

Seminar 6: Ruumigeomeetria. Sirged ja tasandid

MTMM.00.142 Geomeetria süvendusseminar

17.03.2017

Sirged ruumis

Kaks sirget ruumis võivad olla

- 1) lõikuvad,
- 2) ühtivad,
- 3) paralleelsed,
- 4) kiivsad.

Kahe lõikuva sirge vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka (tavaliselt vähimat), mille moodustavad kaks lõikepunktist väljuvat kiirt.

Kahe kiivsirge vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka ühe antud sirge ja niisuguse temaga lõikuva sirge vahel, mis on paralleelne teisega antud sirgetest.

Sirge ja tasand ruumis

Sirgel ja tasandil võib olla kolm erinevat vastastikust asendit:

- 1) sirge ja tasand lõikuvad (lõikepunkti nimetatakse **sirge aluspunktiks** tasandil),
- 2) sirge asub tasandil,
- 3) sirge ja tasand on paralleelsed.

Sirge on **risti tasandiga**, kui ta on risti kõigi selle tasandi sirgetega. Tasandi ristsirget nimetatakse ka tasandi **normaaliks**. Tasandi **kaldsirgeks** nimetatakse tasandit lõikavat, kuid tasandiga mitte ristuvat sirget. Kui väljaspool tasandit asuvast punktist on tasandini tõmmatud ristlõik ja kaldlõik, siis **kaldlõigu ristprojektsiooniks tasandil** nimetatakse lõiku, mis ühendab ristlõigu ja kaldlõigu aluspunkte.

Sirge ja tasand ruumis

Kolme ristsirge teoreem: Tasandil asuv sirge, mis läbib kaldsirge aluspunkti ja on risti kaldsirge projektsiooniga, on risti ka kaldsirge endaga.

Sirge ja tasandi vaheliseks nurgaks nimetatakse teravnurka selle sirge ja tema projektsiooni vahel. See nurk on vähim, mis sirge moodustab tasandil sirge aluspunkti läbivate kõikvõimalike sirgetega.

Tasand ruumis

Tasandi asendit ruumis saab üheselt määrata viiel erineval viisil:

- 1) kolm mitte ühel sirgel asuvat punkti;
- 2) üks sirge ja väljaspool seda sirget asuv punkt;
- 3) kaks lõikuvat sirget;
- 4) kaks paralleelset sirget;
- 5) tasandi normaal ja mingi punkt tasandil.

Tasandid ruumis. Kahetahuline nurk

Kaks tasandit ruumis võivad olla

- 1) lõikuvad (tasandite ühised punktid moodustavad sirge – **tasandite lõikesirge**),
- 2) paralleelsed,
- 3) ühtivad.

Kahetahuliseks nurgaks nimetatakse ruumi osa, mille moodustavad kaks ühest sirgest väljuvat erinevat pooltasandit. Sirget nimetatakse kahetahulise nurga **servaks**, pooltasandeid kahetahulise nurga **tahkudeks**.

Mitmetahuline nurk

Mitmetahuliseks nurgaks nimetatakse ruumi osa, mis jääb üksteisega lõikuvate ja ühist punkti omavate tasandite vahele. Seda ühist punkti nimetatakse mitmetahulise nurga **tipuks**. Sirgeid, mida mööda tasandid lõikuvad, nimetatakse mitmetahulise nurga **servadeks**. Naaberservade vahelisi tasandite osi nimetatakse mitmetahulise nurga **tahkudeks**. Nurka, mille moodustavad kaks naaberserva, nimetatakse mitmetahulise nurga **tasanurgaks**.

Mitmetahulist nurka nimetatakse **kumeraks**, kui selle lõikamisel tasandiga, mis lõikab nurga kõiki tahke, tekib kumer hulknurk.

Mitmetahulist nurka tähistatakse tähtedega, milles esikohal on tipu tähis, seejärel järjestikustel servadel olevate punktide tähised.

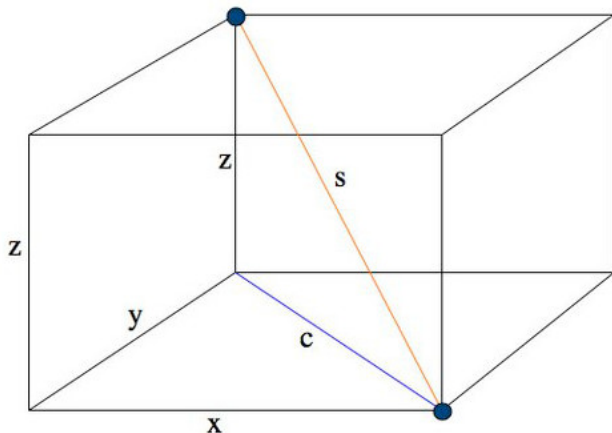
Mitmetahuline nurk

Mitmetahuliste nurkade korral kehtivad järgmised laused.

- ▶ Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kahe ülejäänud tasanurga summast.
- ▶ Mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 2π .

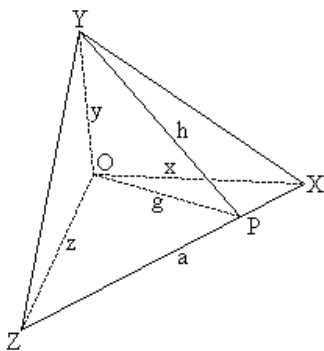
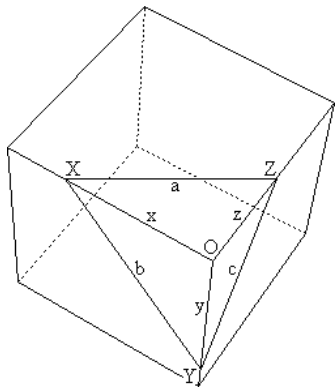
Pythagorase teoreemi ruumiline üldistus

Olgu risttahuka servad x , y , z , siis risttahuka diaonaal s avaldub kui $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ehk $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



Pythagorase teoreemi ruumiline üldistus

Olgu tetraeedri $OXYZ$ tipu O juures asuvad tasanurgad kõik täisnurgad, siis külgtahkude pindalade summa on võrdne põhitahu pindalaga, st $S_{OXY} + S_{OYZ} + S_{OXZ} = S_{XYZ}$.



Tõestus?

Ülesannete temaatiline jaotus (konspekt lk 12-13)

Kiivsirgete vaheline nurk: 1

Kaldlõigu projektsioon: 2–5

Kolmetahuline nurk tasanurkade kaudu, tetraeedrid: 6–9

Kahetahuline nurk: 10–15

Mitmetahulise nurga võimalikkus: 16–18

Kolmetahuline nurk: 19–23

Varia: 24–25

Nurkade märkimine: 26–28

Kodutöö neile, kes puudusid nii kuuendast seminarist kui sellele järgnenud loengust (Liisa, Getriin, Andreas)

Tutvuge mõistetega kahetahuline nurk ja mitmetahuline nurk. Missuguseid nurki nende juures saab mõõta? Kuidas on need nurgad määratud?

- ▶ Kas on võimalik selline kolmetahuline nurk, mille tasanurgad on 27° , 79° ja 52° ? Põhjendada.
- ▶ Kas on võimalik selline kumer neljatahuline nurk, mille tasanurgad on a) 30° , 40° , 50° ja 130° ; 80° , 40° , 120° ja 130° ? Põhjendada.
- ▶ Mitu tahku saab olla kumeral mitmetahulisel nurgal, kui tema iga tasanurk on 50° ?

Järgneb...

Kodutöö neile, kes puudusid nii kuuendast seminarist kui sellele järgnenud loengust (Liisa, Getriin, Andreas)

8. Täisnurkse kolmnurga ABC kaatetid on 15 m ja 20 m. Täisnurga tipust C väljub kolmnurga tasandi ristlõik $CD = 35$ m. Arvutada punkti D kaugus hüpotenuusist.
10. Kahetahulise nurga ühel tahul asub punkt P , mille kaugus teisest tahust on 16 cm. Arvutada punkti P kaugus kahetahulise nurga servast, kui kahetahulise nurga suurus on 30° .
22. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on kumbki 45° , kolmas tasanurk 60° . Arvutada kolmanda tasanurga vastas olev kahetahuline nurk.