

Loeng/seminar 4: Hulknurkadega seotud konstruktsioonid

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

28.02.2017/03.03.2017

Kolmnurkade klassifitseerimine

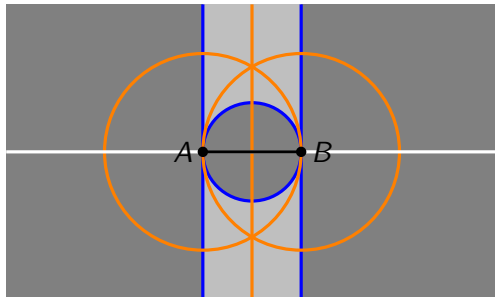
Ülesanne. Lõik AB on joonestatud tasandile. Leidke kõikvõimalikud punkti C asukohad nii, et kolmnurk ABC oleks:

- ▶ täisnurkne,
- ▶ teravnurkne,
- ▶ nürinurkne,
- ▶ võrdhaarne,
- ▶ võrdkülgne.

Kasutage punktide märgistamiseks erinevaid värve.

Kolmnurkade klassifitseerimine

Vastus:



täisnurksed

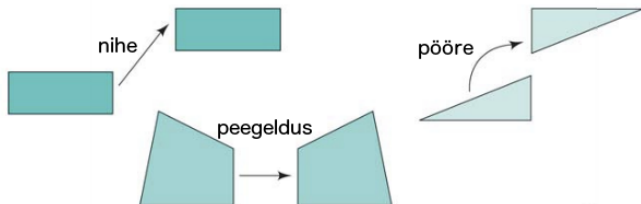
võrdhaarsed

nürinurksed erikülgsed

teravnurksed erikülgsed

Kolmnurkade kongruentsus

Kaks hulknurka on **kongruentsed** ehk **võrdsed**, kui nende vastavad küljed on võrdsed ning vastavate külgede vahelised nurgad on võrdsed.



Miks on kujundite kongruentsus oluline?

Miks on kolmnurksed konstruktsioonid kasutusel hoonete ehitamisel?

Kui võrdleme kahte kolmnurka, kas peame mõõtma kõik kolm külge ja kõik kolm nurka?

Mis on kõige väiksem hulk infot mis on vajalik kahe kolmnurga võrdlemiseks?

Kolmnurkade kongruentsus

Kas järgmised väited on tõesed?

Väide 1. Kui kahel kolmnurgal on üks võrdse pikkusega külg, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Väide 2. Kui kahel kolmnurgal on üks ühine nurk, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Kolmnurkade kongruentsus

Kas järgmised väited on tõesed?

Väide 1. Kui kahel kolmnurgal on üks võrdse pikkusega külg, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Väide 2. Kui kahel kolmnurgal on üks ühine nurk, siis need kolmnurgad on võrdsed.

Seega, **kolmnurk ei ole määratud vaid ühe elemendiga.**

Ülesanne. Näidake, et kongruentsuseks ei piisa, kui ainult kaks külge või ainult kaks nurka või kui üks külg ja üks nurk on võrdsed.

Seega, **kolmnurk ei ole oma mistahes kahe elemendiga üheselt määratud.**

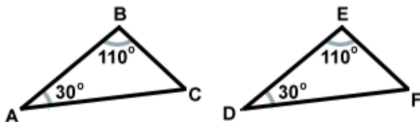
Ülesanne. Milliseid erinevaid kolme-elementilisi kombinatsioone on võimalik kolmnurga elementidest moodustada (KKK, KNK jne)? Millised neist määravad kolmnurga üheselt?

Kolmnurkade kongruentsus

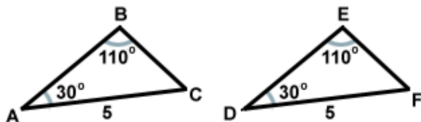
Ülesanded 1-3, 6-10 loengu 4 slaididelt:

Kas antud kolmnurgad on võrdsed? Milline kolmnurkade võrdsuse tunnus aitab otsustada?

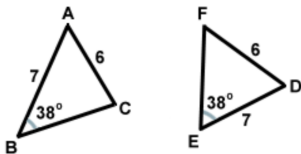
1.



2.

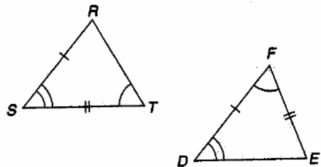


3.

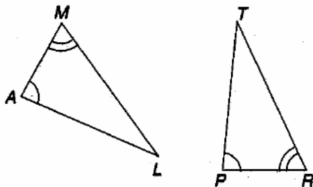


Kolmnurkade kongruentsus

6. Selgita, miks antud kolmnurgad ei ole võrdsed.



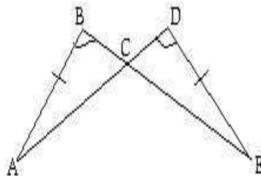
7. Olgu antud kolmnurgad $\triangle ALM$ ja $\triangle PRT$. Nimeta veel üks paar kongruentseid osasid, mis oleksid vajalikud väitmaks, et $\triangle ALM \cong \triangle PRT$. Millist kolmnurkade võrdsuse tunnust sa kasutasid?



Kolmnurkade kongruentsus

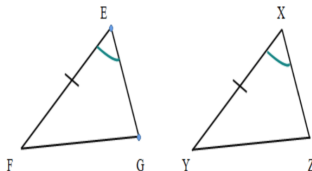
8. Milline kolmnurkade võrdsuse tunnus ütleb, et $\triangle ABC$ on kongruentne kolmnurgaga $\triangle EDC$?

- a) NKN
- b) NNK
- c) KNK
- d) KKK



9. Millist lisainfot on vaja väitmaks, et antud kolmnurgad on kongruentsed tunnuse NKN järgi?

- a) Nurk F on võrdne nurgaga Y
- b) Külge EG on võrdne küljega XZ
- c) Nurk G on võrdne nurgaga Z
- d) Rohkem infot ei ole vaja



Kolmnurkade kongruentsus

10. Abivajaja on mobiiltelefoniga valinud hädaabi numbri, aga ei suuda öelda kohta, kus ta on ja kuhu abi saatma peaks. Kõne registreeriti kahe lähedal asuva masti poolt. Mastides olev elektroonika suudab ära määrata nurga kahe lõigu vahel - üks mastist helistajani ja teine kahe masti vahel. Kas selle infoga on võimalik ära määrata abivajaja asukoht?



Nelinurkade kongruentsus

Kas on olemas võrdsuse tunnust nelinurkadele, mis oleks sarnane kolmnurkade võrdsuse tunnusega KKK?

- ▶ Näiteks, kas KKKK annaks nelinurkade võrdsuse tunnuse?
- ▶ Aga kui kasutada külgedele lisaks ka diagonaali?

Kas on olemas võrdsuse tunnust nelinurkadele, mis oleks sarnane kolmnurkade võrdsuse tunnusega KNK?

- ▶ Näiteks KNKN?
- ▶ Või KNKNK?

Kolmnurga nurgapoolitaja, kõrgus, külje keskristsirge, mediaan

Kolmnurga kolm nurgapoolitajat lõikuvad ühes ja samas punktis.

Kolmnurga **siseringjoone** keskpunktiks on nurgapoolitajate lõikepunkt ja raadiuseks selle punkti kaugus kolmnurga külgedest.

Kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

Kolmnurga **ümberringjoone** keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt ja raadiuseks selle punkti kaugus kolmnurga mistahes tipust.

Ülesanne. Millal asub kolmnurga ümberringjoone keskpunkt kolmnurga sees/selle küljel/väljaspool kolmnurka?

Kolmnurga nurgapoolitaja, kõrgus, külje keskristsirge, mediaan

Kolmnurga **kõrguseks** nimetatakse kolmnurga tipust selle vastasküljele või selle pikendusele tõmmatud ristlõiku või selle pikkust.

Kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad ühes punktis. Seda punkti nimetatakse **ortotsentriks**.

Kolmnurga **mediaaniks** nimetatakse kolmnurga tipust selle vastaskülje keskpunkti tõmmatud lõiku.

Kolmnurga mediaanid lõikuvad ühes punktis. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani tipust alates suhtes 2:1.

Kolmnurga mediaanide lõikepunkt on kolmnurga **raskuskese**.

Seosed kolmnurga külgede vahel

Kas igast kolmest lõigust saab moodustada kolmnurga?

Milline tingimus peab kehtima kahe lühema külje jaoks, et moodustuks kolmnurk?

Seosed kolmnurga külgede vahel

Kas igast kolmest lõigust saab moodustada kolmnurga?

Milline tingimus peab kehtima kahe lühema külje jaoks, et moodustuks kolmnurk?

Väide: Kahe lühema külje summa peab olema suurem kõige pikemast küljest.

Järelikult, **mistahes kahe külje summa peab olema suurem kolmandast küljest.**

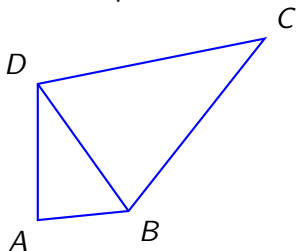
Kas oskate öelda midagi kolmnurga kahe külje vahe kohta? Miks peab kahe külje vahe olema väiksem kui kolmas külg?

Seosed kolmnurga külgede ja nurkade vahel

Igas kolmnurgas on pikema külje vastas suurem nurk. Ja vastupidi, suurema nurga vastas on pikem külg.

Ülesanne. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 10 cm pikad. Millises vahemikus saab olla kolmanda külje pikkus?

Ülesanne. Olgu antud, et $\angle CDB = 65^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$, $\angle ADB = 34^\circ$ ja $\angle A = 87^\circ$. Reastage küljed pikkuse järjekorras alustades pikimast.



3. märtsi seminari ülesanded (ülesannete kogu lk 9)

Kati	8e, 9
Tiiu	8f, 9
Getriin	8g, 10
Laura	8h, 10
Aili	8i, 11
Moonika	8j, 12
Merilin	8k, 11
Hanna-Liisa	8l, 13
Kristjan	8m, 13
Triinu	8n, 12
Andreas	8o, 4

Kodutöö neljandast seminarist puudujatele (Liisa, Tiiu)

- ▶ Konstrueerige kolmnurk, kui on antud kolmnurga külg a ja selle lähisnurk β ning ülejäänud kahe külje summa $b + c$. Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?
- ▶ Konstrueerige võrdhaarne kolmnurk, kui on antud kolmnurga haar b ja alusele a joonestatud kõrgus. Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?
- ▶ Konstrueerige kolmnurk, kui on antud kolmnurga külg a ja sellele küljele joonestatud mediaan ning kolmnurga ümberringjoone raadius R . Millistel tingimustel on ülesanne lahenduv?