$ on lineaarselt sõltumatud, järelikult nad moodustavad puutujatasandi T_pM reeperi ja suvaline pinna puutujavektor punktis p on vektorite $\mathtt{X}_p, \mathtt{Y}_p$ lineaarkombinatsioon. Seega, kui $\mathtt{Z}$ on pinna M puutujavektorväli, siis $\mathtt{Z}$ on esitatav kujul $\mathtt{Z} = f \cdot \mathtt{X} + g \cdot \mathtt{Y}$, kus f, g on siledad funktsioonid pinnal M. Ülalpool on mainitud, et $\mathfrak{S}(\mathtt{X}), \mathfrak{S}(\mathtt{Y})$ on pinna puutujavektorväljad, järelikult võime kirjutada

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\mathtt{X}) &= f_{11} \cdot \mathtt{X} + f_{21} \cdot \mathtt{Y}, \\ \mathfrak{S}(\mathtt{Y}) &= f_{12} \cdot \mathtt{X} + f_{22} \cdot \mathtt{Y}, \end{aligned}$$

kus f_{ij} on siledad funktsioonid pinnal M. Weingarteni operaatori maatriks reeperväljas $\{\mathtt{X}, \mathtt{Y}\}$ on

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

Järelikult pinna M Gaussi kõverus on funktsioon $K = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}$ ja pinna keskmine kõverus on funktsioon $H = f_{11} + f_{22}$. Arvutame vektorväljade vektorkorrutise $\mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y})$. Leiame

$$\mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y}) = (f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})\, \mathtt{X} \times \mathtt{Y} = K \cdot \mathtt{X} \times \mathtt{Y},$$

ja sellega esimene valem on tõestatud.

Teise valemi tõestamiseks arvutame vektorkorrutise

$$\mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathtt{Y} \;=\; (f_{11} \cdot \mathtt{X} + f_{21} \cdot \mathtt{Y}) \times \mathtt{Y} = f_{11} \cdot \mathtt{X} \times \mathtt{Y}.$$

Analoogiliselt $\mathtt{X} \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y}) = f_{22} \cdot \mathtt{X} \times \mathtt{Y}$, kust järeldub teine valem. $\square$

Teoreemist järeldub, et pinna Gaussi ja keskmise kõveruse võime arvutada järgmiste valemite järgi

$$K = \frac{< \mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y}), \mathtt{X} \times \mathtt{Y} >}{|\mathtt{X} \times \mathtt{Y}|^2}, \tag{6.2.0.5}$$

$$H = \frac{< \mathfrak{S}(\mathtt{X}) \times \mathtt{Y} + \mathtt{X} \times \mathfrak{S}(\mathtt{Y}), \mathtt{X} \times \mathtt{Y} >}{2\,|\mathtt{X} \times \mathtt{Y}|^2}. \tag{6.2.0.6}$$

Analüütilises geomeetrias tõestatakse, et suvaliste kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ korral kehtib Lagrange'i samasus

$$< \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} >= \begin{vmatrix} < \vec{a}, \vec{c} > & < \vec{a}, \vec{d} > \\ < \vec{b}, \vec{c} > & < \vec{b}, \vec{d} > \end{vmatrix}. \tag{6.2.0.7}$$

Kasutades Lagrange'i samasust, võime Gaussi kõveruse valemi (6.2.0.5) kirjutada kujul

$$K = \frac{\begin{vmatrix} < \mathfrak{S}(\mathtt{X}), \mathtt{X} > & < \mathfrak{S}(\mathtt{X}), \mathtt{Y} > \\ < \mathfrak{S}(\mathtt{Y}), \mathtt{X} > & < \mathfrak{S}(\mathtt{Y}), \mathtt{Y} > \end{vmatrix}}{|\mathtt{X}|^2|\mathtt{Y}|^2 - (< \mathtt{X}, \mathtt{Y} >)^2}. \tag{6.2.0.8}$$

Analoogiliselt keskmise kõveruse valemi kirjutame kujul

$$H = \frac{\begin{vmatrix} < \mathfrak{S}(\mathtt{X}), \mathtt{X} > & < \mathfrak{S}(\mathtt{X}), \mathtt{Y} > \\ < \mathtt{Y}, \mathtt{X} > & |\mathtt{Y}|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} < |\mathtt{X}|^2 & < \mathtt{X}, \mathtt{Y} > \\ < \mathfrak{S}(\mathtt{Y}), \mathtt{X} > & < \mathfrak{S}(\mathtt{Y}), \mathtt{Y} > \end{vmatrix}}{2\,(|\mathtt{X}|^2|\mathtt{Y}|^2 - (< \mathtt{X}, \mathtt{Y} >)^2)}. \tag{6.2.0.9}$$

Leiame pinna Gaussi ja keskmise kõveruse kasutades pinna parametriseerimist. Olgu $\phi : U \to E^3$ kas regulaarne parametriseeritud pind või pinna lokaalne parametriseerimine pinna mingi punkti ümbruses (koordinaatpind). Vektorväljad ϕ'_u, ϕ'_v on parametriseeritud pinna puutujavektorväljad ja pinna igas punktis $p = \phi(q), q \in U$ puutujavektorid $\phi'_u|_q, \phi'_v|_q$ on lineaarselt sõltumatud. Järelikult teoreemi (6.2.0.87) tingimused on täidetud ja Gaussi ning keskmise kõveruse arvutamiseks võime kasutada valemeid (6.2.0.8), (6.2.0.9). Saame

$$K = \frac{\begin{vmatrix} < \mathfrak{S}(\phi'_u), \phi'_u > & < \mathfrak{S}(\phi'_u), \phi'_v > \\ < \mathfrak{S}(\phi'_v), \phi'_u > & < \mathfrak{S}(\phi'_v), \phi'_v > \end{vmatrix}}{|\phi'_u|^2|\phi'_v|^2 - (< \phi'_u, \phi'_v >)^2} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}. \tag{6.2.0.10}$$

Analoogiliselt leiame valemi keskmise kõveruse jaoks

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2\,(EG - F^2)}. \tag{6.2.0.11}$$

Weingarteni pind ja minimaalpind.

Definitsioon 6.2.0.88. Olgu M pind, K pinna Gaussi kõverus ja H pinna kesmine kõverus. Kui pinna Gaussi ja keskmise kõveruse vahel kehtib funktsionaalne seos $f(H,K)=0$, siis pinda M nimetatakse *Weingarteni pinnaks* või W-pinnaks.

Weingarteni pinna definitsiooni võib sõnastada kasutades pinna peakõverusi. Olgu k_1, k_2 pinna M peakõverused. Pind M on Weingarteni pind, kui pinna peakõveruste vahel kehtib mingi seos, st kui leidub sile kahemuutuja funktsioon f selline, et pinna suvalises punktis $f(k_1,k_2)=0$. Näiteks, olgu $f(k_1,k_2)=k_1+k_2$. Sellisel juhul pinna suvalises punktis peakõverused rahuldavad tingimust $k_1+k_2=0$ ja vastavat Weingarteni pinda nimetatakse *minimaalpinnaks.* Arvestades, et $H=\frac{k_1+k_2}{2}$ näeme, et minimaalpind on pind, mille keskmine kõverus pinna igas punktis on null, st $H=0$. Minimaalpinnad on Weingarteni pindade klassi väga tähtis alamklass. Teine tuntud alamklass on konstantse Gaussi kõverusega pinnad. Olgu $f(k_1,k_2)=k_1\,k_2-c$, kus c on mingi konstant. Weingarteni pinda, mis rahuldab tingimust $k_1\,k_2-c=0$ nimetatakse *konstantse Gaussi kõverusega pinnaks.* Tõepoolest peakõveruste korrutis on võrdne pinna Gaussi kõverusega ja tingimus $k_1\,k_2-c=0$ on samaväärne sellega, et Gaussi kõverus on konstantne $K\equiv c$.

Definitsioon 6.2.0.89. Pinda M nimetatakse *tasaseks pinnaks*, kui pinna suvalises punktis Gaussi kõverus on null, st $K(p)=0, \forall p\in M$.

Mainime, et kaasaegse diferentsiaalgeomeetria üheks lahtiseks probleemiks on Weingarteni pindade klassifikatsioon [5].

Näide 6.2.0.90. *Kruuvipinnaks* nimetatakse parametriseeritud pinda

$$\phi(u,v)=(u\,\cos v, u\,\sin v, b\,v),$$

kus $u\geq 0, -\infty\leq v\leq\infty$ ja $b>0$ on konstantne reaalarv. Arvutame kruuvipinna Gaussi ja keskmise kõveruse. Leiame

$$\phi'_u=(\phi(u,v);\cos v,\sin v,0),\quad \phi'_v=(\phi(u,v);-u\,\sin v,u\,\cos v,b).$$

Seega esimese fundamentaalvormi kordajad on

$$E=|\phi'_u|^2=1,\quad F=<\phi'_u,\phi'_v>=0,\quad G=|\phi'_v|^2=u^2+b^2,$$

ja $EG-F^2=u^2+b^2$.

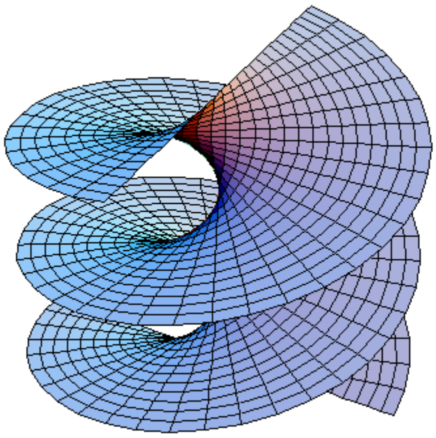
Teise fundamentaalvormi kordajate leidmiseks kasutame (5.2.0.36)-(5.2.0.38). Selleks peab olema leitud pinna orientatsioon $\mathtt{N}$. Orientatsiooniks võime valida pinna puutujareepervälja $\{\phi'_u, \phi'_v\}$ normeeritud vektorkorrutist. Seega

$$\mathtt{N} = \frac{\phi'_u \times \phi'_v}{|\phi'_u \times \phi'_v|},$$

ja, kasutades vektorkorrutise valemit ristkoordinaatides, leiame

$$\mathtt{N} = \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}}(\phi(u,v); b\,\sin v, -b\,\cos v, u)$$

Diferentseerides pinna puutujareepervälja vektorväljad u ja v järgi, leiame



Joonis 6.1: Kruuvipind

$$\begin{aligned}
\phi''_{uu} &= (\phi(u,v);\ 0,0,0),\\
\phi''_{uv} &= (\phi(u,v);\ -\sin v, \cos v, 0),\\
\phi''_{vv} &= (\phi(u,v);\ -u\cos v, -u\sin v, 0).
\end{aligned}$$

Seega

$$l =< \mathtt{N}, \phi''_{uu} >= 0, \quad m =< \mathtt{N}, \phi''_{uv} >= -\frac{b}{\sqrt{u^2+b^2}}, \quad n =< \mathtt{N}, \phi''_{vv} >= 0.$$

Siit leiame kruuvipinna Gaussi kõveruse

$$K(u,v) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -\frac{b^2}{(u^2+b^2)^2}.$$

Kasutasdes keskmise kõveruse arvutamise valemit (6.2.0.11), leiame $H(u,v) = 0$. Järelikult kruuvipind on minimaalpind.

6.3 Jooned pinnal

Kõverusjooned.

Definitsioon 6.3.0.91. Olgu M pind ja $\alpha : I \to M$ parametriseeritud joon pinnal M. Parametriseeritud joont α pinnal M nimetatakse *kõverusjooneks* pinnal, kui parametriseeritud joone igas punktis $\alpha(t)$ ühikkiirusvektor

$$\mathbf{s}(t) = \frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|}\,\overrightarrow{\alpha}'(t)$$

on pinna peasiht.

Olgu $p \in M$ pinna punkt. Oletame, et p ei ole pinna ümaruspunkt. Siis pinna puutujatasandis T_pM on kaks peasihti ja nad on teineteisega risti. Järelikult pinna punkti p läbib kaks kõverusejoont ja nad on teineteisega risti.

Teoreem 6.3.0.92. *Olgu M orienteeritud pind orientatsiooniga $\mathtt{N}$ ja $\alpha : I \to M$ parametriseeritud joon pinnal M. Orientatsiooni $\mathtt{N}$ ahendit parametriseeritud joonele α tähistame $\mathtt{N}_\alpha$, st $\mathtt{N}_\alpha(t) = \mathtt{N}(\alpha(t))$.*

A) Parametriseeritud joon α on pinna M kõverusjoon parajasti siis, kui parametriseeritud joone igas punktis $\alpha(t)$ kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ on kollineaarne vektoriga $\mathtt{N}'_\alpha$, kus

$$\mathtt{N}'_\alpha = \frac{d}{dt}(\mathtt{N}(\alpha(t)))$$

on vektorvälja $\mathtt{N}_\alpha(t)$ tuletis parameetri t järgi.

B) Kui α on pinna M kõverusjoon, siis pinna peasihile $\overrightarrow{\alpha}'(t)$ vastav peakõverus $k(\alpha(t))$ on võrdne

$$k(\alpha(t)) = \frac{< \overrightarrow{\alpha}''(t), \mathtt{N}_\alpha(t) >}{|\overrightarrow{\alpha}'(t)|^2}.$$

Tõestus.

A) Tõestame tarvilikust. Olgu $\alpha : I \to M$ pinna kõverusjoon ja

$$\mathbf{s} = \frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|}\,\overrightarrow{\alpha}'$$

ühikkiirusvektor. Näitame, et parametriseeritud joone α kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'$ on kollineaarne vektoriga $\mathtt{N}'_\alpha$. Kõverusjoone definitsiooni kohaselt $\mathbf{s}$ on pinna peasiht, seega $\mathbf{s}$ on Weingarteni operaatori $\mathfrak{S}$ omavektor, st kehtib $\mathfrak{S}(\mathbf{s}) = k\,\mathbf{s}$, kus k on peasihile $\mathbf{s}$ vastav pinna peakõverus. Siit järeldub, et

$$\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}') = k\,\overrightarrow{\alpha}',$$

ja antud valemist järeldub, et vektorid $\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}')$, $\overrightarrow{\alpha}'$ on kollineaarsed vektorid, st $\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}') \mid\mid \overrightarrow{\alpha}'$. Weingarteni operaatori definitsioonist $\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}') = -\nabla_{\overrightarrow{\alpha}'}\mathtt{N}$ järeldub, et vektor $\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}')$ on kollineaarne vektoriga

$$\nabla_{\overrightarrow{\alpha}'}\mathtt{N} = \frac{d}{dt}\big(\mathtt{N}\circ\alpha\big) = \mathtt{N}'_{\alpha},$$

kust järeldub, et $\overrightarrow{\alpha}' \mid\mid \mathtt{N}'_{\alpha}$. Piisavust tõestatakse analoogiliselt.

B) Kui α on pinna M kõverusjoon, siis $\mathbf{s}$, kus

$$\mathbf{s} = \frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|}\,\overrightarrow{\alpha}',$$

on pinna M peasiht. Seega peasihi $\mathbf{s}$ peakõverus on võrdne

$$\begin{aligned} k &= k(\mathbf{s}) = k(\frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|}\,\overrightarrow{\alpha}') =< \mathfrak{S}(\frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|}\,\overrightarrow{\alpha}'), \frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|}\,\overrightarrow{\alpha}' > \\ &= \frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|^2} < \mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}'), \overrightarrow{\alpha}' >= \frac{1}{|\overrightarrow{\alpha}'|^2} < \overrightarrow{\alpha}'', \mathtt{N}_{\alpha} > . \square \end{aligned}$$

Teoreem 6.3.0.93. *Olgu M orienteeritud pind orientatsiooniga $\mathtt{N}_1$, $\mathfrak{P}$ tasand, $\mathtt{N}_2$ tasandi ühiknormaalvektorväli ja α pinna M ning tasandi $\mathfrak{P}$ lõikejoon. Kui nurk vektorväljade $\mathtt{N}_1|_{\alpha}, \mathtt{N}_2|_{\alpha}$ vahel on konstantne (ei sõltu lõikejoone α punktist), siis pinna ja tasandi lõikejoon α on pinna M kõverusjoon.*

Tõestus. On ilmne, et $\mathtt{N}_2$ on konstantne vektorväli ja tasandi $\mathfrak{P}$ suvalises punktis p kehtib $(\mathtt{N}_2)_p = (p; \vec{n})$, kus $\vec{n}$ on tasandi ühiknormaalvektor (vaba vektor). Seega $\mathtt{N}_2|_{\alpha}$ on konstantne vektorväli piki lõikejoont α ja

$$(\mathtt{N}_2|_{\alpha})' = \frac{d}{dt}(\mathtt{N}_2|_{\alpha}) = 0. \qquad (6.3.0.12)$$

Teoreemi eelduse kohaselt vektorväljade skalaarkorrutis

$$< \mathtt{N}_1|_{\alpha}, \mathtt{N}_2|_{\alpha} >= \cos\theta,$$

kus θ on nurk vektorväljade $\mathtt{N}_1|_{\alpha}, \mathtt{N}_2|_{\alpha}$ vahel, on konstantne funktsioon (ei sõltu lõikejoone punktist). Järelikult

$$\frac{d}{dt}\big(< \mathtt{N}_1|_{\alpha}, \mathtt{N}_2|_{\alpha} > \big) = 0.$$

Kasutades skalaarkorrutise diferentseerimise valemit ja (6.3.0.12), leiame

$$< (\mathtt{N}_1|_\alpha)', \mathtt{N}_2|_\alpha >= 0.$$

Seega $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' \perp \mathtt{N}_2|_\alpha$. Analoogiliselt, diferentseerides võrdsust $< \mathtt{N}_1|_\alpha, \mathtt{N}_1|_\alpha >= 1$, saame $< (\mathtt{N}_1|_\alpha)', \mathtt{N}_1|_\alpha >= 0$, kust järeldub $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' \perp \mathtt{N}_1|_\alpha$. Seega $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' \perp \mathtt{N}_2|_\alpha$ ja $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' \perp \mathtt{N}_1|_\alpha$. Kuid lõikejoone kiirusvektor $\overrightarrow{\alpha}'$ korral kehtivad samad tingimused, st $\overrightarrow{\alpha}' \perp \mathtt{N}_2|_\alpha$ ja $\overrightarrow{\alpha}' \perp \mathtt{N}_1|_\alpha$. Oletame, et vektorid $\mathtt{N}_1|_\alpha, \mathtt{N}_2|_\alpha$ on mittekollineaarsed. Siis $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' = k\, \overrightarrow{\alpha}'$. Arvestades $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' = \nabla_{\overrightarrow{\alpha}'}\mathtt{N}_1 = -\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}')$, saame $\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}') = -k\, \overrightarrow{\alpha}'$, ja see näitab, et $\overrightarrow{\alpha}'$ on peasiht ja seega lõikejoon α on pinna kõverusjoon. Kui vektorid $\mathtt{N}_1|_\alpha, \mathtt{N}_2|_\alpha$ on kollineaarsed, siis lõikejoone α igas punktis kehtib kas $\mathtt{N}_1|_\alpha = \mathtt{N}_2|_\alpha$ või $\mathtt{N}_1|_\alpha = -\mathtt{N}_2|_\alpha$. Igal juhul $\mathtt{N}_1|_\alpha$ on konstantne vektorväli ja $(\mathtt{N}_1|_\alpha)' = 0$. Seega $\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha}') = \mathbf{0}$ ja $\overrightarrow{\alpha}'$ on Weingarteni operaatori omavektor (omaväärtusega 0) ning α on kõverusjoon. $\square$

Näide 6.3.0.94. Antud teoreemist järeldub, et pöördpinna meridiaanid ja paralleelid on pöördpinna kõverusjooned.

Geodeetilised jooned.

Definitsioon 6.3.0.95. Olgu M pind ja $\alpha : I \to M$ parametriseeritud joon pinnal M. Parametriseeritud joont α nimetatakse *geodeetiliseks jooneks*, kui parametriseeritud joone igas punktis kiirendusvektor on risti pinna puutujatasandiga, st $\overrightarrow{\alpha}''(t) \perp T_{\alpha(t)}M$.

6.4 Pöördpinna Gaussi ja keskmine kõverus

Ruumi E^3 koordinaadisüsteemi xy-koordinaattasandit tähistame E^2_{xy}. Olgu

$$E^+_{xy} = \{(x, y, 0) \in E^2_{xy} : y > 0\},$$

$\alpha : I \to E^+_{xy}$ parametriseeritud joon, kus $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$ ja suvalise $u \in I$ korral $h(u) > 0$. Pöörame tähelepanu sellele, et parametriseeritud joon α on regulaarne joon ja antud juhul see tähendab, et kehtib

$$|\overrightarrow{\alpha}'|^2 = (g')^2 + (h')^2 > 0.$$

Kui parametriseeritud joont α pöörame ruumis E^3 ümber x-koordinaattelje, siis joone pööramisel tekib pöördpind M_α. Selle pöördpinna parameetriline võrrand on

$$\phi(u, v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v), \qquad (6.4.0.13)$$

kus $u \in I, v \in [0, 2\pi]$. Teiste sõnadega pöördpinna parameetriline võrrand määrab kujutust $\phi : U \to E^3$, kus $U = I \times [0, 2\pi]$. Pöördpinna M_α igat punkti $p = \phi(u_0, v_0)$ läbib kaks parametriseeritud joont $\alpha_1 : I \to M_\alpha, \alpha_2 : [0, 2\pi] \to M_\alpha$, kus

$$\begin{aligned}\alpha_1(u) &= \phi(u, v_0) = (g(u), h(u)\cos v_0, h(u)\sin v_0),\\ \alpha_2(v) &= \phi(u_0, v) = (g(u_0), h(u_0)\cos v, h(u_0)\sin v).\end{aligned}$$

Järgnevas parametriseeritud joont α_1 nimetame pöördpinna *meridiaaniks* ja parametriseeritud joont α_2 nimetame pöördpinna *paralleeliks.*

Pöördpinna M_α puutujatasandi TM_α reeper koosneb meridiaani ja paralleeli kiirusvektoritest

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha_1}'(u) &= \phi'_u = (\phi(u, v); g'(u), h'(u)\cos v, h'\sin v),\\ \overrightarrow{\alpha_2}'(v) &= \phi'_v = (\phi(u, v); 0, -h(u)\sin v, h\cos v).\end{aligned}$$

Siit leiame pöördpinna esimese fundamentaalvormi kordajad

$$E = |\overrightarrow{\alpha_1}'|^2 = (g')^2 + (h')^2, \quad F =< \overrightarrow{\alpha_1}', \overrightarrow{\alpha_2}' >= 0, \quad G = |\overrightarrow{\alpha_2}'|^2 = h^2. \qquad (6.4.0.14)$$

Pöördpinna esimene fundamentaalvorm $g(du, dv)$ või meetrika avaldub järgmiselt

$$g(du, dv) = \big((g')^2 + (h')^2\big)\, du^2 + h^2\, dv^2. \qquad (6.4.0.15)$$

Pöördpinna teise fundamentaalvormi arvutamiseks valime pöördpinna orientatsiooni (ühiknormaalvektorvälja) puutujatasandi reeperi vektorite vektorkorrutise abil

$$\mathtt{N} = \frac{\overrightarrow{\alpha_1}' \times \overrightarrow{\alpha_2}'}{|\overrightarrow{\alpha_1}' \times \overrightarrow{\alpha_2}'|}. \qquad (6.4.0.16)$$

Kehtib $|\overrightarrow{\alpha_1}' \times \overrightarrow{\alpha_2}'|^2 = EG - F^2 = h\,\sqrt{(g')^2 + (h')^2} = h\,\sqrt{E}$ ja

$$\overrightarrow{\alpha_1}' \times \overrightarrow{\alpha_2}' = (\phi(u, v);\ hh', -hg'\ \cos v, -hg'\ \sin v),$$

ning

$$\mathtt{N} = \frac{h'}{\sqrt{E}}\,\mathtt{U}_1 - \frac{g'\ \cos v}{\sqrt{E}}\,\mathtt{U}_2 - \frac{g'\ \sin v}{\sqrt{E}}\,\mathtt{U}_3.$$

Leiame teist järku tuletised

$$\begin{aligned}\phi''_{u^2} &= \big(\phi(u, v); g'', h''\cos v, h''\ \sin v\big),\\ \phi''_{uv} &= \big(\phi(u, v); 0, -h'\ \sin v, h'\ \cos v\big),\\ \phi''_{v^2} &= \big(\phi(u, v); 0, -h\ \cos v, -h\ \sin v\big).\end{aligned}$$

Teise fundamentaalvormi kordajad avalduvad järgmiselt

$$
\begin{aligned}
l &= <\mathtt{N}, \phi''_{u^2}>= \frac{1}{\sqrt{E}} \begin{vmatrix} h' & g' \\ h'' & g'' \end{vmatrix}, \\
m &= <\mathtt{N}, \phi''_{uv}>= 0, \\
n &= <\mathtt{N}, \phi''_{v^2}>= \frac{h\,g'}{\sqrt{E}}.
\end{aligned}
$$

Rakendame Weingarteni operaatorit $\mathfrak{S}$ pöördpinna puutujatasandi reeperi vektoritele $\overrightarrow{\alpha_1}', \overrightarrow{\alpha_2}'$. Weingarteni operaator teisendab neid pöördpinna puutujatasandi vektoriteks, seega

$$
\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha_1}') = a\,\overrightarrow{\alpha_1}' + b\,\overrightarrow{\alpha_2}', \;\; \mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha_2}') = c\,\overrightarrow{\alpha_1}' + d\,\overrightarrow{\alpha_2}'.
$$

Kordajate a, b leidmiseks esimest võrdsust skalaarselt korrutame üks kord vektoriga $\overrightarrow{\alpha_1}'$ ja teine kord vektoriga $\overrightarrow{\alpha_2}'$. Arvestame, et

$$
\begin{gathered}
<\overrightarrow{\alpha_1}', \overrightarrow{\alpha_1}'>= E, \;\; <\overrightarrow{\alpha_1}', \overrightarrow{\alpha_2}'>= F = 0, \;\; <\overrightarrow{\alpha_2}', \overrightarrow{\alpha_2}'>= G, \\
<\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha_1}'), \overrightarrow{\alpha_1}'>= l, \;\; <\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha_1}'), \overrightarrow{\alpha_2}'>= m = 0.
\end{gathered}
$$

Saame

$$
\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha_1}') = \frac{l}{E}\,\overrightarrow{\alpha_1}',
$$

ja analoogiliselt

$$
\mathfrak{S}(\overrightarrow{\alpha_2}') = \frac{n}{G}\,\overrightarrow{\alpha_1}'.
$$

Saadud valemitest järeldub, et meridiaanide ja paralleelide kiirusvektorid on Weingarteni operaatori omavektorid, seega on nad pöördpinna peasihid. Siit järeldub, et *pöördpinna meridiaanid ja paralleelid on pöördpinna kõverusjooned.*

Tuletatud valemitest järeldub, et

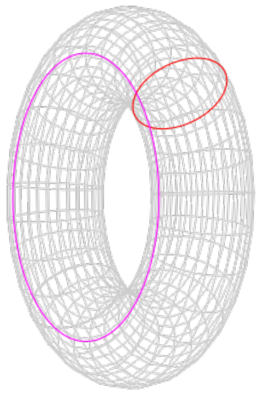
$$
k_1 = \frac{l}{E}, \;\; k_2 = \frac{n}{G}, \tag{6.4.0.17}
$$

on pöördpinna peakõverused. Siit leiame, et pöördpinna Gaussi kõverus K on võrdne

$$
K = k_1\,k_2 = \frac{g'}{h[(g')^2 + (h')^2]^2} \begin{vmatrix} h' & g' \\ h'' & g'' \end{vmatrix}, \tag{6.4.0.18}
$$

ja keskmine kõverus H on

$$
H = \frac{h\,h'\,g'' - h\,g'\,h'' + (g')^3 + g'\,(h')^2}{[(g')^2 + (h')^2]^{3/2}}. \tag{6.4.0.19}
$$



Joonis 6.2: Rõngaspind

Näide 6.4.0.96. Olgu ruumis antud tasand $\mathfrak{P}$ ja sellel tasandil sirge L ja ringjoon S, kusjuures sirge ei lõika ringjoont. Kui ringjoont S pöörame ümber sirge L, siis tekib pöördpind, mida nimetatakse *tooriks* või *rõngaspinnaks*. Tasandiks $\mathfrak{P}$ valime xy-koordinaattasandit, sirgeks L valime x-koordinaatteljet ja ringjoone S keskpunkt asub y-koordinaatteljel punktis koordinaatidega $(0, R, 0)$, kus $R > 0$. Ringjoone raadiust tähistame r ja eeldame, et ta rahuldab võrratust $r < R$. Ringjoone parameetriline võrrand on

$$\alpha(u) = (r\ \cos u, R + r\ \sin u, 0).$$

Seega $g(u) = r\ \cos u$, $h(u) = R + r\ \sin u$. Rõngaspinna parameetriline võrrand on

$$\phi(u, v) = \big(r\ \cos u, (R + r\ \sin u)\ \cos v, (R + r\ \sin u)\ \sin v\big), \tag{6.4.0.20}$$

kus $u, v \in [0, 2\pi]$. Diferentseerimine annab

$$g' = -r\ \sin u,\ h' = r\ \cos u,\ g'' = -r\ \cos u,\ h'' = -r\ \sin u.$$

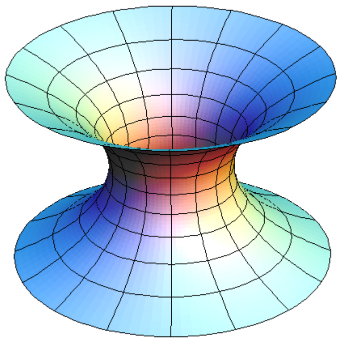
Seega rõngaspinna Gaussi kõverus on võrdne

$$K = \frac{\sin u}{r\,(R + r\ \sin u)}.$$

Näide 6.4.0.97. Aheljoon on määratud võrrandiga

$$y = a\ \cosh \frac{x}{a},\ z = 0,$$

kus $a > 0$ on konstantne reaalarv. Võrrand näitab, et aheljoon asub xy-koordinaattasandil. Kui aheljoont pöörame ümber x-koordinaattelje, siis tekib pöördpind, mida nimetatakse *katenoidiks*. Katenoidi parameetriline võr-



Joonis 6.3: Katenoid

rand on

$$\phi(u,v) = \big(u, a\,\cosh\frac{u}{a}\,\cos v, a\,\cosh\frac{u}{a}\,\sin v\big). \qquad (6.4.0.21)$$

Võrreldes pöördpinna võrrandiga (6.4.0.13) leiame, et $g(u) = u, h(u) = a\,\cosh\frac{u}{a}$. Diferentseerides saame

$$g' = 1, \quad g'' = 0, \quad h' = \sinh\frac{u}{a}, \quad h'' = \frac{1}{a}\,\cosh\frac{u}{a}.$$

Seega

$$(g')^2 + (h')^2 = 1 + (\sinh\frac{u}{a})^2 = \cosh^2\frac{u}{a}, \quad \begin{vmatrix} h' & g' \\ h'' & g'' \end{vmatrix} = -\frac{1}{a}\,\cosh\frac{u}{a},$$

ja, kasutades pöördpinna Gaussi kõveruse valemit (6.4.0.18), leiame

$$K = -\frac{1}{a^2\,(\cosh\frac{u}{a})^4}. \qquad (6.4.0.22)$$

Keskmise kõveruse valemi murru lugeja liikmed on võrdsed

$$\begin{aligned} h\,h'\,g'' &= 0, \\ -h\,g'\,h'' &= -(a\,\cosh\frac{u}{a})\,(\frac{1}{a}\cosh\frac{u}{a}) = -(\cosh\frac{u}{a})^2, \\ (g')^3 + g'\,(h')^2 &= (\cosh\frac{u}{a})^2, \end{aligned}$$

ja nende summa on 0. Järelikult katenoidi keskmine kõverus H on null ja katenoid on minimaalpind. $\diamondsuit$

Järgmine teoreem annab minimaalpindade klassifikatsiooni pöördpindade klassis.

Teoreem 6.4.0.98. *Kui pöördpind on minimaalpind, siis pöördpind on*

1. *tasand või tasandi osa,*
2. *katenoid või katenoidi osa.*

Tõestus. Olgu pöördpind M tekitatud parametriseeritud joone

$$\alpha : I \to E^3, \;\; \alpha(u) = (g(u), h(u), 0), \;\; h(u) > 0, \;\; (g')^2 + (h')^2 > 0,$$

pööramise ümber x-koordinaattelje abil. On ilmne, et pöördpind on täielikult määratud, kui on leitud parametriseeritud joon α. Sellisel juhul pöördpinna võrrand on

$$\phi(u, v) = \big(g(u), h(u)\,\cos v, h(u)\,\sin v\big).$$

Pöördpinna keskmise kõveruse valem on

$$H = \frac{h\,h'\,g'' - h\,g'\,h'' + (g')^3 + g'\,(h')^2}{[(g')^2 + (h')^2]^{3/2}}.$$

Teoreemi eelduse kohaselt M on minimaalpind, seega $H = 0$. Minimaalpindade klassifikatsioon on leitud ja teoreem on tõestatud, kui on leitud selle võrrandi kõik lahendid, kus otsitavaks on parametriseeritud joon $\alpha(u) = \big(g(u), h(u), 0\big)$ või selle parameetrilise võrrandi funktsioonid g, h. Võrrand $H = 0$ on samaväärne võrrandiga

$$h\,h'\,g'' - h\,g'\,h'' + (g')^3 + g'\,(h')^2 = 0. \tag{6.4.0.23}$$

Seega tuleb leida diferentsiaalvõrrandi (6.4.0.23) kõikvõimalikud lahendid, kus tundmatuteks on funktsioonid g, h.

Võrrandi (6.4.0.23) esimeseks lahendiks on parametriseeritud joon $\alpha(u) = \big(g(u), h(u), 0\big)$ selline, et $g' = 0$. Tõepoolest sellisel juhul $g'' = 0$ ja võrrand (6.4.0.23) on rahuldatud. Märgime, et sellisel juhul h on suvaline sile funktsioon, mis rahuldab kahte tingimust $h(u) > 0, (h')^2 > 0$. Millist parametriseeritud joont α määrab selline lahend? Võrrandist $g' = 0$ järeldub, et $g(u)$ on konstantne funktsioon, st $g(u) = c$, kus c on mingi reaalarv. Parameetriline võrrand $\alpha(u) = (c, h(u), 0)$ määrab sõltuvalt funktsiooni h muutumispiirkonnast kas poolsirget (ta on risti x-koordinaatteljega ja asub xy-koordinaattasandi ülemisel poolel nii, nagu y-koordinaattelje positiivne osa) või selle osa. Poolsirge (või selle osa) tekitab tasandit (või selle osa), kui seda pöörame ümber x-koordinaattelje. Seega esimene lahend määrab tasandit.

Nüüd üldsust kitsendamata eeldame, et $g' \neq 0$. Sellisel juhul leidub funktsiooni $t = g(u)$ pöördfunktsioon $u = \tilde{g}(t)$. Tähistame $f(t) = h(\tilde{g}(t))$. Nüüd otsitava joone parameetriliseks võrrandiks on võrrand

$$\gamma(t) = (t, f(t), 0),$$

ja tundmatuks funktsiooniks on ainult üks funktsioon f. On ilmne, et γ on parametriseeritud joone α ümberparametriseerimine funktsiooni $u = \tilde{g}(t)$ abil. Otsitava joone uue parametriseerimise korral diferentsiaalvõrrand (6.4.0.23) võtab kuju

$$f\,f'' = 1 + (f')^2. \tag{6.4.0.24}$$

Selle diferentsiaalvõrrandi lahend on

$$f(t) = a\,\cosh\left(\frac{u}{a} + b\right), \tag{6.4.0.25}$$

kus a, b on lahendi konstandid. Parametriseeritud joon $\gamma(t) = (t, a\,\cosh(\frac{u}{a} + b), 0)$ tekitab katenoidi, kui seda pöörame ümber x-koordinaattelje. $\Box$

Indeks

Kirjandus

[1] Arfken, G.B., Weber, H.J., *Mathematical Methods for Physicists,* Academic Press, 2001.

[2] Arnol'd, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1989.

[3] Gray, A., *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*, CRC Press LLC, 1998.

[4] Lellep, J., *Süsteemide optimeerimine*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2013.

[5] López, R., *On linear Weingarteni surfaces*, arXiv:math/0607748v1.

[6] Lumiste, Ü., *Diferentsiaalgeomeetria*, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1963.

[7] O'Neill, B., *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.