

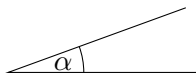
Loeng/seminar 5: Tõestused geomeetrias
(kolmnurkade kongruentsus, sirgete
konkurentsus, punktide kollineaarsus)

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

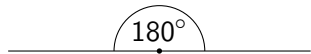
07.03.2017/10.03.2017

Nurgad tasandil

Nurgaks nimetatakse tasandi osa, mis paikneb selle tasandi kahe ühise alguspunktiga kiire vahel. Nurka tekitavaid kiiri nimetatakse nurga **haaradeks** ja nende ühist alguspunkti nurga **tipuks**.



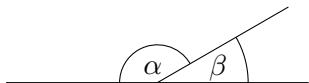
Nurka, mille haarad asuvad ühel sirgel, kuid ei ühti, nimetatakse **sirgnurgaks**. Kraadimõõdu definitsiooni kohaselt nurk suurusega 1° moodustab sirgnurgast $\frac{1}{180}$ osa ehk **sirgnurk on 180°** .



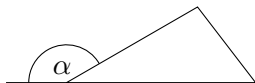
Nurgad tasandil

Kõrvunurgad on kaks nurka, millel on ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirge. Kõrvunurkade summa on 180° .

Kolmnurga nurkade kõrvunurki nimetatakse kolmnurga **välisnurkadeks**.



kõrvunurgad

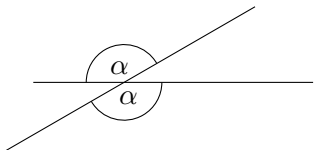


kolmnurga välisnurk

Täiendusnurgad on teravnurgad, millel on ühine haar ja mille teised haarad moodustavad täisnurga. Täiendusnurkade summa on 90° .

Nurgad tasandil

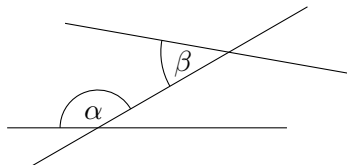
Tippnurgad on kahe sirge lõikumisel tekkivad võrdsed nurgad, mis on vastassuunaliste haaradega. Tippnurgad on võrdsed.



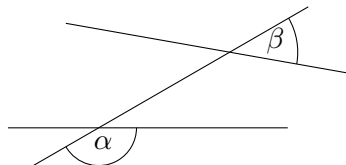
Nurgad tasandil

Nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga:

- **lähisnurgad** on kaks nurka, mille haarad lõikajal on vastassuunalised ja teised haarad paiknevad samal pool lõikajat



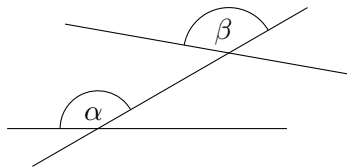
sisemised lähisnurgad



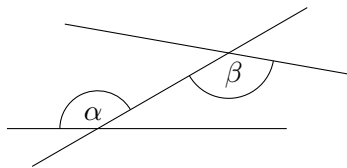
välimised lähisnurgad

Nurgad tasandil

- ▶ **kaasnurgad** on kaks nurka, mille haarad lõikajal on samasuunalised ja teised haarad paiknevad samal pool lõikajat
- ▶ **põiknurgad** on kaks nurka, mille haarad lõikajal on vastassuunalised ja teised haarad paiknevad teine teisel pool lõikajat



kaasnurgad



põiknurgad

Sirgete paralleelsus

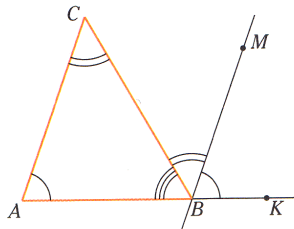
Kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega on täidetud kas või üks järgmistest tingimustest:

- ▶ üks paar kaasnurki on võrdsed;
- ▶ kahe sisemise lähisnurga summa on 180° ;
- ▶ kahe välimise lähisnurga summa on 180° .

Kolmnurga nurkade summa

Väide. Kolmnurga sisenurkade summa on 180° .

Tõestus. Vaatleme kolmnurka ABC ja tõmbame läbi tipu B sirge, mis on paralleelne sirgega AC (joonis 125). Kehtib võrdus $\angle KBM = \angle BAC$, sest need nurgad on kaasnurgad, mis on tekkinud paralleelsete sirgete CA ja BM lõikumisel lõikajaga AB . Võrdsed on ka nurgad ACB ja CBM , sest $\angle CBM$ tippnurk on $\angle ACB$ kaasnurk (siin on lõikajaks AB).



Joonis 125

Seega

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = \angle MBK + \angle MBC + \angle ABC = 180^\circ. \blacksquare$$

Järeldus. Kolmnurga välisnurk võrdub kahe temaga mitte kõrvuti asetseva sisenurga summaga.

Võrdhaarse kolmnurga üks tunnus

Kolmnurka nimetatakse **võrdhaarseks**, kui tal on kaks võrdset külge.

Väide. Olgu kolmnurk ABC võrdhaarne, st $|AB| = |BC|$, siis tippude A ja C juures olevad nurgad on võrdsed.

Tõestus. Olgu K tipust B tõmmatud kõrguse aluspunkt alusel AC . Näitame, et $\triangle ABK = \triangle CBK$. Tõepoolest, $|AB| = |CB|$, külg BK on kolmnurkadel ühine ning $\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ$, seega KKN tunnuse põhjal on need kolmnurgad võrdsed. Võrdsete kolmnurkade vastavad elemendid on võrdsed, seega $\angle A = \angle C$.

- Kas kehtib ka vastupidine väide: kui kolmnurgas on kaks võrdset nurka, siis on tegemist võrdhaarse kolmnurgaga?

Kolmnurkade uurimine

Joonista kolmnurk, mille iga külg on erineva pikkusega. Ühest ja samast tipust joonesta kolmnurgale kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan.

- ▶ Kas kõik need kolm joont on erinevad?
- ▶ Kas selline väide on õige kõikide kolmnurkade jaoks?
- ▶ Kas on võimalik, et kaks nendest lõikudest ühtivad ja kolmas on erinev?
- ▶ Kas on võimalik, et kõik kolm lõiku ühtivad?

Kolmnurkade uurimine

Väide. Võrdhaarses kolmnurgas on tipunurga poolitaja ühtlasi ka kõrgus ja mediaan.

Tõestus. Olgu $\angle B$ võrdhaarse kolmnurga ABC tipunurk ning K tipunurga poolitaja ja aluse lõikepunkt. Näitame, et siis $\triangle ABK = \triangle CBK$. Tõepoolest, $|AB| = |CB|$, külge BK on neil kolmnurkadel ühine ning $\angle ABK = \angle CBK$, mistõttu KNK tunnuse põhjal on need kolmnurgad võrdsed. Et $\angle BKA = \angle BKC$ ning $\angle BKA + \angle BKC = 180^\circ$, siis $\angle BKA = \angle BKC = 90^\circ$, mis tähendab, et BK on kõrgus. Kuna ka $|AK| = |CK|$, siis on BK lisaks veel mediaan.

- ▶ Kas on veel kolmnurki, kus nurgapoolitaja, kõrgus ja mediaan ühtivad?
- ▶ Kas on võimalik, et ainult kaks nendest kolmest lõigust ühtivad?

Kolmnurkade uurimine

Kolmnurga nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis. Sama kehtib kolmnurga mediaanide, kõrguste ja keskristsirgete kohta.

- ▶ Kas on kolmnurka, kus kõik need lõikepunktid (või mõned nendest) ühtivad?
- ▶ Kas mediaan jagab ka kolmnurga pindala kaheks?
- ▶ Kas kolmnurgas on veel teisigi jooni, mille lõikumispunkt jagab nad suhtes 2:1?

Geomeetrilised tõestused

Loeme tõestatuks järgmised tulemused:

- ▶ **Lause 1.** Kolmnurga sisenurkade summa on 180° .
- ▶ Kolmnurkade võrdsuse tunnused **KKK**, **KNK**, **NKN**, **KKN** (kaks külge ja pikema külje vastasnurk).
- ▶ Kolmnurkade sarnasuse tunnused **KKK**, **KNK**, **NN**.
- ▶ **Lause 2.** Kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega tekib üks paar võrdseid kaasnurki.
- ▶ **Lause 3.** Kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud sisemiste lähisnurkade summa on 180° .
- ▶ **Lause 4.** Kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikumisel kolmanda sirgega tekkinud välimiste lähisnurkade summa on 180° .

10. märtsi seminari ülesanded (ülesannete kogu lk 10–11)

Kati	11a
Tiiu	11b
Getriin	17
Laura	18
Moonika	21
Merilin	2
Hanna-Liisa	3
Kristjan	8
Triinu	20
Andreas	10

Kodutöö viiendast seminarist puudujatele (Liisa, Aili, Hanna-Liisa, Kristjan, Tiiu)

- Tõestage, et kui nelinurga kõik küljed on võrdsed ja kõik nurgad on võrdsed, siis nelinurga diagonaalid on võrdsed ja teineteisega risti.

Tõestuses võite kasutada ainult kolmurkade võrdsuse ja sarnasuse tunnuseid ning sirgete paralleelsuse tunnuseid. Teisi tulemusi ilma tõestuseta kasutada ei tohi. Oluline tähistuslik kokkulepe: $\triangle ABC = \triangle DEF$ korral vastab tipule A tipp D , tipule B tipp E jne, st vastavad elemendid on võimalik välja lugeda juba kolmnurga tähistest.

- Ringjoonel on antud punktid A ja B . Kaks punkti C ja D liiguvad mööda ringjoont nii, et kõõlu CD pikkus on jääv. Leidke sirgete AC ja BD lõikepunktide geomeetriline koht (kõikvõimalikud lõikepunkti asukohad).