

Seminar 2: Kuldlõige

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

17.02.2017

Kuldne suhe

Lõik on jaotatud **kuldses suhtes**, kui kogu lõigu ja selle pikema osalõigu pikkuste suhe on sama, mis pikema ja lühema osalõigu pikkuste suhe.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \quad (\text{loe: fii})$$



Kuna $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, saame ruutvõrrandi $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, mille ainus positiivne lahend on

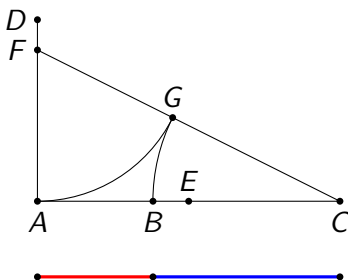
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618.$$

Antud lõigu jaotamine kuldses suhtes

Antud on lõik AC .

1. $\perp AC(A) \rightarrow AD$
2. $AC/2 \rightarrow E$
3. $r_{AE}(A) \rightarrow F$
4. FC
5. $r_{FA}(F) \rightarrow G$
6. $r_{CG}(C) \rightarrow B$

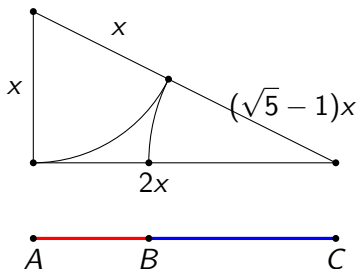
$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \varphi$$



Antud lõigu jaotamine kuldses suhtes

Antud on lõik AC .

1. $\perp AC(A) \rightarrow AD$
2. $AC/2 \rightarrow E$
3. $r_{AE}(A) \rightarrow F$
4. FC
5. $r_{FA}(F) \rightarrow G$
6. $r_{CG}(C) \rightarrow B$



$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|} = \varphi$$

$$|BC| = (\sqrt{5}-1)x, \quad |AB| = (3-\sqrt{5})x$$

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

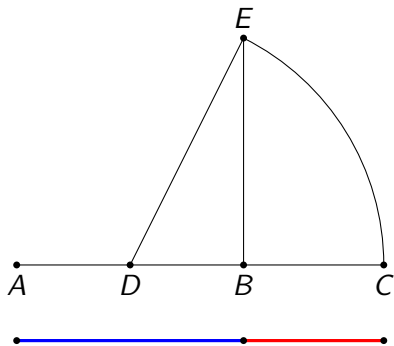
Antud lõigu järgi φ korda pikema lõigu konstrueerimine

Antud on lõik AB . Leida punkt

C nii, et $\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi$.

1. $AB/2 \rightarrow D$
2. $\perp AB(B)$
3. $r_{AB}(B) \rightarrow E$
4. $r_{DE}(D) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$



Miks see konstruktsioon tekitab kuldse suhte?

Antud lõigu järgi φ korda pikema lõigu konstrueerimine

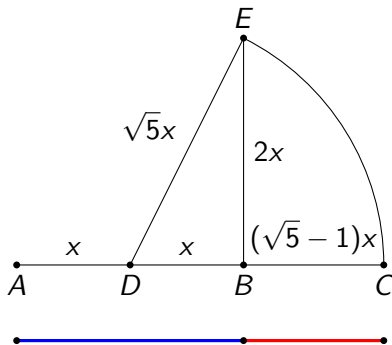
Antud on lõik AB . Leida punkt

C nii, et $\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi$.

1. $AB/2 \rightarrow D$
2. $\perp AB(B)$
3. $r_{AB}(B) \rightarrow E$
4. $r_{DE}(D) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$

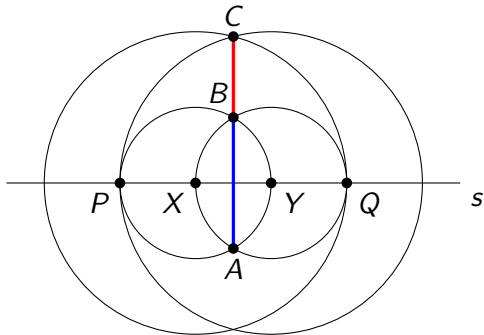
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2x + (\sqrt{5} - 1)x}{2x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$



Hofstetter'i kuldse lõike konstruktsioon kasutades nelja ringjoont

1. $X, Y \in s$
2. $r_{XY}(X), r_{XY}(Y) \rightarrow A, B, P, Q$
3. $r_{XQ}(X), r_{YP}(Y) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$

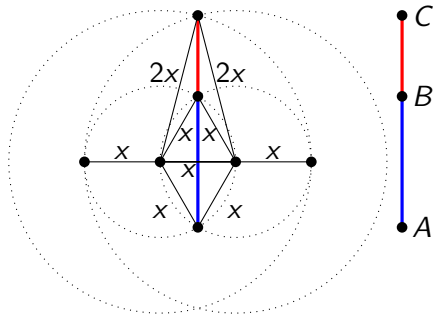


Miks see konstruktsioon tekitab kuldse suhte?

Hofstetter'i kuldse lõike konstruktsioon kasutades nelja ringjoont

1. $X, Y \in s$
2. $r_{XY}(X), r_{XY}(Y) \rightarrow A, B, P, Q$
3. $r_{XQ}(X), r_{YP}(Y) \rightarrow C$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \varphi$$

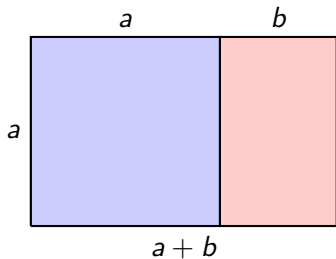


$$|AB| = \sqrt{3}x, \quad |BC| = (\sqrt{15}/2 - \sqrt{3}/2)x,$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}/2 - \sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{15} + \sqrt{3})}{12} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

Kuldne ristkülik

Kuldseks ristkülikuks nimetatakse ristkülikut, mille külgede pikkuste suhe on võrdne kuldse suhtega.



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

Kuldne ristkülik

Ülesanne. Konstrueerige kuldne ristkülik tema lühema külje järgi.

Eraldage kuldsest ristkülikust ruut, mille külg ühtib lähteristküliku lühema küljega. Milline on allesjäänud ristküliku külgede suhe?
Eraldage järelejäänud ristkülikust analoogselt eespool tehtuga ruut. Jätkake sama toimingut veel mõned korrad. Millised ristkülikud tekivad alati, miks?

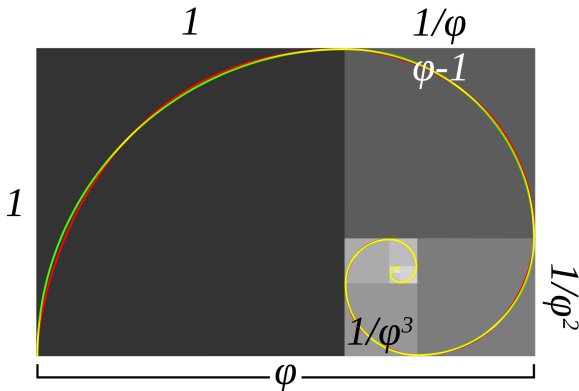
Kuldne spiraal

Kuldne spiraal $r = \varphi^{\theta \frac{2}{\pi}}$ on logaritmilise spiraali $r = ae^{b\theta}$ erijuht, kus algne raadius $a = 1$ ning $b = \frac{\ln \varphi}{\pi/2}$.

Mõlemad spiraalid on siin esitatud polaarkoordinaatides (r, θ) , kus r on punkti kaugus koordinaatide alguspunktist ning θ nurk x -telje ja punkti kohavektori vahel. Kuldse spiraali kasvutegur on kuldne suhe φ , st kaugus r kasvab iga veerandpöördega ($\pi/2$ radiaani) φ korda.

Kuldne spiraal

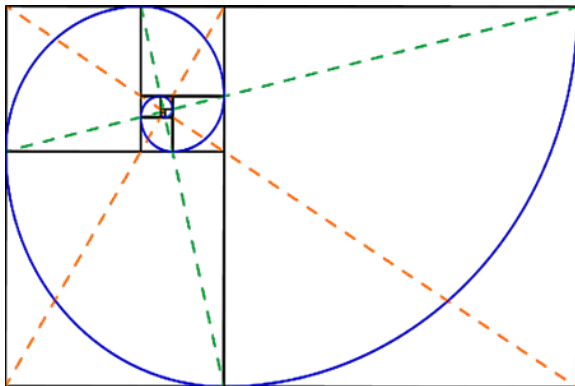
Kuldne spiraal $r = \varphi^{\theta \frac{2}{\pi}}$ on logaritmilise spiraali $r = ae^{b\theta}$ erijuht, kus algne raadius $a = 1$ ning $b = \frac{\ln \varphi}{\pi/2}$.



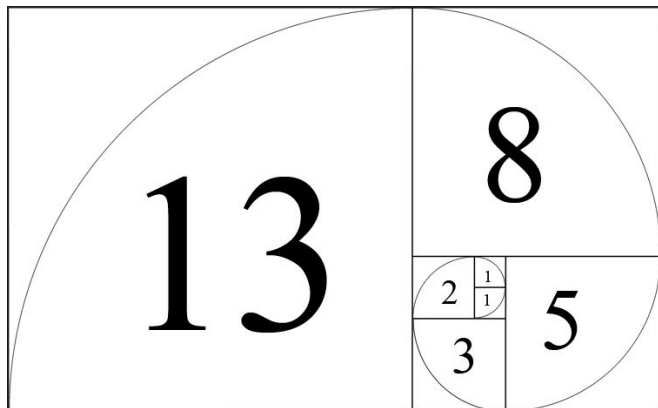
Roheline spiraal on moodustatud veerandringjoontest, punane on kuldne spiraal, kattuvad osad on kollased.

Kuldne spiraal

Kuldne spiraal $r = \varphi^{\theta \frac{2}{\pi}}$ on logaritmilise spiraali $r = ae^{b\theta}$ erijuht, kus algne raadius $a = 1$ ning $b = \frac{\ln \varphi}{\pi/2}$.



Fibonacci spiraal



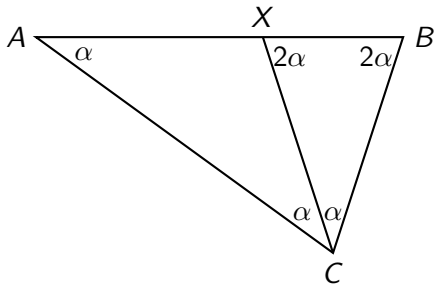
Kuldne kolmnurk

Ülesanne. Joonistage võrdhaarne kolmnurk. Olgu selle tipunurk 36° . Joonistage selle kolmnurga alusnurga poolitaja ja leidke saadud jooniselt võrdseid nurki ning sarnaseid kolmnurki. Milline on saadud kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

Kuldne kolmnurk

Ülesanne. Joonistage võrdhaarne kolmnurk. Olgu selle tipunurk 36° . Joonistage selle kolmnurga alusnurga poolitaja ja leidke saadud jooniselt võrdseid nurki ning sarnaseid kolmnurki. Milline on saadud kolmnurga haara ja aluse pikkuste suhe?

Kuldseks kolmnurgaks nimetatakse võrdhaarset kolmnurka, mille haara ja aluse pikkuste suhe on kuldne suhe φ .



$$\alpha = 36^\circ, 2\alpha = 72^\circ$$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|XB|} \text{ ehk}$$

$$\frac{|AB|}{|AX|} = \frac{|AX|}{|XB|} = \varphi, \text{ millest}$$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \varphi$$

Kuldne kolmnurk

Ülesanne. Konstrueerige kuldne kolmnurk, kui on antud kas selle haar või alus.

Ülesanne. Kui suur on korrapärase kõõlkümmenurga küljele vastav hulknurga ümberringjoone kesknurk? Kuidas konstrueerida korrapärase kõõlkümmenurka, kõõlviisnurka ja kõõlviisteistnurka?

Ülesanne. Millises suhtes jaotab korrapärase kumera viisnurga kahe diagonaali lõikepunkt kummagi diagonaali?

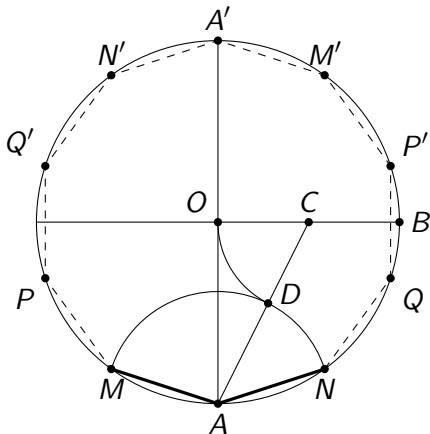
Ülesanne. Mitu kuldset kolmnurka on määratud korrapärase kumera viisnurga diagonaalide ja külgedega?

Korrapärase kõõlkümmenurga konstruksioon

Korrapärase kõõlkümmenurga külele vastav hulknurga ümberringjoone kesknurk on 36° . Tema külge on võrdne kuldloikes jaotatud ümberringjoone raadiuse pikema osaga.

Antud OA .

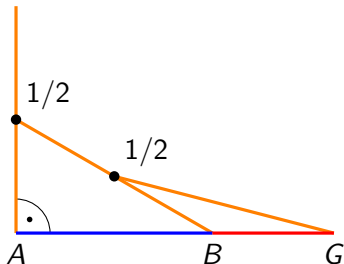
1. $r_{OA}(O)$
2. $\perp OA(O) \rightarrow B$
3. $\perp OB/2 \rightarrow C$
4. $r_{CO}(C) \rightarrow D$
5. $r_{AD}(A) \rightarrow M, N$
6. $r_{AD}(N) \rightarrow Q$
7. $r_{AD}(M) \rightarrow P$
8. $AO \rightarrow A', NO \rightarrow N', \dots$



Kuldloige kolme võrdse lõigu abil

- ▶ Olgu antud kolm võrdse pikkusega lõiku.
- ▶ Asetage teine lõik otspunktiga vastu esimese lõigu keskpunkti (vt joonist).
- ▶ Asetage kolmas lõik otspunktiga vastu teise lõigu keskpunkti.

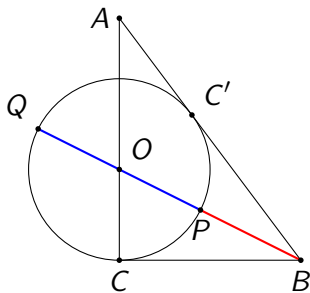
Põhjendage, miks lõikude AG ja AB suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldlõige 3-4-5 kolmnurga abil

- ▶ Olgu antud kolmnurk ABC , kus $BC = 3$, $AC = 4$ ja $AB = 5$.
- ▶ Olgu O nurga B poolitaja lõikepunkt kaatetiga AC .
- ▶ Joonestage ring keskpunktiga O ja raadiusega OC .
- ▶ Pikendage lõiku BO kuni see lõikub ringjoonega punktis Q .
- ▶ Tähistage teine lõikepunkt ringiga tähega P .

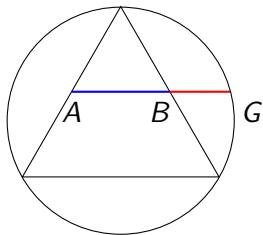
Põhjendage, miks lõikude PQ ja BP suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldlõige võrdkülgse kolmnurga abil

- ▶ Joonestage ringi sisse võrdkülgne kolmnurk.
- ▶ Pikendage kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku kuni ringjooneni.

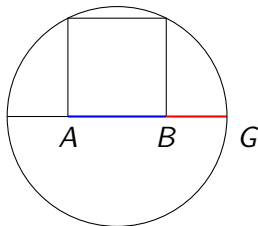
Põhjendage, miks lõikude AG ja AB suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldlõige ruudu abil

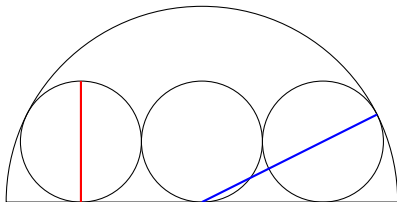
- Joonestage poolringi sisse ruut.

Põhjendage, miks lõikude AG ja AB suhe on kuldne suhe φ ?



Kuldlõige poolringi sisse joonestatud kolme ringi abil

Põhjendage, miks suure poolringi raadiuse ja väiksema ringi diameetri suhe on kuldne suhe?



Kodutöö teisest seminarist puudujatele

Ülesanne 1. Konstrueerige kuldne ristikülik, kui on antud selle lühem külg.

Ülesanne 2. Konstrueerige kuldne kolmnurk, kui on antud selle haar.

Ülesanne 3. Põhjendage, miks tekib kuldne suhe, kui

- a) kolm võrdse pikkusega lõiku on paigutatud nii nagu lk 19 joonisel;
- b) 3-4-5 kolmnurgas on suurema teravnurga poolitaja ja kaateti lõikepunkti joonestatud ringjoon, mis puutub hüpotenuusi (vt joonis lk 20);
- c) korrapärase kõõlkolmnurga kesklõiku on pikendatud ringjooneni (vt joonis lk 21).