

2016

# KÕRGEM MATEMAATIKA II

## MTMM.00.341

I OSA

ALGEBRA JA GEOMEETRIA

LOENGUKONSPEKT

ELLA PUMAN

## SISUKORD

EESSÕNA.....	2
<b>I ptk Vektorid, vektorruumid .....</b>	<b>3</b>
Sissejuhatus .....	3
1.1. Vektorruum üle reaalarvude.....	4
1.2. Vektorruumi alamruum. Lineaarkate. ....	5
1.3. Vektorsüsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus.....	7
1.4. Vektorruumi baas. Vektori koordinaadid.....	9
1.5. Vektorid. Lineaartehted vektoritega.....	11
1.6. Vektori projektsioon teljel.....	12
1.7. Vektorite skalaarkorrutis .....	14
1.8. Kahe vektori vaheline nurk .....	16
1.9. Vektori suunakoosinused .....	16
1.10. Vektorite vektorkorrutis .....	17
Vektorkorrutise leidmine koordinaatkujul. ....	18
1.11. Kolme vektori segakorrutis .....	19
Segakorrutise leidmine koordinaatkujul.....	20
1.12. Mõningaid analüütilise geomeetria tähtsamaid ülesandeid.....	21
1.13. Afiinsed koordinaadid .....	23
1.14. Polaarkoordinaadid .....	24
<b>II ptk. Sirge ja tasapind ruumis .....</b>	<b>25</b>
2.1. Pinna ja joone võrrandid .....	25
2.2. Tasapinna vektorvõrrand.....	25
2.3. Tasapinna üldvõrrand.....	26
2.4. Tasandi võrrand läbi kolme punkti.....	26
2.5. Kahe tasapinna vastastikune asend .....	27
Nurk kahe tasandi vahel .....	28
2.6. Sirge võrrandid ruumis.....	28
Sirge võrrandid läbi kahe punkti .....	29
Sirge kui tasandite lõikejoon .....	29
Sirge tasandil .....	30
2.7. Sirgete vastastikune asend ruumis.....	30
Nurk sirge ja tasandi vahel .....	31
2.8. Punkti kaugus tasandist .....	32
Kirjandus .....	34

## EESSÕNA

Käesolev kursus “Kõrgem matemaatika II” koosneb kolmest suuremast osast, mida käsitleme eraldi loengukonspekti osades.

Esimeses osas tutvume algebra ja geomeetria tähtsamate mõistetega, tuletame meelde vektoritega seotud tehteid ja lõpuks tutvume sirge ja tasandi võrranditega ruumis.

Teise osa alguses tutvume arvitude ja astmeridade mõistetega ja nende koondumiskriteeriumidega. Seejärel tegeleme mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutusega, integraalarvutusega ning kordsete integraalidega.

Kolmandas osas õpime lahendama erinevaid diferentsiaalvõrrandeid. Alustame kõige lihtsamatest võrranditest, mille lahendamisel piisab vaid integreerimisest, edasi tutvume esimest järku diferentsiaal-võrrandite erinevate liikidega ja nende lahendusmeetoditega. Jätkame teist järku diferentsiaalvõrranditega, kõrgemat järku diferentsiaalvõrranditega ning lõpuks uurime kahe muutuja funktsiooni jaoks osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamist.

Iga osa lõpus on ka loetelu kirjandusest, kust vastav õppematerjal pärineb ning kust on võimalik huvi korral oma teadmisi täiendada.

Kursuse “Kõrgem matemaatika II” läbinud üliõpilane on ettevalmistatud jätkukursusteks matemaatika, matemaatilise statistika, füüsika, keemia ja informaatika alal, kus võidakse ka antud materjali osaliselt korrata. Kindlasti on kursuse eesmärgiks ka üliõpilaste matemaatilise mõtlemisoskuse arendamine, mis tuleb kasuks igal erialal ja igal töökohal.

Kursuse **õpieesmärgid**, mis on kirjas Õppeinfosüsteemis, on järgmised:

Selle kursuse läbinud üliõpilane:

1. Oskab defineerida vektorruumi ja oskab leida vektorite skalaarkorrutist, vektorkorrutist ja segakorrutist.
2. Oskab defineerida ja leida osatuletisi ja täisdiferentsiaali mitme muutuja funktsioonile.
3. Oskab leida kahe- ja kolmekordseid integraale.
4. Oskab leida funktsiooni ekstreemumeid, tunneb Lagrange'i meetodit.
5. Teab hariliku diferentsiaalvõrrandi mõistet, oskab lahendada eralduvate muutujatega võrrandit, eksaktset võrrandit, lineaarset esimest ja teist järku diferentsiaalvõrrandit.
6. Tunneb osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid, oskab lahendada neist lihtsamaid.
7. Tunneb numbrilisi meetodeid diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

# Algebra ja geomeetria

## I PTK VEKTORID, VEKTORRUUMID

### SISSEJUHATUS

Selles peatükis tutvume algebra ühe olulise mõistega, milleks on vektorruum. Tegemist on teatava ehitusega mittetühja hulgaga. Vektorruumi mõiste on tegelikult üldisem, kui selles kursuses vaatleme, kus reaalarvude hulga osas on suvaline korpus. Meie kursuses on korpuse osas konkreetne korpus, milleks on reaalarvude korpus  $\mathbb{R}$ . Kuna meie kursuses korpuse mõistet ei vaadelda, siis reaalarvude korpust vaatleme kui reaalarvude hulka. Korpuse mõistet tutvustatakse loengukursuses „Algebra I“.

Lisaks vektorruumi mõistele tutvume järgmiste mõistetega: vektorruumi alamruum, lineaarne kate, vektorruumi baas ja lineaarne sõltuvus. Seejärel õpime lineaartehteid vektoritega, vektorite skalaar-, vektor- ja segakorrutise mõisteid ning nende arvutamist.

Teises peatükis tutvume sirge ja tasandi võrranditega ruumis. Vaatleme ruumi, tasandit, sirget või punkti meie igapäevases ettekujutuses. Nad on meie jaoks defineerimata mõisted ehk algmõisted. Punkti on aastatuhandeid näitlikult ette kujutatud, kui pikkuseta ja laiuseeta objekti. Sirge, tasand ja ruum on teatud punktihulgad ja me tähistame neid vastavalt  $\mathbb{E}_1$ ,  $\mathbb{E}_2$  ja  $\mathbb{E}_3$  abil. Siin kasutatakse täht  $\mathbb{E}$  on esimene täht sõnast *eukleidiline*. Kuna sageli pole oluline, kas defineeritava vektorruumi korral kasutatakse ruumi, tasandi või sirge punkte, siis me kirjutame lihtsalt  $\mathbb{E}$ .

Neid suurusi, mida on võimalik iseloomustada ühe arvuga, nimetatakse **skalaarseteks** (temperatuur, mass, töö). Neid suurusi, mille iseloomustamiseks on vaja arvu ja suunda, nimetatakse **vektoriaalseteks** (jõud, kiirus, kiirendus).

Kõigepealt tuletame meelde geomeetriliste vektorite kohta käivad mõisteid, mis on koolist juba tuttavad.

**Vektoriks** nimetatakse suunatud lõiku tasandil või ruumis, lõiku millel tehakse vahet alguse ja lõpu vahel. Kui vektori algus on punktis  $A$  ja lõpp punktis  $B$ , siis vektori tähistatakse  $\overline{AB}$  või  $\vec{a}$ . Vektor on kindla sihi, suuna ja pikkusega lõik. Siht on teda kandava sirge siht. Suund on alguspunkti lõpp-punkti poole.

**Vektori mooduliks** nimetatakse tema pikkust, see on lõigu  $AB$  pikkus ja tähistatakse  $|\overline{AB}| \equiv AB$ ,  $|\vec{a}| \equiv a$ . Vektori moodul on skalaarne mittenegatiivne suurus.

**Nullvektoriks** nimetatakse vektori, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku. Nullvektori moodul on alati võrdne nulliga, tema suund ei ole määratud.

**Ühikvektoriks** nimetatakse vektori, mille moodul on 1.

**Kollineaarseteks vektoriteks** nimetatakse vektoreid, mis asuvad ühel sirgel või paralleelsetel sirgetel. Kollineaarseid vektoreid tähistatakse  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . Kollineaarsed vektorid võivad olla samasuunalised  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$  või suunatud vastupidiselt  $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$ .

**Vastandvektoriteks** nimetatakse kahte vastassuunalist ühepikkust vektori  $\vec{a}$ ,  $-\vec{a}$ .

**Võrdseteks** nimetatakse kahte vektori, kui nad on kollineaarsed, samasuunalised ja ühepikkused (ei pea olema rakendatud samast punktist).

**Komplanaarseteks vektoriteks** nimetatakse vektoreid, mis asuvad ühel tasandil või paralleelsetel tasanditel.

**Kohavektoriteks** nimetatakse vektoreid, mille algus ja lõpp on ette antud, vektorid on seotud kindla kohaga.

**Libisevateks vektoriteks** nimetatakse vektoreid, mille alguspunkti võib suvaliselt nihutada teda kandval sirgel. Näiteks jäigale kehale rakendatud jõud.

**Vabavektoriteks** nimetatakse vektoreid, mis võivad olla rakendatud suvalisest ruumi punktist, igat vektorit võib üle kanda paralleelselt iseendaga suvalisse ruumi punkti.

## 1.1. VEKTORRUUM ÜLE REAALARVUDE

Vaatleme mittetühja hulka  $V$ , mille elemente nimetame vektoriteks.

*Definitsioon 1.1.*

Mittetühja hulka  $V$  nimetatakse **vektorruumiks üle reaalarvude hulga  $\mathbb{R}$** , kui sellel hulgal on defineeritud lineaarsed tehted: hulga  $V$  elementide liitmine ja hulga  $V$  elementide korrutamine skalaaridega nii, et on täidetud järgmised **tingimused**:

Hulk  $V$  on kinnine elementide **liitmise** suhtes: iga  $a, b \in V$  korral kehtib

$$a + b \in V.$$

- 1) Liitmine on assotsiatiivne: iga  $a, b, c \in V$  korral kehtib

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (\text{VR1})$$

- 2) Leidub **nullelement**  $0 \in V$ , nii et iga  $a \in V$  korral kehtib:

$$a + 0 = 0 + a = a. \quad (\text{VR2})$$

- 3) Iga  $a \in V$  korral leidub **vastandelement**  $-a \in V$ , nii et:

$$a + (-a) = -a + a = 0. \quad (\text{VR3})$$

- 4) Liitmine on kommutatiivne: iga  $a, b \in V$  korral kehtib

$$a + b = b + a. \quad (\text{VR4})$$

Hulk  $V$  on **kinnine skalaariga korrutamise** suhtes: iga  $k \in \mathbb{R}$  ja iga  $a \in V$  korral

$$ka \in V.$$

Kehtivad distributiivsused:

- 5) Iga  $k \in \mathbb{R}$  ja iga  $a, b \in V$  korral

$$k(a + b) = ka + kb. \quad (\text{VR5})$$

- 6) Iga  $k, l \in \mathbb{R}$  ja iga  $a \in V$  korral

$$(k + l)a = ka + la. \quad (\text{VR6})$$

- 7) Skalaariga korrutamine on assotsiatiivne: iga  $k, l \in \mathbb{R}$  ja iga  $a \in V$  korral

$$k(la) = (kl)a. \quad (\text{VR7})$$

- 8) Unitaarsuse tingimus: iga  $a \in V$  korral

$$1a = a. \quad (\text{VR8})$$

Edaspidi nimetame vektorruumi üle reaalarvude hulga  $\mathbb{R}$  lühidalt vektorruumiks. Vektorruumi elemente nimetame vektoriteks, nullelementi nimetame nullvektoriks ja vastandelementi nimetame vastandvektoriks.

Vektorruumi definitsioonist saame teha järgmised järeldused.

**Järeldus 1.** Vektorruumis on ainult üks nullvektor.

**Järeldus 2.** Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Vektorite  $a, b \in V$  **vaheks**  $a - b$  nimetatakse vektorit

$$a - b = a + (-b).$$

Vektorite lahutamisel kehtivad liitmisega analoogilised arvuga korrutamise distributiivsuse omadused.

**Järeldus 3.** Iga  $k \in \mathbb{R}$  ja iga  $a, b \in V$  korral kehtib

$$k(a - b) = ka - kb.$$

**Järeldus 4.** Iga  $k, l \in \mathbb{R}$  ja iga  $a \in V$  korral kehtib

$$(k - l)a = ka - la.$$

**Järeldus 5.** Iga  $a \in V$  korral kehtib:

$$0a = \mathbf{0}.$$

**Järeldus 6.** Iga  $k \in \mathbb{R}$  korral kehtib:

$$k\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

**Järeldus 7.** Iga  $a \in V$  korral kehtib:

$$(-1)a = -a.$$

Olulisemad vektorruumide tüübid: geomeetrilised ja aritmeetilised. Geomeetrilisteks vektorruumideks on tasandi vabavektorite hulk  $\mathbb{E}_2$  ja kolmemõõtmelise ruumi vabavektorite hulk  $\mathbb{E}_3$ , milles defineerime tehted punktis 1.5. Aritmeetilised vektorruumid on hulgad  $\mathbb{R}^n$ , kus  $n \in \mathbb{N}$ , millel tehted on defineeritud komponenthaaval:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$$k(a_1, \dots, a_n) := (ka_1, \dots, ka_n),$$

kui  $k, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ .

**Näide 1.** Kõigi reaalarvude hulk  $\mathbb{R}$  on arvude liitmise ja korrutamise suhtes vektorruum.

**Näide 2.** Kompleksarvude hulk  $\mathbb{C}$  on vektorruum, kui liitmisena vaadelda kompleksarvude liitmist ning reaalarvu  $c$  ja kompleksarvu  $a + bi$  korrutis defineeritakse kui  $c(a + bi) := ca + cbi$ .

**Näide 3.** Kõik  $(m \times n)$  maatriksid  $\text{Mat}_{m,n}$  on maatriksite liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes vektorruumid ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Vektorruum  $\mathbb{R}^n$  on sisuliselt sama, mis  $\text{Mat}_{1,n}$ .

## 1.2. VEKTORRUUMI ALAMRUUM. LINEAARKATE.

Olgu  $U$  vektorruumi  $V$  mittetühi alamhulk.

*Definitsioon 1.2.*

**Vektorruumi alamruumiks** nimetatakse vektorruumi  $V$  mittetühja alamhulka  $U$ , kui  $U$  on vektorruumi  $V$  tehete (liitmise ja arvuga korrutamise) suhtes vektorruum üle reaalarvude hulga  $\mathbb{R}$ .

Liitmine ja arvuga korrutamine vektorruumis  $V$  on teheteks tema mittetühjal alamhulgal  $U$ , kui

1) iga  $a, b \in U$  korral kehtib

$$a + b \in U. \quad (1)$$

2) iga  $k \in \mathbb{R}$  ja iga  $a \in U$  korral kehtib

$$ka \in U. \quad (2)$$

Kuna alamruum  $U \subset V$ , siis saame mittetühja alamhulga  $U$  vektoreid liita ja arvuga korrutada.

**Teoreem 1.1.** Vektorruumi  $V$  mittetühi alamhulk  $U$  on tema alamruum siis ja ainult siis, kui vektorruumi  $V$  tehted on alamhulga  $U$  teheteks.

Tingimused (1) ja (2) on samaväärsed järgmise tingimusega:

$$3) \text{ Iga } k, l \in \mathbb{R} \text{ ja iga } a, b \in U \text{ korral kehtib } ka + lb \in U. \quad (3)$$

**Näide 4.** Vektorruum on iseenda alamruum, sest  $V \subset V$  ja  $V \neq \emptyset$  ning alamhulk  $V$  on vektorruumi  $V$  tehete suhtes vektorruum.

**Näide 5.** Vektorruumi nullvektorist koosnev alamhulk  $\{0\}$  on tema alamruum, sest mistahes kahe arvu  $k, l \in \mathbb{R}$  ja mistahes kahe vektori  $a = 0, b = 0$  korral vaadeldavast alamhulgast kehtib tingimus (3), sest

$$k0 + l0 = 0 + 0 = 0.$$

Neid kahte alamruumi nimetatakse **triviaalseteks alamruumideks**. Vektorruumi  $0 = \{0\}$  nimetatakse **triviaalseks vektorruumiks**.

**Näide 6.** Kui vektori  $a \in V$ , siis hulk  $\{ka, k \in \mathbb{R}\}$  on vektorruumi  $V$  alamruum.

Kuna nullvektor sisaldub igas vektorruumi  $V$  alamruumis, siis ei ole vektorruumi kõigi alamruumide ühisosa tühi.

**Näide 7.** Hulk  $U = \{(k, 0, l), k, l \in \mathbb{R}\}$  on alamruum vektorruumis  $\mathbb{R}^3$ .

**Näide 8.** Fikseeritud sirgetega paralleelsete vabavektorite hulk on alamruum tasandi vabavektorite vektorruumis  $\mathbb{E}_2$ .

**Lause 1.** Vektorruumi iga alamruum sisaldab nullvektorit.

**Lause 2.** Vektorruumi  $V$  iga alamruum on ise ka vektorruum tehete suhtes, mis on defineeritud samamoodi nagu vektorruumi  $V$  tehted.

**Teoreem 1.2.** Vektorruumi  $V$  mistahes kahe alamruumi  $U_1$  ja  $U_2$  ühisosa  $U_1 \cap U_2$  on samuti vektorruumi alamruum.

Olgu  $a_1, a_2, \dots, a_m$  vektorruumi  $V$  elemendid ja  $m \in \mathbb{N}$ . Mistahes avaldist

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m,$$

kus  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$ , aga ka selle avaldise poolt määratud  $V$  elementi, nimetatakse vektorite  $a_1, \dots, a_m$  **lineaarseks kombinatsiooniks**. Skalaare  $k_1, \dots, k_m$  nimetatakse selle lineaarkombinatsiooni **kordajateks**.

*Definitsioon 1.3.*

**Vektorruumi  $V$  elementide  $a_1, a_2, \dots, a_m$  lineaarkatteks ehk lineaarseks katteks nimetatakse hulka**

$$L(a_1, a_2, \dots, a_m) = \{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m, k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}\}.$$

**Teoreem 1.3.** Lineaarkate  $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , kus  $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$ , on vektorruumi  $V$  alamruum.

**Näide 9.** Vektorruumi  $\mathbb{R}^3$  vektorite  $u = (1, 0, 0)$  ja  $v = (0, 0, 1)$  lineaarne kate on alamruum

$$L(u, v) = \{(k, 0, l), k, l \in \mathbb{R}\}.$$

### 1.3. VEKTORSÜSTEEMI LINEAARNE SÕLTUVUS JA SÕLTUMATUS

Võtame vektorruumist teatav arv vektoreid, näiteks  $n \in \mathbb{N}$  vektorit. Ühte ja sama vektorit võib võtta mitu korda, tähtis on vektorite järjestus.

**Vektorsüsteemiks** nimetatakse vektorite  $a_1, \dots, a_n \in V$  komplekti  $a_1, \dots, a_n$ , kus on fikseeritud elementide järjekord.

Kõige lühem vektorsüsteem koosneb ühest vektorist.

*Definitsioon 1.4.*

**Vektorsüsteemi  $a_1, \dots, a_n$  nimetatakse lineaarselt sõltumatuks, kui mistahes  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$  korral võrdusest**

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \quad (4)$$

**järeldub, et**

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0. \quad (5)$$

**Vektorite süsteemi nimetatakse lineaarselt sõltuvaks, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.**

Linearkombinatsiooni nimetatakse **triviaalseks**, kui kõik tema kordajad on nullid. Kui vähemalt üks kordaja on nullist erinev, siis öeldakse, et see linearkombinatsioon on **mittetriviaalne**.

**Teoreem 1.4.** Ühest elemendist koosnev vektorsüsteem  $a$  on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor  $a = 0$  (vektor  $a$  on nullvektor).

**Järeldus.** Ühest elemendist koosnev vektorsüsteem  $a$  on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor  $a \neq 0$  (vektor  $a$  ei ole nullvektor). Kui süsteem koosneb ühest vektorist, mis ei ole nullvektor, siis see süsteem on lineaarselt sõltumatu, sest võrdus  $ka = 0$  kehtib vaid juhul, kui  $k = 0$ .

Kui üks vektoritest, näiteks  $a_1$  on nullvektor, siis süsteem  $a_1, \dots, a_n$  on lineaarselt sõltuv, sest (4) kehtib juhul, kui võtta näiteks  $k_1 = 1, k_2 = \dots = k_n = 0$ . Kui osa vektoritest  $a_1, \dots, a_m, m < n$  on lineaarselt sõltuvad, siis on ka kogu süsteem lineaarselt sõltuv, sest kehtib võrdus  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ . Saame võrduse (4) kui võtame  $k_{m+1} = \dots = k_n = 0$ .

**Teoreem 1.5.**

Vektorsüsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi vähemalt üks vektor avaldub lineaarse kombinatsioonina ülejäänutest.

**Tõestus. Tarvilikkus.**

Olgu vektorisüsteem  $a_1, \dots, a_n$  lineaarselt sõltuv siis on täidetud tingimus (4) kusjuures vähemalt üks kordaja  $k_m, m = 1, \dots, n$  on erinev nullist. Oletame, et  $k_n \neq 0$ . Siis võrdusest (4) saab avaldada

$$a_n = -\frac{k_1}{k_n} a_1 - \frac{k_2}{k_n} a_2 - \dots - \frac{k_{n-1}}{k_n} a_{n-1}.$$

See tähendab, et  $a_n$  on lineaarne kombinatsioon ülejäänutest.

**Piisavus.**

Olgu näiteks üks vektor  $a_n$  avaldatav lineaarse kombinatsioonina ülejäänutest  $a_n = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-1} a_{n-1}$ .

Kirjutame võrduse teisiti  $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-1} a_{n-1} + (-1) a_n = 0$ . Siis on täidetud võrdus (4) kusjuures  $k_n \neq 0$ , mis tähendab, et vektorid on lineaarselt sõltuvad. ■

**Järeldus.** Vektorsüsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui sellest vektorsüsteemist ei saa avaldada ühtegi vektorit ülejäänud vektorite lineaarkombinatsiooni kaudu.

*Definitsioon.* **Vektorsüsteemi**  $a_1, \dots, a_n$  **alamsüsteemiks** nimetatakse vektorsüsteemi  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ , kui arvud  $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$  selliselt, et  $i_1 < \dots < i_k$ .

**Teoreem 1.6.** Vektorsüsteem, millel on lineaarselt sõltuv alamsüsteem, on lineaarselt sõltuv.

**Järeldused:**

1. Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteemi kõik alamsüsteemid on lineaarselt sõltumatud.
2. Vektorsüsteem, mis sisaldab nullelementi, on lineaarselt sõltuv.
3. Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem ei sisalda nullelementi.

**Näide 10.** Olgu  $V$  vektorruum. Kas kehtib järgmine väide: kui  $a, b, c \in V$  on lineaarselt sõltumatud vektorid, siis ka  $a + 2b$ ;  $b + 2c$  ja  $c + 2a$  on lineaarselt sõltumatud?

Oletame, et  $k(a + 2b) + l(b + 2c) + m(c + 2a) = 0$ , kus  $k, l, m$  on mingisugused reaalarvud. Kasutades vektorruumi aksioome, saame, et ka  $(k + 2m)a + (2k + l)b + (2l + m)c = 0$ .

Kuna vektorid  $a, b, c$  on lineaarselt sõltumatud, siis sellest võrdusest järeldub, et lineaarkombinatsiooni kõik kordajad on võrdsed nulliga:

$$k + 2m = 2k + l = 2l + m = 0.$$

Järelikult  $4m - l = 0 = 2l + m$ , kust  $9m = 0$  ja seega  $m = l = k = 0$ . Seega oleme näidanud, et lineaarkombinatsioon  $k(a + 2b) + l(b + 2c) + m(c + 2a)$  on triviaalne, mis tähendab, et vektorid  $a + 2b$ ;  $b + 2c$  ja  $c + 2a$  on lineaarselt sõltumatud.

**Näide 11.** Näidata vektorite süsteemi  $2x + 1$ ;  $x - 2$  lineaarselt sõltumatust.

Oletame, et  $k(2x + 1) + l(x - 2) = 0$ . Funktsioonid on võrdsed, kui nende väärtused on kõigi argumentide väärtuste korral võrdsed. Seega iga  $x_0 \in \mathbb{R}$  korral  $k(2x_0 + 1) + l(x_0 - 2) = 0$  ehk  $(2k + l)x_0 + k - 2l = 0$ . Võttes  $x_0 = 0$ , saame  $k = 2l$ . Võttes  $x_0 = 2$ , saame  $5k = 0$ . Seega  $k = l = 0$  ja süsteem on lineaarselt sõltumatu.

*Definitsioon 1.5.*

**Vektorruumi  $V$  vektorite süsteemi  $M$  nimetatakse moodustajate süsteemiks ehk tekitajate süsteemiks, kui vektorruumi  $V$  iga vektor avaldub süsteemi  $M$  kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.**

Enamasti on vektorruumil palju moodustajate süsteeme, mõned neist suuremad, mõned väiksemad. Eriti kasulikud on moodustajate süsteemid, mille kaudu iga vektori saab avaldada täpselt ühel viisil.

Vastavalt definitsioonidele võime öelda, et süsteem  $a_1, \dots, a_s$  on vektorruumi  $V$  **moodustajate süsteem parajasti siis**, kui  $V$  on selle süsteemi lineaarne kate:

$$V = L(a_1, \dots, a_s).$$

**Lemma 1.** Olgu  $a_1, \dots, a_s$  vektorruumi  $V$  moodustajate süsteem. Kui selle süsteemi mingi vektor avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis selle vektori väljajätmisel süstemist  $a_1, \dots, a_s$  saame jällegi vektorruumi  $V$  moodustajate süsteemi.

Kuna süsteem  $a_1, \dots, a_s$  on lineaarse katte  $L(a_1, \dots, a_n)$  moodustajate süsteem, siis saame lemmast 1 teha järgmise järelduse.

**Järeldus.** Kui vektor  $a_i$ , kus  $i \in 1, 2, \dots, n$ , avaldub süsteemi  $a_1, \dots, a_n$  ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis

$$L(a_1, \dots, a_n) = L(a_1, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Näiteks  $L(a, b, a, c, b, b) = L(a, b, c)$  mistahes vektorite  $a, b, c \in V$  korral.

## 1.4. VEKTORRUUMI BAAS. VEKTORI KOORDINAADID.

*Definitsioon 1.6.*

**Vektorruumi  $V$  baasiks  $\{e_1, \dots, e_n\}$  nimetatakse vektorruumi  $V$  lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.**

**Teoreem 1.7.** Vektorruumi kõikides baasides on samapalju elemente.

**Vektorruumi mõõtmeks** ehk **dimensiooniks** nimetatakse elementide arvu vektorruumi baasis. Ainult nullvektorist koosneva vektorruumi mõõtmeks loetakse arv 0. Selles vektorruumis ei ole baasi, sest ei ole lineaarselt sõltumatuid vektorite süsteeme.

Vektorruumi  $V$  mõõdet tähistatakse  **$\dim(V)$** .

Kui vektorruum  $V$  on  $n$ -mõõtmeline, siis vektorruumi baasiks on  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ja baasi definitsiooni kohaselt avaldub vektor  $a \in V$  reaalarvude  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  kaudu järgmiselt:

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

*Definitsioon 1.7.*

**Vektori  $a$  koordinaatideks baasil  $\{e_1, \dots, e_n\}$  nimetatakse kordajaid  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avaldises**

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Vektori koordinaadid igal baasil määratakse üheselt.

Vektorite liitmisel, lahutamisel ja arvuga korrutamisel tuleb vektorite koordinaadid vastavalt liita, lahutada ja arvuga korrutada.

Olgu vektorruumi  $V$  kaks erinevat baasi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  (vana baas) ja  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  (uus baas) ning kuulugu vektor  $a \in V$  vektorruumi  $V$ . Avaldugu vektor  $a$  uue baasi kaudu järgmiselt:

$$a = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Uue baasi elemendid avaldugu vana baasi kaudu järgmiselt

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

Leiame  $a$  koordinaadid vanal baasil:

$$\begin{aligned} a &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n = \\ &= x'_1 (a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + x'_2 (a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots \\ &+ x'_n (a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n). \end{aligned}$$



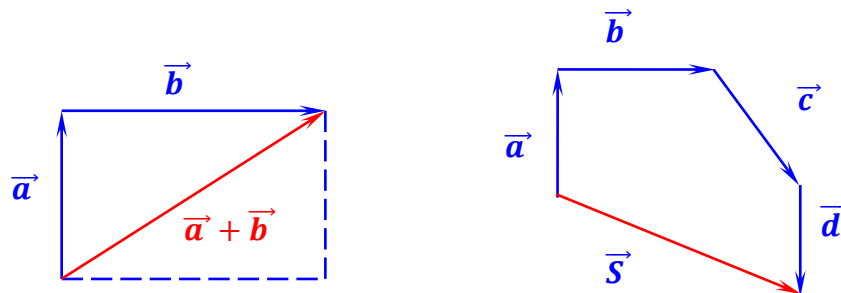
on lineaarselt sõltumatu, sest ükski vektor ei avaldu ülejäänute lineaarkombinatsioonina. Ta on ka moodustajate süsteem, sest alamruumi  $U$  iga vektor  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1) \in U$  avaldub kujul  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_{n-1} e_{n-1}$ .

Järelikult  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  on alamruumi  $U$  baas. Kuna vektorruumi mõõde on tema baasivektorite arv, siis  $\dim U = n - 1$ .

## 1.5. VEKTORID. LINEARTEHTED VEKTORITEGA

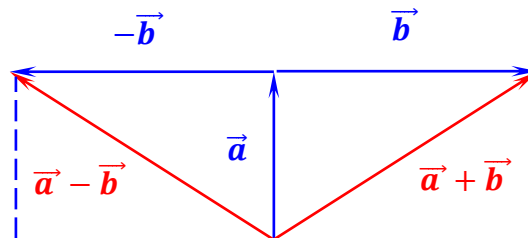
Edasi vaatame **vabavektoreid** ja defineerime vabavektorite jaoks lineaartehted. Lineartehteks vektoritega on vektorite liitmine ja vektori korrutamine skalaariga.

**Vektorite  $\vec{a}$ ,  $\vec{b} \in \mathbb{E}$  summaks** nimetatakse vektorit  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , mille alguspunkt langeb kokku vektori  $\vec{a}$  alguspunktiga ja lõpp-punkt vektori  $\vec{b}$  lõpp-punktiga. Eeldusel, et vektor  $\vec{b}$  on rakendatud vektori  $\vec{a}$  lõpp-punkti. Kahe vektori korral kehtib rööpküliku reegel. Seda definitsiooni on võimalik üldistada suvalise lõpliku arvu vektorite jaoks. Suvalise lõpliku arvu vektorite korral kehtib hulknurga reegel.



**Vektorite  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  vaheks** nimetatakse vektorit  $\vec{a} - \vec{b}$ , mis on võrdne summaga

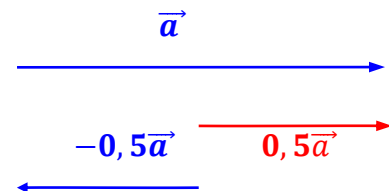
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



**Vektori  $\vec{a}$  korrutiseks arvuga  $k$**  nimetatakse vektorit  $k\vec{a}$ , mis on vektoriga  $\vec{a}$  samasuunaline kui  $k > 0$  ja temaga vastassuunaline kui  $k < 0$ .

### Lineartehtete omadused.

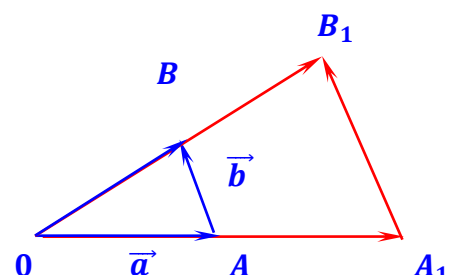
1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  kommutatiivsus
2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  assotsiatiivsus
3.  $k_1(k_2\vec{a}) = (k_1k_2)\vec{a}$
4.  $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$
5.  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$



### Tõestus

Kui  $k > 0$ ,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OA_1} = k\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{A_1B_1} = k\vec{b}$ .

Liidame algul  $\vec{a} + \vec{b}$  ja leiame  $k(\vec{a} + \vec{b})$ .



Siis leiame  $k\vec{a}$ ,  $k\vec{b}$  ja liidame. Saame sama vektori.

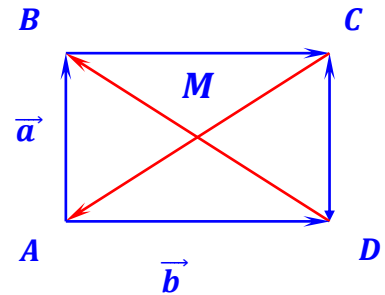
Sarnased kolmnurgad

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = s \Rightarrow \frac{OB}{OB_1} = s,$$

$$\vec{OB}_1 = k \cdot \vec{OB}, \quad \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{OB}_1 = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

Iga vektori  $\vec{a}$  võib esitada ühikvektori  $\vec{e}$  ( $|\vec{e}| = 1$ ) abil, mis on vektoriga  $\vec{a}$  samasuunaline  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$  või

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}.$$



**Näide 13.** Olgu ristküliku küljed  $\vec{AB} = \vec{a}$ ;  $\vec{AD} = \vec{b}$ .

Leida  $\vec{AC}$ ;  $\vec{MA}$ ;  $\vec{MB}$ ;  $\vec{CD}$  nende vektorite kaudu.

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\vec{MA} = -\vec{AM} = -\frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}),$$

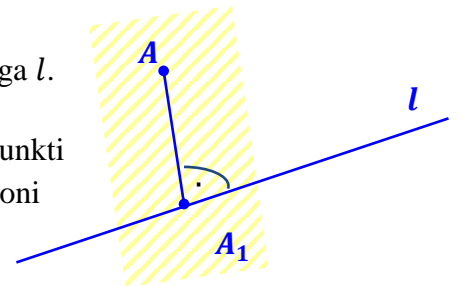
$$\vec{MB} = \vec{MA} + \vec{AB} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\vec{CD} = -\vec{DC} = -\vec{AB} = -\vec{a}.$$

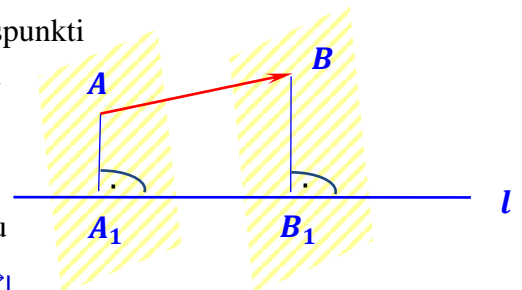
## 1.6. VEKTORI PROJEKTSIOON TELJEL

**Punkti A projektsiooniks sirgele l** nimetatakse punkti  $A_1$ , milles sirge l lõikub tasandiga, mis läbib punkti A ja on risti sirgega l.

Olgu  $\vec{AB} = \vec{a}$  suvaline vektor. Tähistame  $A_1$  vektori  $\vec{AB}$  alguspunkti A projektsiooni teljel l ja  $B_1$  vektori  $\vec{AB}$  lõpp-punkti B projektsiooni teljel l.



**Vektori  $\vec{AB} = \vec{a}$  komponendiks teljel l** nimetatakse vektorit  $\vec{A_1B_1} = \vec{a_l}$ , mille alguspunkt langeb ühte vektori  $\vec{AB}$  alguspunkti projektsiooniga teljel l ja lõpp-punkt vektori  $\vec{AB}$  lõpp-punkti projektsiooniga samal teljel.



**Vektori  $\vec{AB} = \vec{a}$  projektsiooniks teljel l** nimetatakse arvu

$$pr_l \vec{AB} = \pm |\vec{A_1B_1}| = \pm |\vec{a_l}|.$$

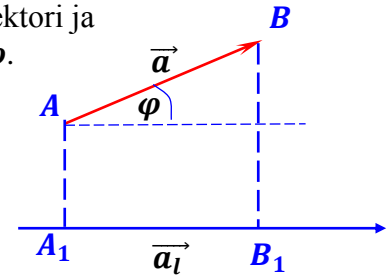
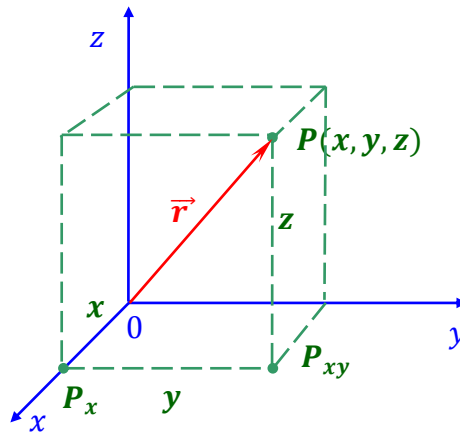
Vektori projektsioon tuleb varustada plussmärgiga, kui komponentvektori suund langeb ühte telje suunaga ning miinusmärgiga, kui vektori komponent teljel on teljega vastasuunaline.

**Vektori projektsiooni omadused.**

1. võrdsete vektorite projektsioonid samale teljele on võrdsed

2. vektori korrutamisel arvuga korrutub sama arvuga ka tema projektsioon
3. vektorite summa projektsioon mingile teljele võrdub liidetavate vektorite projektsioonide summaga samal teljel
4. vektori projektsioon teljel võrdub selle vektori pikkuse ning vektori ja telje vahelise nurga koosinuse korrutisega  $\text{pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$ .

Olgu meil antud koordinaadid 3-mõõtmelises ruumis.



**Punkti P kohavektoriks nimetatakse vektorit  $\vec{r}$** , mille projektsioonid koordinaattelgedel võrduvad punkti P koordinaatidega.

**Vektori koordinaatideks** nimetatakse vektori projektsioone koordinaattelgedele. Võtame kohavektori

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_x} + \overrightarrow{P_x P_{xy}} + \overrightarrow{P_{xy} P}$$

komponendid ruumilise teljestiku telgede sihtidest. Toome sisse koordinaattelgede suunalised ühikvektorid

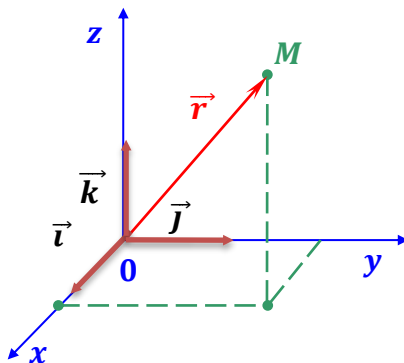
$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad |\vec{i}| = 1; \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad |\vec{j}| = 1; \quad \vec{k} = (0, 0, 1), \quad |\vec{k}| = 1,$$

$$\overrightarrow{OP_x} = x\vec{i}; \quad \overrightarrow{P_x P_{xy}} = y\vec{j}; \quad \overrightarrow{P_{xy} P} = z\vec{k}.$$

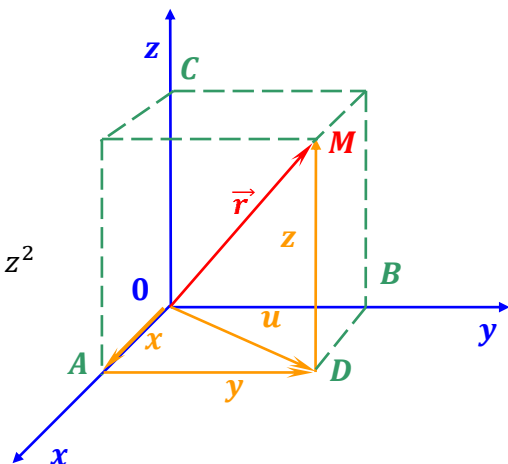
**Teoreem 1.8.** Iga vektorit  $\vec{r} = (x, y, z)$  võib ühesel viisil esitada kujul  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

**Tõestus.**

Olgu  $\vec{r}$  suvaline vektor 3-mõõtmelises ruumis ja  $x, y, z$  tema projektsioonid koordinaattelgedel. Kuna vaatleme vabu vektoreid, siis võime rakendada vektori  $\vec{r}$  punktis 0. Saame kohavektori  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ , mille koordinaadid on samuti  $x, y, z$ .



$$\begin{aligned} u^2 &= x^2 + y^2 \\ r^2 &= u^2 + z^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$



Vastavalt vektorite liitmise reeglile võime kirjutada  $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DM}$ ,

$$\overline{AD} = \overline{OB}, \quad \overline{DM} = \overline{OC}, \quad \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

Avaldame vektori  $\overline{OM}$  komponendid tema projektsioonide ja telgede ühikvektorite kaudu

$$\overline{OA} = x\vec{i}; \quad \overline{OB} = y\vec{j}; \quad \overline{OC} = z\vec{k}.$$

Saime  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . ■

Kui vektor on rakendatud koordinaatide alguspunkti, siis tema projektsioonid koordinaattelgedele  $x, y, z$  langevad kokku lõpp-punkti  $M$  koordinaatidega. Kuna koordinaatteljed on omavahel risti, siis vektori  $\vec{r} = \overline{OM}$  pikkus võrdub vektoritele  $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$  ehitatud risttahuka diagonaali pikkusega  $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Asetsegu vektori  $\vec{a}$  alguspunkt punktis  $A$  ja lõpp-punkt punktis  $B$ :

$$\overline{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}; \quad \overline{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}; \quad \overline{AB} = \overline{OA} + \overline{AB}.$$

Avaldame vektori  $\overline{AB}$ :

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

Saime  $\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ;  $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ .

## 1.7. VEKTORITE SKALAARKORRUTIS

Olgu antud vektorid  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ .

Kahte vektorit loetakse **võrdseks**, kui nende vastavad koordinaadid on võrdsed

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2.$$

Vektorite **summa ja vahe** koordinaatkujul avaldub järgmiselt

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \pm (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= (x_1 \pm x_2)\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\vec{k}, \\ \vec{a} \pm \vec{b} &= (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2). \end{aligned}$$

Vektori **korrumine skalaariga**

$$\begin{aligned} \lambda\vec{a} &= \lambda(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \lambda x_1\vec{i} + \lambda y_1\vec{j} + \lambda z_1\vec{k}, \\ \lambda\vec{a} &= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \end{aligned}$$

### Kahe vektori skalaarkorrutis.

Olgu antud vektorid  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}$ .

*Definitsioon 1.8.*

Vektorite  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  skalaarkorrutiseks nimetatakse **arvu**, mis võrdub nende vektorite pikkuste ja nendevahelise nurga koosinuse korrutisega  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$ .

**Vektori  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  pikkuse arvutamise valem**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

**Skalaarkorrutise omadused.**

1. Kommutatiivsus  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| pr_a \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| pr_b \vec{a}, \quad \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos(2\pi - \varphi) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

2. Distributiivsus  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

Et  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$  ja

$$pr_a \vec{b} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi}{|\vec{a}|}, \quad pr_b \vec{a} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi}{|\vec{b}|},$$

$$pr_a \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi, \quad pr_b \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| pr_a \vec{b} = |\vec{b}| pr_b \vec{a},$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| pr_a (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| (pr_a \vec{b} + pr_a \vec{c}) = |\vec{a}| pr_a \vec{b} + |\vec{a}| pr_a \vec{c} = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Distributiivsus järeldub vektori projektsiooni omadustest.

3. Assotsiatiivsus skalaariga korrutamise suhtes

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Järeldub vektori projektsiooni omadustest.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

**Skalaarkorrutise arvutamise valem koordinaatkujul.** Et leida skalaarkorrutist koordinaatkujul, leiame ühikvektorite skalaarkorrutised. Et  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  on paarikaupa risti, siis skalaarkorrutised

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Leiame korrutise

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

**Skalaarkorrutise arvutamise valem koordinaatkujul**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

**Vektorite ristseisu ja kollineaarsuse tingimused.**

1. Ristseisu tingimused.

Kui vektorid ristuvad, siis nende vaheline nurk on 90 kraadi, seega

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

**Skalaarkorrutise võrdumine nulliga annab vektorite ristumise tingimuse**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

## 2. Kollineaarsuse tingimused.

Kui vektorid on kollineaarsed, siis nad on paralleelsed ühe sirgega ja võib kirjutada  $\vec{a} = k\vec{b}$ , kus  $k$  on mingi arv  $(x_1, y_1, z_1) = (kx_2, ky_2, kz_2)$ . Vektorite võrdsusest saame

$$x_1 = kx_2, y_1 = ky_2, z_1 = kz_2.$$

Kahe vektori **kollineaarsuseks** on tarvilik ja piisav vektorite vastavate koordinaatide võrdelisus

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k.$$

## 1.8. KAHE VEKTORI VAHELINE NURK

Lähtume skalaarkorrutise definitsioonist  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$ . Avaldame seosest suuruse  $\cos \varphi$ , tulemuseks saame kahe vektori vahelise nurga arutamise valemi.

**Vektorite vahelise nurga koosinus avaldub skalaarkorrutise valemi kaudu**

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

## 1.9. VEKTORI SUUNAKOOSINUSED

**Vektori suunakoosinusteks** nimetatakse nende nurkade koosinusi, mis vektor moodustab koordinaattelgede positiivsete suundadega.

Suunakoosinusi tähistame  **$\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$** .

Kui leiame skalaarkorrutise vektorist  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  ja

ühikvektorist  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ , saame

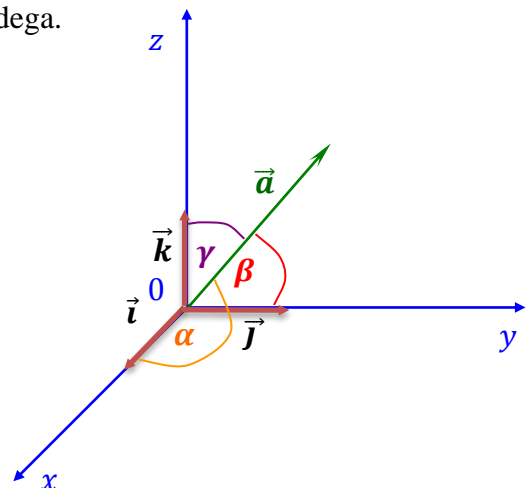
$$\vec{a} \cdot \vec{i} = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0 = x_1.$$

Skalaarkorrutis on avaldatav ka järgmiselt:

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}||\vec{i}| \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}.$$

Analoogiliselt saame leida suunakoosinused

$$\cos \beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.$$



Tõstame kõik suunakoosinused ruutu ja liidame kokku

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z_1^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{|\vec{a}|^2}.$$

Et  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ , siis  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

Olgu vektor  $\vec{e}$  vektoriga  $\vec{a}$  kollineaarne ühikvektor, siis  $|\vec{e}| = 1$ .

$$\vec{e} = \left( \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

**Näide 14.** On antud vektor  $\vec{a} = (1, -2, 2)$ . Leida vektori pikkus ja ühikvektor, mis on samasuunaline vektoriga  $\vec{a}$ .

Arvutame kõigepealt vektori  $\vec{a}$  pikkuse:  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ . Vektori suunakoosinused on:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3} \quad \cos \beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{3} \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}.$$

Vektoriga  $\vec{a}$  samasuunaline ühikvektor on seega

$$\vec{a}_0 = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

**Näide 15.** Kontrollida, millised vektoritest  $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, -2, -3)$ ,  $\vec{c} = (2, 1, 0)$  on kollineaarsed, millised asetsevad risti.

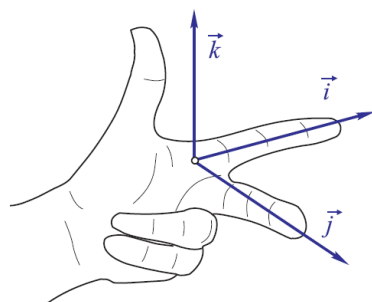
$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \text{ sest } -\frac{1}{1} = \frac{2}{-2} = \frac{3}{-3}.$$

Kontrollime vektorite ristseisu:

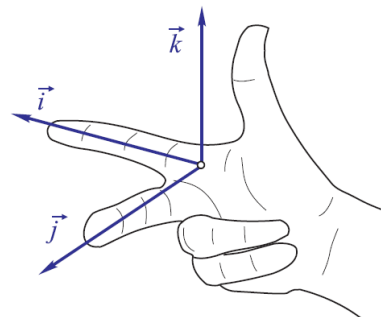
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c} \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}.$$

## 1.10. VEKTORITE VEKTORKORRUTIS

Mittekomplanaarset kolmevektorilist vektorsüsteemi  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  nimetatakse **parema (vasaku) käe kolmikuks**, kui vektori  $\vec{a}$  pööramisel lühemat teed pidi vektori  $\vec{b}$  poole toimub kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas (kellaosuti liikumise suunas).



Vasaku käe kolmik



Parema käe kolmik

Olgu antud vektorid  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_3$ .

### Definitsioon 1.9.

Vektorite  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit  $\vec{c}$ , mis rahuldab tingimusi:

1. Vektor  $\vec{c}$  on **risti tasandiga**, mis on määratud vektoritega  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$ :

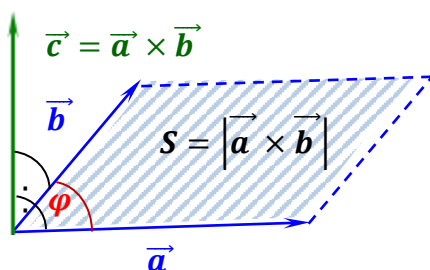
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}.$$

2. Kehtib **parema käe reegel**: tema suund on selline, et parema käe pöidla ja esimese sõrme seadmisel vastavalt vektorite  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  suundadesse näitab peopesa poole pööratud keskmine sõrm vektori suunda;

või: vektorkorrutise suunaks on **parema käe kruvi liikumise suund**, kui kruvi pead pöörata esimeselt vektorilt teise suunas lühimat teed mööda;

või: vektorsüsteem  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$  on **parema käe kolmik**.

3. Vektori  $\vec{a} \times \vec{b}$  **pikkus** on võrdne  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ .



Joonis 1.1. Vektorkorrutis.

### Vektorkorrutise omadused.

1. Vektorkorrutise **vektori pikkus** on arvuliselt **võrdne** vektoritele  $\vec{a}$  ja  $\vec{b}$  ehitatud **rööpküliku pindalaga**.

2. **Vektorkorrutis ei ole kommutatiivne**, tulemus sõltub tegurite järjekorrast

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

3. Vektorkorrutis on võrdne **nulliga**, kui üks vektoritest on **nullvektor** või vektorid on **kollineaarsed**

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \sin \varphi = 0, \quad |\vec{a}| = 0, |\vec{b}| = 0.$$

4. Vektorkorrutise pikkus  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ , kui  $\vec{a} \perp \vec{b}$  (on risti).

5. Skalaariga  $\lambda$  korrutamine:  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ .

6. Vektorkorrutise distributiivsus:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ .

### VEKTORKORRUTISE LEIDMINE KOORDINAATKUJUL.

Samade ühikvektorite vektorkorrutised on kollineaarsuse tõttu võrdsed nulliga vektorkorrutise 3. omaduse põhjal:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

Erinevate ühikvektorite vektorkorrutised on võrdsed nendega ristuva kolmanda ühikvektoriga, märk parema käe reegli järgi:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}.$$

Koordinaatkuju saamiseks leiame vektorite  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  vektorkorrutise, arvestades ühikvektorite vektorkorrutiste väärtusi:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + y_1 x_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + \\ &\quad + y_1 z_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= \vec{i} (y_1 z_2 - z_1 y_2) + \vec{j} (z_1 x_2 - x_1 z_2) + \vec{k} (x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned}$$

**Vektorkorrutise arvutamise valem koordinaatkujul on**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Teine esitusviis:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

**Näide 16.** Leida vektorkorrutis  $\vec{a} \times \vec{b}$  ja rööpküliliku pindala, kui  $\vec{a} = (0, 5, 1)$ ,  $\vec{b} = (-3, 2, 1)$ . Kõigepealt leiame vektorkorrutise, rööpküliliku pindala on vektorkorrutiseks oleva vektori pikkus.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \left( \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) = \left( \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (3, -3, 15). \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{9 + 9 + 225} = \sqrt{243}. \end{aligned}$$

**Näide 17.** Leida  $k$  nii, et vektorid  $\vec{a} = (1, -2, 2)$  ja  $\vec{b} = (3, 4, k)$  asetseksid risti ( $\vec{a} \perp \vec{b}$ ). Vektorite ristseisu tunnuseks on skalaarkorrutise võrdumine nulliga:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Leiame skalaarkorrutise ja võrdsustame nulliga, saadud avaldisest avaldame  $k$ .

$$3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot k = 0 \Rightarrow k = 2,5.$$

### 1.11. KOLME VEKTORI SEGAKORRUTIS

Olgu antud kolm vektorit  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}_3$ .

*Definitsioon 1.10.*

**Vektorite  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  segakorrutiseks** nimetatakse arvu  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

Segakorrutis sisaldab nii skalaarkorrutist kui ka vektorkorrutist.

Näitame, et kui  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  on mittekomplanaarsed, siis nende **segakorrutis võrdub vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga**. Mittekompilanaarsus tähendab seda, et vektorid ei ole paralleelsed ühe tasandiga.

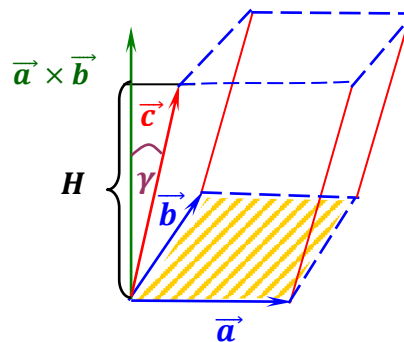
Vektoritele  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ehitatud rööpküliliku pindala on  $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . Siis segakorrutis on võrdne

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \gamma = S_p H = V.$$

Rööptahuka ruumala on võrdne põhjapindala ja kõrguse korrutisega

$$H = |\vec{c}| \cos \gamma.$$

Segakorrutis on võrdne rööptahuka ruumalaga ainult sel juhul, kui tegurid moodustavad parema käe kolmiku, vastasel korral on korrutis miinusmärgiga.



Joonis 1.2. Segakorrutis.

### Segakorrutise omadused.

1.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ , sest vektorid määravad sama rööptahuka ja moodustavad sama orientatsiooniga kolmiku. Kehtivad ka võrdsused:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

Oluline ei ole, kumb märk on vektorkorrutise, kumb skalaarkorrutise märk. Vektorkorrutises järjekorra vahetamisel märk muutub  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ .

2. Kahe kõrvutiasuva teguri omavaheline vahetamine muudab segakorrutise märgi.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}.$$

Tegurite tsükiline vahetus segakorrutist ei muuda.

## SEGAKORRUTISE LEIDMINE KOORDINAATKIJUL

Kõigepealt leiame vektorite  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  vektorkorrutise, mille korrutame skalaarselt vektoriga  $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{j} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Determinandis on tehtud kahel korral kahe rea omavaheline vahetus, mille tulemusena märk ei muutu.

**Segakorrutise leidmise valem koordinaatkujul on**

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Kui kolm vektorit asuvad ühel tasandil, siis neid nimetatakse **komplanaarseteks**. Kui vektorid  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ja  $\vec{c}$  on komplanaarsed, siis nende segakorrutis võrdub nulliga, vektoritest moodustatud rööptahuka kõrgus on null.

**Näide 18.** Olgu antud vektorid  $\vec{a} = (3,1,2)$ ,  $\vec{b} = (2,2,3)$  ja  $\vec{c} = (1,3,1)$ . Leida vektoritele ehitatud rööptahuka ruumala.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

Saime ruumala väärtuseks  $V = 12$ . Vektorid ei ole komplanaarsed aga ei moodusta parema käe kolmikut, seega vektorkorrutise märk tuli negatiivne, ruumala on alati positiivne suurus.

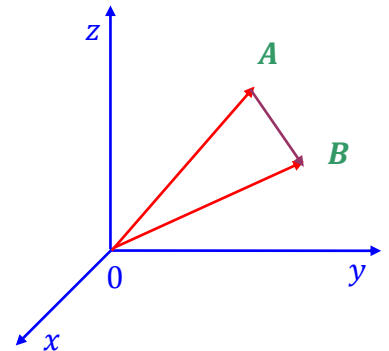
## 1.12. MÕNINGAID ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA TÄHTSAMAI ÜLESANDEID

### 1. Kahe punkti vaheline kaugus.

Olgu antud punktid  $A = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $B = (x_2, y_2, z_2)$ .  $AB = ?$

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}, \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \quad \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



### 2. Lõigu jaotamine antud suhtes $\lambda$ .

Olgu antud punktid  $A = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $B = (x_2, y_2, z_2)$ . Jaotada lõik  $AB$  etteantud suhtes  $\lambda$  ehk leida niisugune punkt  $C$ , mis rahuldab tingimust

$$\frac{AC}{CB} = \lambda, \quad C = (x, y, z), \quad AC = \lambda \cdot CB.$$

Et vektorid  $\vec{AC}$  ja  $\vec{CB}$  on samasuunalised, siis kehtib sama seos ka nende vahel  $\vec{AC} = \lambda \cdot \vec{CB}$ . Kõigepealt leiame vektorid

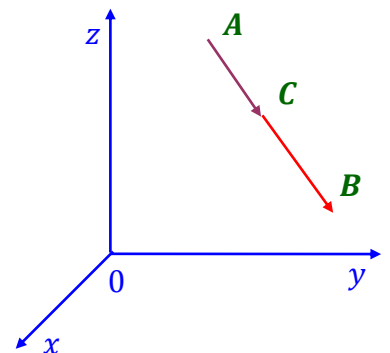
$$\vec{AC} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \quad \vec{CB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z).$$

Vektorite vastavad koordinaadid peavad olema võrdelised arvuga  $\lambda$ :

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Erijuhul, kui punkt  $C$  on lõigu keskpunkt, siis



$$\lambda = \frac{AC}{CB} = 1, \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

**Näide 19.** Jaotada lõik  $AB$  nii, et esimene osa oleks kaks korda pikem teisest, kui on antud lõigu otspunktid  $A = (-6, 4, 3)$ ,  $B = (9, 2, 6)$ .

Antud ülesandes  $\lambda = 2$ . Leiame punkti  $C$  koordinaadid  $x, y$  ja  $z$ .

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-6 + 2 \cdot 9}{1 + 2} = 4, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{4 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{8}{3},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 5.$$

$$C = \left(4, \frac{8}{3}, 5\right).$$

**Näide 20.** Antud on kolmnurk  $PQR$ :  $P(-2, -3)$ ,  $Q(6, 5)$ ,  $R(0, 7)$ . Leida mediaanide lõikepunkt  $M$ .

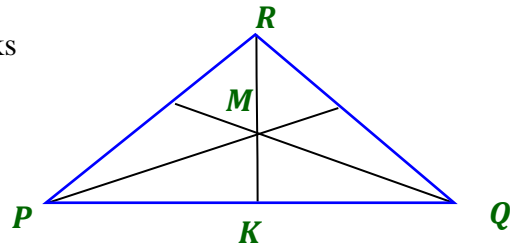
Otsitavateks on punkt  $K(x, y)$ , mis jaotab lõigu  $PQ$  kaheks võrdseks osaks ja seejärel punkt  $M(x_m, y_m)$ .

$$x = \frac{-2 + 6}{2} = 2, \quad y = \frac{-3 + 5}{2} = 1, \quad K(2, 1).$$

$$RM:MK, \quad 2:1, \quad \lambda = 2.$$

$$x_m = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{0 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{4}{3},$$

$$y_m = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{7 + 2 \cdot 1}{1 + 2} = 3. \quad M\left(\frac{4}{3}, 3\right).$$



### 3. Kolmnurga pindala.

Kolmnurga tippude koordinaadid olgu järgmised:

$$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3).$$

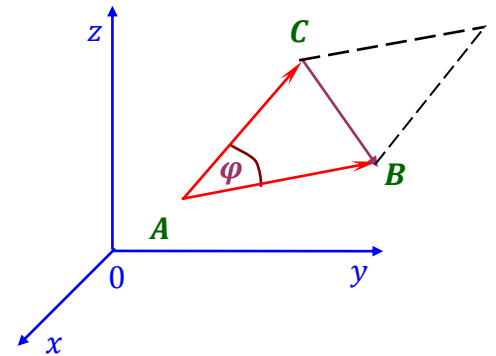
$$S_{rpk} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left( \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$



Erijuhul, kui kolmnurk asub  $xy$  tasandil, siis kõigi tippude  $z$  koordinaadid on nullid ja pindala avaldub:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}}^2 = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Märkidest tuleb valida see, mis annab pindalale positiivse väärtuse.

**Näide 21.** Leida kolmnurga  $ABC$  pindala, kui  $A(-2,1), B(3,5), C(0,-1)$ .

$$S_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 9.$$

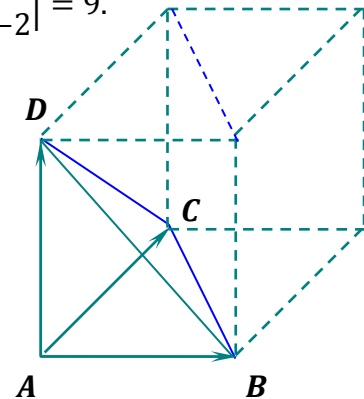
#### 4. Tetraeedri ruumala.

Olgu tetraeedri tippudeks  $A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3), D = (x_4, y_4, z_4)$ .

$$V_{rk} = \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}, \quad V_{ABCD} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$



Vektoritele  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  ja  $\overrightarrow{AD}$  ehitatud tetraeedri ruumala avaldub valemiga

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Kui punktid asuvad ühel tasandil, siis nende poolt moodustatud tetraeedri ruumala võrdub nulliga.

**Tingimus nelja punkti asumiseks samal tasandil on:**

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

### 1.13. AFIINSED KOORDINAADID

Fikseerime tasandil mingi punkti 0 ja valime kaks mittekollineaarset vektorit  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . Nimetame punkti 0 koordinaatide alguspunktiks ja vektoreid  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  baasvektoriteks.

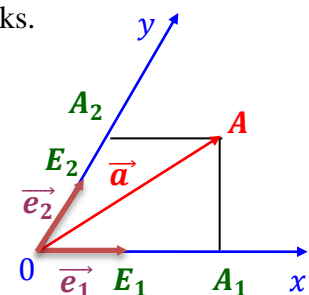
Tõmbame sirged, millele kuuluvad vektorid  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ .

Fikseerime positiivsed suunad. Saime kaks koordinaattelge  $0x, 0y$ .

See on üldistatud Descartes'i ehk afiinne koordinaatsüsteem.

Olgu  $\vec{a}$  tasandi suvaline vektor, mille rakendame punktist 0.

Saame  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ . Vektor  $\vec{a}$  avaldub siis  $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ .



Arve  $x$  ja  $y$  nimetatakse **üldistatud Descartes'i koordinaatideks** ehk **afiinseteks koordinaatideks**  $\vec{a} = (x, y)$ ,  $A = (x, y)$ .

Koordinaat  $x$  on lõigu  $OA_1$  pikkus mõõdetuna mastaaplõigu  $OE_1$  abil, koordinaat  $y$  on lõigu  $OA_2$  pikkus mõõdetuna mastaaplõigu  $OE_2$  abil. Erijuhul, kui  $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$  ja  $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ , saame Descartes'i ristkoordinaadistiku.

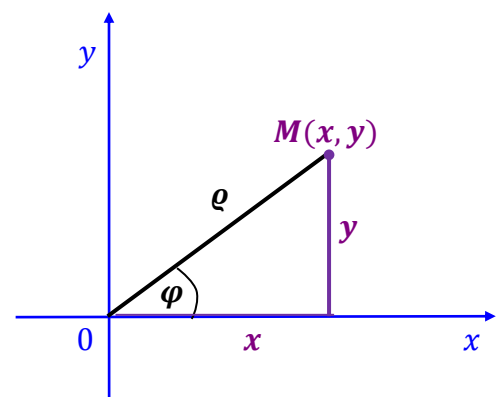
Analoogiliselt tuuakse sisse afiinne koordinaatsüsteem ruumis. Fikseerime ruumis punkti  $0$  ja valime kolm mittekomplanaarset vektorit  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ . Olgu  $\vec{a}$  ruumi suvaline vektor, mille rakendame punktist  $0$ . Saame  $\vec{OA} = \vec{a}$ . Vektor  $\vec{a}$  avaldub siis  $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ .

Arve  $x, y$  ja  $z$  nimetatakse **üldistatud Descartes'i koordinaatideks** ehk **afiinseteks koordinaatideks**  $\vec{a} = (x, y, z)$ ,  $A = (x, y, z)$ .

#### 1.14. POLAARKOORDINAADID

**Punkti  $M$  polaarkoordinaatideks** nimetatakse tema polaarraadiust  $\rho$  ja polaarnurka  $\varphi$ .

Igale punktile tasandil vastab üks polaarraadiuse väärtus  $\rho$  ja polaarnurk  $\varphi$ , mis on määratud täpsusega  $2k\pi$ , kus  $k$  on suvaline täisarv.



## II PTK. SIRGE JA TASAPIND RUUMIS

### 2.1. PINNA JA JOONE VÖRRANDID

Analüütilises geomeetrias käsitletakse jooni ja pindu kui punktide hulka, mis rahuldavad teatud tingimusi.

**Sfääriks** nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, mis asuvad ühest kindlast punktist  $C(x_0, y_0, z_0)$  samal kaugusel  $r$ .

Olgu  $M(x, y, z)$  sfääri suvaline punkt, siis kaugus keskpunktist on  $|\overline{CM}| = r$ . Kuna vektori  $\overline{CM}$  koordinaadid avalduvad  $\overline{CM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , siis kaugus

$$|\overline{CM}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r.$$

Ehk

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Erijuhul, kui  $C = (0, 0, 0)$ , siis  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Pinna võrrandiks üldkujul on funktsionaalne sõltuvus  $F(x, y, z) = 0$ .

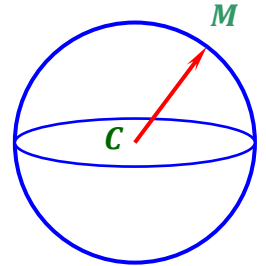
Kõverat (joont) võib ruumis vaadelda kui kahe pinna lõikejoont:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Vaatleme näiteks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

See vastab punktide hulgale, mis asuvad üheaegselt nii sfääril kui ka tasandil  $z = 0$ . Ühisosaks on ringjoon.



### 2.2. TASAPINNA VEKTORVÖRRAND

Olgu  $T$  suvaline tasand ruumis.

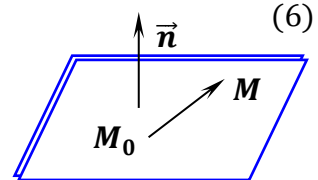
**Tasapinna normaalvektoriks** nimetatakse iga tasandiga  $T$  risti olevat nullist erinevat vektorit. Kui on teada tasapinna mingi punkt  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ja üks temaga risti olev vektor  $\vec{n} = (A, B, C)$ , siis sellega on tasand täielikult määratud. Võtame suvalise punkti tasandil  $M(x, y, z)$ . Siis  $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$ .

$$\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0.$$

Siis

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (6)$$

See on **tasandi võrrand**, mis läbib punkti  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ja on vektoriga  $\vec{n} = (A, B, C)$  risti.



**Näide 22.** Koostada tasandi võrrand, mis läbib punkti  $M_0(4, -5, 6)$  ja mille normaalvektoriks on  $\vec{n} = (1, 2, -3)$ .

Kasutades võrrandit (6), saame  $1 \cdot (x - 4) + 2 \cdot (y - (-5)) + (-3) \cdot (z - 6) = 0$  ja tasandi võrrand on:

$$x + 2y - 3z + 24 = 0.$$

### 2.3. TASAPINNA ÜLDVÖRRAND

Teisendame võrrandit (6) järgmiselt:  $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$ .  
Tähistame  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ .

**Tasapinna üldvõrrand** on kujul

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Tasapinna **normaalvektor**  $\vec{n} = (A, B, C)$ .

**Erijuhud.**

1. Kui  $D = 0$ ,  $Ax + By + Cz = 0$ . Siis tasapind läbib koordinaatide algust, sest punkt  $(0, 0, 0)$  rahuldab seda võrrandit.
2. Kui  $A = 0$ ,  $By + Cz + D = 0$ . See on  $x$  teljega paralleelne tasapind, sest tasapinna normaalvektor  $\vec{n} = (0, B, C)$  on risti teljega  $x$  (tema projektsioon  $x$  teljele on null).  
Kui  $B = 0$ ,  $Ax + Cz + D = 0$ , siis tasapind on paralleelne  $y$  teljega.  
Kui  $C = 0$ ,  $Ax + By + D = 0$ , siis tasapind on paralleelne  $z$  teljega.
3. Kui  $A = D = 0$ ,  $By + Cz = 0$ , siis tasapind läbib  $x$  telge. Kuna on paralleelne  $x$  teljega ja samas läbib koordinaatide alguspunkti, järelikult peab läbima  $x$  telge.  
Analoogiliselt, kui  $B = D = 0$ ,  $Ax + Cz = 0$ , siis tasapind läbib  $y$  telge,  
kui  $C = D = 0$ ,  $Ax + By = 0$ , siis tasapind läbib  $z$  telge.
4. Kui  $A = B = 0$ ,  $Cz + D = 0$ , siis tasapind on paralleelne  $xy$  tasandiga. Tasapind peab olema paralleelne  $x$  teljega, sest  $A = 0$  ja  $y$  teljega, sest  $B = 0$ , järelikult peab tasapind olema paralleelne  $xy$  tasandiga. Analoogiliselt, kui  $A = C = 0$ ,  $By + D = 0$ , siis tasapind on paralleelne  $xz$  tasandiga ja  
kui  $B = C = 0$ ,  $Ax + D = 0$ , siis tasapind on paralleelne  $yz$  tasandiga.
5. Kui  $A = B = D = 0$ ,  $Cz = 0$ ,  $z = 0$ , siis tegemist on  $xy$  tasandiga, kuna tasand on paralleelne  $xy$  tasandiga ja läbib koordinaatide alguspunkti, siis järelikult on see  $xy$  tasand. Analoogiliselt, kui  $B = C = D = 0$ ,  $Ax = 0$ ,  $x = 0$ , on tegemist  $yz$  tasandiga ja  
kui  $A = C = D = 0$ ,  $By = 0$ ,  $y = 0$ , on tegemist  $xz$  tasandiga.

**Näide 23.** Koostada võrrand tasapinnale, mis läbib  $x$  telge ja punkti  $M_0(1, 2 - 1)$ .

Kui tasapind läbib  $x$  telge, siis  $A = D = 0$ ,  $By + Cz = 0$ . Kordajad  $B$  ja  $C$  määrame tingimusest, et punkti  $M_0$  koordinaadid peavad rahuldama tasandi võrrandit, ehk  $B \cdot 2 + C \cdot (-1) = 0$ . Siit saame, et  $C = 2B$  ja asetades avaldise tasandi võrrandisse, saame  $y + 2z = 0$ .

### 2.4. TASANDI VÖRRAND LÄBI KOLME PUNKTI

Olgu antud kolm punkti, mis ei asu ühel sirgel:

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3).$$

Olgu  $M(x, y, z)$  tasandi suvaline punkt. Moodustame vektorid

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1).$$

Need kolm vektorit on komplanaarsed, mistõttu nende segakorrutis on null.  $\vec{AM} \vec{AB} \vec{AC} = 0$ .

**Tasandi võrrandi läbi kolme punkti** saame võrdusest:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Näide 24.** Koostada tasandi võrrand, mis läbib punkte  $M_1(1, -4, 9)$ ,  $M_2(-2, -5, 7)$ ,  $M_3(3, -6, 8)$ .

Moodustame vektorid  $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3, -1, -2)$ ,  $\overrightarrow{M_1M_3} = (2, -2, -1)$ ,  $\overrightarrow{M_1M} = (x - 1, y + 4, z - 9)$

Nende vektorite segakorrutise võrdumisest nulliga saame:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 4 & z - 9 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad 3x + 7y - 8z + 97 = 0.$$

## 2.5. KAHE TASAPINNA VASTASTIKUNE ASEND

Olgu antud kaks tasandit oma üldvõrranditega:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Tasandite normaalvektorid on

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

**Kaks tasandit on paralleelsed** ainult siis, kui nende normaalvektorid on paralleelsed (kollineaarsed). Järelikult

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Kui lisaks on võrdelised ka vabaliikmed, siis need **tasandid ühtivad**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = k.$$

Ühest võrrandist saame teise mingi teguriga korrutades.

**Tasandite ristseisu tingimus:** kaks tasandit on teineteisega risti, kui on **risti nende normaalvektorid**:  $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$  ehk  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ , siis

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

**Näide 25.** Määrata järgmiste tasandite vastastikune asend:  $2x - 3y + z - 2 = 0$  ja  $4x + 3y + z + 5 = 0$ .

Kõigepealt uurime, kas kordajad on võrdelised:

$$\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{3}.$$

Kontrollime ristumise tingimust:  $2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$ . Järelikult tasandid on omavahel risti.

## NURK KAHE TASANDI VAHEL

Olgu antud kaks tasandit üldvõrranditega:  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ .

**Nurgaks kahe tasandi vahel** nimetatakse **nurka nende tasandite normaalide**  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  ja  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  vahel.

**Kahe tasandi vahelise nurga koosinus avaldub**

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

## 2.6. SIRGE VÕRRANDID RUUMIS

Sirge on ruumis määratud, kui on teada tema suund (sihivektor) ja üks punkt sirgel. Tuletame võrrandi sirgele, mis läbib punkti  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ja mille sihivektor on  $\vec{s} = (m, n, p)$ . Olgu sirge suvaline punkt  $M(x, y, z)$ . Siis vektor  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ . Vektorid  $\vec{s}$  ja  $\overrightarrow{M_0M}$  peavad olema kollineaarsed.

**Sirge kanoonilised võrrandid**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (7)$$

Tegemist on sirge võrrandiga läbi etteantud punkti antud suunavektoriga. Võrrandist (7) saame kolmest võrrandist koosneva süsteemi

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}, \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \end{cases}$$

millest kaks esimest on olulised, kolmas juba järelalus. Vektor  $\vec{s}$  ei saa olla nullvektor, küll aga võib olla mõni tema koordinaatidest 0 ja on võimalik järgmine kirjaviis:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (8)$$

Sihivektori koordinaatidest võib võrduda nulliga ülimalt kaks, et sihivektor  $\vec{s}$  oleks ikka veel nullvektorist erinev. Kui valemis on nimetajas null, siis teeme sellise kokkuleppe, et võtame lugeja võrdseks nulliga. Seega saame seose (8) kirjutada kujul

$$\begin{cases} \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \\ x - x_0 = 0 \end{cases}.$$

Kui sihivektori kaks koordinaati on võrdsed nulliga, näiteks  $n = p = 0$ , siis saame süsteemi

$$\begin{cases} y - y_0 = 0 \\ z - z_0 = 0 \end{cases}.$$

**Näide 26.** Koostada võrrandid sirgele, mis on risti tasandiga  $x - 2y + z - 1 = 0$  ja läbib selle tasandi ja  $x$  telje lõikepunkti.

Leiame antud tasandi lõikepunkti  $x$  teljega:  $y = z = 0, x = 1$ ;  $(1,0,0)$ .

Sirge on risti tasandiga kui ta on paralleelne tasandi normaalvektoriga  $(1, -2, 1)$ :

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 0}{-2} = \frac{z - 0}{1}.$$

## SIRGE VÕRRANDID LÄBI KAHE PUNKTI

Olgu teada kaks sirgel asuvat punkti  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  ja  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Sellisel juhul suunavektoriks on  $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ . Võtame etteantud punktiks  $M_1$ , siis saame sirge võrrandi läbi kahe punkti.

**Kahte punkti  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  ja  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  läbiva sirge võrrand on kujul**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

## SIRGE KUI TASANDITE LÕIKEJOON

Sirget ruumis võib vaadelda kui kahte mitteparalleelse tasandi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ ja } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

lõikejoont.

**Sirge üldvõrrandid ruumis**

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

**Näide 27.** Koostada kanoonilised võrrandid sirgele, mis on antud oma üldvõrranditega

$$\begin{cases} 2x - 5y + z + 4 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Normaalvektorid avalduvad järgmiselt:  $\vec{n}_1 = (2, -5, 1), \vec{n}_2 = (1, 2, -1)$ .

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left( \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (3, 3, 9).$$

Kanooniliste võrrandite koostamiseks on vaja teada kaht sirgel asuvat punkti. Kui võtame  $z = 0$ , saame süsteemi

$$\begin{cases} 2x - 5y + 4 = 0, \\ x + 2y + 2 = 0, \end{cases}$$

mille lahenditeks on  $x = -2$  ja  $y = 0$ . Seega üheks sirgel asuvaks punktiks on punkt  $A(-2, 0, 0)$ . Kui võtame  $x = 0$ , saame järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} -5y + z + 4 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

mille lahenditeks on  $y = 2$  ja  $z = 6$ . Seega teiseks sirgel asuvaks punktiks on punkt  $B(0, 2, 6)$ . Moodustame vektori  $\overrightarrow{AB} = (2, 2, 6)$ , saame

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}.$$

## SIRGE TASANDIL

Sirget võib vaadelda kui kahe tasapinna lõikejoont. Vaatleme erijuhtu, kus üks tasanditest on  $xy$ -tasand:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Asendame esimesse võrrandisse  $z = 0$ , saame

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Normaalvektor on  $\vec{n} = (A, B, 0)$ .

Kui eelnevalt on teada, et sirge asub  $xy$  tasandil, jäetakse  $z = 0$  lihtsalt ära.

### Sirge üldvõrrand tasandil

$$Ax + By + D = 0.$$

**Näide 28.** Koostada tasandi võrrand, kui tasand läbib punkte  $A(0,0,3)$ ,  $B(-4,2,1)$ ,  $C(1,3,-1)$ .

Normaalvektori saamiseks arvestame, et vektorid  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  asuvad tasandil ja  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  on risti tasandiga, ehk  $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$ . Arvutame vektorid  $\vec{AB} = (-4,2,-2)$ ,  $\vec{AC} = (1,3,-4)$ . Seega normaalvektori saame järgmiselt:

$$\vec{n} = \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-2, -18, -14).$$

Tasandi võrrand on:  $x + 9y + 7z - 21 = 0$ .

**Näide 29.** Tasand läbib kahte punkti  $A(2, -4, 3)$ ,  $B(1, -2, 5)$  ja on paralleelne vektoriga  $\vec{a} = (2, -3, 1)$ . Koostada tasandi võrrand.

Kuna vektor  $\vec{AB}$  asub tasandil, siis vektorid  $\vec{AB}$  ja  $\vec{a}$  peavad olema komplanarsed. Tasandi normaalvektoriks võib võtta  $\vec{AB} \times \vec{a}$ . Seega  $\vec{AB} = (-1, 2, 2)$  ja normaalvektoriks saame

$$\vec{n} = \left( \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (8, 5, -1).$$

Tasandi võrrand on:  $8x + 5y - z + 7 = 0$ .

## 2.7. SIRGETE VASTASTIKUNE ASEND RUUMIS

Olgu antud kaks sirget võrranditega:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Sirgete sihivektorid ja punktid sirgetel on järgmised:

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2).$$

Võtame vektori

$$\vec{s} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Kaks sirget on **kiivad** siis kui vektorid  $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}$

on mittekomplanaarsed, siis segakorrutis ei võrdu nulliga

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sirged **asuvad samal tasandil** siis ja ainult siis kui vektorid  $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}$

on komplanaarsed, siis 
$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sirged **lõikuvad**, kui vektorid on komplanaarsed ja ei ole täidetud tingimus

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Sirged on **paralleelsed**, kui on täidetud tingimus

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Sirged **ühtivad**, kui vektorid on **kollineaarsed**.

## NURK SIRGE JA TASANDI VAHEL

Olgu antud sirge võrrandiga

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

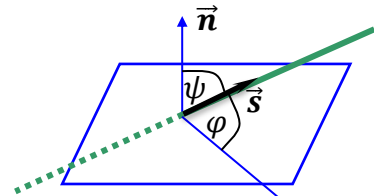
ja tasand võrrandiga

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Sirge sihivektor olgu  $\vec{s} = (m, n, p)$ . Tasandi normaal olgu  $\vec{n} = (A, B, C)$ .

Loeme nurga  $\varphi$  (nurk sirge ja tasandi vahel) teravnurgaks,  $\psi$  olgu nurk tasandi normaali ja sirge sihivektori vahel.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi, \sin \varphi = \cos \psi,$$



**Sirge sihivektoriga  $\vec{s} = (m, n, p)$  ja tasandi normaalvektoriga  $\vec{n} = (A, B, C)$  vahelise nurga koosinus avaldub valemiga**

$$\cos \psi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \sin \varphi.$$

**Näide 30.** Leidke sirge

$$\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

ja tasandi  $5x - z - 4 = 0$  vaheline nurk. Lõikumise korral leidke ka lõikepunkt.

Sirge on antud oma üldvõrranditega ruumis, kui kahe tasandi lõikejoon. Tasandite normaalvektorid on  $\vec{n}_1 = (3, 5, -7)$ ,  $\vec{n}_2 = (2, -1, 1)$ , seega sirge sihivektor on

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left( \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-2, -17, -13).$$

Sirge ja tasandi vahelise nurga valemi järgi saame

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \frac{-10 + 0 + 13}{\sqrt{462} \cdot \sqrt{26}} = \frac{3}{2\sqrt{3003}},$$

seega sirge ja tasandi vaheline nurk on

$$\arcsin\left(\frac{3}{2\sqrt{3003}}\right) \approx 1,6^\circ.$$

Sirge ja tasand lõikuvad. Lõikepunkti leidmiseks peavad olema rahuldatud kõik kolm võrrandit, seega peame lahendama järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0 \\ 2x - y + z - 6 = 0 \\ 5x - z - 4 = 0 \end{cases}$$

Lahenditeks on  $x = 2$ ,  $y = 4$  ja  $z = 6$ . Järelikult sirge ja tasandi lõikepunkt on  $L = (2, 4, 6)$ .

## 2.8. PUNKTI KAUGUS TASANDIST

Olgu antud punkt  $A(x_0, y_0, z_0)$  ja tasand

$$\vec{n} = (A, B, C), \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Tuleb leida sirge võrrand, mis läbib punkti  $A$  ja on paralleelne normaalvektoriga  $\vec{n}$ . Kehtivad võrrandid:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Leiame lõikepunkti

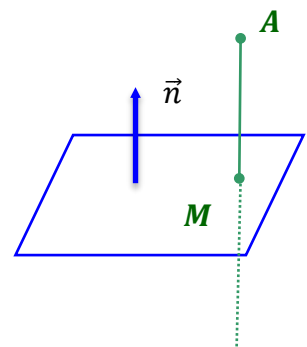
$$x - x_0 = \frac{A}{B}(y - y_0), \quad x = x_0 + \frac{A}{B}(y - y_0),$$

$$z - z_0 = \frac{C}{B}(y - y_0), \quad z = z_0 + \frac{C}{B}(y - y_0).$$

Paneme tasandi võrrandisse

$$A \left[ x_0 + \frac{A}{B}(y - y_0) \right] + By + C \left[ z_0 + \frac{C}{B}(y - y_0) \right] + D = 0.$$

Leiame  $y$ :



$$y = \frac{-ABx_0 + A^2y_0 - CBz_0 + C^2y_0 - DB}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Eesmärk on leida kahe punkti vaheline kaugus.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \frac{-ABx_0 + A^2y_0 - CBz_0 + C^2y_0 - DB - A^2y_0 - B^2y_0 - C^2y_0}{A^2 + B^2 + C^2} = \\ &= \frac{-B(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned}$$

$$x - x_0 = \frac{A}{B}(y - y_0) = \frac{-A(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z - z_0 = \frac{C}{B}(y - y_0) = \frac{-C(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$d = \sqrt{\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2(A^2 + B^2 + C^2)}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} = t \end{cases}$$

Saame

$$x = At + x_0, \quad y = Bt + y_0, \quad z = Ct + z_0.$$

Kirjutame eelmised võrrandid järgmisel kujul:

$$x - x_0 = At, \quad y - y_0 = Bt, \quad z - z_0 = Ct.$$

Asendades  $x, y, z$  süsteemi esimesse võrrandisse, saame

$$A(At + x_0) + B(Bt + y_0) + C(Ct + z_0) + D = 0.$$

Teisest võrrandist saame

$$t(A^2 + B^2 + C^2) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

Avaldame siit suuruse  $t$ :

$$\begin{aligned} t &= -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, & At &= -A\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ Bt &= -B\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}, & Ct &= -C\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned}$$

**Punkti  $A(x_0, y_0, z_0)$  kaugus tasandist  $Ax + By + Cz + D = 0$**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Näide 31.** Leida punkti  $P(1, 2, 1)$  kaugus tasandist  $\pi: 15x - 10y + 6z - 190 = 0$ .

Punkti kauguse leidmiseks tasandist kasutame saadud võrrandit ning paneme punkti  $P(1, 2, 1)$  koordinaadid ning tasandi normaalvektori koordinaadid  $\vec{n} = (15, -10, 6)$  valemisse, saame

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|15 - 20 + 6 - 190|}{\sqrt{15^2 + (-10)^2 + 6^2}} = \frac{|-189|}{\sqrt{225 + 136}} = \frac{189}{19} = 9 \frac{18}{19}.$$

## KIRJANDUS

1. Mati Kilp. *Algebra I*. Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.
2. Aivo Parring. Loengukonspekt aines "Algebra ja geomeetria", Tartu, 2006.  
<http://math.ut.ee/pmi/kursused/ag/parring/>
3. Erich Steiner. *The Chemistry Maths Book*. Oxford University Press, 2008.  
[https://syaifulhamzah.files.wordpress.com/2013/08/erich\\_steiner-the-chemistry-maths-book-second.pdf](https://syaifulhamzah.files.wordpress.com/2013/08/erich_steiner-the-chemistry-maths-book-second.pdf)
4. Lembit Roots, Elmar Sakkov. *Kõrgem matemaatika: õppevahend majandusteaduskonna üliõpilastele*. Tartu Riiklik Ülikool, teoreetilise mehaanika kateeder, Tartu, 1982.