2017

Kõrgem matemaatika II

MTMM.00.341

LOENGUKONSPEKT

vastutav õppejõud

ELLA PUMAN

ella.puman@ut.ee

TARTU ÜLIKOOL | Matemaatika ja statistika instituut

SISUKORD

EESSÕNA

Käesolev kursus "Kõrgem matemaatika II" algab tutvumisest algebra tähtsamate mõistetega, milleks on vektorruumi mõiste, vektorite lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse mõiste, vektorruumi baasi ja vektori koordinaatide mõisted.

Matemaatilisest analüüsist tutvume arvridade ja astmeridade mõistetega, nende koondumiskriteeriumidega. Seejärel tegeleme mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutusega, integraalarvutusega ning kordsete integraalidega.

Lõpuks õpime lahendama erinevaid diferentsiaalvõrrandeid. Alustame kõige lihtsamatest võrranditest, mille lahendamisel piisab vaid integreerimisest, edasi tutvume esimest järku diferentsiaalvõrrandite erinevate liikidega ja nende lahendusmeetoditega. Jätkame teist järku diferentsiaalvõrranditega, kõrgemat järku diferentsiaalvõrranditega, diferentsiaalvõrrandite süsteemidega ning lõpuks uurime kahe muutuja funktsiooni jaoks osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamist.

Konspekti lõpus on loetelu kirjandusest, kust õppematerjal pärineb ning kust on võimalik huvi korral oma teadmisi täiendada.

Kursuse "Kõrgem matemaatika II" läbinud üliõpilane on ettevalmistatud jätkukursusteks matemaatika, matemaatilise statistika, füüsika, keemia, materjaliteaduse ja informaatika alal, kus võidakse ka antud materjali osaliselt korrata. Kindlasti on kursuse eesmärgiks ka üliõpilaste matemaatilise mõtlemisoskuse arendamine, mis tuleb kasuks igal erialal.

Selle kursuse läbinud üliõpilane on omandanud järgmised oskused.

1. Oskab defineerida vektorruumi ja teab vektorite lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse mõisteid.
2. Oskab defineerida ja leida osatuletisi ja täisdiferentsiaali mitme muutuja funktsioonile.
3. Oskab leida kahe- ja kolmekordseid integraale.
4. Oskab leida funktsiooni ekstreemumeid, tunneb Lagrange'i meetodit.
5. Teab hariliku diferentsiaalvõrrandi mõistet, oskab lahendada eralduvate muutujatega võrrandit, lineaarset esimest ja teist järku diferentsiaalvõrrandit.
6. Tunneb osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid, oskab lahendada neist lihtsamaid.
7. Tunneb numbrilisi meetodeid diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

I PTK VEKTORRUUMID, VEKTORITE LINEAARNE SÕLTUVUS JA SÕLTUMATUS

SISSEJUHATUS

Selles peatükis tutvume algebra ühe olulise mõistega, milleks on vektorruum. Tegemist on teatava ehitusega mittetühja hulgaga. Vektorruumi mõiste on tegelikult üldisem, kus reaalarvude hulga osas on suvaline korpus. Meie kursuses on korpuse osas konkreetne korpus, milleks on reaalarvude korpus $\mathbb{R}$. Kuna meie kursuses korpuse mõistet ei vaadelda, siis reaalarvude korpust vaatleme kui reaalarvude hulka. Korpuse mõistet tutvustatakse loengukursuses „Algebra I".

1.1. VEKTORRUUM ÜLE REAALARVUDE HULGA

Vaatleme mittetühja hulka V, mille elemente nimetame vektoriteks. Vektorid tähistame edaspidi rasvases kirjas, et eristada vektoreid skalaaridest.

Definitsioon 1.1.

Mittetühja hulka V nimetatakse **vektorruumiks üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$**, kui sellel hulgal on defineeritud lineaarsed tehted: hulga V elementide liitmine ja hulga V elementide korrutamine skalaaridega nii, et on täidetud järgmised tingimused:

Hulk V on kinnine elementide **liitmise** suhtes: iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral kehtib

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V.$$

1) Liitmine on assotsiatiivne: iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ korral kehtib

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}). \qquad \text{(VR1)}$$

2) Leidub **nullelement $\mathbf{0} \in V$**, nii et iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib:

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR2)}$$

3) Iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral leidub **vastandelement $-\boldsymbol{a} \in V$**, nii et:

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}. \qquad \text{(VR3)}$$

4) Liitmine on kommutatiivne: iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral kehtib

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR4)}$$

Hulk V on **kinnine skalaariga korrutamise** suhtes: iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$k\boldsymbol{a} \in V.$$

Kehtivad distributiivsused:

5) Iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral

$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}. \qquad \text{(VR5)}$$

6) Iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR6)}$$

7) Skalaariga korrutamine on assotsiatiivne: iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR7)}$$

8) Unitaarsuse tingimus: iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR8)}$$

Edaspidi nimetame vektorruumi üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ lühidalt vektorruumiks. Vektorruumi elemente nimetame vektoriteks, nullelementi nimetame nullvektoriks ja vastandelementi nimetame vastandvektoriks.
Vektorruumi definitsioonist saame teha järgmised järeldused.
Järeldus 1. Vektorruumis on ainult üks nullvektor.
Järeldus 2. Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Vektorite $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ **vaheks $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$** nimetatakse vektorit

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Vektorite lahutamisel kehtivad liitmisega analoogilised arvuga korrutamise distributiivsuse omadused.

Järeldus 3. Iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral kehtib

$$k(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}.$$

Järeldus 4. Iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib

$$(k - l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} - l\boldsymbol{a}.$$

Järeldus 5. Iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib:

$$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}.$$

Järeldus 6. Iga $k \in \mathbb{R}$ korral kehtib:

$$k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Järeldus 7. Iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib:

$$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

Olulisemad vektorruumide tüübid: geomeetrilised ja aritmeetilised. **Geomeetrilisteks vektorruumideks** on tasandi vabavektorite hulk $\mathbb{E}_2$ ja kolmemõõtmelise ruumi vabavektorite hulk $\mathbb{E}_3$. **Aritmeetilised vektorruumid** on hulgad $\mathbb{R}^n$, kus $n \in \mathbb{N}$, millel tehted on defineeritud komponenthaaval:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \coloneqq (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$
$$k(a_1, \dots, a_n) \coloneqq (ka_1, \dots, ka_n),$$

kui $k, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Näide 1.1. Kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on arvude liitmise ja korrutamise suhtes vektorruum.

Näide 1.2. Kompleksarvude hulk $\mathbb{C}$ on vektorruum, kui liitmisena vaadelda kompleksarvude liitmist ning reaalarvu c ja kompleksarvu $a + bi$ korrutis defineeritakse kui $c(a + bi) \coloneqq ca + cbi$.

Näide 1.3. Kõik $(m \times n)$ maatriksid $\mathrm{Mat}_{m,n}$ on maatriksite liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes vektorruumid $(m, n \in \mathbb{N})$. Vektorruum $\mathbb{R}^n$ on sisuliselt sama, mis $\mathrm{Mat}_{1,n}$.

1.2. VEKTORRUUMI ALAMRUUM. LINEAARKATE.

Olgu U vektorruumi V mittetühi alamhulk.

Definitsioon 1.2.

Vektorruumi alamruumiks nimetatakse vektorruumi V mittetühja alamhulka U, kui U on vektorruumi V tehete (liitmise ja arvuga korrutamise) suhtes vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.
Liitmine ja arvuga korrutamine vektorruumis V on teheteks tema mittetühjal alamhulgal U, kui

1) iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ korral kehtib

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U. \tag{1.1}$$

2) iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in U$ korral kehtib

$$k\boldsymbol{a} \in U. \tag{1.2}$$

Kuna alamruum $U \subset V$, siis saame mittetühja alamhulga U vektoreid liita ja arvuga korrutada.

Teoreem 1.1.
Vektorruumi V mittetühi alamhulk U on tema alamruum siis ja ainult siis, kui vektorruumi V tehted on alamhulga U teheteks.

Tingimused (1.1) ja (1.2) on samaväärsed järgmise tingimusega:

3) Iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ korral kehtib $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{U}$. (1.3)

Näide 1.4. Vektorruum on iseenda alamruum, sest $V \subset V$ ja $V \neq \emptyset$ ning alamhulk V on vektorruumi V tehete suhtes vektorruum.

Näide 1.5. Vektorruumi nullvektorist koosnev alamhulk $\{\boldsymbol{0}\}$ on tema alamruum, sest mistahes kahe arvu $k, l \in \mathbb{R}$ ja mistahes kahe vektori $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ korral vaadeldavast alamhulgast kehtib tingimus (3), sest

$$k\boldsymbol{0} + l\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

Neid kahte alamruumi nimetatakse **triviaalseteks alamruumideks.** Vektorruumi $\boldsymbol{0} = \{\boldsymbol{0}\}$ nimetatakse **triviaalseks vektorruumiks.**

Näide 1.6. Kui vektor $\boldsymbol{a} \in V$, siis hulk $\{k\boldsymbol{a}, k \in \mathbb{R}\}$ on vektorruumi V alamruum.

Kuna nullvektor sisaldub igas vektorruumi V alamruumis, siis ei ole vektorruumi kõigi alamruumide ühisosa tühi.

Näide 1.7. Hulk $U = \{(k, 0, l), k, l \in \mathbb{R}\}$ on alamruum vektorruumis $\mathbb{R}^3$.

Näide 1.8. Fikseeritud sirgetega paralleelsete vabavektorite hulk on alamruum tasandi vabavektorite vektorruumis $\mathbb{E}_2$.

Lause 1.1. Vektorruumi iga alamruum sisaldab nullvektorit.

Lause 1.2. Vektorruumi V iga alamruum on ise ka vektorruum tehete suhtes, mis on defineeritud samamoodi nagu vektorruumi V tehted.

Teoreem 1.2.
Vektorruumi V mistahes kahe alamruumi U_1 ja U_2 ühisosa $U_1 \cap U_2$ on samuti vektorruumi alamruum.

Olgu $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorruumi V elemendid ja $m \in \mathbb{N}$. Mistahes avaldist

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m,$$

kus $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$, aga ka selle avaldise poolt määratud V elementi, nimetatakse vektorite $a_1, \dots, a_m$ **lineaarseks kombinatsiooniks**. Skalaare $k_1, \dots, k_m$ nimetatakse selle lineaarkombinatsiooni **kordajateks**.

Definitsioon 1.3.

Vektorruumi V elementide $a_1, a_2, \dots, a_m$ **lineaarkatteks** ehk **lineaarseks katteks** nimetatakse hulka

$$\boldsymbol{L(a_1, a_2, \dots, a_m) = \{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m,\ k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}\}}.$$

Teoreem 1.3.
Lineaarkate $L(a_1, a_2, \dots, a_m)$, kus $a_1, a_2, \dots, a_m \in V$, on vektorruumi V alamruum.

Näide 1.9. Vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorite $u = (1,0,0)$ ja $v = (0,0,1)$ lineaarne kate on alamruum

$$L(u, v) = \{(k, 0, l), k, l \in \mathbb{R}\}.$$

1.3. VEKTORSÜSTEEMI LINEAARNE SÕLTUVUS JA SÕLTUMATUS

Võtame vektorruumist teatav arv vektoreid, näiteks $n \in \mathbb{N}$ vektorit. Ühte ja sama vektorit võib võtta mitu korda, tähtis on vektorite järjestus.

Vektorsüsteemiks nimetatakse vektorite $a_1, \dots, a_n \in V$ komplekti $a_1, \dots, a_n$, kus on fikseeritud elementide järjekord.
Kõige lühem vektorsüsteem koosneb ühest vektorist.

Definitsioon 1.4.

Vektorsüsteemi $a_1, \dots, a_n$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui mistahes $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ korral võrdusest

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \tag{1.4}$$

järeldub, et

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0. \tag{1.5}$$

Vektorite süsteemi nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks**, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.

Lineaarkombinatsiooni nimetatakse triviaalseks, kui kõik tema kordajad on nullid. Kui vähemalt üks kordaja on nullist erinev, siis öeldakse, et see lineaarkombinatsioon on mittetriviaalne.

Teoreem 1.4.
Ühest elemendist koosnev vektorsüsteem $\boldsymbol{a}$ on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ (vektor $\boldsymbol{a}$ on nullvektor).

Järeldus.
Ühest elemendist koosnev vektorsüsteem $\boldsymbol{a}$ on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ (vektor $\boldsymbol{a}$ ei ole nullvektor). Kui süsteem koosneb ühest vektorist, mis ei ole nullvektor, siis see süsteem on lineaarselt sõltumatu, sest võrdus $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ kehtib vaid juhul, kui $k = 0$.

Kui üks vektoritest, näiteks a_1 on nullvektor, siis süsteem $a_1, \dots, a_n$ on lineaarselt sõltuv, sest (1.4) kehtib juhul, kui võtta näiteks

$$k_1 = 1, k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Kui osa vektoritest $a_1, \dots, a_m, m < n$ on lineaarselt sõltuvad, siis on ka kogu süsteem lineaarselt sõltuv, sest kehtib võrdus

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0.$$

Võrduse (1.4) saame, kui võtame

$$k_{m+1} = \dots = k_n = 0.$$

Teoreem 1.5.

Vektorsüsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selle vektorsüsteemi vähemalt üks vektor avaldub lineaarse kombinatsioonina ülejäänutest.

Tõestus.
Tarvilikkus.
Olgu vektorisüsteem $a_1, \dots, a_n$ lineaarselt sõltuv siis on täidetud tingimus (1.4) kusjuures vähemalt üks kordaja k_m, $m = 1, \dots, n$ on erinev nullist. Oletame, et $k_n \neq 0$. Siis võrdusest (1.4) saab avaldada

$$a_n = -\frac{k_1}{k_n} a_1 - \frac{k_2}{k_n} a_2 - \dots - \frac{k_{n-1}}{k_n} a_{n-1}.$$

See tähendab, et a_n on lineaarne kombinatsioon ülejäänutest.

Piisavus.
Olgu näiteks üks vektor a_n avaldatav lineaarse kombinatsioonina ülejäänutest

$$a_n = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-1} a_{n-1}.$$

Kirjutame võrduse teisiti

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-1} a_{n-1} + (-1) a_n = 0.$$

Siis on täidetud võrdus (1.4) kusjuures $k_n \neq 0$, mis tähendab, et vektorid on lineaarselt sõltuvad. ∎

Järeldus.

Vektorsüsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui sellest vektorsüsteemist ei saa avaldada ühtegi vektorit ülejäänud vektorite lineaarse kombinatsiooni kaudu.

Definitsioon 1.5.
Vektorsüsteemi $a_1, \dots, a_n$ alamsüsteemiks nimetatakse vektorsüsteemi .$a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, kui arvud $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ selliselt, et $i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Teoreem 1.6.
Vektorsüsteem, millel on lineaarselt sõltuv alamsüsteem, on lineaarselt sõltuv.

Järeldused:
1. Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteemi kõik alamsüsteemid on lineaarselt sõltumatud.
2. Vektorsüsteem, mis sisaldab nullelementi, on lineaarselt sõltuv.
3. Lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem ei sisalda nullelementi.

Näide 1.10. Olgu V vektorruum. Kas kehtib järgmine väide: kui $a, b, c \in V$ on lineaarselt sõltumatud vektorid, siis ka $a + 2b;\ b + 2c$ ja $c + 2a$ on lineaarselt sõltumatud?

Oletame, et

$$k(a + 2b) + l(b + 2c) + m(c + 2a) = 0,$$

kus k, l, m on mingisugused reaalarvud. Kasutades vektorruumi aksioome, saame, et ka

$$(k + 2m)a + (2k + l)b + (2l + m)c = 0.$$

Kuna vektorid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, siis sellest võrdusest järeldub, et lineaarkombinatsiooni kõik kordajad on võrdsed nulliga:

$$k + 2m = 2k + l = 2l + m = 0.$$

Järelikult

$$4m - l = 0 = 2l + m,$$

kust

$$9m = 0$$

ja seega

$$m = l = k = 0.$$

Oleme näidanud, et lineaarkombinatsioon

$$k(a + 2b) + l(b + 2c) + m(c + 2a)$$

on triviaalne, mis tähendab, et vektorid $a + 2b;\ b + 2c$ ja $c + 2a$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1.11. Näidata vektorite süsteemi $2x + 1;\ x - 2$ lineaarselt sõltumatust.

Oletame, et

$$k(2x + 1) + l(x - 2) = 0.$$

Funktsioonid on võrdsed, kui nende väärtused on kõigi argumendi väärtuste korral võrdsed. Seega iga $x_0 \in \mathbb{R}$ korral

$$k(2x_0 + 1) + l(x_0 - 2) = 0$$

ehk

$$(2k + l)x_0 + k - 2l = 0.$$

Võttes $x_0 = 0$, saame $k = 2l$. Võttes $x_0 = 2$, saame $5k = 0$. Seega $k = l = 0$ ja süsteem on lineaarselt sõltumatu.

Definitsioon 1.6.

Vektorruumi V vektorite süsteemi M nimetatakse **moodustajate süsteemiks** ehk tekitajate süsteemiks, kui vektorruumi V iga vektor avaldub süsteemi M kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.

Enamasti on vektorruumil palju moodustajate süsteeme, mõned neist suuremad, mõned väiksemad. Eriti kasulikud on moodustajate süsteemid, mille kaudu iga vektori saab avaldada täpselt ühel viisil.

Vastavalt definitsioonidele võime öelda, et süsteem $a_1, \dots, a_s$ on vektorruumi $\boldsymbol{V}$ **moodustajate süsteem parajasti siis**, kui V on selle süsteemi lineaarne kate:

$$V = L(a_1, \dots, a_s).$$

Lemma 1.1.
Olgu $a_1, \dots, a_s$ vektorruumi V moodustajate süsteem. Kui selle süsteemi mingi vektor avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis selle vektori väljajätmisel süstemist $a_1, \dots, a_s$ saame jällegi vektorruumi V moodustajate süsteemi.

Kuna süsteem $a_1, \dots, a_s$ on lineaarse katte $L(a_1, \dots, a_n)$ moodustajate süsteem, siis saame lemmast 1 teha järgmise järelduse.

Järeldus.
Kui vektor a_i, kus $i \in 1, 2, \dots, n$, avaldub süsteemi $a_1, \dots, a_n$ ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis

$$L(a_1, \dots, a_n) = L(a_1, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Näiteks $L(a, b, a, c, b, b) = L(a, b, c)$ mistahes vektorite $a, b, c \in V$ korral.

1.4. VEKTORRUUMI BAAS. VEKTORI KOORDINAADID.

Definitsioon 1.7.

Vektorruumi V **baasiks** $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ nimetatakse vektorruumi V lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.

Teoreem 1.7.
Vektorruumi kõikides baasides on samapalju elemente.

Vektorruumi mõõtmeks ehk **dimensiooniks** nimetatakse elementide arvu vektorruumi baasis. Ainult nullvektorist koosneva vektorruumi mõõtmeks loetakse arv 0. Selles vektorruumis ei ole baasi, sest ei ole lineaarselt sõltumatuid vektorite süsteeme.
Vektorruumi V mõõdet tähistatakse $\mathbf{dim}(\boldsymbol{V})$.

Lause 1.3

n-mõõtmelises vektorruumis on iga n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnev süsteem baas.

Näide 1.12. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}^2$ kolm erinevat baasi.

Kuna vektorruumi $\mathbb{R}^2$ mõõde on 2, siis selle vektorruumi mistahes baasi kuulub kaks vektorit, mis on lineaarselt sõltumatud. Vektorruumi üheks baasiks on vektorite süsteem $\{e_1, e_2\}$, kus

$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1).$$

Teiseks baasiks on vektorite süsteem $\{a_1, a_2\}$, kus $a_1 = (1,1), a_2 = (0,1)$.

Kolmandaks baasiks on vektorite süsteem $\{d_1, d_2\}$, kus $d_1 = (0,1), d_2 = (2,3)$.

Viimane vektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu, kuna lineaarse kombinatsiooni

$$kd_1 + ld_2 = (0, k) + (2l, 3l) = (2l, k + 3l)$$

võrdumisest nullvektoriga saame avaldada kordajad k ja l

$$(2l, k + 3l) = (0,0),$$

siis $l = 0$ ja $k + 3l = 0$ ehk $k = 0$. Seega süsteem $\{d_1, d_2\}$ on lineaarselt sõltumatu ja vastavalt lausele 1.3 võime öelda, et süsteem on vektorruumi $\mathbb{R}^2$ baas.

Kui vektorruum V on n-mõõtmeline, siis vektorruumi baasiks on $\{e_1, \dots, e_n\}$ ja baasi definitsiooni kohaselt avaldub vektor $\boldsymbol{a} \in V$ reaalarvude $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x_1 e_1} + \boldsymbol{x_2 e_2} + \dots + \boldsymbol{x_n e_n}.$$

Definitsioon 1.8.

Vektori $\boldsymbol{a}$ **koordinaatideks baasil** $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ nimetatakse kordajaid $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ avaldises

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x_1 e_1} + \boldsymbol{x_2 e_2} + \dots + \boldsymbol{x_n e_n}.$$

Vektorite liitmisel, lahutamisel ja arvuga korrutamisel tuleb vektorite koordinaadid vastavalt liita, lahutada ja arvuga korrutada.

Olgu vektorruumi V kaks erinevat baasi $\{e_1, \dots, e_n\}$ (vana baas) ja $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ (uus baas) ning kuulugu vektor $\boldsymbol{a} \in V$ vektorruumi V. Avaldugu vektor $\boldsymbol{a}$ uue baasi kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{a} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Uue baasi elemendid avaldugu vana baasi kaudu järgmiselt

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n \\ e'_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ e'_n = a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n \end{cases}$$

Leiame vektori $\boldsymbol{a}$ koordinaadid vanal baasil:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n = \\ &= x'_1(a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + x'_2(a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + \dots + a_{n2} e_n) + \dots \\ &+ x'_n(a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n). \end{aligned}$$

Võtame kokku liikmed vana baasi kaudu, saame:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = (x'_1 a_{11} e_1 + x'_1 a_{21} e_2 + \dots + x'_1 a_{n1} e_n) + (x'_2 a_{12} e_1 + x'_2 a_{22} e_2 + \dots + x'_2 a_{n2} e_n) + \dots \\ &+ (x'_n a_{1n} e_1 + x'_n a_{2n} e_2 + \dots + x'_n a_{nn} e_n) = \\ &= (x'_1 a_{11} + x'_2 a_{12} + \dots + x'_n a_{1n}) e_1 + (x'_1 a_{21} + x'_2 a_{22} + \dots + x'_n a_{2n}) e_2 + \dots \\ &+ (x'_1 a_{n1} + x'_2 a_{n2} + \dots + x'_n a_{nn}) e_n. \end{aligned}$$

Saime koordinaatide teisenemise valemid üleminekul ühest baasist teise:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + \dots + a_{1n} x'_n, \\ x_2 &= a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + \dots + a_{2n} x'_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1} x'_1 + a_{n2} x'_2 + \dots + a_{nn} x'_n. \end{aligned}$$

Antud seost on võimalik esitada maatrikskujul järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Tähistame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit $\boldsymbol{A}$ nimetatakse **baasiteisenduse maatriksiks** üleminekul vanalt baasilt uuele baasile. Baasiteisenduse maatriks on regulaarne, see tähendab, et $|A| \neq 0$.
Saame **üleminekuvalemid** kirjutada lühemal kujul:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \dots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \dots \\ \boldsymbol{x'_n} \end{pmatrix}.$$

Kehtib ka vastupidine seos:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \dots \\ \boldsymbol{x'_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A^{-1}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \dots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}.$$

Näide 1.13. Tõestage, et hulk $U = \{(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) \mid u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum ning leidke selle alamruumi baas ja mõõde.

Näitame, et hulk U on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum. Kuna

$$(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) + (v_1, v_2, .., v_{n-1}, v_1) = (u_1 + v_1, \dots, u_{n-1} + v_{n-1}, u_1 + v_1) \in U,$$

sest viimase vektori esimene ja viimane komponent on võrdsed, siis U on kinnine liitmise suhtes. Kuna

$$k(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) = (ku_1, ku_2, .., ku_{n-1}, ku_1) \in U,$$

siis U on kinnine ka reaalarvuga korrutamise suhtes. Seega U on alamruum. Alamruumi U vektorite süsteem

$$\begin{gathered} e_1 = (1,0,0, \dots,0,1), \\ e_2 = (0,1,0, \dots,0,0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{n-1} = (0, 0,0, \dots,1,0). \end{gathered}$$

on lineaarselt sõltumatu, sest ükski vektor ei avaldu ülejäänute lineaarkombinatsioonina. Ta on ka moodustajate süsteem, sest alamruumi U iga vektor $(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) \in U$ avaldub kujul

$$(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_{n-1} e_{n-1}.$$

Järelikult $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ on alamruumi U baas. Kuna vektorruumi mõõde on tema baasivektorite arv, siis

$$\dim U = n - 1.$$

II PTK READ

2.1. ARVREAD, REA SUMMA

Definitsioon 2.1.

Arvreaks (lühemalt reaks) nimetatakse **lõpmatut summat**, mis avaldub kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k} = \boldsymbol{u_0} + \boldsymbol{u_1} + \ \dots + \boldsymbol{u_n} + \ \dots \qquad (2.1)$$

Rea liikmeteks nimetatakse arve $u_0, u_1, \dots . u_n, \dots$
rea üldliikmeks nimetatakse suvalise indeksiga rea liiget $\boldsymbol{u_n}$.

Moodustame rea (2.1) osasummad järgmiselt:

$$S_0 = u_0;$$

$$S_1 = u_0 + u_1;$$

$$\dots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Rea osasummade jadaks nimetatakse jada $(\boldsymbol{S_n})$, kus

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{u_k}.$$

Definitsioon 2.2.

Rea summaks nimetatakse piirväärtust (kui see eksisteerib)

$$\boldsymbol{S} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_n},$$

kirjutame

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k}.$$

Aritmeetilised read. Vaatleme rida, mille liikmed on aritmeetilise jada liikmed. Aritmeetilise jada $a_n = a_1 + d(n-1)$ esimese n liikme summa S_n avaldub kujul

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ \dots + (a_1 + (n-1)d).$$

Kirjutame rea liikmete summad tagurpidises järjekorras

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ \dots + a_1.$$

Liites kokku mõlemad avaldised, saame

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \ \dots + (2a_1 + (n-1)d) =$$

$$= n(2a_1 + (n-1)d),$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Esimese n naturaalarvu summa: $a_1 = d = 1$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Geomeetrilised read.

Geomeetrilise jada üldliige on $a_n = a_1 q^{n-1}$ ja esimese n liikme summa S_n avaldub järgmiselt

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 x^k = a_1 + a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_1 x^{n-1}.$$

Lõpliku rea liikmete saamiseks korrutame saadud summa muutujaga x:

$$x \cdot S_n = a_1 x + a_1 x^2 + \ldots + a_1 x^n.$$

Lahutame kaks eelnevat avaldist, saame

$$S_n - x \cdot S_n = a_1 - a_1 x^n = a_1(1 - x^n),$$

$$S_n(1-x) = a_1(1-x^n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a_1(1-x^n)}{1-x}.$$

$$a_1 = 1: \quad \frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}.$$

Geomeetriliseks reaks nimetatakse rida kujul

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots}$$

Harmoonilised read.

Harmooniliseks reaks nimetatakse rida kujul

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots, \alpha > 0.}$$

Kui $\alpha = 1$, siis saame järgmise harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Summa S_n avaldub

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Näide 2.1. Leida osasummade jada ja summa järgmisele reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}.$$

Lahutame kõigepealt murru osamurdude summaks järgmiselt:

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}.$$

Määrame kordajad A ja B võrdusest

$$2 = A(n+2) + Bn.$$

Kui võtta $n = 0$, siis saame $A = 1$ ja kui võtta $n = -2$, siis saame $B = -1$. Seega

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}.$$

Leiame osasummade jada S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Koondame liikmed ja saame

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Rea summa saamiseks peame võtma piirväärtuse järgmiselt

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Seega saime rea summaks

$$S = \frac{3}{2}.$$

2.2. ARVRIDADE KOONDUVUS JA HAJUVUS

Rida (2.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

koondub summaks *S*, kui rea summa S on **lõplik** (kui eksisteerib **lõplik piirväärtus** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$), ehk kui rea osasummade jada (S_n) koondub summaks S.

Rida (2.1) hajub, kui piirväärtust **ei eksisteeri** või kui piirväärtus on lõpmatu ehk kui rea osasummade jada (S_n) ei koondu. Seega kui

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty \text{ või } \sum_{k=0}^{\infty} u_k = -\infty,$$

siis on tegemist hajuva reaga.

Kui **real on lõplik summa**, siis sümboliga

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

tähistatakse nii rida kui ka tema summat.

Tarvilik tingimus rea koonduvuseks (rea hajumise tunnus).

Lause 2.1.

Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ **koondub**, siis tema üldliige läheneb nullile:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0. \tag{2.2}$$

Tõestus.
Kui rida koondub, siis eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Samuti kehtib

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Kuna kehtib võrdus

$$u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n - u_0 - u_1 - \ldots - u_{n-1} = S_n - S_{n-1},$$

siis võttes mõlemast võrduse poolest piirväärtuse, saame

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

■

Tarvilikku tingimust tuleks kõigepealt kontrollida. See tähendab, et tarviliku tingimuse kehtimine ei ole piisav rea koondumise üle otsustamiseks, vaid teame seda, et **kui tingimus ei ole täidetud, võime kindlalt öelda, et rida hajub**. Seetõttu võib tarvilikku tingimust nimetada ka **rea hajumise tunnuseks**.

Näide 2.2. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots;$$

$$S_1 = -1, \qquad S_2 = -1 + 1 = 0, \qquad S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \ldots$$

Rea osasummad moodustavad jada

$$(-1, 0, -1, 0, \ldots),$$

mis on hajuv ja seetõttu ka vastav rida on hajuv.

Näide 2.3. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots;$$

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + 1 = 2, \qquad S_3 = 1 + 1 + 1 = 3, \ldots.$$

Rea osasummad moodustavad jada

$$(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots),$$

mis on tõkestamata

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

ja seetõttu on tegemist hajuva reaga.

Kirjutame välja arvrea (2.1) järgmise summana

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \tag{2.3}$$

Arvrea (2.1) **jääkliikmeks** nimetatakse rida

$$\boldsymbol{\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.} \tag{2.4}$$

Arvrea summa *S* võime samuti kirjutada järgmisel kujul

$$\boldsymbol{S = S_n + R_n,}$$

kus R_n on rea (2.4) summa.
Koonduva rea (2.1) korral on rea jääkliige samuti koonduv rida ja tema summa R_n on lõpmata väike suurus piirprotsessis $n \to \infty$ ehk

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} R_n = 0.}$$

Tehted koonduvate ridadega.

1. Kui arvreas (2.1) juurde **lisada või ära jätta** lõplik arv liikmeid, siis see **ei mõjuta rea koonduvust**. Koonduv rida jääb koonduvaks ning hajuv rida jääb hajuvaks.
2. Kui arvrida (2.1) koondub, siis koondub ka rida $\sum c u_k$, kus c on reaalarv, kehtib võrdus
$$\sum_{k=0}^{\infty} c u_k = c \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$
3. Kui **kaks erinevat rida** $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ **koonduvad**, siis koonduvad ka read, mis on moodustatud nende ridade **summast** $\sum (u_k + v_k)$ ja **vahest** $\sum (u_k - v_k)$ ning kehtib võrdus
$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Näide 2.4. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+5}.$$

Kontrollime koonduvuse tarvilikku tingimust (2.2), selleks leiame piirväärtuse.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 1.$$

Tarvilik tingimus koondumiseks ei ole täidetud, seega saame öelda, et antud rida hajub.

Lause 2.2.

Geomeetriline rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots$$

koondub siis ja ainult siis, kui $|q| < 1$. Geomeetrilise rea summa avaldub sel juhul valemiga

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Tõestus.
Kasutame seost

$$(1-q)(1+q+q^2+\ \ldots + q^n) = 1 - q^{n+1},$$

saame

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

suvalise $n \in \mathbb{N}_0$ korral. Kui $|q| < 1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, mistõttu

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}.$$

Seega juhul $|q| < 1$ rida $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ koondub summaks $\frac{1}{1-q}$.
Kui $|q| \geq 1$, siis ei ole tarvilik tingimus koondumiseks täidetud, ehk $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} \neq 0$. Sellest järeldub, et sel juhul geomeetriline rida hajub.

▪

Lause 2.3.
Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ \ldots$$

hajub.
Harmoonilise rea üldliige avaldub valemiga $u_n = 1/n$, koondumise tarvilik tingimus (2.2) on täidetud, sest

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Järeldus.
Tarvilik tingimus $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ ei ole piisav rea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondumiseks.
Lause 2.4.

Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \ \dots$$

koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$.

2.3. POSITIIVSED JA VAHELDUVATE MÄRKIDEGA ARVREAD

Definitsioon 2.3.

Positiivseks arvreaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k}\ \text{, kus } \boldsymbol{u_k \geq 0} \text{ iga } k = 0{,}1{,}2 \dots \text{ korral.} \qquad (2.5)$$

Lause 2.5.
Positiivne rida (2.5) **koondub** siis ja ainult siis, kui tema osasummade jada on tõkestatud, ehk kui leidub arv $M > 0$, nii et

$$\boldsymbol{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M} \text{ iga } n = 0{,}1, \dots \text{ korral.} \qquad (2.6)$$

Järelikult positiivsete ridade korral rida koondub, kui

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

rida hajub, kui

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

Võrdluslaused.

1. *Lause 2.6.*

Olgu $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ sellised read, et

$$\boldsymbol{0 \leq u_k \leq v_k}, \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

a. Kui rida $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} v_k}$ **koondub**, siis koondub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
b. Kui rida $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} u_k}$ **hajub**, siis hajub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

Järeldus. Lause 2.6 väited a ja b kehtivad, kui mingist indeksist n alates kehtib võrratus $u_k \leq v_k$ iga $k \geq n$ korral.

2. *Lause 2.7.*

Kui $k \to \infty$ korral on

$$\boldsymbol{u_k \sim c v_k}$$

mingi konstandi $c > 0$ korral, siis mõlemad positiivsed read $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ kas koonduvad või hajuvad üheaegselt.

Tähistus $u_k \sim c v_k$ tähistab suuruste **ekvivalentsust**. Suurused on ekvivalentsed, kui piirväärtus nende suhtest on võrdne suurusega 1 ehk

$$\lim \frac{u_k}{v_k} = 1.$$

Näide 2.5. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Kuna $2k - 1 = k + (k - 1) \geq k$, siis

$$\frac{1}{2k-1} \leq \frac{1}{k}$$

ning

$$\frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

iga $k \in \mathbb{N}$ puhul. Olgu

$$u_k = \frac{1}{(2k-1)^2}, v_k = \frac{1}{k^2},$$

Siis harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ koondub lause 2.4 põhjal ja võrdluslause 2.6 a kohaselt koondub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, järelikult on tegemist koonduva reaga.

2.4. POSITIIVSETE RIDADE KOONDUVUSTUNNUSED

D'Alembert'i koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} < 1, \text{siis rida (2.5) koondub}, \\ > 1, \text{siis rida (2.5) hajub}, \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Cauchy koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \begin{cases} < 1, \text{siis rida (2.5) koondub}, \\ > 1, \text{siis rida (2.5) hajub}, \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Raabe koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \begin{cases} > 1, \text{siis rida (2.5) koondub}, \\ < 1, \text{siis rida (2.5) hajub}, \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Logaritmiline koonduvustunnus. Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}\begin{cases} > 1, \text{siis rida (2.5) koondub,} \\ < 1, \text{siis rida (2.5) hajub,} \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada.}\end{cases}$$

Integraaltunnus. Olgu funktsioon $f(x)$ pidev monotoonselt kahanev piirkonnas $[a,\infty)$ ja olgu $u_n = f(n)$. Rida (2.5) koondub siis ja ainult siis, kui päratu integraal

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

koondub, kusjuures tema jääkliikme jaoks kehtib hinnang

$$R_n \le \int_n^\infty f(x)\,dx.$$

Cauchy tunnus on võimsam kui d'Alembert'i tunnus. Kui d'Alembert'i tunnus võimaldab otsustada rea koonduvust või hajuvust, siis võimaldab seda ka Cauchy tunnus, kuid mitte vastupidi. Raabe tunnus on võimsam kui d'Alembert'i tunnus. Logaritmiline tunnus on omakorda võimsam Cauchy ja Raabe tunnusest. Rea koonduvuse uurimist alustatakse tavaliselt nõrgemate koonduvustunnuste rakendamisega, sest nad on lihtsamad. Võimsamaid tunnuseid kasutatakse siis, kui nõrgemad tunnused ei anna vastust.

Näide 2.6. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1+3^n}.$$

Rea üldliikme kohta kehtib hinnang

$$\frac{2^n}{1+3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Saime geomeetrilise rea üldliikme kui $q = 2/3$. Kuna geomeetriline rida koondub, siis 1. võrdluslause (lause 2.6) põhjal võime järeldada, et ka temast väiksem rida koondub.

Näide 2.7. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}.$$

Kui $n\to\infty$, siis rea üldliikme kohta kehtib järgmine hinnang

$$\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{1}{n\sqrt{3+o(1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Saime harmoonilise rea üldliikme $1/n$. Kuna harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

hajub, siis 2. võrdluslause (lause 2.7) põhjal hajub ka antud rida.

Näide 2.8. Uurida järgmise rea koonduvust olenevalt parameetri $a > 0$ väärtustest

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}.$$

Kasutame **Cauchy tunnust**, saame

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+\frac{1}{n}}=a.$$

Rida koondub, kui $a < 1$ ja hajub kui $a > 1$. Kui $a = 1$, siis koondumise tarvilikust tingimusest saame

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{-1}=e^{-1}\neq 0.$$

Seega rida hajub ka $a = 1$ korral. Samasuguse tulemuseni jõuame ka logaritmilise tunnuse põhjal:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\ln n}=0.$$

Näide 2.9. Uurida järgmise rea koonduvust parameetri $p > 0$ korral

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln p}.$$

Kasutame **Raabe tunnust**, saame

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{(n+1)^{\ln p}}{n^{\ln p}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln p}}{\frac{1}{n}}=-\ln p.$$

Kui $-\ln p > 1$ ehk kui $p < 1/e$, siis rida koondub, kui $-\ln p < 1$ ehk kui $p > 1/e$, siis rida hajub.
Kui $-\ln p = 1$ ehk kui $p = 1/e$, siis rida hajub, sest saime harmoonilise rea, mis hajub lause 2.3 põhjal.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln\frac{1}{e}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n};\ \lim_{n\to\infty}n^{-1}=0.$$

Näide 2.10. Näidata, et järgmine harmooniline rida koondub, kui $a > 1$ ja hajub kui $a \leq 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}.$$

Kui $a \leq 0$, siis rida hajub, sest

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a}}=\lim_{n\to\infty}n^{a}=\infty.$$

Vaatame juhtu, kus $a > 0$. Kasutame **integraaltunnust**, funktsiooniks $f(x) = 1/x^{a}$.

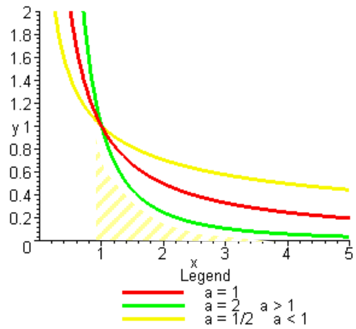
$$a = 1: \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{c \to +\infty} \ln x \Big|_1^c = \lim_{c \to +\infty} (\ln c - \ln 1) = \lim_{c \to +\infty} \ln c = \infty.$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{c \to \infty} \int_{1}^{c} \frac{dx}{x^a} \underset{a \neq 1}{=} \lim_{c \to \infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Big|_1^c = \frac{1}{1-a} \lim_{c \to \infty} (c^{1-a} - 1).$$

$a > 1 \Rightarrow 1 - a < 0$:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{c \to \infty} (c^{1-a} - 1) = \frac{1}{1-a} \lim_{c \to \infty} \left(\frac{1}{c^{a-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-a} \cdot (-1) = \frac{1}{a-1}.$$

$a < 1 \Rightarrow 1 - a > 0$: $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{c \to \infty} (c^{1-a} - 1) = \infty.$



Seega oleme näidanud, et integraal koondub juhul, kui $a > 1$, ülejäänud juhtudel integraal hajub. Integraaltunnuse põhjal võime järeldada sellest, et ka harmooniline rida koondub juhul $a > 1$.

Definitsioon 2.3. **Vahelduvate märkidega reaks** nimetatakse rida kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \text{kus } a_n > 0. \tag{2.7}$$

Vahelduvate märkidega arvrea koonduvuse uurimiseks kasutatakse Leibnizi tunnust.

Leibnizi koonduvustunnus. Kui

a) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots,$

b) $\lim a_n = 0,$

siis rida (2.7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n, \text{kus } a_n > 0$$

koondub ja tema jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jaoks kehtib hinnang:

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Näide 2.11. Uurida järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Rea üldliige avaldub järgmiselt

$$a_n = \frac{1}{n \ln n},$$

$$a_2 \geq a_3 \geq \ \dots \geq a_n \geq \ \dots \text{ ja}$$

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Leibnizi tunnuse põhjal rida koondub ja tema jääkliikme jaoks kehtib hinnang:

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln k} \right| \leq \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}.$$

2.5. RIDADE KOONDUVUSTUNNUSED

Definitsioon 2.4.

Rida (2.1)

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

nimetatakse **absoluutselt koonduvaks**, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida (2.8) on koonduv

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|. \tag{2.8}$$

Kui rida (2.1) koondub aga ei koondu absoluutselt, siis sellist rida nimetatakse **tingimisi koonduvaks**.

Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv. Kui koondub rida (2.8), siis sellest järeldub, et koondub ka rida (2.1).

Rea koondumise uurimiseks on kaks põhilist koonduvustunnust.

D'Alembert'i koonduvustunnus.

Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \begin{cases} < 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{koondub absoluutselt}, \\ > 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{hajub}, \\ = 1, \text{siis } \textbf{ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Cauchy koonduvustunnus.

Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} \begin{cases} < 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{koondub absoluutselt}, \\ > 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{hajub}, \\ = 1, \text{siis } \textbf{ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Näide 2.12. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Leibnizi tunnuse põhjal vahelduvate märkidega rida koondub (näide 2.11). Jääb üle uurida, kas rida koondub absoluutselt. Absoluutset koonduvust uurime **integraaltunnuse** abil, kust näeme, et rida hajub, sest päratu integraal hajub:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{c\to\infty} \int_2^{c} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{c\to\infty} \int_2^{c} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{c\to\infty} (\ln \ln x)\big|_2^c = \lim_{c\to\infty} (\ln \ln c - \ln \ln 2) = \infty.$$

Kuna vaadeldav rida koondub aga ei koondu absoluutselt, siis tegemist on tingimisi koonduva reaga.

Näide 2.13. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n}.$$

Kasutame **d'Alembert'**i tunnust.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Järelikult rida koondub absoluutselt.

2.6. ASTMEREAD

Definitsioon 2.6.

Astmereaks nimetatakse rida, mille liikmeteks on funktsioonid $f_n(x) = a_n x^n$ kujul

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.} \tag{2.9}$$

Astmerea üldisem kuju

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots + a_n (x-a)^n + \ldots,} \tag{2.10}$$

kus $a \in \mathbb{R}$ on fikseeritud arv.
Astmerea kordajateks nimetatakse arve $\boldsymbol{a_0, a_1 \ldots,}$
rea üldliikmeks nimetatakse suvalise indeksiga rea liiget $\boldsymbol{a_n}$.

Geomeetriline rida on astmerida kujul (2.9), kus $a_k = 1$ iga $k \in \mathbb{N}_0$ korral.
Astmerea üldisemalt kujult (2.10) saame muutuja vahetusega $x - a = t$ üle minna reale (2.9) ja vastupidi. Iga astmerea jaoks on võimalik leida suurus R, mille korral astmerida koondub absoluutselt, kui $|x| < R$ ($|x - a| < R$) ja hajub, kui $|x| > R$ ($|x - a| > R$), kus $0 \leq R < \infty$.

Definitsioon 2.7.

Astmerea (2.9) koonduvusvahemikuks nimetatakse vahemikku $(\boldsymbol{-R, R})$,
astmerea (2.10) koonduvusvahemikuks vastavalt vahemikku $(\boldsymbol{a - R, a + R})$.
Suurust $\boldsymbol{R}$ nimetatakse **koonduvusraadiuseks**.

Kui $R = 0$, siis koondub astmerida vaid punktis $x = 0$.
Koonduvusvahemike otspunktides võib astmerida koonduda kas tingimisi või absoluutselt või hajuda.
Koonduvusraadiuse leidmiseks kasutatakse **valemeid**:

$$\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}, \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}, \tag{2.12}$$

kui $a_n \neq 0$ ja piirväärtused eksisteerivad.

Definitsioon 2.8. **Astmerea koonduvuspiirkonnaks** nimetatakse hulka X

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}: \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub}\right\}.$$

Definitsioon 2.9. **Astmerea absoluutse koonduvuse piirkonnaks** nimetatakse hulka A

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}: \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x|^k \text{ koondub} \right\}.$$

Näide 2.14. Leida koonduvusraadius R, koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond järgmisele astmereale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Kõigepealt leiame koonduvusraadiuse R kasutades valemit (2.11):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Saime $R = 1$ ja seega koonduvusvahemik on $(-1,1)$. Selles vahemikus vaadeldav astmerida koondub absoluutselt. Vahemiku otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida. Kui $x = -1$, saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Saime harmoonilise rea, mille koondumist saame uurida integraaltunnuse abil

$$a = 1: \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{c\to+\infty} \ln|x+1| \Big|_0^c = \lim_{c\to+\infty} (\ln c - \ln 1) = \lim_{c\to+\infty} \ln c = \infty.$$

Integraaltunnuse põhjal saame öelda, et $x = -1$ korral rida hajub.
Kui $x = 1$, saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Saime vahelduvate märkidega rea, mille koondumist saame uurida Leibnizi tunnuse abil. Kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

saame Leibnizi tunnuse abil öelda, et rida $x = 1$ korral koondub, kuid ei koondu absoluutselt. Seega koonduvuspiirkond $X = (-1, 1]$ ja absoluutse koonduvuse piirkond $A = (-1,1)$.

Näide 2.15. Leida koonduvusraadius R ja koonduvusvahemik järgmisele astmereale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Kuna argument x on astmes $2n$, teeme kõigepealt muutuja vahetuse $t = 2n$, saame astmerea kujul

$$\sum_{t=2}^{\infty} \frac{x^t}{t}.$$

Kasutame valemit (2.11):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{t\to\infty}\left|\frac{t+1}{t}\right| = \lim_{t\to\infty}\frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t} = 1.$$

Seega $R = 1$ ja koonduvusvahemik on $(-1{,}1)$.

Näide 2.16. Leida koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond järgmisele astmereale

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}.$$

Kõigepealt leiame koonduvusraadiuse R kasutades valemit (2.12):

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{k} = 1.$$

Saime $R = 1$ ja seega vaadeldav astmerida koondub absoluutselt vahemikus $(-1{,}1)$. Vahemiku otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida. Kui $x = -1$, saame arvrea

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k},$$

mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt. Kui $x = 1$, siis saame arvrea

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

mis on hajuv (harmooniline rida, $\alpha = 1$). Seega koonduvuspiirkond $X = [-1, 1)$ ja absoluutse koonduvuse piirkond $A = (-1{,}1)$.

Teoreem 2.1.

Cauchy-Hadamardi teoreem. Astmerida

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

koondub

(a) juhul $R = 0$ vaid punktis $x = 0$ ehk

$$A = X = \{0\}.$$

(b) juhul $0 < R < \infty$

- koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$
- hajub hulgas $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ ehk

$$(-R, R) \subset A \subset X \subset [-R, R].$$

(c) kui $R = \infty$, siis astmerida koondub absoluutselt igas punktis $x \in \mathbb{R}$, s.t.

$$A = X = \mathbb{R}.$$

Cauchy-Hadamardi teoreem ei väida midagi astmerea koonduvuse kohta **koonduvusvahemiku** $(-R, R)$ **otspunktides**, kui $0 < R < \infty$.

Teoreem 2.2.
Astmerida (2.9) võib igas lõigus $[0, x]$, kus $x \in (-R, R)$, **liikmeti integreerida**, kusjuures

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Teoreem 2.3.
Astmerida (2.9) võib igas punktis $x \in (-R, R)$ **liikmeti diferentseerida**, kusjuures

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}.$$

Teoreemid 2.1-2.3 kehtivad ka astmerea (2.10) korral.

Abeli lemma.
Kui astmerida (2.9) koondub koonduvusvahemiku $(-R, R)$ parempoolses otspunktis R, siis selle astmerea summa $f(x)$ on vasakult pidev punktis R ehk $f(R-) = f(R)$:

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Kui astmerida (2.9) koondub punktis $-R$, siis selle astmerea summa $f(x)$ on paremalt pidev punktis $-R$ ehk $f(-R) = f(-R+)$.
Funktsioon f on vahemikus X arendatud astmereaks (esitatud astmereana), kui iga $x \in X = (c - R, c + R)$ korral on

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n.$$

2.7. TAYLORI JA MACLAURINI READ

Olgu funktsioon $f(x)$ määratud punkti $c \in \mathbb{R}$ mingis ümbruses. Öeldakse, et funktsioon $f(x)$ on **arendatav astmeritta punktis c**, kui leidub astmerida, mis punkti c mingis ümbruses on võrdne funktsiooniga (koondub funktsiooniks $f(x)$):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k.$$

Öeldakse, et rida on funktsiooni arendus astmeritta (astmereaks).

Definitsioon 2.10.

Funktsiooni $f(x)$ **Taylori reaks** nimetatakse astmerida, mille kordajad (**Taylori kordajad**) avalduvad kujul

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Taylori rida avaldub järgmisel kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n =$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \ldots$$

Definitsioon 2.11.
Maclaurini reaks nimetatakse rida, mis saadakse Taylori reast, võttes $c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

2.7.1. TAYLORI VALEMI TULETAMINE

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ omab kõiki tuletisi kuni järguni $(n + 1)$ (kaasa arvatud) mingis punkti $x = a$ sisaldavas vahemikus. Leiame hulkliikme $P_n(x)$ nii, et

$$P_n(a) = f(a);\ P'_n(a) = f'(a);\ P''_n(a) = f''(a), \dots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (2.13)$$

Hulkliiget $P_n(x)$ hakkame otsima kujul

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n \qquad (2.14)$$

Selle hulkliikme kordajad leiame tingimusest (2.13). Selleks leiame enne $P_n(x)$ tuletised:

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1}, \\ P''_n(x) &= 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + \dots + n\,(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \\ P'''_n(x) &= 2\cdot 3c_3 + \dots + n\,(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) &= n\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdot \dots \cdot 2\cdot 1\cdot c_n. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

Asendame nüüd valemitesse (2.14) ja (2.15) $x = a$, saame

$$P_n(a) = c_0;\ \ P'_n(a) = c_1;\ \ P''_n(a) = 2c_2;\ \ P'''_n(a) = 2\cdot 3c_3; \qquad (2.16)$$
$$\dots;\ \ P_n^{(n)}(a) = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\cdot \dots \cdot 2\cdot 1\cdot c_n.$$

Võrdustest (2.13) ja (2.16) saame

$$c_0 = f(a);\ \ c_1 = f'(a);\ \ c_2 = \frac{1}{1\cdot 2}f''(a);$$
$$c_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a), \dots, c_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n}f^{(n)}(a)$$

ehk

$$c_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

kus

$$f^{(0)}(a) = f(a);\ \ 0! = 1; 1! = 1.$$

Asendame nüüd need väärtused c_k, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ valemisse (2.14), saame otsitava hulkliikme

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (2.17)$$

Tähistame tähega $R_n(x)$ vahe $f(x) - P_n(x) = R_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

Saime valemi, mida nimetatakse **Taylori valemiks**

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),}$$

$R_n(x)$ nimetatakse jääkliikmeks. Järelikult võime nende argumendi x väärtuste korral, mille korral $R_n(x)$ on küllalt väike, vaadelda funktsiooni $y = f(x)$ asemel hulkliiget (Taylori valem).

Järeldus 2.1.
Ilmselt $R_n(x) = 0$ siis, kui funktsioon on n- astme hulkliige, see tähendab

$$f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n.$$

Sel juhul kujutab avaldis (2.17) endast lihtsalt antud hulkliikme teist kuju. Iga niisuguse hulkliikme võib lahutada $x - a$ astmete järgi.

Näide 2.17. Esitada hulkliige $P_2(x) = -5 + 2x + x^2$ muutuja $x - 3$ astmete järgi.

Selleks asendame

$$x = \big(3 + (x-3)\big),$$

$$P_2(x) = -5 + 2\big(3 + (x-3)\big) + \big(3 + (x-3)\big)^2 = 10 + 8(x-3) + (x-3)^2.$$

Vahemikus $X = (c - R, c + R)$ piiramata diferentseeruv funktsioon f on arendatav Taylori reaks selles vahemikus parajasti siis, kui funktsiooni f Taylori valemi jääkliige R_n rahuldab vahemikus X tingimust

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Taylori valemi jääkliige Lagrange'i kujul on

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad a < \xi_x < x,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(a + \theta_x(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad 0 < \theta_x < 1.$$

Maclaurini valemi jääkliige Lagrange'i kujul

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta_x < 1.$$

Kui funktsioon f on arendatav astmereaks vahemikus X, siis see astmerida on funktsiooni f Taylori rida. Paljude funktsioonide arendused astmereaks saame tuntud astmeridadest aritmeetiliste tehete, rea liikmeti integreerimise ja liikmeti diferentseerimise teel.

2.7.2. TUNTUIMAD ASTMEREAD

Tegemist on Maclaurini ridadega mõnedest põhilistest elementaarfunktsioonidest.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!},$$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + n\frac{(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot 2}{(n-1)!}ax^{n-1} + x^n,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \dots + x^n + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, x \in (-1,1),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \dots + (-x)^n + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,, x \in (-1,1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1,1],$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1,1].$$

Näide 2.18. Leida funktsiooni $f(x) = \arcsin x$ Maclaurini rida $n = 3$ korral.

Kui $n = 3$, siis leiame funktsiooni tuletised kolmanda järguni ja vastavate tuletiste väärtused punktis $x = 0$, seejärel asendame leitud väärtused Maclaurini valemisse.

$$f(x) = \arcsin x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{(1-x^2)^3}, \qquad f'''(0) = 1.$$

Saime Maclaurini rea

$$\arcsin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ \dots = \ x + \frac{x^3}{3} + \ \dots\,.$$

Näide 2.19. Leida funktsiooni $f(x) = 1/(1-2x)$ Maclaurini rida, määrata rea koonduvusraadius R.

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, \qquad f'(0) = 2,$$

$$f''(x) = \frac{8}{(1-2x)^3}, \qquad f''(0) = 8,$$

$$f'''(x) = \frac{48}{(1-2x)^4}, \qquad f'''(0) = 48.$$

Saime Maclaurini rea

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ \dots .$$

Sama rea saamiseks võime kasutada ka järgmise funktsiooni arendust astmeritta

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ \dots$$

Asendades suuruse x suurusega $2x$, saame

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ \dots$$

Rea koonduvusraadius on

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

2.8. ORTOGONAALREAD*

Näitena ortogonaalreast võime kirjutada funktsiooni (2.9) Legendre polünoomide lineaarse kombinatsioonina

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x). \qquad (2.18)$$

Legendre võrrand on teist järku lineaarne diferentsiaalvõrrand kujul

$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$, kus l on reaalarv (vt punkt 5.5.6).

Definitsioon 2.12.
Legendre polünoomideks nimetatakse l astme polünoome, mis on Legendre võrrandi erilahenditeks.

$$P_l(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2l-1)}{l!} \left\{ x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4(2l-1)(2l-3)} x^{l-4} - \ \dots \right\}$$

Kui $-1 \le x \le 1$, siis $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$,

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Funktsioon $P_k(x)$ on k järku muutuja x polünoom. Iga x astet saame näidata Legendre polünoomide lineaarse kombinatsioonina

$$x^0 = P_0, \quad x^1 = P_1, \qquad x^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0), \qquad x^3 = \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1),$$

$$x^4 = \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0), \qquad x^5 = \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1).$$

Sellisel juhul funktsioon (2.18) avaldub kujul

$$f(x) = a_0P_0 + a_1P_1 + \frac{a_2}{3}(2P_2 + P_0) + \frac{a_3}{5}(2P_3 + 3P_1) +$$

$$+ \frac{a_4}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0) + \frac{a_5}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1) + \ \dots =$$

$$= \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ \dots\right)P_0 + \left(a_1 + \frac{3a_3}{5} + \frac{3a_5}{7} + \ \dots\right)P_1 + \left(\frac{2a_2}{3} + \frac{4a_4}{7} + \ \dots\right)P_2 + \quad (2.19)$$

$$+ \left(\frac{2a_3}{5} + \frac{4a_5}{9} + \ \dots\right)P_3 + \left(\frac{8a_4}{35} + \ \dots\right)P_4 + \left(\frac{8a_5}{63} + \ \dots\right)P_5 + \ \dots$$

Loodusteadustes kasutatakse lahendeid, mis asuvad vahemikus $-1 \leq x \leq 1$, sellel lõigul kehtib

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{k,m} = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ \dfrac{2}{2m+1}, & k = m \end{cases} \qquad (2.20)$$

Seda kasutame võrrandis (2.18) olevate kordajate c_k leidmiseks. Selleks korrutame võrrandit (2.18) funktsiooniga $P_m(x)$ ja integreerime

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,f(x)dx = \int_{-1}^{1} P_m(x)\left[\sum_{k=0}^{\infty} c_kP_k(x)\right]dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)\,dx.$$

Kasutades võrrandit (2.20)

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\,f(x)dx = c_m \int_{-1}^{1} P_m(x)P_k(x)\,dx = \frac{2}{2m+1}c_m \qquad c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)\,f(x)dx.$$

Rakendame valemisse (2.9)

$$c_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} P_m(x)\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\,dx = \frac{2m+1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^{1} P_m(x)\,x^k\,dx.$$

Asendades $P_m(x)$, saame avaldada konstandid c_m konstantide a_k kaudu.

Näide 2.20. Leiame $m = 0$ korral kordaja c_0.

$$P_0 = 1,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^{1} x^k\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} x^k\ dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\bigg|_{-1}^{1} = \begin{cases} \dfrac{2}{2k+1}, & k \text{ paaris} \\ 0, & k \text{ paaritu} \end{cases}$$

$$c_0 = a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \frac{a_6}{7} + \ \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2k+1}.$$

Saime sama kordaja P_0 jaoks, kui valemis (2.19).

Üldjuht.

Definitsioon 2.13.
Integreeruva ruuduga funktsioonide süsteemi $\{g_n(x)\}$ nimetatakse **ortogonaalseks** lõigul $[a, b]$, kui

$$\int_a^b \boldsymbol{g_n(x) g_m(x)\, dx = 0,} \qquad \boldsymbol{m \neq n}$$

ja **ortonormeerituks** lõigul $[a, b]$, kui

$$\int_a^b \boldsymbol{g_n(x) g_m(x)\, dx = \delta_{m,n}} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{m \neq n} \\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{m = n} \end{cases}.$$

Olgu $\{g_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, funktsioonide süsteem, mis on ortogonaalne lõigus $[a, b]$ kaalufunktsiooni $w(x)$ suhtes

$$\int_a^b g_m^*(x) g_n(x)\, w(x) dx = 0, \qquad m \neq n.$$

Olgu $f(x)$ suvaline funktsioon, mis on defineeritud lõigus $[a, b]$, mida saab laiendada hulka $\{g_n(x)\}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot g_n(x) \quad \Bigg| \cdot g_m^*(x) w(x) \qquad \Bigg| \int_a^b$$

$$\int_a^b g_m^*(x) f(x) w(x)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot \int_a^b g_m^*(x) f(x) w(x)\ dx = c_m \int_a^b g_m^*(x) g_m(x) w(x)\ dx.$$

Asendame m muutujaga n

$$c_n = \frac{\int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx}{\int_a^b g_n^*(x) g_n(x) w(x)\ dx}.$$

Nimetaja on funktsiooni $\{g_n(x)\}$ normeerimisintegraal, ruut normist

$$\|g_n\| = \sqrt{\int_a^b g_n^*(x) g_n(x) w(x)\ dx}\,, \qquad c_n = \frac{1}{\|g_n^2\|} \int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx.$$

Funktsiooni normeerimiseks tuleb funktsioon jagada tema normiga, tulemuseks saame ortonormeeritud hulga

$$\bar{g}_n = \frac{1}{\|g_n\|} g_n(x), \quad \int_a^b \bar{g}_m^*(x) \bar{g}_n(x) w(x)\ dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases},$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot \bar{g}_n(x).$$

$$c_n = \frac{1}{\|g_n^2\|} \int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx = \int_a^b \bar{g}_n^*(x) f(x) w(x)\ dx.$$

Ortonormeeritud süsteem $\{g_n(x)\}$ on **täielik**, kui iga funktsioon $f(x)$ on avaldatav lõigus lineaarkombinatsioonina süsteemi funktsioonidest

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n \cdot g_n(x), \qquad c_n = \int_a^b g_n^*(x) f(x) w(x)\ dx.$$

Funktsioonid $f(x)$ võivad olla pidevad ja ka tükiti pidevad, omavad lõpliku arvu lõplikke katkevusi ning lõpliku arvu maksimum- ja miinimumpunkte selles lõigus. Funktsiooni saab arendada ritta

$$f(x) \approx f_k(x) = c_0 g_0(x) + c_1 g_1(x) + \ ... + c_k g_k(x),$$

$$\int_a^b [f(x) - f_k(x)]^2 w(x) \to 0,\ \ k \to \infty\,.$$

Rida $f_k(x)$ **koondub** lõigul $[a, b]$ **keskmiselt** funktsiooniks $f(x)$. See tähendab, et koondumist funktsiooniks $f(x)$ ei pea toimuma iga muutuja x korral.

Loodusteadustes on rakendusteks järgmised näited:

1. Elektrostaatikas ja gravitatsiooniteoorias

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x).$$

Rida koondub kui $|x| < 1$ ja $|t| < 1$. Elektrostaatiline potentsiaal.

2. Hajumisteoorias

$$e^{itx} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) i^k \cdot j_k(t) \cdot P_k(x),$$

kus $j_k(t)$ on sfäärilised Besseli funktsioonid. Rida koondub kui $|x| < 1$ iga t korral.

2.9. FOURIER READ

Tuntuim ja kõige enam uuritud ortogonaalrida on trigonomeetriline süsteem $\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots\}$. Olgu $f(x)$ lõigus $[-\pi, \pi]$ määratud funktsioon. Teatud tingimustel on funktsioon $f(x)$ esitatav summana

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx\,), \tag{2.21}$$

kus $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ on mingid konstandid. Eeldame, et $f(x)$ on lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruv funktsioon ja korrutame võrduse (2.21) mõlemat poolt trigonomeetrilise süsteemi elementidega ja integreerime üle lõigu $[-\pi, \pi]$ (oletame, et see on võimalik). Kasutades seoseid

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos kx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \sin mx\, dx = 0, \qquad k \neq m,$$

saame kordajate a_k ja b_k jaoks valemid

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.22}$$

Definitsioon 2.14.

Funktsiooni $f(x)$ trigonomeetriliseks Fourier' reaks lõigus $[-\pi, \pi]$ nimetatakse rida

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2.23}$$

kus kordajad a_0, a_k, b_k on määratud seostega

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.24}$$

Valemi (2.23) võime kirjutada ka kujul

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

Näide 2.21.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx, \qquad k = 1, 2, \dots$$

Punktis 0 on katkevuspunkt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \cdot 1 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx = 1,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos k\pi),$$

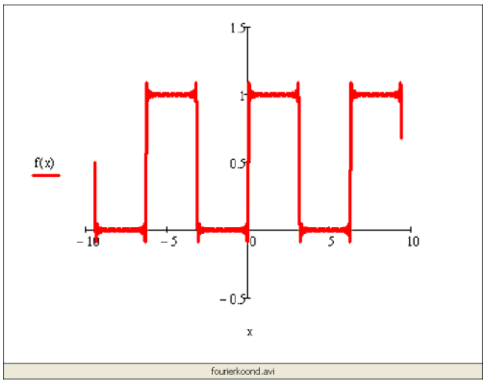
$$\cos k\pi = \begin{cases} 1, & k \text{ paaris} \\ -1, & k \text{ paaritu} \end{cases} \qquad b_k = \frac{2}{k\pi}, \qquad k \text{ paaritu},$$

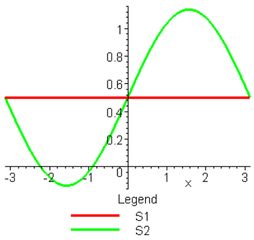
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

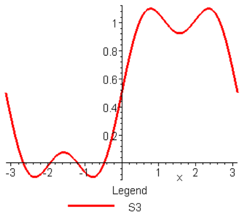
Osasummad

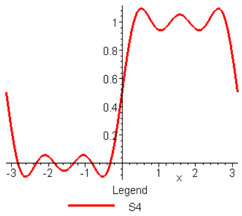
$$S_1 = \frac{1}{2}; \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x; \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} \right);$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right).$$









FOURIER' REA KOONDUVUS

Definitsioon 2.15.
Funktsiooni nimetatakse **siledaks** vahemikus (a, b), kui ta on selles vahemikus pidevalt diferentseeruv ehk funktsioon on diferentseeruv ja tema tuletis on pidev funktsioon.

Definitsioon 2.16.
Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse **tükiti siledaks** vahemikus (a, b), kui seda vahemikku on võimalik jagada lõplikuks arvuks osavahemikeks punktidega

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b, \qquad n \in \mathbb{N},$$

nii, et igas osavahemikus on funktsioon $f(x)$ sile, kusjuures funktsioonidel $f(x)$ ja $f'(x)$ eksisteerivad oma katkevuspunktides lõplikud ühepoolsed piirväärtused.

Sileda funktsiooni graafik on sile joon. Tükiti sileda funktsiooni graafik koosneb lõplikust arvust siledatest osadest.

Teoreem. **Dirichlet' teoreem.**
Kui funktsioon $f(x)$ on tükiti sile vahemikus $(-\pi, \pi)$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$,

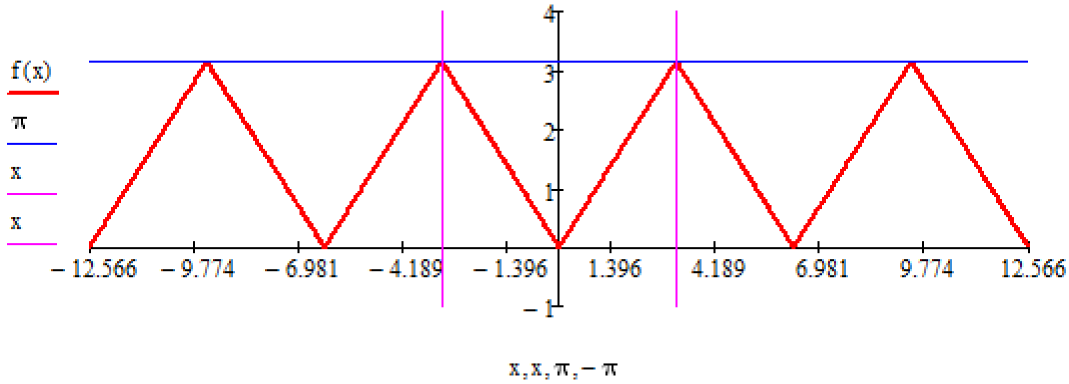
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kusjuures
1. Funktsiooni $f(x)$ pidevuspunktides
$$S(x) = f(x).$$
2. Funktsiooni $f(x)$ katkevuspunktides võrdub rea summa funktsiooni $f(x)$ parempoolse ja vasakpoolse piirväärtuse aritmeetilise keskmisega ehk kui $x = c$ on funktsiooni $f(x)$ katkevuspunkt, siis
$$S(c) = \frac{1}{2}[f(c-) + f(c+)].$$

Fourier' ridadega esitatavate funktsioonide klass on lai. Fourier' ridu kasutatakse matemaatilises füüsikas ja mehaanikas. Teooriat funktsioonide arendamisest Fourier' reaks nimetatakse harmooniliseks analüüsiks.

Näide 2.22. Leiame Fourier' rea perioodilisele funktsioonile, mille periood on 2π, mis on määratud järgmiselt:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{kui } -\pi \le x \le 0, \\ x, \text{kui } \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$$



Kõigepealt määrame Fourier' kordajad.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(kx)\,dx.$$

Kordajate a_k määramiseks peame integreerima ositi mõlemat integraali, kus määrame

$$u = -x, du = -dx, \qquad dv = \cos(kx)\,dx, v = \frac{1}{k}\sin(kx)$$

esimeses integraalis ja

$$u = x, du = dx, \qquad dv = \cos(kx)\,dx, v = \frac{1}{k}\sin(kx).$$

teises integraalis. Saame

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{0}\sin(kx)\,dx\right] + \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\bigg|_{0}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin(kx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_{0}^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi k^2}(\cos(k\pi - 1)) = \begin{cases} 0, & \text{kui } k \text{ on paaris} \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & \text{kui } k \text{ on paaritu} \end{cases}.$$

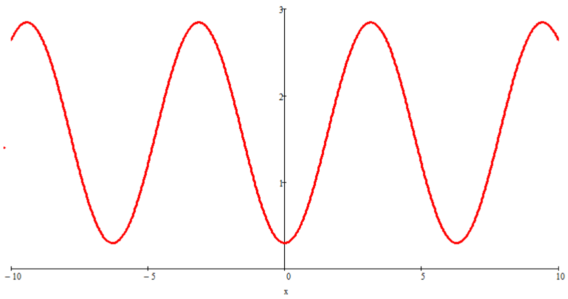
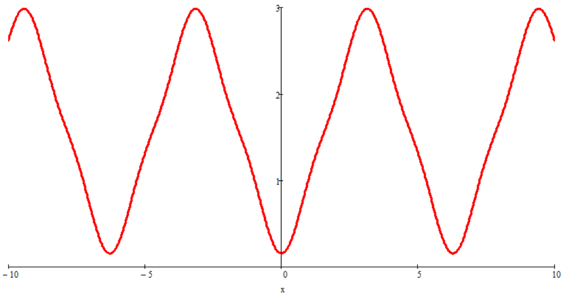
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(kx)\,dx = 0.$$

Kordajad b_k on nullid, sest integraalimärgi all on paaritu funktsioon (saame ka integreerides nulli). Saime rea

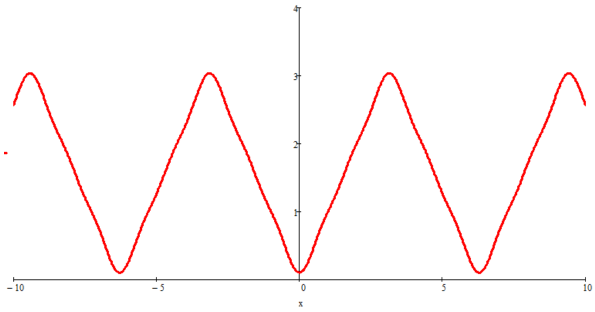
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots + \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2} + \dots\right] =$$

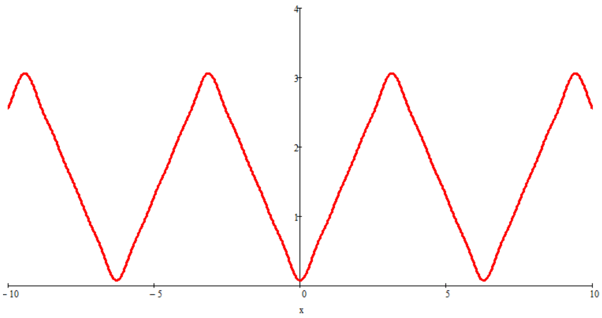
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2}.$$

Rida koondub kõikides punktides ja tema summa on võrdne antud funktsiooniga.
Kui $n = 0$ (vasakpoolne joonis) ja $n = 1$ (parempoolne joonis) Fourier rea osasummad

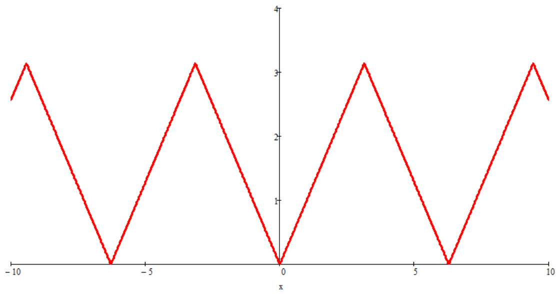



Kui $n = 2$ ja $n = 3$, saame vastavad osasummad





Kui $n = 30$, saame osasumma



Fourier' rida funktsiooni korral, mille periood on $2l$.

Kui $f(x)$ on perioodiline funktsioon, mille periood on $2l$, mis üldiselt erineb arvust 2π. Sellise funktsiooni arendamisel Fourier' reaks peame tegema muutujavahetuse

$$x = \frac{l}{\pi} t.$$

Saime argumendi t funktsiooni, mis on perioodiline funktsioon perioodiga 2π, mille saame arendada Fourier' reaks lõigul $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos(kt)\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin(kt)\, dt.$$

Endisele muutujale x tagasi minnes kehtivad

$$x = \frac{l}{\pi} t, \qquad t = x\frac{\pi}{l}, \qquad dt = \frac{\pi}{l} dx.$$

Fourier' rida $2l$-perioodilise funktsiooni jaoks saab kuju

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{l} x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)\right),$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

Fourier' integraal.

Fourier' integraali saame, kui teisendame Fourier' rea integraalkujule

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{0}^{\infty} [u(y)\cos xy + v(y)\sin xy]\,dy,}$$

$$\boldsymbol{u(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\cos xy\,dx, \qquad v(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\sin xy\,dx.}$$

Fourier' integraali saab esitada ka eksponentkujul. Kasutades Euleri võrrandeid

$$\cos xy = \frac{1}{2}\left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right), \qquad \sin xy = \frac{1}{2i}\left(e^{ixy} - e^{-ixy}\right).$$

Defineerime funktsiooni

$$w(y) = \frac{1}{2}[u(y) - iv(y)].$$

Asendame Fourier' integraali, saame Fourier' rea **eksponentkuju**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y)e^{ixy}\,dy \qquad w(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Eksponentkuju saab sümmeetrilisemaks teha asendusega $g(y) = \sqrt{2\pi}w(y)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ixy}\,dy \qquad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

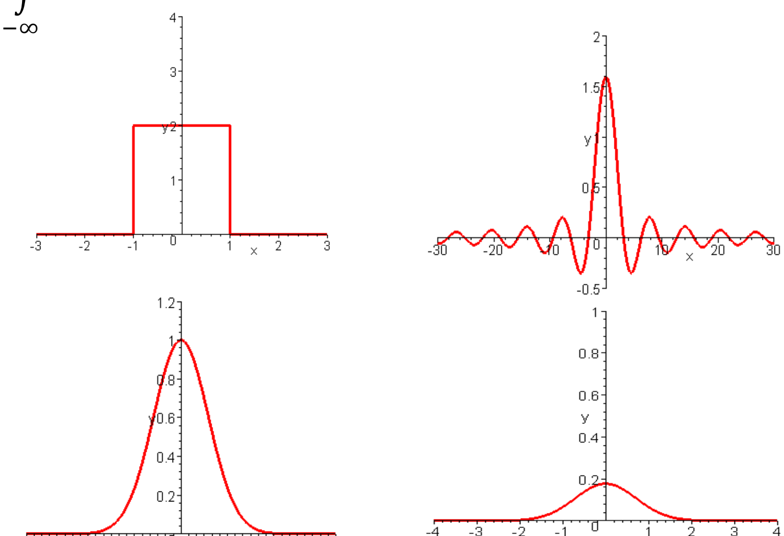
Neid valemeid nimetatakse **Fourier' teisendusteks.**
Fourier' teisenduste jaoks on vajalik, et funktsioon oleks määratud vahemikus $(-\infty, \infty)$ ja seal absoluutselt integreeruv, ehk leidub Q:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = Q.$$

Näide 2.23.

$$f(x) = \begin{cases} A, & -a < x < a \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

$$g(y) = \frac{2Aa}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin ay}{ay},$$



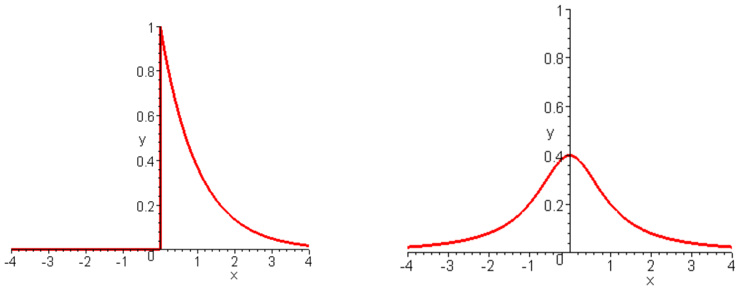
$$f(x) = e^{-ax^2}, \qquad a > 0,$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{y^2}{4a}},$$

$$f(x) = e^{-ax}, \qquad x > 0, a > 0,$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a - iy}{a^2 + y^2} \right).$$

$$Re(g(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{a^2+y^2} \right).$$



III PTK MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

3.1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI MÕISTE

- Kui x ja y on ristküliku külgede pikkused, siis pindala S avaldub valemiga $S = xy$. Igale x ja y väärtuste paarile vastab pindala üks väärtus, S on kahe muutuja funktsioon.
- Kui risttahuka servade pikkused on x, y, z, siis tema ruumala avaldub kujul $V = xyz$. Ruumala V on kolme muutuja funktsioon.
- Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $pV = nRT$ saame avaldada gaasi ruumala

$$V = f(p, T, n) = \frac{nRT}{p}.$$

Ruumala V on 3 muutuja p, T ja n funktsioon ehk $V = f(p, T, n)$.
- Funktsionaalne sõltuvus R on nelja muutuja funktsioon, mis on antud järgmiselt

$$R = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Definitsioon 3.1.

> **Kahe muutuja x ja y funktsioon on z,** kui igale muutuvate suuruste x ja y paarile vastab üks muutuva suuruse z väärtus $z = f(x, y)$.

Võtame argumendi väärtuste paari: $x = x_0, y = y_0$. Kui nendele vastav z väärtus on olemas, siis öeldakse, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud punktis (x_0, y_0).
Kolme või enama arvu muutujate funktsioonid defineeritakse analoogiliselt.

Definitsioon 3.2.

> Kahe muutuja funktsiooni **määramispiirkonnaks** nimetatakse argumentide x ja y väärtuspaaride (x, y) hulka, mille puhul funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud.

Funktsiooni määramispiirkonda saab kujutada geomeetriliselt. Kui x ja y iga väärtuspaari kujutada xy tasapinna punktidena, siis funktsiooni määramispiirkonda kujutab teatud punktide hulk tasapinnal.

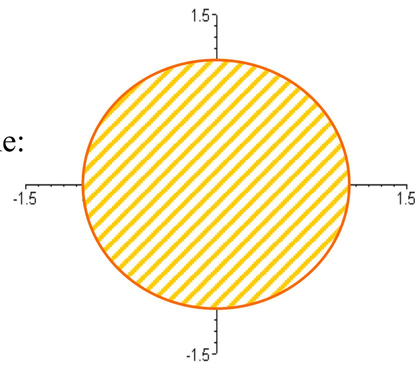
Näide 3.1. Leida määramispiirkond funktsioonile

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Et funktsioon oleks määratud, peab juuritav olema mittenegatiivne:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Määramispiirkonnaks on punktid ringjoone sees või ringjoonel.



Näide 3.2. Leida määramispiirkond funktsioonile

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Määramispiirkonnaks on punktid ringjoone sees, ringjoon ei ole kaasa arvatud.

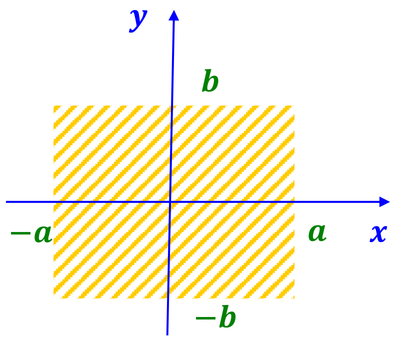
Näide 3.3. Leida määramispiirkond funktsioonile

$$f(x,y) = \ln(a^2 - x^2) + \ln(b^2 - y^2).$$

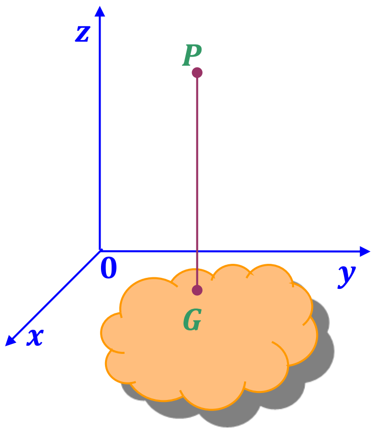
$$a^2 - x^2 > 0 \quad -a < x < a,$$

$$b^2 - y^2 > 0 \quad -b < y < b,$$

kus a, b on konstandid.



Vaatleme funktsiooni $z = f(x,y)$,mis on määratud xy – tasapinna mingis piirkonnas G. Püstitame piirkonna G igas punktis (x,y) ristsirge ja asetame sellele lõigu, mis võrdub funktsiooni väärtusega $f(x,y)$.
Nii saame punkti P koordinaatidega (x,y,z), $z = f(x,y)$.



Definitsioon 3.3.
Kahe muutuja funktsiooni $f(x,y)$ **graafikuks** nimetatakse punktide P hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $z = f(x,y)$.

Järgnevalt defineerime m muutuja funktsiooni, tema määramispiirkonna ja graafiku.

Definitsioon 3.4.

Olgu hulk $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$. Kui igale punktile $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ hulgast D on eeskirja f abil vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv u, siis öeldakse, et **hulgal D on määratud m muutuja funktsioon** ja kirjutatakse

$$\boldsymbol{u = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D}$$

või

$$u = f(P), \quad \forall P \in D.$$

Hulka D nimetatakse funktsiooni **f määramispiirkonnaks**.
Funktsiooni f graafikuks nimetatakse hulka

$$Gr(f) = \{Q = (x_1, \dots, x_m, u) \colon P = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D, u = f(P)\}.$$

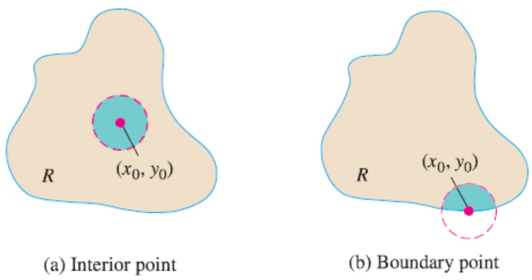
Kaks m muutuja funktsiooni $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ja $u = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$ osutuvad samadeks funktsioonideks, kui neil mõlemal on üks ja sama määramispiirkond D ja samad vastavuse eeskirjad.

3.2. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Olgu antud xy tasapinna mingis piirkonnas D määratud funktsioon $z = f(x,y)$. Vaatleme mingit punkti $M_0(x_0, y_0)$ selles piirkonnas. Tähistame kahe punkti vahelist kaugust $d(A,B)$.

Definitsioon 3.5.
Punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruseks raadiusega r nimetatakse punktide hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrratust $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, need punktid asetsevad ringi sees, mille raadius on r ja keskpunkt on $M_0(x_0, y_0)$.

Punkti $M_0(x_0, y_0)$ nimetame hulga D **sisepunktiks**, kui punktil M_0 leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas D.
Punkti $M_0(x_0, y_0)$ nimetame hulga D **rajapunktiks**, kui punkti M_0 iga ümbrus sisaldab nii hulga D punkte kui ka hulka D mittekuuluvaid punkte (vt joonis).



Joonis 3.1. Sisepunkt ja rajapunkt hulgas R. (Thomas' Calculus [8])

Definitsioon 3.6.

Funktsiooni $f(x, y)$ **piirväärtuseks** punkti $M(x, y)$ lähenemisel punktile $M_0(x_0, y_0)$ nimetatakse arvu A, kui argumendi tõkestamatu lähenemine punktile (x_0, y_0) toob kaasa funktsiooni $f(x, y)$ väärtuste tõkestamatu lähenemise arvule A.
Kui arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks punkti $M(x, y)$ lähenemisel punktile M_0, siis kirjutatakse

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

ehk $f(x, y) \to A$, kui $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Kui $A = 0$, siis öeldakse, et funktsioon $f(x, y)$ on punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruses lõpmata väike suurus.
Kui $A = \infty$ või $A = -\infty$, siis öeldakse, et funktsioon $f(x, y)$ on punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruses lõpmata suur suurus. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse korral kehtivad ühe muutuja funktsiooni piirväärtuste teooria põhilised teoreemid.

Teoreem 3.1.
Lõpliku arvu funktsioonide summa piirväärtus võrdub nende piirväärtuste summaga.
$x \to x_0, y \to y_0;\ \ f(x, y) \to A, g(x, y) \to B$ siis

$$\boldsymbol{f(x, y) + g(x, y) \to A + B.}$$

Analoogiliselt

$$\boldsymbol{f(x, y) - g(x, y) \to A - B.}$$

Teoreem 3.2.
Funktsioonide korrutise piirväärtus võrdub piirväärtuste korrutisega.
$x \to x_0, y \to y_0;\ \ f(x, y) \to A,\ \ g(x, y) \to B$ siis

$$\boldsymbol{f(x, y) \cdot g(x, y) \to A \cdot B.}$$

Teoreem 3.3.
Kahe funktsiooni jagatise piirväärtus võrdub nende funktsioonide piirväärtuste jagatisega eeldusel, et nimetaja piirväärtus ei võrdu nulliga.
Kui

$$x \to x_0, y \to y_0;\ \ f(x, y) \to A, g(x, y) \to B,$$

siis

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \to \frac{A}{B}.$$

Definitsioon 3.7.
Kui punkti $M_0 = (x_0, y_0)$ ümbruses on funktsioonil $f(x,y)$ olemas piirväärtus

$$\lim_{x \to x_0} f(x,y) = g(y)$$

ja piirväärtus

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = A,$$

siis arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ **korduvaks piirväärtuseks** punktis M_0 ja kirjutatakse

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y) = A.$$

Analoogiliselt

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y) = B.$$

Näide 3.4. Leida järgmised piirväärtused.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (2x^2 - y^2) = -2\,; \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{5 - xy}{x^2 + y^2} = 5;$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to 0}} \frac{x \sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \to a \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = a,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{z^2 \to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} = 1.$$

ÜLEMINEK POLAARKOORDINAATIDELE

Polaarkoordinaatidele üleminekul kasutame järgmist teisendust:

$$x = r\cos\varphi\,, \;\; y = r\sin\varphi.$$

Kui $(x, y) \to 0$, siis $r \to 0$ iga nurga φ korral ja

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Leiame polaarkoordinaatidele üle minnes järgmise piirväärtuse:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = 0.$$

Arv A on funktsiooni $f(x,y)$ piirväärtuseks punktis M_0 siis ja ainult siis, kui piirprotsessi iga lähenemisteed mööda punktile M_0 annab arvu A.

Kui on vaja näidata, et piirväärtust punktis M_0 ei eksisteeri, tuleb leida kaks erinevat lähenemisteed punktile M_0, mille korral piirväärtused on erinevad.

Näitame, et järgmist piirväärtust ei eksisteeri:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Läheneme punktile $(0,0)$ mööda sirget $y = x$, siis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-1)}{2x^2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Läheneme punktile $(0,0)$ mööda sirget $y = 2x$, siis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}.$$

Märkus. Kui argumendid lähenevad punktile (x, y), kus nad ei ole võrdse väärtusega: $x \neq y$, siis tuleks piirväärtuse leidmisel läheneda punktile mööda sellist sirget, mis läbib antud punkti. Näiteks punkti $(-1,1)$ korral võib läheneda punktile mööda sirget $y = x + 2$ või $y = -x$.

Definitsioon 3.8.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse **pidevaks punktis** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$, kui ta on selles punktis määratud ning funktsiooni väärtus punktis (x_0, y_0) võrdub tema piirväärtusega lähenemisel sellele punktile

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funktsiooni, mis on pidev mingi piirkonna igas punktis, nimetatakse pidevaks selles piirkonnas. Pidevuse tingimuse võib kirjutada ka kujul

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.
Kui funktsioon $f(x, y)$ ei ole pidev punktis (x_0, y_0), siis öeldakse, et funktsioon $\boldsymbol{f(x, y)}$ on katkev selles punktis. Sellel juhul nimetakse punkti $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ funktsiooni $f(x, y)$ katkevuspunktiks.

Teoreem 3.4.
Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näide 3.5. Näidata, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } \ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

Funktsiooni f määramispiirkond on kogu xy-tasand. Igas piirkonnas, kus $x^2 + y^2 \neq 0$, on funktsioon f elementaarfunktsioon ja teoreemi 3.4 põhjal pidev. Kontrollida tuleb funktsiooni f pidevust ainult punktis $(0,0)$. Selleks kasutame pidevuse definitsiooni ja võtame piirväärtuse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0),$$

siis järelikult funktsioon f on pidev ka punktis $(0,0)$. Seega funktsioon f on pidev oma määramispiirkonnas. Kui piirväärtus ei võrdu funktsiooni väärtusega antud punktis, siis funktsioon on katkev selles punktis.

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse ja pidevuse mõisteid saab üldistada ka m muutuja funktsioonide jaoks. Olgu hulk $D \subset \mathbb{R}^m$ ja funktsioon $f: D \to \mathbb{R}$ ning olgu punkt $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in D$ hulga D kuhjumispunkt (see tähendab, et punkti A igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Definitsioon 3.9.

Kui argumendi $P = (x_1, \dots, x_m)$ tõkestamata lähenemine punktile $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(P)$ tõkestamata lähenemise arvule c, siis ütleme, et **funktsiooni f piirväärtus protsessis $P \to A$** on arv c ja kirjutame

$$\lim_{P \to A} f(P) = c$$

või

$$\lim_{x_1, \dots, x_m \to a_1, a_2, \dots, a_m} f(x_1, \dots, x_m) = c.$$

Funktsiooni $u = f(P)$ nimetatakse **pidevaks punktis A**, kui

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

Kui funktsioon ei ole pidev punktis A, siis funktsiooni nimetatakse **katkevaks punktis A.**

3.3. OSATULETISED

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Anname muutujale x juurdekasvu Δx, jättes y väärtuse muutmata. Siis funktsioon z saab juurdekasvu (osamuudu)

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Definitsioon 3.11.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ esimest järku **osatuletiseks argumendi x järgi** nimetatakse piirväärtust

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ esimest järku **osatuletiseks argumendi y järgi** nimetatakse piirväärtust

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Osatuletist argumendi x järgi tähistatakse

$$z'_x, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad f'_x(x, y), \qquad z_x, \qquad f_x(x, y).$$

Osatuletist argumendi y järgi tähistatakse

$$z'_y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad f'_y(x, y), \qquad z_y, \qquad f_y(x, y).$$

Osatuletise defineerimisel funktsiooni osamuut $\Delta_x z$ arvutatakse muutumatu y puhul ja funktsiooni osamuut $\Delta_y z$ muutumatu x puhul, võime definitsioonid formuleerida järgnevalt.
Funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ osatuletise leidmiseks $\boldsymbol{x}$ järgi võetakse tema tuletis argumendi $\boldsymbol{x}$ järgi, mis arvutatakse eeldusel, et $\boldsymbol{y}$ on konstantne.
Analoogiliselt: funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ osatuletise leidmiseks $\boldsymbol{y}$ järgi võetakse tema tuletis argumendi $\boldsymbol{y}$ järgi, mis arvutatakse eeldusel, et $\boldsymbol{x}$ on konstantne.
Siit on näha, et osatuletiste leidmiseks sobivad ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirjad, tuleb meeles pidada, millise muutuja järgi osatuletist otsitakse. Tuletame veel meelde reeglid konstandi tuletise leidmiseks: konstandi tuletis on null aga kui konstant on funktsiooni kordajaks, mille järgi osatuletist leiame, siis jääb konstant tuletise ette kordajaks.

$$c' = 0, (cf(x))' = c(f(x))'.$$

Näide 3.6. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 + 3y^2 + 2xy^2$.

Võttes osatuletise argumendi x järgi, argumendi y tuletist võtame konstandi tuletise reegli järgi, ehk teises liidetavas on ainult argumendist y sõltuv funktsioon, seega

$$(3y^2)'_x = 0.$$

Kolmas liidetav sõltub ka argumendist x, seega tuletise võtmisel jäävad konstandid tuletise ette kordajateks:

$$(2xy^2)'_x = 2y^2(x)_x{}' = 2y^2.$$

Võttes osatuletise argumendi y järgi, argumendi x tuletist võtame konstandi tuletise reegli järgi, siis esimeses liidetavas on ainult argumendist x sõltuv funktsioon, seega

$$(x^2)'_y = 0.$$

Kolmas liidetav sõltub ka argumendist y, seega tuletise võtmisel jäävad konstandid tuletise ette kordajateks:

$$(2xy^2)'_y = 2x(y^2)_y{}' = 2x2y = 4xy.$$

Osatuletised funktsioonile z on kujul

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4xy.$$

Näide 3.7. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Definitsioon 3.12.

Olgu hulk $D \subset \mathbb{R}^m$, funktsioon $f: D \to \mathbb{R}$ ning $P = (x_1, \dots, x_m)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Piirväärtust

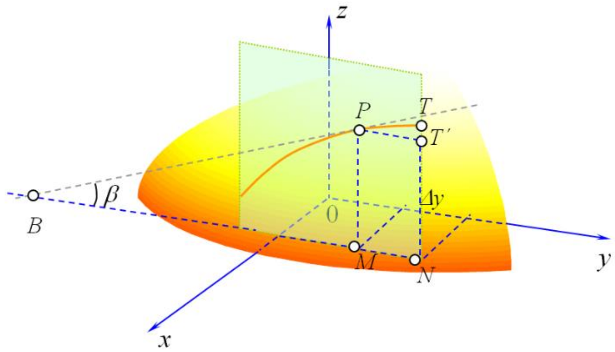
$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_i}$$

nimetatakse **funktsiooni $\boldsymbol{f}$ osatuletiseks muutuja $\boldsymbol{x_i}$ järgi** punktis P ja tähistatakse $f_x(x_1, \dots, x_m)$ või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m).$$

OSATULETISTE GEOMEETRILINE TÕLGENDUS

Osatuletis $\partial z/\partial y$ võrdub arvuliselt pinna $z = f(x,y)$ ja tasapinna $x = \text{const}$ lõikejoone puutuja tõusunurga tangensiga (joonis).



Osatuletis $\partial z/\partial x$ võrdub arvuliselt pinna $z = f(x,y)$ ja tasapinna $y = \text{const}$ lõikejoone puutuja tõusunurga tangensiga.

Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest,
Neid tähistatakse järgmiselt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad f''_{xx}(x,y), \qquad z''_{xx}, \qquad z_{xx}, \qquad f_{xx}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \qquad f''_{xy}(x,y), \qquad z''_{xy}, \qquad z_{xy}, \qquad f_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad f''_{yy}(x,y), \qquad z''_{yy}, \qquad z_{yy}, \qquad f_{yy}(x,y).$$

Näide 3.8. Leida kõik teist järku osatuletised järgmise funktsiooni jaoks

$$z = x^4 - 5x^2y^2 + 6xy + 7.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 6y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -10x^2y + 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -20xy + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10x^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -20xy + 6.$$

Definitsioon 3.13.
Teist järku **segatuletisteks** nimetatakse osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Määratud ja pideva funktsiooni z korral on funktsiooni pidevad segatuletised võrdsed. Kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3.5.
Kui funktsioon $z = f(x,y)$ ning tema osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

on punktis $M(x,y)$ ning selle mingis ümbruses määratud ja pidevad, siis selles punktis teist järku segatuletised on võrdsed

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

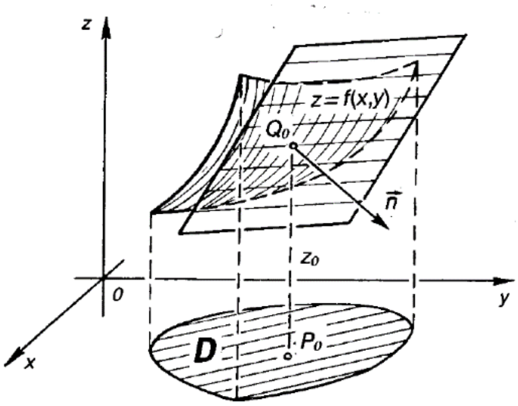
Definitsioon 3.14.

Funktsiooni $f(x,y)$ nimetatakse **diferentseeruvaks** punktis $P(a,b)$, kui funktsioonil on selles punktis osatuletised määratud ja pidevad.

Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab geomeetriliselt selle funktsiooni graafiku puutujatasandi olemasolu vastavas graafiku punktis.

Definitsioon 3.15.

Pinna $z = f(x,y)$ **puutujatasandiks** punktis $Q_0(x_0,y_0)$ nimetatakse tasandit, millel asuvad kõik pinna punkti $Q_0(x_0,y_0)$ läbivate joonte puutujad.



Definitsioon 3.16.

Pinna **normaalsirgeks** (normaaliks) punktis $Q_0(x_0,y_0)$ nimetatakse punkti $Q_0(x_0,y_0)$läbivat sirget, mis on risti puutujatasandiga punktis $Q_0(x_0,y_0)$.

Teoreem 3.6.

Olgu funktsioon $z = f(x,y)$ pidev punkti $P(a,b)$ mingis ümbruses. Kui funktsioon $f(x,y)$ on diferentseeruv punktis $P(a,b)$, siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis $A = (a,b,f(a,b))$. **Puutujatasandi** võrrand on

$$\boldsymbol{z - f(a,b) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}.$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni $f(x,y)$ graafikul eksisteerib punktis A puutujatasand, kusjuures see puutujatasand ei ole paralleelne z-teljega, siis funktsioon $f(x,y)$ on diferentseeruv punktis A.

Pinna $z = f(x,y)$ **normaalsirge** punktis $A = (a,b,f(a,b))$ on esitatav kahe võrrandiga:

1) parameetriline võrrand

$$\begin{cases} x = a + tf'_x(a,b) \\ y = b + tf'_y(a,b) \\ z = f(a,b) - t \end{cases}$$

2) kanooniline võrrand

$$\frac{x-a}{f'_x(a,b)} = \frac{y-b}{f'_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}.$$

3.4. TÄISDIFERENTSIAAL

Eeldame, et kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev. Anname argumentidele x ja y juurdekasvud $\Delta x, \Delta y$. Siis funktsioon saab juurdekasvu

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Eeldame lisaks, et funktsioonil on punktis (x, y) pidevad osatuletised. Avaldame Δz osatuletiste kaudu. Selleks liidame ja lahutame paremast poolest $\pm f(x, y + \Delta y)$:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Mõlemates nurksulgudes on ühe muutuja funktsioonid. Rakendame neile Lagrange'i keskväärtusteoreemi

$$[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x, \quad \bar{x} \in [x, x + \Delta x],$$

$$[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y, \quad \bar{y} \in [y, y + \Delta y],$$

Asendame

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \cdot \Delta y.$$

Eelduse kohaselt on osatuletised pidevad (pidevuse definitsioonist ja piirväärtuse omadusest saame)

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \Rightarrow \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_1,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \varepsilon_2,$$

Järelikult

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

<u>Kaks viimast liidetavast on kõrgemat järku lõpmata väikesed suurused</u> võrreldes kahe esimesega ja Δz peaosa moodustab kaks esimest liiget.
Argumendi diferentsiaaliks nimetatakse argumendi muutu

$$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy = \Delta y.}$$

Definitsioon 3.17.

Kahe muutuja funktsiooni juurdekasvu peaosa argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel nimetatakse selle funktsiooni **täisdiferentsiaaliks**. Tähistatakse

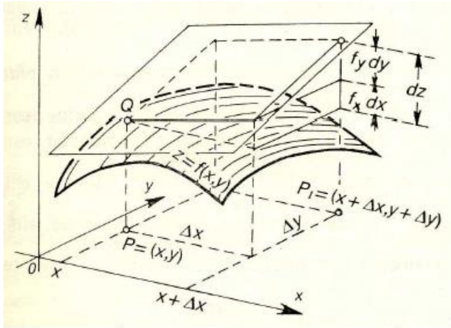
$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$dz = z'_x\, dx + z'_y dy.$$

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal funktsiooni graafiku puutujatasandi aplikaadi (z-koordinaadi) muutu üleminekul punktist $P(x, y)$ punkti $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali saab kasutada funktsiooni juurdekasvu ligikaudseks arvutamiseks, sellisel juhul loetakse

$$\boldsymbol{\Delta z \approx dz} \text{ ehk } \boldsymbol{\Delta z \approx z'_x\, dx + z'_y dy}.$$



Selline võrdsustamine on õigustatud, kui argumentide juurdekasvud on väikesed. Samast valemist on võimalik leida ka funktsiooni uus väärtus $\boldsymbol{f(x+\Delta x, y+\Delta y)}$, selleks avaldame funktsiooni muudu avaldisest

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

funktsiooni uue väärtuse täisdiferentsiaali kaudu järgmiselt

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx z'_x\, dx + z'_y dy,$$

$$\boldsymbol{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + z'_x\, dx + z'_y dy}.$$

Näide 3.9. Leida funktsiooni $z = 3x^2 + \cos y$ täisdiferentsiaal.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y \quad \Rightarrow \quad dz = 6x\, dx - \sin y\, dy.$$

Näide 3.10. Olgu silindri kõrgus 25 cm ja raadius 10 cm. Kui palju muutub silindri ruumala, kui kõrgust suurendada 2 mm ja põhja raadiust vähendada 1 mm võrra?

Silindri ruumala $V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow V(10{,}25) = \pi \cdot 100 \cdot 25 = 2500\pi$.

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$$

$$dV = \pi r^2\, dh + 2\pi r h\, dr.$$

$$r = 10;\ \ \Delta r = -0{,}1\ \ (\text{cm}); \quad h = 25;\ \Delta h = 0{,}2\ (\text{cm}).$$

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h.$$

$$\Delta V \approx \pi r^2\, \Delta h + 2\pi r h \Delta r = \pi[100 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0{,}1] = -30\pi.$$

Ruumala väheneb 30π võrra.

$$V_1 = V + \Delta V \approx 2500\pi - 30\pi = 2470\pi.$$

Uue ruumala täpne väärtus on

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow V(10 - 0{,}1; 25 + 0{,}2) = \pi \cdot 9{,}9^2 \cdot 25{,}2 = 2469{,}85\pi.$$

Näide 3.11. Arvutada täisdiferentsiaali abil ligikaudselt avaldise $2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4$ väärtus.

Kasutame valemit

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + z'_x\, dx + z'_y dy.$$

Leiame kõigepealt funktsiooni kuju ja osatuletised argumentide järgi, siis argumentide arvulised väärtused ja juurdekasvud.

$$f(x,y) = x^3 y^4, \qquad f'_x = 3x^2 y^4, \quad f'_y = 4x^3 y^3,$$

$$x = 3, \qquad \Delta x = -0{,}03; \quad y = 3, \qquad \Delta y = 0{,}01$$

$$f(3,3) = 2187, f'_x(3,3) = 2187, f'_y(3,3) = 2916.$$

Funktsiooni uue väärtuse ligikaudne suurus on

$$2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4 \approx 2187 + 2187(-0{,}03) + 2916 \cdot 0{,}01 = 2150{,}55.$$

Täpne väärtus esitatuna tuhandikeni on $2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4 = 2150{,}4796 \ldots$

Täisdiferentsiaal m muutuja funktsiooni $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ jaoks punktis P_0 avaldub kujul

$$\boldsymbol{df(P_0) = f_{x_1}(P_0)dx_1 + f_{x_2}(P_0)dx_2 + \cdots + f_{x_m}(P_0)dx_m.}$$

3.5. KÕRGEMAT JÄRKU OSATULETISED

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$. Leiame esimest järku osatuletised. Osatuletised on argumentide x, y funktsioonid, leiame uuesti osatuletised x ja y järgi, saame teist järku osatuletised.

Teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x,y).$$

Teist järku tuletisi võib omakorda diferentseerida x ja y järgi, saame kolmandat järku osatuletised

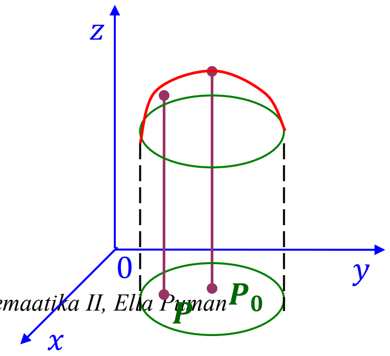
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}.$$

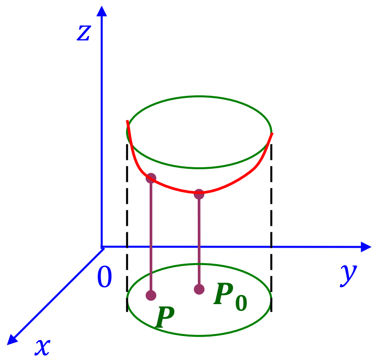
3.6. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID. OPTIMISEERIMINE

Tuletame kõigepealt meelde ühe muutuja funktsiooni jaoks ekstreemumite tarvilikud tingimused. Funktsioonil $y = f(x)$ on punktis $x = x_0$ maksimum parajasti siis, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$ ja miinimum parajasti siis, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$.
Punkti ümbruse mõistest järeldub, et punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$ kuulub punkti P_0 r–ümbrusesse siis ja ainult siis, kui $h^2 + k^2 < r^2$.
Tõepoolest, kui leiame punktide $P_0(x_0, y_0)$ ja $P(x_0 + h, y_0 + k)$ vahelise kauguse, saame

$$\sqrt{(x_0 + h - x_0)^2 + (y_0 + h - y_0)^2} < r, \qquad \sqrt{h^2 + k^2} < r.$$

Definitsioon 3.17.
Funktsioonil $z = f(x,y)$ on lokaalne maksimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti küllalt väike ümbrus, mille kõikides punktides $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$.





Definitsioon 3.18.
Funktsioonil $z = f(x,y)$ on lokaalne miinimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti küllalt väike ümbrus, mille kõikides punktides $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

Kui funktsioonil on punktis $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ ekstreemum, siis kehtivad tingimused:

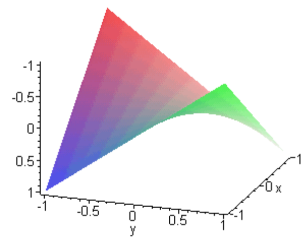
$$\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0) = 0}, \qquad \boldsymbol{f'_y(x_0, y_0) = 0}.$$

Tõepoolest, kui kahe muutuja funktsioonil on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis ka ühe muutuja funktsioonil $F(x, y_0)$ on punktis $x = x_0$ ekstreemum ja järelikult tema tuletis argumendi x järgi on võrdne nulliga. Samuti peab ekstreemumpunktis $x = x_0$ osatuletis argumendi y järgi olema võrdne nulliga. **Saadud tingimused ei ole piisavad tingimused ekstreemumi olemasoluks.**

Näide 3.12. Leida funktsiooni $z = xy$ statsionaarsed punktid.

Antud funktsiooni korral on tarvilikud tingimused on täidetud aga ekstreemumi ei ole:

$$z_0(0{,}0){:}\ \ z'_x(z_0) = 0, \quad z'_y(z_0) = 0.$$

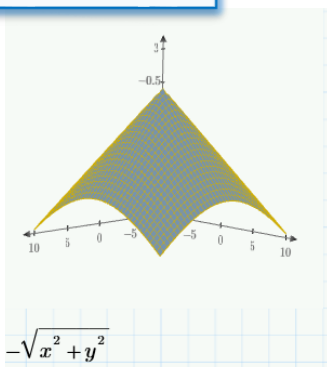


Definitsioon 3.19.

Statsionaarseks punktiks nimetatakse punkti, mille korral funktsiooni kõik osatuletised selles punktis on võrdsed nulliga.

Definitsioon 3.20.

Kriitiliseks punktiks nimetatakse punkti, kui see punkt on statsionaarne punkt või osatuletist selles punktis ei eksisteeri või osatuletis on lõpmatu.



Näiteks funktsioonil $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ on kriitiliseks punktiks $(0{,}0)$ (joonis).
Funktsiooni kriitiline punkt võib asetseda ka määramispiirkonna rajajoonel.
Funktsioonil võib lokaalne ekstreemum esineda vaid tema kriitilises punktis.

Teoreem 3.7.

Kui funktsioonil $z = f(x,y)$ on olemas punkti (x_0, y_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis (x_0, y_0), kus

$$\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0) = 0}, \qquad \boldsymbol{f'_y(x_0, y_0) = 0}$$

on lokaalne ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$\boldsymbol{W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0},$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0)

lokaalne maksimum, kui selles punktis $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0, y_0) < 0}$,
lokaalne miinimum, kui $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0, y_0) > 0}$.

Kui $W(x,y) < 0$, siis funktsioonil $f(x,y)$ selles punktis lokaalset ekstreemumit ei ole. Kui $W(x,y) = 0$, siis tuleb funktsiooni käitumist uurida, kas Δz säilitab märki punkti (x_0, y_0) ümbruses.
$W(x,y)$ nimetatakse funktsiooni **diskriminandiks**.
Sadulpunktiks nimetatakse diferentseeruva funktsiooni $f(x,y)$ kriitilisele punktile (a,b) vastavat punkti $(a, b, f(a,b))$, mille igas ümbruses on punkte, kus $f(x,y) > f(a,b)$ ja punkte, kus $f(x,y) < f(a,b)$.

Näide 3.13. Leida funktsiooni $z = 3x + 24y - x^3 - 2y^3$ lokaalsed ekstreemumid.

$$f'_x = 3 - 3x^2,\ \ 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1;$$

$$f'_y = 24 - 6y^2,\ \ 6y^2 = 24 \quad \Rightarrow \ y = \pm 2.$$

Funktsiooni statsionaarsed punktid on: $(1,2)$; $(1,-2)$; $(-1,2)$; $(-1,-2)$. Saime neli punkti. Kontrollime nendes punktides diskriminandi W väärtust.

$f''_{xx} = -6x, \quad f''_{yy} = -12y, \quad f''_{xy} = 0.$

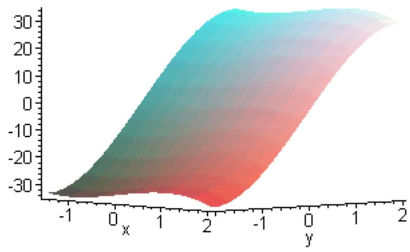
$W = (-6x)(-12y) - 0^2 = 72xy.$

$(1,-2)$: $72 \cdot 1 \cdot (-2) < 0$; $(-1,2)$: $72 \cdot (-1) \cdot 2 < 0$;

$(1,2)$: $72 \cdot 1 \cdot 2 > 0$; $f''_{xx} = -6x = -6 < 0.$

Maksimumpunkt: $z(1,2) = 3 + 48 - 1 - 16 = 34,$

$(-1,-2)$: $72 \cdot (-1) \cdot (-2) > 0$; $f''_{xx} = -6x = 6 > 0.$



Miinimumpunkt: $z(-1,-2) = -3 - 48 + 1 + 16 = -34.$
Seega funktsiooni lokaalsed ekstreemumid on:

$$z_{\min}(-1,-2) = -34; \ \ z_{\max}(1,2) = 34.$$

Näide 3.14. Leida funktsiooni $z = \cos\,(y^2 + x^2)$ lokaalsed ekstreemumid.

$$z'_x = -2x \sin\,(y^2 + x^2), \quad z'_y = -2y \sin\,(y^2 + x^2).$$

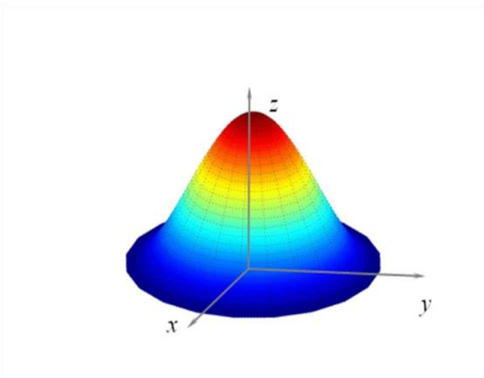
$$\begin{cases} -2x \sin\,(y^2 + x^2) = 0 \\ -2y \sin\,(y^2 + x^2) = 0 \end{cases}.$$

Ekstreemumpunktiks on punkt koordinaatidega $(0; 0)$.

$$z''_{xx} = -2\sin(y^2 + x^2) - 4x^2\cos(y^2 + x^2),$$

$$z''_{yy} = -2\sin\,(y^2 + x^2) - 4y^2\cos(y^2 + x^2),$$

$$z''_{xy} = -4xy\cos\,(y^2 + x^2).$$



$$W = (-2\sin(y^2 + x^2) - 4x^2\cos(y^2 + x^2))(-2\sin\,(y^2 + x^2) - 4y^2\cos(y^2 + x^2)) - \left(-4xy\cos\,(y^2 + x^2)\right)^2.$$

$W(0,0) = 0$. Kuna diskriminant on võrdne nulliga, tuleb funktsiooni täiendavalt uurida, jooniselt on näha, et tegemist on maksimumpunktiga.
Kui kolme muutuja funktsioonil $u = f(x,y,z)$ on olemas punkti (x_0, y_0, z_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$, kus

$$\boldsymbol{f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0}$$

on lokaalne ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$\boldsymbol{W(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0,}$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0, z_0)

lokaalne maksimum, kui selles punktis $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0,\ A = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0,}$

lokaalne miinimum, kui $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0,\ A = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0.}$

Definitsioon 3.21.

Globaalseks ekstreemumiks nimetatakse funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust antud piirkonnas.

Nende leidmiseks peame leidma kõigepealt lokaalsed ekstreemumid, seejärel leiame funktsiooni väärtused rajapunktides, neist suurim on globaalne maksimum ja vähim on globaalne miinimum.

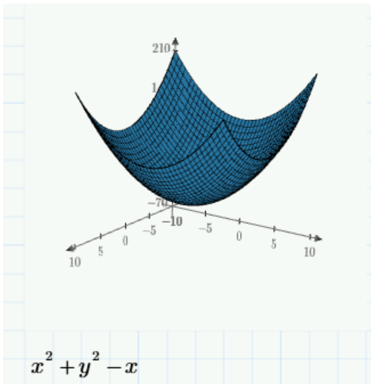
Definitsioon 3.22.
Kui funktsioon f on antud piirkonnas D, siis funktsioonil on punktis $P_0 \in D$ **globaalne maksimum**, kui piirkonna D igas punktis P kehtib võrratus

$$f(P) \leq f(P_0)$$

ja **globaalne miinimum**, kui piirkonna D igas punktis kehtib võrratus

$$f(P) \geq f(P_0).$$

Näide 3.15. Leida funktsiooni $z = x^2 + y^2 - x$ globaalsed ekstreemumid piirkonnas $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.



$z'_x = 2x - 1, \qquad z'_y = 2y, \qquad z''_{xx} = 2, \qquad z''_{yy} = 2, \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = 0.$

Võrdsustades kaks esimest võrrandit nulliga, saame statsionaarseks punktiks

$$x = \frac{1}{2}, y = 0.$$

Funktsiooni väärtus selles punktis on

$$z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

Piirkonna rajajoon on ringjoon keskpunktiga koordinaatide alguspunktis, raadiusega 1. Rajajoonel kehtib võrrand $x^2 + y^2 = 1$ ehk $y^2 = 1 - x^2$, kus $x \in [-1, 1]$. Kontrollime rajajoonel olevaid funktsiooni väärtusi punktides $(-1, 0), (0, -1), (1, 0)$ ja $(0, 1)$, kust leiame maksimaalse ja minimaalse, seejärel võrdleme neid väärtusi leitud lokaalsete ekstreemumitega.

Suurim väärtus rajajoonel on $z(-1,0) = 2$ ja vähim $z(1,0) = 0$. Seega funktsiooni globaalsed ekstreemumid on

$$z_{\min}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4};\ z_{\max}(-1,0) = 2.$$

Definitsioon 3.23.
Funktsiooni $f(x, y)$ optimiseerimiseks nimetatakse funktsiooni maksimumi ja miinimumi (ekstreemumite) leidmist.

Paljudes optimiseerimisülesannetes on vaja rahuldada ka lisatingimused, mis kujutavad endast ühte või mitut muutujate vahelist seost. Lihtsamatel juhtudel saab kasutada muutujate elimineerimise võtet, kus üks või mitu lisatingimust võimaldavad avaldada tundmatu teiste kaudu ja asendada võrranditesse.

3.6.1. TINGLIKUD EKSTREEMUMID. LAGRANGE'i MEETOD

Lagrange'i kordajate meetod on lisakitsendustega optimiseerimisülesande lahendusmeetod. Ülesande lahendamiseks tuleb moodustada Lagrange'i funktsioon (laiendatud funktsioon)

$$\boldsymbol{J = f + \lambda g},$$

kus f on funktsioon, $\boldsymbol{g}$ **lisatingimus** kujul $g = 0$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ **Lagrange'i kordaja**, mille peame leidma. Lahendamiseks leiame osatuletised funktsioonist J kõigi tundmatute järgi, võrdsustame osatuletised nulliga. Saame süsteemi, kus lisaks osatuletistele on vaja rahuldada lisatingimus $g = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0, i = 1,2, \dots, n \\ g = 0 \end{cases}.$$

Saadud võrrandisüsteemist leiame **tinglikud statsionaarsed punktid**.
Seejuures eeldame, et nende punktide ümbrustes, mis on saadud süsteemi lahenditeks, on funktsioonide f ja J esimest järku osatuletised pidevad.

Definitsioon 3.24.
Tinglikuks kriitiliseks punktiks nimetatakse punkti, kui see punkt on statsionaarne punkt või punkte, mis rahuldavad lisatingimust ja kus funktsioonide f ja J osatuletised ei ole pidevad.

Funktsioonil võib **tinglik lokaalne ekstreemum** esineda vaid tema tinglikus kriitilises punktis. Kui Lagrange'i funktsioonil J on tinglikus statsionaarses punktis vastava $\lambda = \lambda_0$ korral lokaalne või globaalne ekstreemum, siis funktsioonil f on selles punktis P_0 vastav tinglik lokaalne või globaalne ekstreemum.

Vaatame kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$, mille jaoks on vaja leida lokaalne ekstreemum lisakitsenduse $g(x, y) = 0$ korral. Siis Lagrange'i funktsioon on kujul $J = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ja statsionaarsed punktid leiame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Kolme muutuja funktsiooni $u = f(x,y,z)$ ja lisakitsenduse $g(x,y,z) = 0$ jaoks on Lagrange'i funktsioon kujul $J = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$ ja statsionaarsete punktide leidmiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} = 0, \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Saame kolm võrrandit ekstreemumite leidmiseks, **lisaks peab olema rahuldatud lisakitsendus**. Kokku neljast võrrandist leiame ekstreemumpunkti kõik koordinaadid (x,y,z) ja Lagrange'i kordaja λ väärtuse.

Märkus. Kui võtame osatuletise ka Lagrange'i kordaja λ järgi, saame võrrandi $g(x,y,z) = 0$, seega võime lisatingimuse asendada osatuletisega:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0.$$

Näide 3.16. Leida lokaalsed tinglikud ekstreemumid funktsioonile $f = x^2 + y^2$ lisakitsendusel $x + y = 4$.

Moodustame laiendatud funktsionaali $J = f + \lambda g$, mis sisaldab funktsiooni ja Lagrange'i kordajaga läbikorrutatud lisatingimust:

$$J = x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 4).$$

Võtame osatuletised tundmatute järgi, saame

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = 2x + \lambda \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2y + \lambda \end{cases},$$

Võrdsustame saadud osatuletised nulliga, lisakitsendusega koos saame lahendamiseks süsteemi:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

Süsteemi lahenditeks on $x = 2, y = 2, \lambda = -4$. Kuna $f''_{xx} = 2 > 0$, siis leitud punkt võib olla lokaalseks miinimumpunktiks. Kui uurime ekstreemumi piisavaid tingimusi, selgub, et

$$W = 2 \cdot 2 - 0 > 0,$$

seega tegemist on lokaalse ekstreemumiga. Leitud punktile $(2,2)$ vastav funktsiooni väärtus on 8. Seega funktsioonil on lokaalne tinglik miinimum $f_{\min}\,(8,2) = 8$.

Üldjuht. Olgu antud n muutuja funktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja lisatingimused $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_k, k = 1,2, \dots, m,$ kus $a_1, a_2, \dots, a_m$ on konstandid. Tuleb konstrueerida abifunktsioon

$$\boldsymbol{J} = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ \dots + \lambda_m g_m = \boldsymbol{f} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\lambda_k g_k}.$$

Osatuletised argumentide järgi

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i}.$$

Osatuletised võrdsustame nullidega ja lisame lisakitsendused, saame lahendamiseks järgmise süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0, \ \ i = 1,2, \dots, n, \\ g_k = a_k, \ \ k = 1,2, \dots, m. \end{cases}$$

Tundmatuid on kokku $m + n$: argumente x_i on n ja Lagrange'i kordajaid λ_i on m.

Näide 3.17. Ruutvormid n muutujaga:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_i x_j ,$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

kus $C_{ij} = C_{ji}$ on konstandid. Juhul $n = 3$ saame

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} C_{ij} x_i x_j =$$

$$= C_{11} x_1^2 + 2C_{12} x_1 x_2 + 2C_{13} x_1 x_3 + C_{22} x_2^2 + 2C_{23} x_2 x_3 + C_{33} x_3^2,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Lagrange'i kordajate meetod

$$J = (C_{11} - \lambda) x_1^2 + 2C_{12} x_1 x_2 + 2C_{13} x_1 x_3 + (C_{22} - \lambda) x_2^2 + 2C_{23} x_2 x_3 + (C_{33} - \lambda) x_3^2,$$

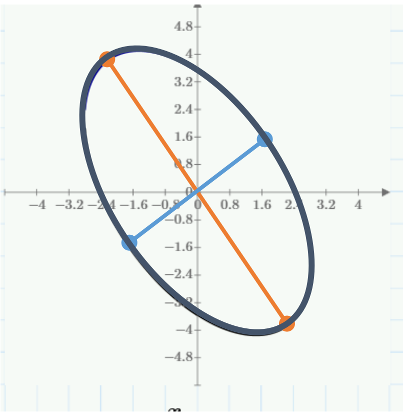
$$\begin{cases} (C_{11} - \lambda) x_1 + C_{12} x_2 + C_{13} x_3 = 0 \\ C_{21} x_1 + (C_{22} - \lambda) x_2 + C_{23} x_3 = 0 \\ C_{31} x_1 + C_{32} x_2 + (C_{33} - \lambda) x_3 = 0 \end{cases}$$

Saime karakteristliku võrrandisüsteemi.

Näide 3.18. Leida punktid ellipsil $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$, mis on kõige lähemal ja kõige kaugemal koordinaatide alguspunktist.

Tegemist on ellipsiga (vt joonis), mille keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis ja me peame leidma punktide koordinaadid ellipsi lühema ja pikema pooltеljele jaoks, mis annavadki lühima ja pikima kauguse koordinaatide alguspunktist. Peame leidma ekstreemumid funktsioonile, mis leiab kauguse koordinaatide alguspunkti ja ellipsi suvalise punkti vahel. Tähistame suvalise ellipsi punkti tähega $P(x, y)$, siis kaugus avaldub

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Et ekstreemumi leidmine oleks lihtsam, võtame funktsiooniks kauguse ruudu

$$d^2 = f(x, y) = x^2 + y^2,$$

lisakitsenduseks on ellipsi võrrand

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100.$$

Seega laiendatud funktsionaal saab kuju

$$J = x^2 + y^2 + \lambda(17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100).$$

Leiame osatuletised kõigi tundmatute järgi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = 2x + 34\lambda x + 12\lambda y \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2y + 12\lambda x + 16\lambda y \\ \dfrac{\partial J}{\partial \lambda} = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 \end{cases}$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + \lambda(34x + 12y) = 0 \\ 2y + \lambda(12x + 16y) = 0 \\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100 \end{cases}$$

Esimesest kahest võrrandist avaldame Lagrange'i kordaja λ ja paneme mõlemad avaldised omavahel võrduma, saame

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y}, \quad 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2.$$

Lihtsustame ja jagame võrrandit arvuga (-3), saame

$$8x^2 - 12xy - 8y^2 = 0.$$

Liites saadud võrrandi juurde viimasele süsteemi võrrandile, saame

$$25x^2 = 100, \qquad x = \pm 2.$$

Edasi leiame argumendi y väärtused. Kui $x = 2$, siis

$$y^2 + 3y - 4 = 0,$$

kust saame

$$(y-1)(y+4) = 0 \text{ ehk } y = 1, y = -4.$$

Kui $x = -2$, siis

$$y^2 - 3y - 4 = 0,$$

kust saame

$$(y+1)(y-4)=0 \text{ ehk } y=-1, y=4.$$

Kokkuvõttes oleme saanud 4 ekstreemumpunkti: $(2,1), (-2,-1), (2,-4)$ ja $(-2,4)$. Punktide koordinaatide põhjal saame öelda, et kaks esimest punkti on koordinaatide alguspunktile kõige lähemal ja kolmas ja neljas punkt on kõige kaugemal punktist $(0,0)$.

3.7. VÄHIMRUUTUDE MEETOD

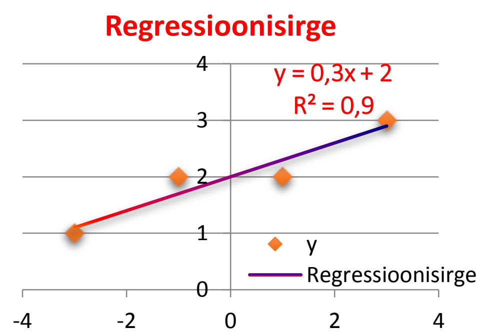
Kui ei ole olemas funktsiooni esitust analüütiliselt, vaid on uurimistulemused tabeli kujul (katseandmed)

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

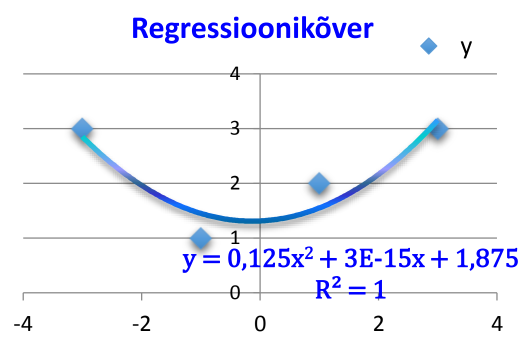
Tahame saada antud sõltuvuse esitust valemi kujul $\boldsymbol{y=f(x)}$. Saame tuletada ligikaudse valemi. **Vähimruutude meetodi idee** seisneb selles, et parimaks valemiks, mis esitab katseliselt saadud sõltuvust, peetakse seda, mille puhul katsel saadud väärtuste ja valemi järgi arvutatud väärtuste vahede ruutude summa on vähim.

Kõigepealt tuleb ette anda funktsiooni $y=f(x)$ kuju, mis sisaldab teatava arvu parameetreid. Nende parameetrite leidmiseks kasutame vähimruutude meetodit. Milline funktsioon valida, selleks tuleks katseandmed kanda joonisele. Paarid $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_n,y_n)$ esitavad punkte xy tasandil. Kui graafikul on näha, et punktid on grupeerunud järgmisel viisil:

- teatud **sirge** lähedale (joonis 1), siis võib eeldada, et x ja y vahel on lineaarne sõltuvus, mis on esitatav valemiga $\boldsymbol{y=ax+b}$, kus $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on otsitavad parameetrid;
- mingi **kõvera** ümbruses (joonis 2), siis on tegemist ruutsõltuvusega $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$, kus otsitavad $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ja $\boldsymbol{c}$ leiame vähimruutude meetodil;

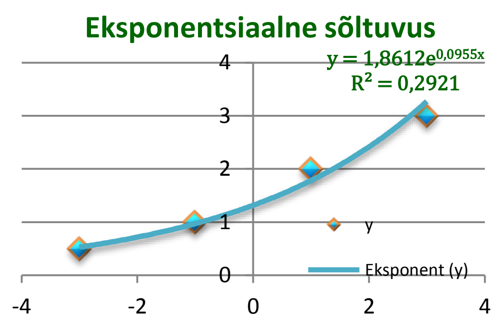


Joonis 3.1.



Joonis 3.2.

- **eksponentsiaalne** sõltuvus (joonis 3.3) $\boldsymbol{y=ab^x}$ kus otsitavad on $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$.



Joonis 3.3.

LINEAARNE REGRESSIOON

Olgu antud empiiriline valem kujul

$$y = ax + b.$$

Leiame parameetrid a ja b tingimusest, et sirge tuleb tõmmata nii, et empiiriliselt saadud punktide ordinaatide ja samadele abstsissidele vastavate sirgete punktide ordinaatide vahede ruutude summa on minimaalne, ehk

$$u = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \rightarrow \min$$

Saadud summat võib vaadelda kui kahe muutuja funktsiooni a ja b suhtes ((x_k, y_k) on etteantud). Tuleb leida funktsiooni $u = u(a, b)$ miinimum. Tarvilik tingimus selleks on osatuletiste nulliga võrdumine:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$$

Leiame vastavad osatuletised:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-x_2) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-x_n);$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-1) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-1).$$

Võrdsustades osatuletised nulliga, saame a ja b suhtes 2 lineaarset võrrandit kahe tundmatuga:

$$\begin{cases} 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-x_2) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-x_n) = 0 \\ 2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-1) + \ldots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + (ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \ldots + (ax_n + b - y_n) \cdot x_n = 0 \\ (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \ldots + (ax_n + b - y_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \\ a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + b \cdot n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Saadud süsteemi nimetatakse **normaalvõrrandite süsteemiks**. Leiame siit a ja b ning asetame empiirilisse valemisse $y = ax + b$. Seda nimetatakse ka **lineaarseks regressiooniks**. Kontrollime, kas on tegemist miinimumiga ja ka ekstreemumi piisavaid tingimusi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \Rightarrow \min,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Schwartz'i Bunjakowski võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \cdot \mu_i)^2, \qquad (\gamma_i = x_i;\ \ \mu_i = 1).$$

R E G R E S S I O O N I K Õ V E R

Olgu x ja y vaheline seos kirjeldatav ruutseosega

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}.$$

Leiame kordajad a, b ja c vähimruutude meetodi abil:

$$u = [y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)]^2 + [y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)]^2 + \ldots + [y_n - (ax_n^2 + bx_n + c)]^2.$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2, \qquad u = u(a, b, c).$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] \cdot (-x_1^2) + 2[y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)] \cdot (-x_2^2) + \ \ldots$$
$$+2\left[y_n - \left(ax_n^2 + bx_n + c\right)\right] \cdot \left(-x_n^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 2[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)] \cdot (-x_2) + \cdots$$
$$+2\left[y_n - \left(ax_n^2 + bx_n + c\right)\right] \cdot (-x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = 2[y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c)] \cdot (-1) + 2[y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c)] \cdot (-1) + \cdots$$
$$+2\left[y_n - \left(ax_n^2 + bx_n + c\right)\right] \cdot (-1).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-x_i^2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-x_i). \\ \dfrac{\partial u}{\partial c} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)] \cdot (-1) \end{cases}$$

Funktsiooni $\boldsymbol{u = u(a, b, c)}$ miinimumi tarvilikud tingimused on:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0.$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2[-y_i x_i^2 + a x_i^4 + b x_i^3 + c x_i^2] = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2[-y_i x_i + a x_i^3 + b x_i^2 + c x_i] = 0\,. \\ \sum_{i=1}^{n} 2[-y_i + a x_i^2 + b x_i + c] \qquad = 0 \end{cases}$$

Süsteem kordajate leidmiseks:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i} \\ \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.} \\ \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i} \end{cases}$$

Piisavus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 2x_1^4 + 2x_2^4 + \ldots + 2x_n^4 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 > 0 \Rightarrow \quad \text{min},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 2(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} = 2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

EKSPONENTSIAALNE SÕLTUVUS

Otsime valemit kujul

$$\boldsymbol{y = ab^x},$$

otsitavateks on parameetrid a ja b. Logaritmime ja kasutame logaritmi omadusi:

$$\log y = \log(a \cdot b^x)\,;$$

$$\log y = \log a + x \log b.$$

Näeme, et $\log y$ sõltub argumendist x lineaarselt. Leiame parameetrid kujul $\log a$, $\log b$

$$u = [\log y_1 - (x_1 \log b + \log a)]^2 +$$
$$+[\log y_2 - (x_2 \log b + \log a)]^2 + \ldots + [\log y_n - (x_n \log b + \log a)]^2,$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} [\log y_i - (x_i \log b + \log a)]^2,$$

$$u = u(\log a, \log b).$$

Miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial(\log b)} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = \sum_{i=1}^{n} 2[\log y_i - (x_i \log b + \log a)] \cdot (-1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial(\log b)} = \sum_{i=1}^{n} 2[\log y_i - (x_i \log b + \log a)] \cdot (-x_i),$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \log b + n \cdot \log a = \sum_{i=1}^{n} \log y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \log b + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log a = \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\log b \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \log a = \sum_{i=1}^{n} \log y_i} \\ \boldsymbol{\log b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \log a \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log y_i} \end{cases}$$

Siit saab leida $\boldsymbol{\log a}$ ja $\boldsymbol{\log b}$, nendest avaldada otsitavad $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$.

Piisavus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(\log a)^2} = 2n, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial(\log b)^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(\log a)\partial(\log b)} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Schwartz'i-Bunjakowski võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i \cdot \mu_i)^2, \qquad (\gamma_i = x_i; \;\; \mu_i = 1).$$

Näide 3.19. Katse tulemusel saadi järgmised x ja y väärtused:

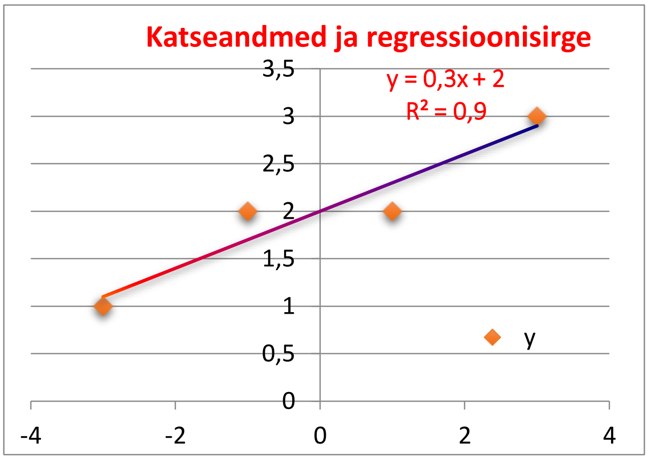
x	-3	-1	1	3
y	1	2	2	3

Leida sirge võrrand, mis väljendaks sõltuvust $y = ax + b$. Saadud seose põhjal prognoosida $y(2)$.

Arvutuste lihtsustamiseks on mõistlik paigutada lähteandmed koos tehetega tabelisse.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	-3	1	9	-3
	-1	2	1	-2
	1	2	1	2
	3	3	9	9
Summa	**0**	**8**	**20**	**6**
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$



$$\begin{cases} 20a + 0b = 6 \\ 0\,a + 4b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \\ b = \frac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

Regressioonisirge võrrand on $y = 0{,}3x + 2$. Argumendi väärtuse 2 korral prognoositav väärtus on

$$y(2) = 0{,}3 \cdot 2 + 2 = 2{,}6.$$

Arvutused on lihtsalt teostatavad näiteks Microsoft Exceli tabelarvutusprogrammi kasutades, pannes paika esimesed valemid ja kopeerides valemid kõigi argumendi väärtuste jaoks. Graafikule saab lisada regressioonisirge, kui valida **Scatter** tüüpi graafik (ainult punktid) ja parema hiireklahviga katseandmete peal valides avanevast rippmenüüst **Add Trendline**. Samas on Excelis olemas funktsioonid regressioonisirge kordajate a ja b arvutamiseks, need on vastavalt $slope(x,y)$ ja $intercept(x,y)$, kus argumentide x ja y asemele tuleb märkida piirkond vastavate argumentide arvuliste väärtuste asukohaga.
Täpselt samal kujul on olemas funktsioonid ka näiteks inseneriprogrammis *Mathcad 15.0* või *Mathcad Prime 2.0*, mis lisaks MS Exceli võimalustele lubab teha integraal- ja diferentsiaalarvutust, sümbolarvutust, lahendada võrrandeid, võrrandisüsteeme ja

diferentsiaalvõrrandeid, lisaks teha kolmedimensionaalseid graafikuid pindadest ning koostada animatsioone.

3.8. LIITFUNKTSIOONI TULETIS. TÄISTULETIS

Olgu antud funktsioon $z = F(u, v)$, kus u ja v on sõltumatute muutujate x ja y funktsioonid: $u = \varphi(x, y)$, $v = \omega(x, y)$. Sellisel juhul on z argumentide x ja y liitfunktsioon. Funktsiooni z võib avaldada ka vahetult x ja y kaudu

$$z = F\big(\varphi(x, y), \omega(x, y)\big) \tag{3.24}$$

Näide 3.20. Näide liitfunktsiooni kohta: $z = u^3v^3 + u + 1,\ \ u = x^2 + y^2,\ \ v = e^{x+y} + 1$.

$$z = (x^2 + y^2)^3(e^{x+y} + 1)^3 + x^2 + y^2 + 1.$$

Eeldame, et funktsioonide $z = F(u, v), u = \varphi(x, y), v = \omega(x, y)$ osatuletised argumentide järgi on pidevad. Püüame leida osatuletised mitte kasutades võrrandit (3.24). Anname argumendile x muudu Δx, jättes y väärtuse muutumatuks. Siis funktsioonid u ja v saavad muudu $\Delta_x u, \Delta_x v$ ja ka funktsioon $z = F(u, v)$ saab muudu Δz.

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1\Delta_x u + \gamma_2\Delta_x v\,, \qquad |: \Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Leiame piirväärtuse, kui $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0.$$

Järelikult

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Andes argumendile y muudu Δy ja jättes x muutumatuks, võib analoogiliselt leida

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Näide 3.21. Leida osatuletised funktsioonile $z = \ln{(u^2 + v)},\ \ \ u = e^{x+y^2},\ \ \ v = x^2 + y$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2ue^{x+y^2}}{u^2 + v} + \frac{2x}{u^2 + v} = \frac{2}{u^2 + v}(u^2 + x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u2ye^{x+y^2}}{u^2 + v} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{1}{u^2 + v}(4u^2y + 1).$$

Näide 3.22. Leida osatuletised funktsioonile

$$z = \sin(u^2 + v^3), \quad u = e^{2x}, \quad v = \ln x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos(u^2 + v^3) \cdot 2u, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \cos(u^2 + v^3) \cdot 3v^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(u^2 + v^3) \cdot 2u \cdot 2e^{2x} + \cos(u^2 + v^3) \cdot 3v^2 \cdot \frac{1}{x} = \cos(u^2 + v^3)\left(4u^2 + \frac{3v^2}{x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(u^2 + v^3) \cdot 2u \cdot 0 + \cos(u^2 + v^3) \cdot 3v^2 \cdot 0 = 0.$$

Saadud valemeid võib üldistada suurema arvu muutujate juhule. Olgu

$$w = F(z, u, v, s),$$

kus z, u, v ja s on sõltumatute muutujate x ja y funktsioonid

$$z = z(x, y), u = u(x, y), v = v(x, y), s = s(x, y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}.$$

Olgu antud funktsioon

$$z = F(x, y, u, v),$$

kus $y = y(x), u = u(x), v = v(x)$, siis z on tegelikult ühe muutuja x funktsioon ja leiame tema tuletise x järgi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = 1.$$

Saame **liitfunktsiooni täistuletise** valemi

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Erijuhul, kui funktsioon $u = f(x, y, z)$ muutub ajas, ehk $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, siis funktsiooni täistuletis avaldub kujul

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Näide 3.23. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 + \sqrt{y}$, $y = \sin x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos x = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

3.8.1. LIITFUNKTSIOONI TÄISDIFERENTSIAAL

Vaatame funktsiooni $z = F(u, v)$, kus $u = \varphi(x, y)$, $v = \omega(x, y)$. Arvutame täisdiferentsiaali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Asendame siia vastavad liitfunktsioonide osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right),$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv, \qquad \boldsymbol{dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv}.$$

Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali avaldis on invariantne ehk ei olene sellest, kas u ja v on sõltumatud muutujad või funktsioonid.

Näide 3.24. Leida liitfunktsiooni täisdiferentsiaal

$$z = u^2v^3, \qquad u = x^2\sin y, \qquad v = x^3e^y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^3, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 3v^2, \quad dz = 2uv^3du + 3u^2v^2dv.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2e^y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x^3e^y.$$

$$du = 2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy, \qquad dv = 3x^2e^y\,dx + x^3e^y\,dy.$$

$$dz = 2uv^3(2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy) + 3u^2v^2(3x^2e^y\,dx + x^3e^y\,dy),$$

$$dz = (4uv^3x\sin y + 9u^2v^2x^2e^y)dx + (2uv^3x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

3.9. ILMUTAMATA FUNKTSIOONI TULETIS

Väljendagu suuruste x ja y vahelist sõltuvust võrrand $F(x, y) = 0$.

Teoreem 3.8.

Kui pidev funktsioon y on antud **ilmutamata kujul** võrrandiga

$$\boldsymbol{F(x, y) = 0}$$

ja $F(x, y), F'_x, F'_y$ on pidevad punktis (x, y) ja $F'_y(x, y) \neq 0$, siis funktsiooni y tuletis vaadeldavas punktis on

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Tõestus.
Anname sõltumatule muutujale x muudu Δx. Siis funktsioon y saab muudu Δy ehk argumendi väärtusele $x + \Delta x$ vastab funktsiooni väärtus $y + \Delta y$. Seetõttu

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Järelikult ka

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

See on kahe muutuja funktsiooni täismuut

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y.$$

Kuna võrrandi vasak pool võrdub nulliga, järelikult on null ka parem pool

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = 0, \qquad |: \Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma_1 + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Avaldame sellest suhte $\Delta y / \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma_2}.$$

Leiame piirväärtuse, kui argument $\Delta x \to 0$. Siis ka $\gamma_1 \to 0, \gamma_2 \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}}.$$

Me ei tea funktsiooni ilmutatud kuju $y = f(x)$, aga oskame leida y tuletist. ∎

Näide 3.25. Leida funktsiooni $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ tuletis.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \qquad y'_x = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Teine võimalus tuletise arvutamiseks on arvestada, et funktsioon y sõltub argumendist x, tuletise leidmiseks kasutame liitfunktsiooni tuletise reeglit.

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

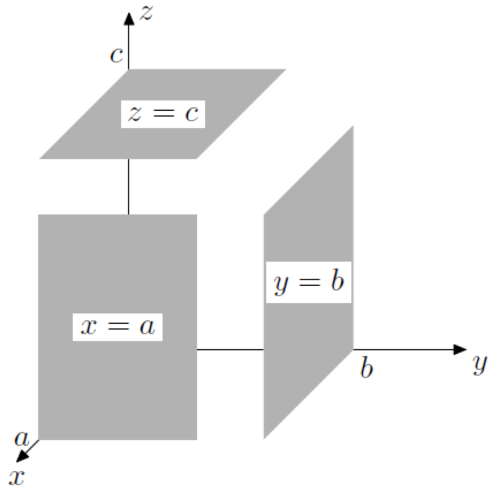
Näide 3.26. Leida funktsiooni $e^y - e^x + xy = 0$ tuletis.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x, \qquad y'_x = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

$$e^y \cdot y' - e^x + y + xy' = 0, \qquad y' \cdot (e^y + x) = e^x - y \ \Rightarrow \ y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

3.10. NIVOOJOONED, NIVOOPINNAD. TULETIS ANTUD SUUNAS

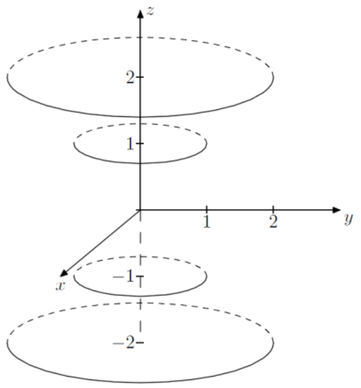
Kahe muutuja funktsiooni graafiku joonestamisel on abiks selle lõiked tasanditega, mis on risti ühega kolmest koordinaatteljest (paralleelne ühega koordinaattasanditest). Koordinaattasandite võrrandid on järgmised.
yz-tasandi võrrand on $x = 0$, xz-tasandi võrrand on $y = 0$, xy-tasandi võrrand $z = 0$.
Tasand $x = a$ on x-teljega risti, yz-tasandiga paralleelne.
Tasand $y = b$ on y-teljega risti, xz-tasandiga paralleelne.
Tasand $z = c$ on z-teljega risti, xy-tasandiga paralleelne.

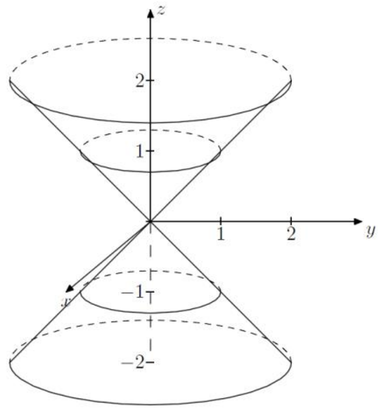


Definitsioon 3.24.
Pinna $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **nivoojoonteks**
(tasandilõigeteks tasanditega $z = C$ erinevate C väärtuste korral) nimetatakse jooni $\boldsymbol{z = f(x, y) = C}$.

Näide 3.26. Joonestada pinna $z^2 = x^2 + y^2$ nivoojooned, mis tekivad pinna lõikamisel tasanditega $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$ ja $z = 2$, $z = -2$

ning lõiget tasandiga $x = 0$.



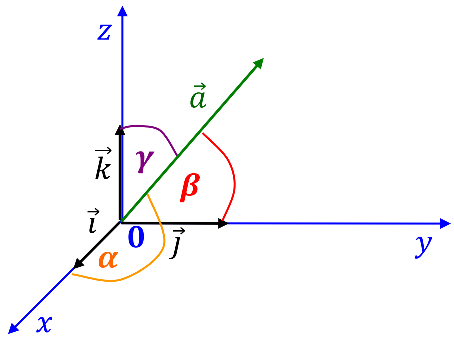


Olgu ruumi mingis piirkonnas D defineeritud funktsioon $u = u(x, y, z)$. Sel juhul öeldakse, et piirkonnas D on antud skalaarne väli. Kui $u = u(x, y, z)$ tähendab näiteks temperatuuri punktis $M(x, y, z)$, siis öeldakse, et on antud temperatuuriväli.
Kui piirkond D on täidetud vedeliku või gaasiga ja $u = u(x, y, z)$ tähendab rõhku punktis $M(x, y, z)$, siis on tegemist rõhuväljaga.
Vaatleme piirkonna D punkte, kus funktsioonil $u = u(x, y, z)$ on konstantne väärtus C: $u = u(x, y, z) = C$.
Need punktid moodustavad mingisuguse pinna. Kui võtame konstandile C teise väärtuse, saame teise pinna. Neid pindu nimetatakse nivoopindadeks.

Definitsioon 3.25.
Vektori **suunakoosinusteks** nimetatakse nende nurkade koosinusi, mis vektor moodustab koordinaattelgede positiivsete suundadega. Tähistame $\boldsymbol{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma}$.

$\vec{i} = (1,0,0)$, $|\vec{i}| = 1$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $|\vec{j}| = 1$, $\vec{k} = (0,0,1)$, $|\vec{k}| = 1$.

Kui leiame skalaarkorrutise vektorist $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ja ühikvektorist $\vec{\imath} = (1,0,0)$, saame



$\vec{a} \cdot \vec{\imath} = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0 = x_1$.

Skalaarkorrutis on avaldatav ka järgmiselt:

$$\vec{a} \cdot \vec{\imath} = |\vec{a}||\vec{\imath}| \cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}.$$

Analoogiliselt saame leida suunakoosinused

$$\boldsymbol{\cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.}$$

Tõstame kõik suunakoosinused ruutu ja liidame kokku

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z_1^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{|\vec{a}|^2}.$$

Et

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

siis

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Olgu vektor $\vec{e}$ vektoriga $\vec{a}$ kollineaarne ühikvektor, siis $|\vec{e}| = 1$.

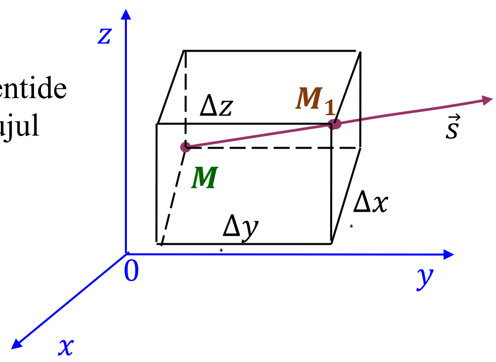
$$\vec{e} = \left(\frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.$$

TULETIS ANTUD SUUNAS

Vaatleme piirkonnas D funktsiooni $u = u(x, y, z)$ ja punkti $M(x, y, z)$. Rakendame punktis M vektori $\vec{s}$, mille suunakoosinused on $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Võtame vektoril $\vec{s}$ punkti $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, mille kaugus vektori alguspunktist on Δs. Seega



$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, $\overrightarrow{MM_1} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Eeldame, et funktsioon u ja tema osatuletised kõikide argumentide järgi on piirkonnas D pidevad. Funktsiooni täismuut esitub kujul

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

kus $\varepsilon_1, \varepsilon_{2,}\varepsilon_1 \to 0$, kui $\Delta s \to 0$.

Jagame võrduse kõik liikmed suurusega Δs

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Järelikult

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.$$

Definitsioon 3.26.

Funktsiooni $\boldsymbol{u = u(x,y,z)}$ **tuletiseks punktis** $\boldsymbol{(x,y,z)}$ **vektori** $\vec{\boldsymbol{s}}$ **suunas** nimetatakse suhte $\Delta u/\Delta s$ piirväärtust, kui $\Delta s \to 0$ ja tähistatakse $\partial u/\partial s$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Leiame piirväärtuse

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.}$$

Teades osatuletisi, on lihtne leida tuletist suunas $\vec{\boldsymbol{s}}$.

Näide 3.27. Leida funktsiooni u tuletis suunas s, kui on teada suunavektori nurgad koordinaattelgedega

$$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Kuna koosinused antud nurkadest on

$$\cos 0 = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

siis funktsiooni u tuletis suunas s avaldub

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Näide 3.28. Olgu antud funktsioon $u = x^2 + y^2 + z^2$. Leida tuletis $\partial u/\partial s$ punktis $M(1,1,1)$ vektori $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ suunas.

Vektor $\vec{s} = (2;1;3)$. Leiame suunakoosinused, siis osatuletised ja asendame valemisse.

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^3} = \sqrt{14},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

3.11. GRADIENT

Vaatleme funktsiooni $u = u(x, y, z)$ määramispiirkonna D igas punktis vektorit, mille projektsioonideks koordinaattelgedel on selle funktsiooni osatuletiste $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z$ väärtused selles punktis.

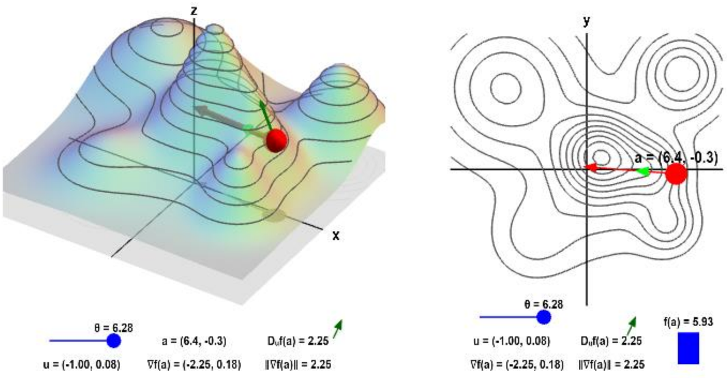
Definitsioon 3.27.

Gradiendiks nimetatakse vektorit

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Gradienti tähistatakse ka $\nabla f(x,y)$. Ütleme, et piirkonnas D on määratud gradiendi vektorväli.

Omadused.
1. Gradient on igas punktis risti pinna nivoojoontega.
2. Gradient on vektor, mis näitab pinna kiireima tõusu suunda, gradiendi vastandvektor näitab kiireima languse suunda.
3. Gradiendiks oleva vektori pikkus näitab suurimat tõusu.



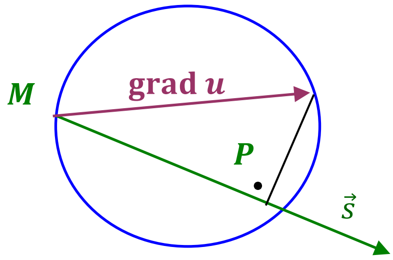
Allikas: http://mathinsight.org/applet/gradient_directional_derivative_mountain

Teoreem 3.9.
Kui on antud skalaarne väli $u = u(x, y, z)$ ja selle skalaarse välja gradientväli

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

siis tuletis $\boldsymbol{\partial u/\partial s}$ vektori $\vec{s}$ suunas võrdub vektori grad u projektsiooniga vektoril $\vec{s}$.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{s_0} \cdot \textbf{grad } u, \qquad pr_{\vec{s}}\, \textbf{grad } u = \frac{\partial u}{\partial s}.$$



Piltlikult saame esitada nii: vaatame sfääri, millele grad u on diameetriks.
Rakendame vektori $\vec{s}$ punktis M

$$MP = |\text{grad } u| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad MP = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Omadused.
Tuletis antud punktis vektori $\vec{s}$ suunas on maksimaalne siis, kui vektor $\vec{s}$ on gradiendisuunaline, tuletise maksimaalne väärtus on $|\text{grad } u|$.
Tuletis nivoopinna puutuja sihilise vektori suunas võrdub nulliga.

3.12. KÕRGEMAT JÄRKU TÄISDIFERENTSIAAL

Olgu meil funktsioon $z = f(x,y)$. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali nimetatakse ka esimeseks täisdiferentsiaaliks. Olgu funktsioonid f_x', f_y' diferentseeruvad punktis $M(x,y)$. Järelikult f_{xy}'', f_{yx}'' on pidevad ja $f_{xy}'' = f_{yx}''$. Esimest järku täisdiferentsiaalil on kuju

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$

kus dx ja dy vaatame kui konstantseid kordajaid. Suurus dz on kahe muutuja funktsioon. Leiame tema täisdiferentsiaali

$$d(dz) = d\left(f_x'dx + f_y'dy\right) = \left(f_x'dx + f_y'dy\right)_x' dx + \left(f_x'dx + f_y'dy\right)_y' dy =$$

$$= \left(f_{xx}''dx + f_{yx}''dy\right)dx + \left(f_{xy}''dx + f_{yy}''dy\right)dy = f_{xx}''dx^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{yy}''dy^2.$$

Saime valemi **teist järku täisdiferentsiaali** jaoks

$$\boldsymbol{d(dz) = f_{xx}''dx^2 + 2f_{xy}''dxdy + f_{yy}''dy^2}.$$

Kolmandat järku täisdiferentsiaali valem

$$\boldsymbol{d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3}.$$

3.13. TAYLORI VALEM MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE JAOKS

Taylori valem ühe muutuja funktsiooni jaoks on kujul

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Olgu antud funktsioon

$$z = f(x,y),$$

mis on määratud mingis piirkonnas S. Eeldame, et punkti $M_0(a,b)$ ümbruses on funktsioonil z pidevad osatuletised kuni järguni $n+1$. Toome sisse abifunktsiooni

$$\varphi(t) = f(x,y),$$

kus

$$x = a + t\Delta x,\ \ y = b + t\Delta y,\ \ 0 \le t \le 1.$$

Kui

$$t = 0, M_0(a,b).$$

Kui $t = 1$, siis saame punkti $M(a+\Delta x, b+\Delta y)$. Asendame ühe muutuja Taylori valemisse funktsiooni $\varphi(t)$ jaoks $a = 0$ korral:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + R_n. \qquad (3.25)$$

Leiame tuletised

$$\varphi(t) = f(x,y) = f(a + t\Delta x, b + t\Delta y),$$

$$\varphi'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = df(x,y),$$

$$\varphi''(t) = \left(f'_x x'_t + f'_y y'_t\right)'_x x'_t + \left(f'_x x'_t + f'_y y'_t\right)'_y y'_t =$$

$$= f''_{xx}(\Delta x)^2 + f''_{xy}\Delta x \Delta y + f''_{yx}\Delta y \Delta x + f''_{yy}(\Delta y)^2 =$$

$$= f''_{xx}(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}\Delta x \Delta y + f''_{yy}(\Delta y)^2 = d^2 f(x,y).$$

Analoogiliselt

$$\varphi'''(t) = d^3 f(x,y) \ldots \quad \varphi^{(n)}(t) = d^n f(x,y),$$

$$\varphi(0) = f(a,b), \quad \varphi'(0) = df(a,b),$$

$$\varphi''(0) = d^2 f(a,b), \ldots, \varphi^{(n)}(0) = d^n f(a,b).$$

Asendame võrrandisse (3.25) $t = 1$ korral

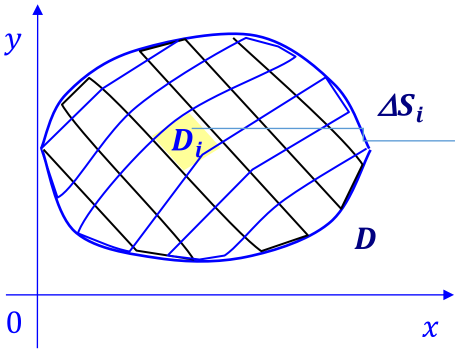
$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{df(a,b)}{1!} + \frac{d^2 f(a,b)}{2!} + \ldots + \frac{d^{(n)} f(a,b)}{n!} + R_n.$$

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)\Delta x + f'_y(a,b)\Delta y + \frac{1}{2} f''_{xx}(a,b)(\Delta x)^2 + f''_{xy}(a,b)\Delta x \Delta y$$
$$+ \frac{1}{2} f''_{yy}(a,b)(\Delta y)^2 + \ldots$$

IV PTK. KORDSED INTEGRAALID

4.1. KAHEKORDNE INTEGRAAL

Olgu funktsioon $f(x,y)$ määratud kinnises tõkestatud piirkonnas D. Olgu piirkond D jaotatud n osapiirkonnaks D_i pindaladega ΔS_i ning olgu igas osapiirkonnas D_i valitud punkt (x_i, y_i). Moodustame summa



$$\boldsymbol{I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.}$$

Definitsioon 4.1.
Summat $\boldsymbol{I_n}$ nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ integraalsummaks piirkonnas D.

Kui piirkonna igas punktis $f(x,y) \geq 0$, siis integraalsumma kujutab selliste kõversilindrite ruumalade summat, mille põhjapindala on ΔS_i ja kõrgus on funktsiooni väärtus punktis (x_i, y_i) ehk $f(x_i, y_i)$. Osapiirkondadeks jaotamine toimub suvalisel viisil, see tähendab, et igal osapiirkonnal on oma diameeter. Osapiirkonna diameeter on selle piirkonna suurim punktidevaheline kaugus. Tähistame suurima osapiirkondade diameetri tähega

$$\lambda = \max(d_i).$$

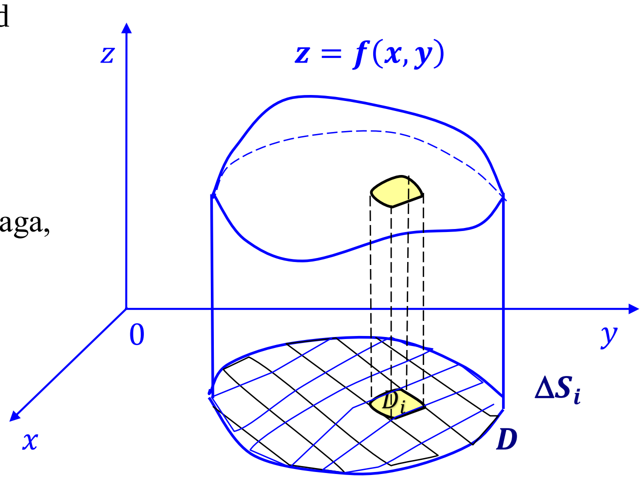
Definitsioon 4.2.

Funktsiooni $f(x,y)$ **kahekordseks integraaliks** üle piirkonna D nimetatakse tema integraalsumma piirväärtust, kui suurim osapiirkondade diameeter $\lambda \to 0$, kui see piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu piirkonna D osadeks jaotamise viisist ega punktide (x_i, y_i) valikust

$$\iint_D f(x,y)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus, siis funktsiooni nimetatakse **integreeruvaks** piirkonnas D. Kui funktsioon $f(x,y)$ on pidev kinnises piirkonnas, siis piirväärtus eksisteerib. Piirkonda D nimetatakse integreeruvuspiirkonnaks.

Kõversilinder on ruumiline kujund, mis alt on piiratud piirkonnaga D, ülalt pinnaga $z = f(x,y)$ ja külgedelt püstsilindrilise pinnaga.



Kahekordse integraali geomeetriline tõlgendus.
Kahekordne integraal funktsioonist $f(x,y) \geq 0$ üle piirkonna D on võrdne kõverjoonelise silindri ruumalaga, kui silinder on pealt piiratud pinnaga $z = f(x,y)$ ja alt pinnaga D

$$V = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$

Integreerimispiirkonna *D* pindala avaldub valemiga

$$S = \iint_D dxdy.$$

4.2. KAHEKORDSE INTEGRAALI OMADUSED JA ARVUTAMINE

Kahekordse integraali omadused on analoogilised määratud integraali omadustega.

1. Kui funktsioonid $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ on integreeruvad piirkonnas D, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe.

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]dS = \iint_D f(x, y)\, dS \pm \iint_D g(x, y)\, dS.$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt kirjutame

$$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]dS = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, y_i) \pm g(x_i, y_i)]\Delta S_i =$$

Kõigepealt kasutame summa omadust, mille põhjal moodustame summad mõlemast liikmest ja hiljem piirväärtuse omaduse põhjal kirjutame piirväärtuse summast piirväärtuste summana lahti.

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i)\Delta S_i\right] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i, y_i)\Delta S_i =$$

Selle tulemusena saime kahekordse integraali definitsiooni põhjal kahe integraali summa (vahe)

$$= \iint_D f(x, y)\, dS \pm \iint_D g(x, y)\, dS.$$

▪

2. Konstantse **kordaja võib tuua integraali märgi ette**

$$\iint_D c \cdot f(x, y)\, dS = c \iint_D f(x, y)\, dS.$$

Tõestus on sarnane eelmisega.

3. **Aditiivsus**. Integreerimispiirkonda D võib jaotada osadeks D_1 ja D_2, millel pole ühiseid sisepunkte: $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint_D f(x, y)\, dS = \iint_{D_1} f(x, y)\, dS + \iint_{D_2} f(x, y)\, dS.$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt ei tohi piirväärtus sõltuda osapiirkondadeks jaotamise viisist, seega võime valida üheks jaotuseks piirkondade D_1 ja D_2 ühise rajajoone. Jaotades piirkonda D edasi suvalisel viisil, tekivad piirkondade D_1 ja D_2 suvalised jaotused osapiirkondadeks. Jaotame integraalsumma kaheks liidetavaks. Esimesse liidetavasse võtame need korrutised, mis sisaldavad piirkonna D_1 osapiirkondi, ja teise liidetavasse need korrutised, mis sisaldavad piirkonna D_2 osapiirkondi, tähistame need vastavalt

$$\sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i\,, \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Kui λ on piirkonna D kõigi osapiirkondade suurim diameeter, siis sellest, et $\lambda \to 0$ järeldub, et ka piirkondade D_1 ja D_2 osapiirkondade suurimad diameetrid lähenevad nullile. Järelikult kui võtame võrduse

$$\sum_{D} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

mõlemalt poolt piirväärtuse suurima diameetri lähenemisel nullile, saame omaduse väite

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{D} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i + \lim_{\lambda \to 0} \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

$$\iint_D f(x,y)\, dS = \iint_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint_{D_2} f(x,y)\, dS.$$

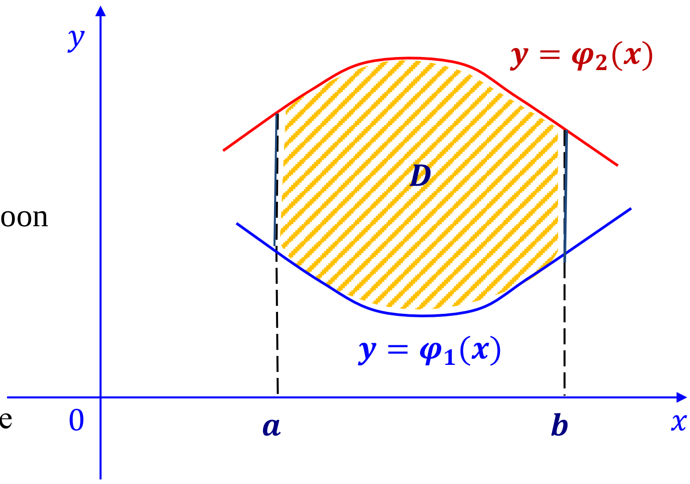
4. **Monotoonsus.** Kui funktsioonid $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ on integreeruvad piirkonnas D, ja kehtib $f(x,y) \le g(x,y)$ iga $(x,y) \in D$ korral, siis

$$\iint_D f(x,y)\, dS \le \iint_D g(x,y)\, dS.$$

Kahekordse integraali **arvutamine** lihtsamatel juhtudel taandub kahe määratud integraali arvutamisele.
Kui integreerimispiirkond on antud võrratustega

$$\boldsymbol{D = \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}},$$

siis



$$\iint_D \boldsymbol{f(x,y)\, dxdy} = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \boldsymbol{f(x,y)\, dy} \right] \boldsymbol{dx}.$$

Kõigepealt leitakse sisemise integraali algfunktsioon

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy,$$

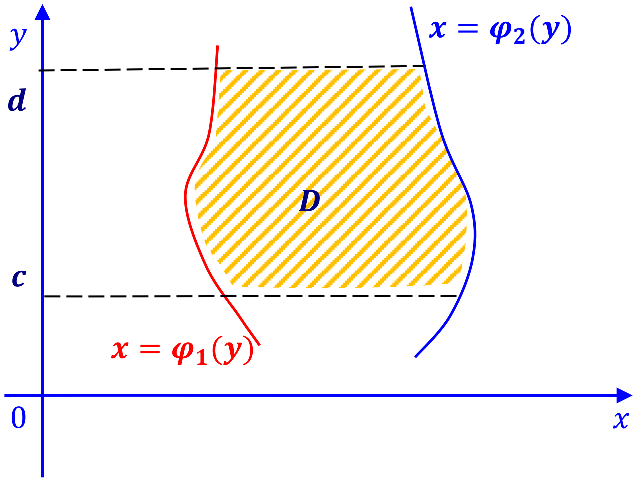
kus integreerimisel argumendi y järgi käsitletakse argumenti x konstandina.

Edasi leitakse saadud algfunktsioonist integraal argumendi x järgi

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b F(x)dx.$$

Kui $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{c} \le \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{d},\ \boldsymbol{\varphi_1(y)} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{\varphi_2(y)}\}$, siis

$$\boldsymbol{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.}$$



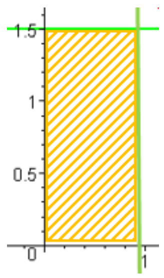
Kui integreerimispiirkond D on keerulisema kujuga, kui ülaltoodud lihtsamatel juhtudel, siis jagatakse piirkond lihtsamateks osadeks

$$D = \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Integraal on sel juhul summa integraalidest üle osapiirkondade

$$\boldsymbol{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,dxdy.}$$

Näide 4.1. Arvutada



$$\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy,$$

kus D on piiratud sirgetega $x = 0, x = 1, y = 0, y = 3/2$.

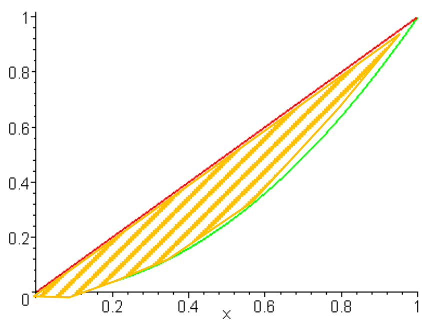
$$\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{\frac{3}{2}} (4 - x^2 - y^2)\,dy\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}\right] dx = \int\limits_0^1 \left[\left(4 \cdot \frac{3}{2} - x^2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3\right)\right] dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\left(6 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}\right)\right] dx =$$

$$= \left(\frac{39}{8}x - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{35}{8}.$$

Näide 4.2. Leida xy-tasandil asetseva kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega $y = x$ ja $y = x^2$.



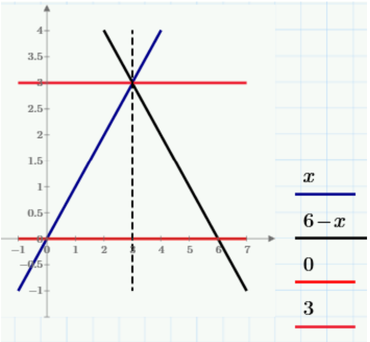
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{x} dy\right] dx = \int\limits_0^1 \left[y|_{x^2}^{x}\right] dx = \int\limits_0^1 [x - x^2]\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Näide 4.3. Vahetada integreerimisjärjekord integraalis

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x, y)\, dx.$$

Integreerimispiirkond on määratud järgmiselt: $D = \{(x, y): 0 \le y \le 3, y \le x \le 6 - y\}$. Kanname joonisele vastavad sirged. Integreerimisjärjekorra muutmiseks on vaja esitada argument x piirkonnas $[a, b]$ ja argument y funktsioonina argumendist x. Jooniselt näeme, et argument x muutub lõigus $[0, 6]$ aga argumendi y jaoks saame $0 \le y \le \varphi(x)$, kusjuures



$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 3 \\ 6 - x, & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

Seega peame integreerimispiirkonna jagama kaheks osaks sirgega $x = 3$

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x, y)\, dx = \int_0^3 dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y)\, dy.$$

4.3. MUUTUJA VAHETUS KAHEKORDSES INTEGRAALIS

Kui funktsioonid $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$ koos oma esimest järku osatuletistega on mingis uv-tasandi lõplikus kinnises piirkonnas D' pidevad ja määravad üksühese vastavuse piirkonna D' ja xy-tasandi piirkonna D punktide vahel ning kui jakobiaan

$$\boldsymbol{J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0}, \text{kui } \boldsymbol{(u, v) \in D'}.$$

Siis muutuja vahetuse valem on

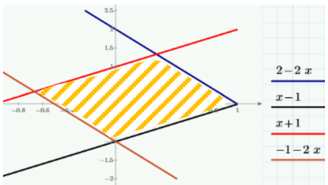
$$\boldsymbol{\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u, v), y(u, v)\big) |J(u, v)|\, dudv}.$$

$$|J(u, v)| \cdot |J(x, y)| = 1, \qquad |J(u, v)| = \frac{1}{|J(x, y)|}.$$

Näide 4.4. Leida kahekordne integraal funktsioonist

$f(x, y) = (2x + y - 2)^2$,

kui integreerimispiirkond on antud valemiga



$$D = \{(x, y): -1 \le x - y \le 1, -1 \le 2x + y \le 2\}.$$

Arvutuste lihtsustamiseks teeme järgmise muutuja vahetuse

$$u = x - y, v = 2x + y, \quad (u, v) \in D'.$$

Integreerimispiirkond D' on ristkülik

$$D' = \{(u, v): -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 2\}.$$

Jakobiaan on kujul

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Järelikult

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)} = \frac{1}{3}.$$

Integreeritav funktsioon uutes muutujates on

$$(2x + y - 2)^2 = (v - 2)^2.$$

Oleme saanud kahekordse integraali

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{2}(v-2)^2\frac{1}{3}dvdu = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{(v-2)^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}du = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}9\,du = 6.$$

4.4. KAHEKORDNE INTEGRAAL POLAARKOORDINAATIDES

Polaarkoordinaatide kasutamine on õigustatud siis, kui integreerimispiirkonnaks on ring või selle osa, samuti on teatud joonte esitus polaarkoordinaatides lihtsam kui ristkoordinaatides. Üleminekul polaarkoordinaatidele kasutame seoseid

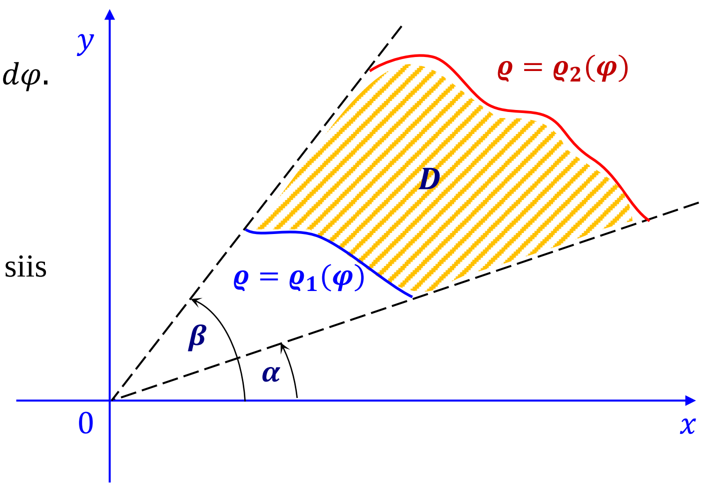
$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, \\ y = \varrho\sin\varphi, \end{cases}$$

kus ϱ on polaarraadius ja φ polaarnurk.
Muutuja vahetusele vastav jakobiaan on kujul

$$|J(\varrho, \varphi)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varrho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varrho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$

$$|J(\varrho, \varphi)| = \varrho.$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Delta f(\varrho\,cos\,\varphi, \varrho\,sin\,\varphi)\varrho\,d\varrho d\varphi.$$

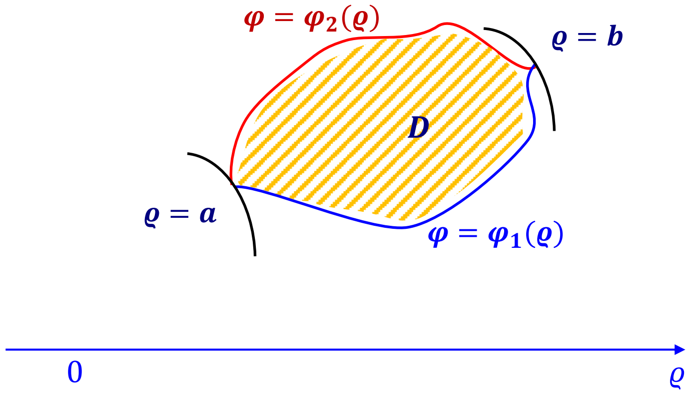


Kui piirkond Δ on antud võrratustega

$\Delta = \{(\varphi, \varrho): \alpha \le \varphi \le \beta;\ \varrho_1(\varphi) \le \varrho \le \varrho_2(\varphi)\}$, siis

$$\iint\limits_{\Delta} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varrho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\int\limits_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varrho\right] d\varphi.$$

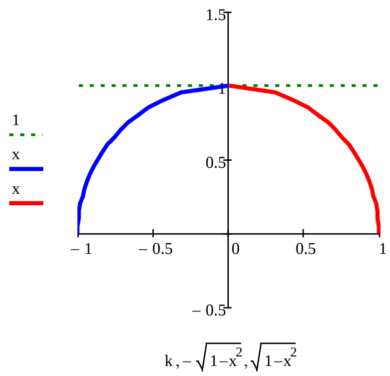
Kui piirkond Δ on antud võrratustega $\Delta = \{(\varphi, \varrho) \colon a \le \varrho \le b;\ \varphi_1(\varrho) \le \varphi \le \varphi_2(\varrho)\}$, siis



$$\iint\limits_{\Delta} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varrho d\varphi = \int\limits_{a}^{b}\left[\int\limits_{\varphi_1(\varrho)}^{\varphi_2(\varrho)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varphi\right] d\varrho.$$

Näide 4.5. Arvutada kahekordne integraal

$$\iint\limits_{D} \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$



üleminekuga polaarkoordinaatidele, kui integreerimispiirkond D on antud võrratustega

$$D = \left\{(x, y) \colon 0 \le y \le 1;\ -\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}\right\}.$$

Integreerimispiirkonnaks on pool ringi. Polaarkoordinaatides

$$x = \varrho\cos\varphi,$$

$$y = \varrho\sin\varphi$$

ja

$$x^2 + y^2 = \varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi = \varrho^2.$$

Ueks integreerimispiirkonnaks on $\Delta = \{(\varphi, \varrho) \colon 0 \le \varrho \le 1;\ 0 \le \varphi \le \pi\}$.

$$\iint\limits_{D} \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi}\left[\int\limits_0^1 \sqrt[3]{\varrho^2}\, \varrho\, d\varrho\right] d\varphi = \int\limits_0^{\pi}\left[\int\limits_0^1 \varrho^{\frac{5}{3}}\, d\varrho\right] d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi}\left[\frac{\varrho^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}\right]_0^1 d\varphi = \int\limits_0^{\pi}\frac{3}{8}\, d\varphi = \frac{3}{8}\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

Näide 4.6. Arvutada kahekordne integraal

$$\iint_D (x^2 + 2xy\,)dy\,dx$$

üleminekuga polaarkoordinaatidele, kui integreerimispiirkond D on antud võrratustega

$$D = \left\{(x, y)\colon 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Integreerimispiirkonnaks on veerand ringi. Polaarkoordinaatides

$$x^2 + 2xy = \varrho^2\cos^2\varphi + 2\varrho^2\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Uueks integreerimispiirkonnaks on

$$\Delta = \{(\varphi, \varrho)\colon 0 \le \varrho \le 1;\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}.$$

Polaarkoordinaatides saame integraali arvutada järgmiselt

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^2 + 2xy\,)dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varrho^2\cos^2\varphi + 2\varrho^2\sin\varphi\,\cos\varphi)\,\varrho\,d\varphi\right] d\varrho =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\,\cos\varphi)\,d\varphi\right] d\varrho = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varrho^3\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \sin 2\varphi\right) d\varphi\right] d\varrho =$$

$$= \int_0^1 \varrho^3\left(\frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varrho = \frac{1}{2}\int_0^1 \varrho^3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varrho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \varrho^3\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) d\varrho = \frac{\varrho^4}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi + 2}{16}.$$

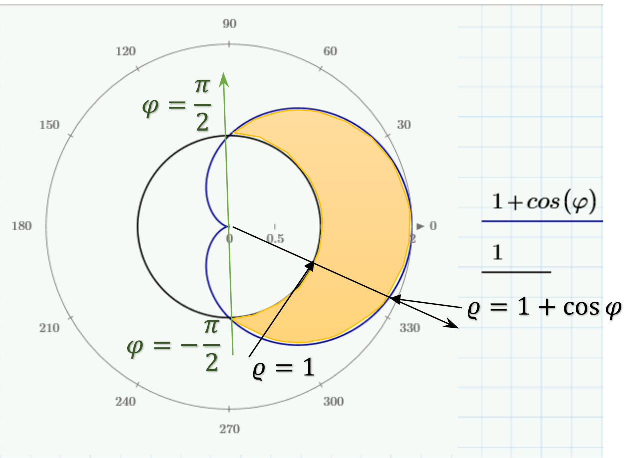
Vaatame nüüd polaarkoordinaatidele üleminekut natuke keerukama integreerimispiirkonna jaoks. Kui integreerimispiirkond asub väljaspool ringi raadiusega

$$\varrho = 1$$

ja seespool kardioidi

$$\varrho = 1 + \cos\varphi$$

(joonis), siis integreerimispiirkonna sisemine polaarraadius on ringjoon raadiusega 1. Välimine raadius on aga antud seosega $1 + \cos\varphi$, kokkuvõttes raadius muutub piirkonnas



$$1 \le \varrho \le 1 + \cos\varphi.$$

Polaarnurga jaoks vaatame piirkonna alumist punkti, kus nurk on võrdne $-\pi/2$ ja ülemist punkti, kus nurk on võrdne $\pi/2$. Seega muutub polaarnurk piirkonnas

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi/2.$$

Integreerimisrajad kahekordses integraalis on

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{1}^{1+\cos\varphi} f(\varrho,\varphi)\varrho\, d\varrho.$$

Kui funktsioon $f(\varrho,\varphi) = 1$, siis kahekordne integraal annab integreerimispiirkonna pindala.

4.5. KAHEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSED

Tasandilise kujundi mass.
Olgu aine mass Δm piirkonna D osapiirkonnas ΔS. See tähendab, et piirkond D on kaetud mingi ainega nii, et piirkonna iga osapiirkonna pindala ΔS jaoks tuleb teatud hulk Δm seda ainet. Suhet $\Delta m/\Delta S$ nimetatakse aine keskmiseks pindtiheduseks (mass pindalaühiku kohta). Osapiirkonna suuruse vähendamisel punktiks piirväärtuse kaudu, saame defineerida aine pindtiheduse.
Aine pindtihedus punktis $P(x,y)$ on piirväärtus keskmisest pindtihedusest

$$\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \varrho(x,y).$$

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\varrho(x,y)$, kus $(x,y) \in D$. **Tasandilise kujundi *D* mass** avaldub siis kahekordse integraalina üle piirkonna D:

$$\boldsymbol{m_D = \iint_D \varrho(x,y)\, dxdy}.$$

Näide 4.7. Määrata ümmarguse plaadi mass, kui plaadi raadius on 4 ja aine pindtihedus plaadi igas punktis on võrdne selle punkti kaugusega plaadi keskpunktist.

Pindtihedus kauguse kaudu ja integreerimispiirkond avalduvad järgmiselt

$$\varrho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, D = \{(x,y): x^2+y^2 \le 4^2\}.$$

Kuna tegemist on ringjoonega, siis läheme üle polaarkoordinaatidele. Polaarraadiust tähistame tähega r, et pindtihedusega mitte segi ajada. Integreerimispiirkond polaarkoordinaatides

$$D = \{(r,\varphi): 0 \le r \le 4, 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

pindtihedus avaldub polaarkoordinaatides järgmiselt

$$\varrho(x,y) = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r, \qquad J(r,\varphi) = r.$$

Seega plaadi mass on

$$m = \iint_D \varrho(x,y)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\, drd\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^4 = \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\,|_0^{2\pi} = \frac{128}{3}\pi.$$

Tasandilise kujundi inertsimoment. Masspunkti M inertsimoment punkti 0 suhtes $I_0 = mr^2$, kus m on mass ja r punktide 0 ja M vaheline kaugus.

Inertsimoment koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes homogeense piirkonna jaoks, kus pindtihedus on kõikjal 1, avaldub järgmiste valemitega:

$$I_x = \iint_D y^2\, dxdy\,; \qquad I_y = \iint_D x^2\, dxdy\,;$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Mittehomogeense materjali korral tuleb korrutada vastav avaldis pindtihedusega

$$I_x = \iint_D \varrho(x,y)y^2\, dxdy\,; \qquad I_y = \iint_D \varrho(x,y)x^2\, dxdy,$$

$$I_0 = \iint_D \varrho(x,y)(x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Näide 4.8. Arvutada joontega $y^2 = 1 - x, x = 0, y = 0$ piiratud tasandilise kujundi inertsimoment y telje suhtes, kui pindtihedus igas punktis võrdub selle punkti ordinaadiga y.

$$I_y = \iint_D yx^2\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{24}.$$

Tasandilise kujundi massikese. Kui tasandilise kujundi D pindtihedus on $\varrho(x,y)$, siis tasandilise kujundi massikeskme (x_c, y_c) koordinaadid saab arvutada valemitest

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D x\, \varrho(x,y)\, dxdy \\ y_c = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D y\, \varrho(x,y)\, dxdy \end{cases}$$

Avaldisi

$$M_y = \iint_D x\, \varrho(x,y)\, dxdy, \qquad M_x = \iint_D y\, \varrho(x,y)\, dxdy$$

nimetatakse tasandilise kujundi **staatilisteks momentideks** vastavalt y ja x telje suhtes.

4.6. KOLMEKORDNE INTEGRAAL

Olgu ruumis antud mingi piirkond V, mis on piiratud kinnise pinnaga S. Oletame, et selles piirkonnas V ja pinnal S on defineeritud mingi pidev funktsioon $f(x,y,z)$. Olgu piirkond V jaotatud n osapiirkonnaks V_i ruumaladega ΔV_i. Valime igas osapiirkonnas mingi punkti P_i ja tähistame $f(P_i)$ funktsiooni f väärtust selles punktis. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta V_i.$$

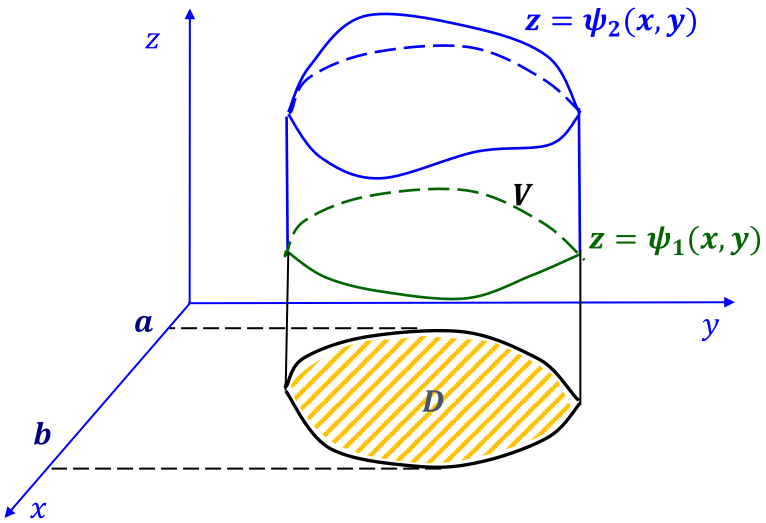
Suurendame osapiirkondade arvu nii, et nende suurim läbimõõt läheneks nullile. Tähistame suurima osapiirkondade läbimõõdu

$$\lambda = \max(d_i).$$

Definitsioon 4.3.

Piirväärtust, mis ei sõltu piirkonna V jaotusviisist ja punktide P_i valikust, nimetatakse **kolmekordseks integraaliks**

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(P)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i.$$



Kui integreerimispiirkond V on alt piiratud pinnaga

$$z = \psi_1(x,y)$$

ja ülalt pinnaga

$$z = \psi_2(x,y),$$

kusjuures nendel pindadel on z-teljega paralleelsete sirgetega ainult üks ühine punkt, ja kui piirkonna V projektsioon xy-tasandil rahuldab kahekordse integraali integreerimispiirkonna kõiki tingimusi, kusjuures

$$a \le x \le b, \qquad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$$

siis on kolmekordne integraal avaldatav kujul

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx.$$

Kolmekordse integraali arvutamiseks vaadeldakse algul muutujaid x ja y konstantidena ja avaldatakse määratud integraal integreerimismuutuja z järgi, siis arvutatakse kahekordne integraal.

$$\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x,y); \qquad \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\,dy\right] dx.$$

Kui kahekordse integraali korral on võimalik kasutada kahte erinevat integreerimisjärjekorda, siis kolmekordse integraali korral on erinevaid integreerimisjärjekordi 6.

Näide 4.9. Arvutada järgmine kolmekordne integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\sqrt{x}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz\right] dy\right] dx.$$

Arvutamist alustame kõige sisemisest integraalist, saadud tulemuse viime keskmise integraali alla ja lõpuks keskmise integraali väärtuse integreerime esimese integraali sees argumendi x järgi.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz = y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} = y(1-\sin x).$$

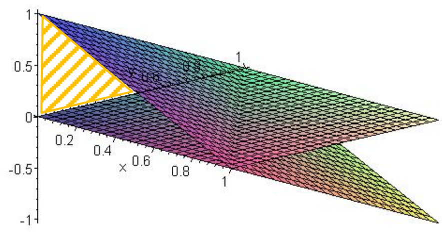
$$\int_0^{\sqrt{x}} y\cdot(1-\sin x)\,dy = (1-\sin x)\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy = (1-\sin x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}(1-\sin x).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}(1-\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx}_{\text{ositi}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{2} - (-x\cos x + \sin x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right).$$

Näide 4.10. Leida integraal

$$\iiint_V \frac{3x}{1-x-y}dx\,dy\,dz,$$



kui piirkond V on piiratud pindadega

$$x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1; \quad x, y, z \geq 0.$$

Leiame vajalikud rajad antud pindade võrranditest.

$$z = 0, \qquad z = 1$$

$$\int_0^{1-x-y} \frac{3x}{1-x-y}dz = \frac{3x}{1-x-y}\cdot z\Big|_0^{1-x-y} = 3x,$$

$$\int_0^{1-x} 3x\, dy = 3xy\Big|_0^{1-x} = 3x(1-x) = 3(x-x^2), \quad \int_0^1 3(x-x^2)\ dx = \left(\frac{3x^2}{2} - x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Kolmekordse integraali omadused on analoogilised kahekordse integraali omadustega.

1. Kui funktsioonid $f(x,y,z)$ ja $g(x,y,z)$ on integreeruvad piirkonnas V, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe.

$$\iiint_V [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]dV = \iiint_V f(x,y,z)\, dV \pm \iiint_V g(x,y,z)\, dV.$$

2. **Konstantse kordaja** võib tuua integraali märgi ette

$$\iiint_V c \cdot f(x,y)\, dV = c \iiint_V f(x,y)\ dV.$$

3. **Integreerimispiirkonda** V võib **jaotada osadeks** V_1 ja V_2, millel pole ühiseid sisepunkte: $V = V_1 \cup V_2$

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dV = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\, dV.$$

4.7. MUUTUJATE VAHETUS KOLMEKORDSES INTEGRAALIS

Vaatame teisendust

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \ , \qquad (u,v,w) \in V', \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

mis teisendab uvw-ruumis asetseva kinnise piirkonna V' xyz-ruumis asetsevaks piirkonnaks V. Kui teisendus on üksühene ja kui funktsioonidel x, y ja z on olemas esimest järku osatuletised piirkonnas V' ning kui teisenduse jakobiaan

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0, \text{kui } (u,v,w) \in V'.$$

Siis **muutujate vahetuse valem** on kujul

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|\, du\, dv\, dw.$$

Kuna jakobiaani ja pöördteisenduse jakobiaani korrutis on 1, saame leida teisenduse jakobiaani pöördteisenduse jakobiaani kaudu

$$J(x,y,z) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix} = \frac{1}{J(u,v,w)},$$

$$|J(u,v,w)| = \frac{1}{|J(x,y,z)|}.$$

Tüüpilised asendused praktikas on üleminek silinderkoordinaatidele, elliptilistele silinderkoordinaatidele, sfäärkoordinaatidele, ellipsoidkoordinaatidele ja üldistele ellipsoid-koordinaatidele. Tutvume neist kahe tähtsamaga.

Näide 4.11. Leida ellipsoidi ruumala.

Ellipsoidi valem on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ruumala arvutamiseks teeme järgmise muutujate vahetuse

$$x = au, \qquad u = \frac{x}{a}, \qquad u \in [-1,1],$$

$$y = bv, \qquad v = \frac{y}{b}, \quad v \in [-1,1],$$

$$z = cw, \qquad w = \frac{z}{c}, \quad w \in [-1,1].$$

Muutujate vahetuse jakobiaan on

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Ellipsoidi võrrand uutes muutujates on

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

ja ruumala arvutamise valem

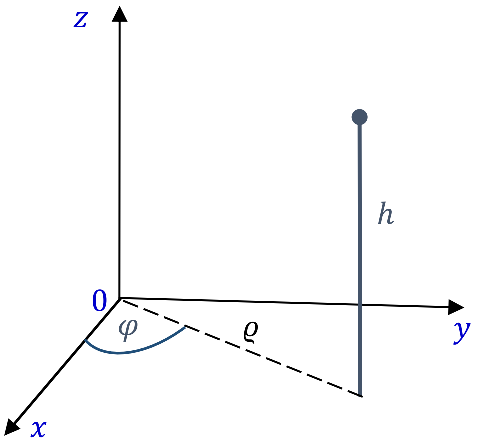
$$\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv \int_{-1}^{1} abc\, dw = \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} abc(w)_{-1}^{1} dv = \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} 2abc dv =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2abc(v)|_{-1}^{1} du = 8abc.$$

SILINDRILISED KOORDINAADID

Silindrilistele koordinaatidele üleminek on põhjendatud, kui integreerimispiirkonnaks on silinder või silindri osa. Lisaks polaarkoordinaatidele on antud kõrgus h. Tegemist on muutuja vahetusega kujul

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

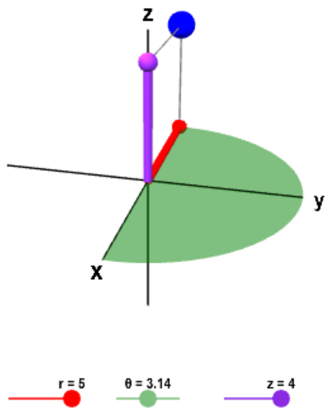


Teisenduse jakobiaan on

$$J(\varrho,\varphi,h) = \begin{vmatrix} x'_\varrho & x'_\varphi & x'_h \\ y'_\varrho & y'_\varphi & y'_h \\ z'_\varrho & z'_\varphi & z'_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho.$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Delta f(\varrho\cos\varphi\,,\varrho\sin\varphi\,,h)\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dh.$$

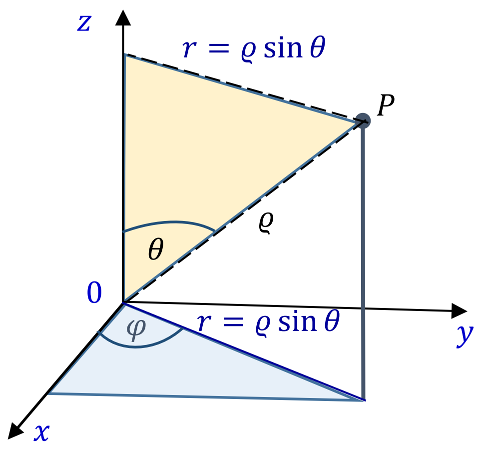


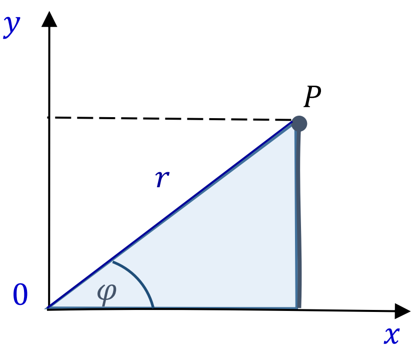
Allikas: http://mathinsight.org/applet/cylindrical_coordinates

SFÄÄRILISED KOORDINAADID

Sfäärilisi koordinaate kasutatakse, kui integreerimispiirkond on sfäär või selle osa. Lisaks võtame uue nurga z-telje suhtes, mille tähistame kreeka tähega θ. Muutuja vahetus on järgmisel kujul

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$





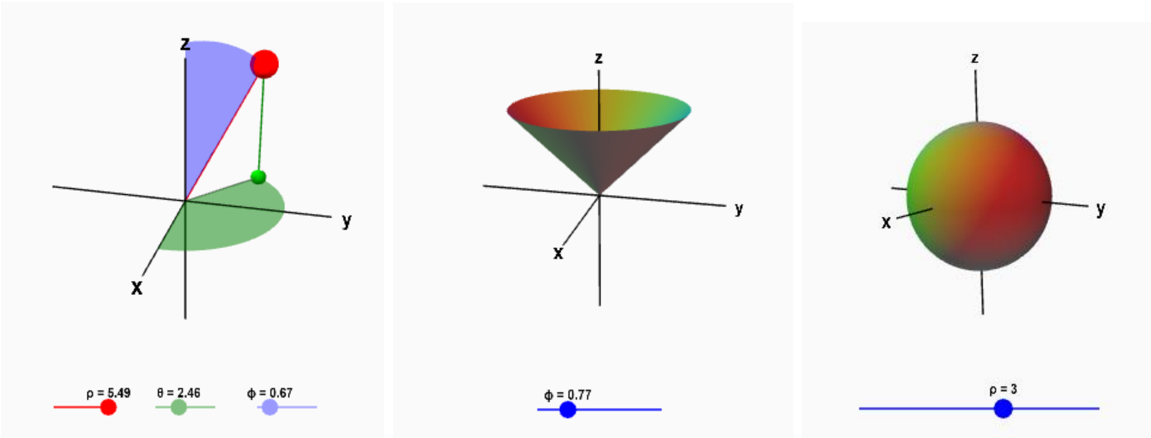
Muutuja vahetuse jakobiaan

$$J(\varrho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\varrho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\varrho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\varrho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \varrho\cos\varphi\cos\theta & -\varrho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \varrho\sin\varphi\cos\theta & \varrho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -\varrho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$|J| = \varrho^2 \sin\theta.$$

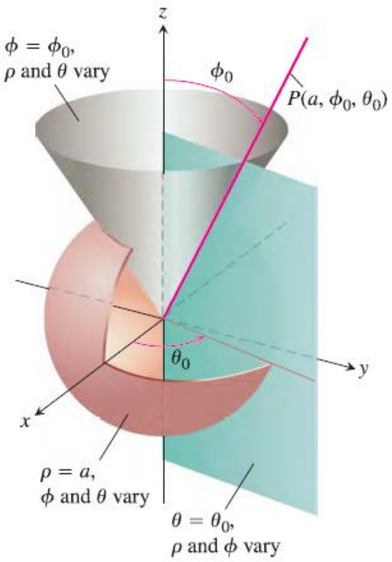
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(\varrho\cos\varphi\sin\theta\,,\varrho\sin\varphi\sin\theta\,,\varrho\cos\theta)\;\varrho^2\sin\theta\;d\varrho\;d\varphi\;d\theta.$$

Uus nurk muutub vahemikus $0 \le \theta \le \pi$ (keskmine joonis).



Allikas: http://mathinsight.org/spherical_coordinates

Kui kõik eelnevad joonised kokku võtta, saab kõik sfäärilised koordinaadid kujutada ühel joonisel, nagu õpikus Thomas' Calculus:



Allikas: Thomas' Calculus

Näide 4.12. Leida integraal sfääriliste koordinaatide kaudu

$$\iiint\limits_V xz\,dxdydz\,, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

Integreeritav funktsioon sfäärilistes koordinaatides on

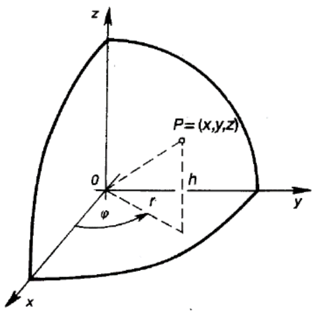
$$xz = \varrho^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,, \qquad J(\varrho,\varphi,\theta) = \varrho^2\sin\theta.$$

Kuna

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2,$$

siis integreerimispiirkonna võrrandiks saame $\varrho^2 = 1$.

Integreerimispiirkond sfäärilistes koordinaatides on seega



$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varrho \leq 1.$$

Arvutame kolmekordse integraali uues piirkonnas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^1 \varrho^4 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \ldots = \frac{1}{15}.$$

4.8. KOLMEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSED

1. **Aine mass.**

Kui eeldada, et piirkonnas V on $f(x,y,z) \geq 0$, siis võime seda funktsiooni tõlgendada aine tihedusena ϱ punktis $(x,y,z) \in V$. Siis ühe punkti P_i fikseerimine osapiirkonnas V_i ruumalaga ΔV_i tähendab seda, et kogu osapiirkonnas on aine tihedus loetud konstantseks ehk võrdseks aine tihedusega selles väljavalitud punktis. Sellisel juhul korrutis $f(P_i)\Delta V_i$ on tihedus korda osapiirkonna ruumala ehk ligikaudu osapiirkonna mass. Ligikaudu sellepärast, et osapiirkonnas muutuv tihedus on loetud konstantseks. Integraalsumma tähendab sellisel juhul ligikaudu kogu piirkonna V massi. Piirprotsess $\lambda \to 0$ tähendab seda, et kõikide osapiirkondade diameetrid kahanevad. Järelikult hakkab aine tihedus ühes suvaliselt väljavalitud punktis üha täpsemalt iseloomustama tihedust kogu osapiirkonnas. Tõlgendades integreeritavat funktsiooni $f(x,y,z)$ aine tihedusena, tähendab kolmekordne integraal piirkonna V massi. Olgu jäiga keha E ruumala V ja aine tihedus kehas muutuv ehk $\varrho = \varrho(x,y,z)$, kus $(x,y,z) \in V$. Lõpmata väikse ruumala dV korral loeme tiheduse konstantseks ja mass $dm = \varrho(x,y,z)dV$ ja järelikult

$$m_E = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \iiint_V \varrho(x,y,z)\, dxdydz.$$

2. **Piirkonna V ruumala.**

Kui piirkond V on täidetud ainega, mille tihedus igas punktis $\varrho(x,y,z) = 1$, siis piirkonna V mass ja ruumala on arvuliselt võrdsed, seega piirkonna V ruumala on arvutatav järgmise kolmekordse integraali abil

$$\boldsymbol{V = \iiint_V dx\, dydz.}$$

3. **Massikeskme koordinaadid ja inertsimoment.**

Materiaalse keha E massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$x_c = \frac{1}{m_E} \iiint_V x\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz; \quad y_c = \frac{1}{m_E} \iiint_V y\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz;$$

$$z_c = \frac{1}{m_E} \iiint_V z\, \varrho(x,y,z)\, dxdydz,$$

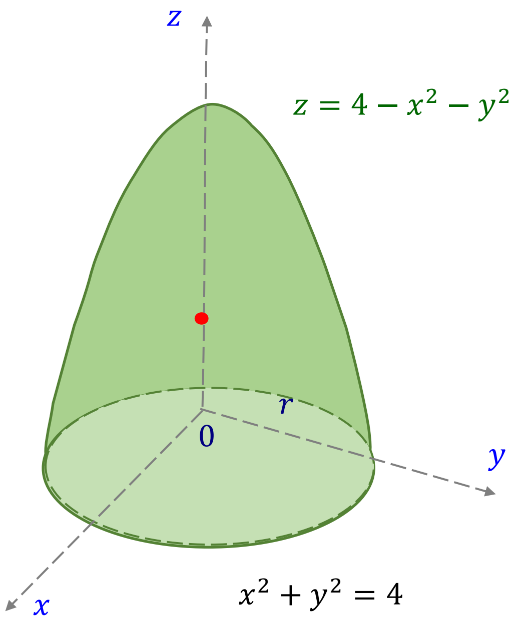
kus m_E on keha mass.

Näide 4.13. Leida massikese kehale, mis on homogeensest materjalist tihedusega $\varrho = \text{const}$. Keha on alt piiratud ringjoonega

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

ja ülevalt piirab keha paraboloid

$$z = 4 - x^2 - y^2.$$



Rajad:

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2,$$

siis

$$-2 \leq x \leq 2$$

ja

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}.$$

Et tegemist on sümmeetrilise kujundiga x telje suhtes, on massikeskme koordinaadid

$$x_c = y_c = 0.$$

$$m_E = \varrho \iiint\limits_E dxdydz = \varrho \iint\limits_E dxdy \int\limits_0^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \varrho \iint\limits_E (4 - x^2 - y^2)dxdy \underset{*}{=}$$

Edasi on mõistlik üle minna polaarkoordinaatidele, sest integreerimispiirkond on ring. Ringjoone puhul

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ ja } 0 \leq r \leq 2.$$

Siis

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - r^2$$

ja

$$J(r, \varphi) = r.$$

$$\underset{*}{=} \varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} (4 - r^2)\, r dr = \varrho \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \varrho \int\limits_0^{2\pi} \left(8 - \frac{16}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \varrho \int\limits_0^{2\pi} 4\, d\varphi = 4\varrho\varphi = 8\varrho\pi\,.$$

Nüüd arvutame massikeskme koordinaadi z_c üleminekuga polaarkoordinaatidele.

$$z_c = \frac{1}{m_D} \iiint\limits_D z\varrho\, dxdydz = \frac{1}{8\varrho\pi}\, \varrho \iint\limits_E dxdy \int\limits_0^{4-x^2-y^2 z} zdz = \frac{1}{16\pi} \iint\limits_E (4 - x^2 - y^2)^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} (4 - \varrho^2)^2\, \varrho d\varrho = \frac{1}{16\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} 16\varrho - 8\varrho^3 + \varrho^5\, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{16\varrho^2}{2} - \frac{8\varrho^4}{4} + \frac{\varrho^6}{6}\right)_0^2 d\varphi = \frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\left(32 - 32 + \frac{64}{6}\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int_0^{2\pi}\frac{32}{3}\,d\varphi = \frac{1}{16\pi}\frac{64}{3}\pi = \frac{4}{3}.$$

Saime keha massikeskme koordinaatidega

$$C = \left(0, 0, \frac{4}{3}\right).$$

Materiaalse piirkonna inertsimoment koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes avaldub

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz; \qquad I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz;\; I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz.$$

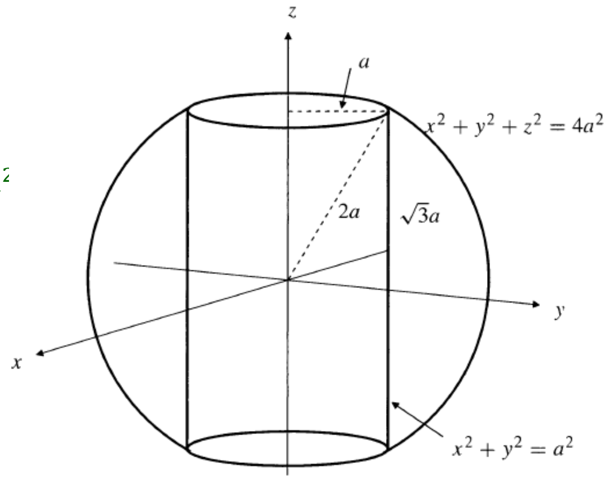
Näide 4.14. Avaldada materiaalse piirkonna R inertsimoment z-telje suhtes, kui piirkonda V täitev aine on tihedusega δ ja piirkond R asub sfääri

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

sees ning väljaspool silindrit

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(joonis).



Inertsimoment z-telje suhtes piirkonnas V on

$$I = \iiint\limits_R (x^2 + y^2)\delta\,dV.$$

Teeme muutujate vahetuse, minnes üle silindrilistele koordinaatidele

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi\,, \\ z = h \end{cases} \qquad J(\varrho,\varphi) = \varrho.$$

Sfääri ja silindri võrrandid silindrilistes koordinaatides on

$$h^2 = 4a^2 - \varrho^2, \varrho^2 = a^2.$$

Integreerimipiirkonnaks saame

$$V = \left\{(\varrho,\varphi,h): a \le \varrho \le 2a, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi,\;\; 0 \le h \le \sqrt{4a^2 - \varrho^2}\right\},$$

seetõttu saame inertsimomenti avaldise kujul

$$I = \iiint\limits_R (x^2 + y^2)\delta\,dxdydz = 2\delta\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} d\varrho \int_0^{\sqrt{4a^2-\varrho^2}} \varrho^2\varrho\,dh.$$

Integreerime kõigepealt muutuja h järgi, saame

$$I = 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} \left((\varrho^3 h)\Big|_0^{\sqrt{4a^2-\varrho^2}} \right) d\varrho = 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} \left(\varrho^3 \sqrt{4a^2 - \varrho^2} \right) d\varrho =$$

Muutuja ϱ järgi integreerimiseks teeme muutuja vahetuse

$$u = 4a^2 - \varrho^2, \ \ \varrho^2 = 4a^2 - u, du = -2\varrho d\varrho, -\frac{du}{2} = \varrho d\varrho.$$

Uued rajad on

$$\varrho = a, u = 3a^2; \ \ \varrho = 2a, u = 0.$$

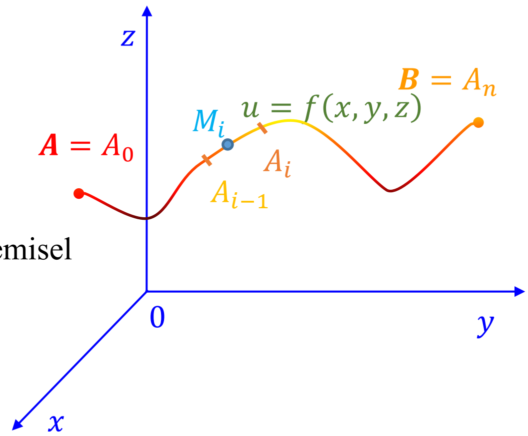
$$= 2\delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{3a^2}^{0} -\frac{1}{2}(4a^2 - u)\sqrt{u} du = 2\delta \int_0^{2\pi} \left(-2\, a^2 \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} \Big|_{3a^2}^{0} \right) d\varphi =$$

$$= 2\delta \int_0^{2\pi} \left(a^2 \frac{4}{3} (3a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} (3a^2)^{\frac{5}{2}} \right) d\varphi = 2\delta a^5 \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \frac{11}{5} d\varphi = \frac{22}{5} \sqrt{3} \delta a^5 2\pi = \frac{44}{5} \sqrt{3} \delta a^5 \pi.$$

4.9. ESIMEST LIIKI JOONINTEGRAAL*

Olgu antud funktsioon $u = f(x, y, z)$, mis on määratud kaarel AB. Jaotame kaare AB n elementaarkaareks $A_{i-1}A_i$, $i = 1, \dots, n$; $A_0 = A, A_n = B$. Olgu Δs_i kaare $A_{k-1}A_k$ pikkus. Valime igal kaaretükil vabalt punkti $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Funktsiooni **integraalsummaks** piki joont AB nimetatakse summat

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$



Olgu suurim elementaarkaarte pikkustest $\lambda = \max \Delta s_i$.
Leiame piirväärtuse maksimaalse elementaarkaare lähenemisel nullile.

Definitsioon 4.4.
Kui piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu joone AB osadeks jaotamise viisist ja punktide M_i valikust, siis nimetatakse seda **esimest liiki joonintegraaliks** üle kaare AB funktsioonist u

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$

Kui on tegemist pideva funktsiooniga $f(x, y, z)$, siis piirväärtus eksisteerib. Integreerimisteed AB märgitakse ka ühe tähega L. Joon AB võib olla ka kinnine, siis $A = B$.

Joonintegraali omadused:

1. Joonintegraal **ei sõltu integreerimissuunast**:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_{BA} f(x,y,z)\,ds.$$

2. Kui funktsioonid $f(x,y,z)$ ja $g(x,y,z)$ on integreeruvad joonel AB, siis on integreeruv ka nende **summa ja vahe**

$$\int_{AB} [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\,ds = \int_{AB} f(x,y,z)\,ds \pm \int_{AB} g(x,y,z)\,ds.$$

3. **Konstantse kordaja** võib tuua integraali märgi ette

$$\int_{AB} c\, f(x,y,z)\,ds = c \int_{AB} f(x,y,z)\,ds.$$

4. Kui AB koosneb kaartest AC ja CB ja funktsioon $f(x,y,z)$ on integreeruv joonel AB, siis

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_{AC} f(x,y,z)\,ds + \int_{CB} f(x,y,z)\,ds.$$

Joonintegraali arvutamine.

Kui joon on esitatud parameetriliste võrranditega, siis kaare pikkuse diferentsiaal avaldub

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Joonintegraali saame kirjutada määratud integraalina üle parameetri t.

a) Olgu ruumiline kõver AB esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \quad A = (x,y,z)|_{t=\alpha}, \quad B = (x,y,z)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

b) **Tasandiline kõver**. Kui joon AB asub xy tasandil, siis funktsioon $f(x,y)$ on avaldatav parameetrilise võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0, \quad A = (x,y)|_{t=\alpha}, \quad B = (x,y)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Näide 4.15. Leida joonintegraal järgmistel tingimustel:

$$\int_{AB} x^2 y\,ds, \quad AB: x^2 + y^2 = 4, y \ge 0.$$

Tegemist on ringjoone ülemise osaga, raadiusega 2, mille parameetrilised võrrandid on:

$$x(t) = 2\cos t, \qquad y(t) = 2\sin t, \qquad t \in [0,\pi] \quad x'(t) = -2\sin t, \qquad y'(t) = 2\cos t,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} 4\cos^2 t \cdot 2\sin t\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi} 8\cos^2 t \sin t \sqrt{4\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{1}}\, dt = \int_0^{\pi} 16\cos^2 t \sin t dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} -16\, u^2 dt = -16\frac{u^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{32}{3}.$$

c) **Tasandiline kõver**. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b, \qquad \int_{AB} f(x,y)\, ds = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Näide 4.16. Leida joonintegraal

$$\int_{AB} xy^2\, ds, \;\; AB\colon y = 2x, A = (0,0), B = (2,4), \quad y(x) = 2x, \qquad y'(x) = 2, x \in [0,2].$$

$$\int_{AB} f(x,y)\, ds = \int_0^2 x(2x)^2\sqrt{1 + 2^2}dx = 4\sqrt{5}\int_0^2 x^3 dx = 4\sqrt{5}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2 = 16\sqrt{5}.$$

d) **Tasandiline kõver**. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \qquad c \le y \le d, \qquad \int_{AB} f(x,y)\, ds = \int_c^d f\big(x(y), y\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}dy.$$

e) **Tasandiline kõver polaarkoordinaatides.** Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$r = r(\varphi), \qquad \alpha \le \varphi \le \beta, \qquad \int_{AB} f(x,y)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + r'^2}d\varphi.$$

JOONINTEGRAALI RAKENDUSED

1. Kõvera mass ja massikeskme koordinaadid. On antud ruumiline kõver AB, millel aine tihedus on jaotunud funktsiooni $p = p(x,y,z)$ järgi. Siis materiaalse kaare mass avaldub

$$m = \int_{AB} p(x,y,z)\, ds.$$

Massikeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad massi kaudu järgmiselt:

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{AB} x\, p(x,y,z)\, ds,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\, p(x,y,z)\, ds,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} z\, p(x,y,z)\, ds.$$

2. Muutuva jõu töö. Kui punkt P liigub piki ruumilist joont punktist A punkti B. Punktile P rakendatud jõud, mis punkti P liikumisel muutub nii suuruse kui sihi poolest

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Töö, mida teeb jõud punkti P liikumisel piki joont avaldub järgmiselt

$$W = \int\limits_{AB} (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz).$$

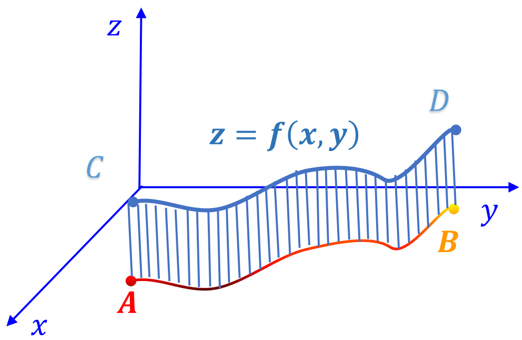
3. Joone kaare pikkus. Kui ruumis on antud sile joon AB, siis tema pikkus avaldub valemiga

$$l_{AB} = \int\limits_{AB} ds.$$

4. Silinderpinna pindala. Olgu funktsioon $f(x,y) \geq 0$ pidev xy tasandil asetseval siledal joonel AB. Vaatame vertikaalset silinderpinda $ABCD$, mille alumine serv on joon AB ja ülemine serv on funktsiooni f graafik $z = f(x,y)$. Pinna $ABCD$ pindala S_{ABCD} avaldub valemiga

$$S_{ABCD} = \int\limits_{AB} f(x,y)ds.$$

Saadud valem annab esimest liiki joonintegraali geomeetrilise tähenduse.



4.10. TEIST LIIKI JOONINTEGRAAL*

Olgu antud funktsioon $u = f(x,y,z)$, mis on määratud kaarel AB. Jaotame kaare AB n elementaarkaareks $A_{i-1}A_i$, $i = 1,\ldots,n$; $A_0 = A, A_n = B$. Olgu Δs_i kaare $A_{k-1}A_k$ pikkus. Valime igal kaaretükil vabalt punkti $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Tähistame osakaare $A_{i-1}A_i$ projektsioonid koordinaattelgedele:

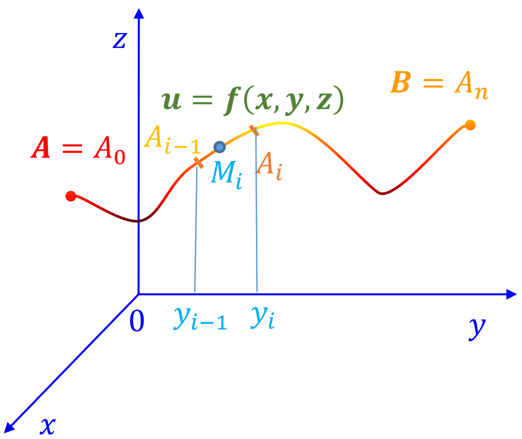
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ja $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$.

Moodustame integraalsummad

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i,$$



Definitsioon 4.5.
Kui integraalsumma piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu joone AB osadeks jaotamise viisist ja punktide M_i valikust, siis nimetatakse seda piirväärtust **funktsiooni f teist liiki joonintegraaliks** üle kaare AB **projektsioonide järgi x teljele**

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i.$$

Samal viisil saab defineerida **teist liiki joonintegraalid projektsioonide järgi y ja z teljele**:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i\,;$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dz = \lim_{\max \Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i.$$

Definitsioon 4.6.
Olgu joonel AB defineeritud kolm funktsiooni: $p = P(x, y, z), q = Q(x, y, z)$ ja $r = R(x, y, z)$, siis **funktsiooni f teist liiki joonintegraaliks** üle kaare AB nimetatakse integraali

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + \int_{AB} Q(x, y, z)\, dy + \int_{AB} R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Teist liiki joonintegraali omadused:

1. Teist liiki joonintegraal sõltub integreerimissuunast:

$$\int_{AB} P\, dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

2. Kui funktsioonid $P_1(x, y, z)$ ja $P_2(x, y, z)$ on integreeruvad joonel AB, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe

$$\int_{AB} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)]\, dx = \int_{AB} P_1(x, y, z)\, dx \pm \int_{AB} P_2(x, y, z)\, dx.$$

3. Konstantse kordaja võib tuua integraali märgi ette

$$\int_{AB} c \cdot P(x,y,z)\, dx = c \cdot \int_{AB} P(x,y,z)\, dx.$$

4. Kui AB koosneb kaartest AC ja CB, siis teist liiki joonintegraal avaldub

$$\int_{AB} P\, dx + Qdy + Rdz = \int_{AC} P\, dx + Qdy + Rdz + \int_{CB} P\, dx + Qdy + Rdz.$$

Teist liiki joonintegraali arvutamine.

a) Olgu ruumiline kõver AB esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

$$A = (x,y,z)|_{t=\alpha}, \;\; B = (x,y,z)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\}dt.$$

b) Tasandiline kõver. Kui joon AB asub xy tasandil, siis funktsioon $f(x,y)$ on avaldatav parameetrilise võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0,$$

$$A = (x,y)|_{t=\alpha}, \;\; B = (x,y)|_{t=\beta}\,, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\, dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\, dt.$$

c) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b, \qquad \int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)dx.$$

d) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \qquad c \le y \le d, \qquad \int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_c^d f(x(y), y)dy.$$

e) Tasandiline kõver polaarkoordinaatides. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$r = r(\varphi), \qquad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)d\varphi,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(r'\cos\varphi + r\sin\varphi)d\varphi.$$

Kui kinnine joon AB asub xy-tasandil, on tegu integraaliga

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy,$$

siis loetakse integreerimistee **positiivseks suunaks** sellist suunda, et z-telje poolt vaadatuna jääb joone poolt piiratud ala vasakule (joon läbitakse vastupäeva, kellaosuti liikumise vastassuunas).

Teist liiki joonintegraali rakendused.

1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine. Olgu xy-tasandil asetseva kujundi D rajajoon Γ tükiti sile. Siis kujundi D pindala S_D avaldub valemitega

$$S_D = \int_L x\,dy,$$

$$S_D = -\int_L y\,dx,$$

$$S_D = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx.$$

2. Muutuva jõu töö arvutamine. Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punkti B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimel, kus $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ ja $R(x,y,z)$ on pidevad funktsioonid joonel AB. Siis jõu $\vec{F}$ töö W on arvutatav valemiga

$$W = m\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Greeni valem. Eksisteerigu pidevatel kahe muutuja funktsioonidel $p = P(x, y)$ ja $q = Q(x, y)$ pidevad osatuletised

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$$

tõkestatud kinnises piirkonnas D, mille rajajoon Γ on tükiti sile. Siis

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\Gamma P dx + Q dy.$$

4.11. PINDINTEGRAAL*

Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ pidev sileda pinna $z = z(x, y)$ mingi tüki D punktides. Jaotame pinnatüki n osapiirkonnaks D_i diameetriga d_i ja pindalaga ΔS_i ning valime igas osapiirkonnas punkti (x_i, y_i, z_i).
Tähistame suurima diameetri osapiirkondadel

$$\lambda = \max d_i.$$

Definitsioon 4.7.
Pindintegraal pindala järgi üle pinnatüki D defineeritakse järgmiselt

$$\iint_D F(x, y, z)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Pindintegraali saab teisendada kahekordseks integraaliks, asendades $z = z(x, y)$ ning võttes pinna diferentsiaaliks

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Integreerimispinnaks tuleb pinna D projektsioon xy tasapinnale D_{xy}. Saame

$$\iint_D F(x, y, z)\, dS = \iint_{D_{xy}} F\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dxdy.$$

Pindintegraal projektsiooni järgi on defineeritud läbi osapiirkonna D_i projektsiooni xy tasapinnale, mille pindala on ΔS_i

$$\iint_D F(x, y, z)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Pindintegraali projektsiooni järgi saab teisendada kahekordseks integraaliks üle pinna D projektsiooni D_{xy}

$$\iint_D F(x, y, z)\, dxdy = \iint_{D_{xy}} F\big(x, y, z(x, y)\big)\, dxdy.$$

Analoogiliselt defineeritakse pindintegraalid projektsiooni järgi xz ja yz tasanditele.

$$\iint_D F(x,y,z)\,dxdy = \iint_{D_{xz}} F(x,y(x,z),z)\,dxdz, \qquad \iint_D F(x,y,z)\,dxdy$$

$$= \iint_{D_{yz}} F(x(y,z),y,z)\,dydz.$$

V PTK HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.1. SISSEJUHATUS

Tehniliste ülesannete matemaatiline analüüs koosneb kolmest etapist:
ülesande tingimuste esitamine matemaatika keeles,
matemaatilise ülesande lahendamine,
saadud tulemuste tõlgendamine.

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ kirjeldab mingi nähtuse kvantitatiivset külge. Sageli ei ole nähtuse vaatlemisel võimalik kindlaks teha x ja y vahelist sõltuvust, kuid saame määrata suuruste $x, y, y', y'', \ldots$ vahelise seose, ehk saame koostada diferentsiaalvõrrandi. Saadud seosest muutujate x, y ja tuletiste vahel on vaja tuletada otsene seos x ja y vahel ehk sõltuvus $y = f(x)$ ehk tuleb **integreerida diferentsiaalvõrrand**.

Näide 5.1. Mingilt kõrguselt visatakse alla keha, mille mass on m. Leida seaduspärasus, mille järgi muutub keha langemiskiirus $v = f(t)$, kui kehale mõjub peale raskusjõu veel õhutakistus, mis on võrdeline kiirusega (võrdetegur on k).
Newtoni II seaduse põhjal

$$F = m\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = a,$$

a on liikuva keha kiirendus (kiiruse tuletis aja järgi), F on kehale liikumise suunas mõjuv jõud. See jõud koosneb kahest komponendist: raskusjõust mg ja õhutakistusest$-kv$, see on keha liikumisele vastassuunaline

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \tag{5.1}$$

kus $v = f(t)$ on otsitav funktsioon. Saime seose otsitava funktsiooni ja tema tuletise vahel ehk diferentsiaalvõrrandi funktsiooni v suhtes. See väljendab mõningat tüüpi langevarjude langemise seadust. Lahendada diferentsiaalvõrrand, tähendab leida selline funktsioon $v = f(t)$, mis samaselt rahuldab diferentsiaalvõrrandit. Selliseid funktsioone on lõpmata palju. Osutub, et antud diferentsiaalvõrrandit rahuldab funktsioon

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \tag{5.2}$$

kus C on mistahes arv (integreerimiskonstant). Kontrollime lahendi õigsust, leides lahendist (5.2) tuletise ja asendades võrrandisse (5.1) eraldi vasakule ja paremale poolele.

$$\frac{dv}{dt} = Ce^{-\frac{k}{m}t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right),$$

$$v.p. \quad m\frac{dv}{dt} = m \cdot Ce^{-\frac{k}{m}t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) = -Cke^{-\frac{k}{m}t},$$

$$p.p. \;\; mg - kv = mg - k\left(Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = -Cke^{-\frac{k}{m}t}.$$

Parem pool ja vasak pool on võrdsed, järelikult avaldis (5.2) rahuldab võrrandit (5.1).
Milline neist funktsioonidest annab otsitava seose v ja t vahel?

Selle leidmiseks kasutame lisatingimust: keha allaviskamisel anti talle algkiirus v_0. Siis funktsioon v võrrandis (5.2) peab rahuldama algtingimust. Liikumise alghetkel aeg $t = 0$ ja kiirus

$$v(0) = v_0.$$

Asendame mõlemad suurused valemisse (5.2) ja avaldame C

$$v_0 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} + \frac{mg}{k} = C + \frac{mg}{k} \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Seega konstant C on leitud ja sõltuvus v ja t vahel avaldub kujul

$$\boldsymbol{v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}}.$$

5.2. DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE, CAUCHY ÜLESANNE

Definitsioon 5.1.

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Vastavalt sõltumatute muutujate arvule liigitatakse diferentsiaalvõrrandeid harilikeks ja osatuletistega diferentsiaalvõrranditeks.

Definitsioon 5.2.

Harilikeks diferentsiaalvõrranditeks nimetatakse diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Näited harilike diferentsiaalvõrrandite kohta:

$$y' = 2x - 1, \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{8}{x^3}y = 0,$$

kus otsitavaks on funktsioon $y = f(x)$.
Harilikud diferentsiaalvõrrandid on ka võrrandid kujul

$$\frac{dv}{dt} + 3v = 7, \qquad \frac{dx}{dt} - x = 4,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on vastavalt $v = v(t)$ ja $x = x(t)$.

Definitsioon 5.3.

Osatuletistega diferentsiaalvõrranditeks nimetatakse diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitavaks on mitme muutuja funktsioon ja võrrand sisaldab osatuletisi.

Definitsioon 5.4.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse võrrandis esinevate otsitava funktsiooni tuletiste kõrgeimat järku.

Esimest järku hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}.$$

$\boldsymbol{n}$-järku hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}.$$

Funktsioon F esitab seose sõltumatu muutuja x, otsitava funktsiooni $y = y(x)$ ja otsitava funktsiooni tuletiste vahel.

Definitsioon 5.5.

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.

Definitsioon 5.6.

Diferentsiaalvõrrandi integraalkõveraks nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendile

$$y = y(x)$$

vastavat joont xy-tasandil.

Näide 5.2. Olgu antud diferentsiaalvõrrand

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Näitame, et funktsioon

$$y = 2x + x^2$$

on antud diferentsiaalvõrrandi lahend. Selleks võtame lahendist esimese ja teise tuletise

$$y' = 2 + 2x, \qquad y'' = 2$$

ning asendame saadud tuletised koos lahendiga esialgsesse võrrandisse:

$$2 - \frac{2}{x}(2 + 2x) + \frac{2}{x^2}(2x + x^2) = 2 - \frac{4}{x} - 4 + \frac{4}{x} + 2 = 0.$$

Kuna võrrandi parem pool võrdub nüüd nulliga, millega võrdub ka parem pool, oleme näidanud, et tõesti on tegemist võrrandi lahendiga.

Näide 5.3. Olgu antud diferentsiaalvõrrand

$$y' = 2x - 1.$$

Võrrandi lahendiks on

$$y = x^2 - x,$$

aga ka funktsioonid $y = x^2 - x + C$, kus C on suvaline konstant.

Definitsioon 5.7.

Diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks ehk **üldintegraaliks** nimetatakse diferentsiaal-võrrandi lahendit, mis sisaldab suvalist konstanti C.
Võrrandi üldlahendis sisalduvate suvaliste konstantide arv on võrdne võrrandi järguga.

$\boldsymbol{n}$ –järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on funktsioon, mis sisaldab $\boldsymbol{n}$ suvalist konstanti

$$\boldsymbol{y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)},$$

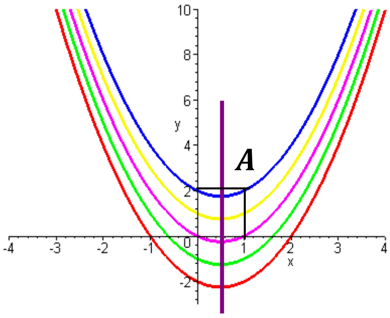
ilmutamata kujul $\boldsymbol{F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0}$.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x - 1$ üldlahendiks on $y = x^2 - x + C$. Nende paraboolide haripunktid asuvad sirgel $x = 1/2$. Üldlahend esitab paraboolide parve. Näiteks, kui

$$C = 1, \qquad x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4},$$

$$C = 0, \qquad x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4},$$

$$C = -1, \qquad x = \frac{1}{2}, \; y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}.$$



Et leida selle parve hulgast niisugune, mis läbib punkti $A(1; 2)$, tuleb määrata konstant C:

$$2 = 1 - 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Järelikult punkti $A(1; 2)$ läbib integraalkõver $y = x^2 - x + 2$.

Definitsioon 5.8.

Diferentsiaalvõrrandi erilahendiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendit, mis on saadud üldlahendist konstantidele arvuliste väärtuse andmisel.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendist saame erilahendi, kui rahuldame algtingimuse $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$, kus $\boldsymbol{x_0, y_0}$ on etteantud arvud. Kuna n-järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab $\boldsymbol{n}$ suvalist konstanti, siis on konstantide määramiseks vaja $\boldsymbol{n}$ **algtingimust**.

Definitsioon 5.9.

Cauchy ülesandeks nimetatakse ülesannet, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

lahend y, mis rahuldab **algtingimusi**

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Algtingimusi nimetatakse ka Cauchy tingimusteks. Algtingimusi võib esitada ka teisiti.
Esimest järku hariliku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne on ülesanne, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ selline lahend, mis argumendi väärtusel $x = x_0$ omandab väärtuse $y = y_0$ ehk rahuldab algtingimust

$$y(x_0) = y_0.$$

Järnevalt sõnastame Cauchy ülesande jaoks lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi.

Teoreem 5.1.

Cauchy teoreem. Olgu $f(x, y)$ ja $\partial f(x, y)/\partial y$ määratud ja pidevad muutujate x, y piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on Cauchy ülesandel

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = y_0$$

parajasti üks lahend $y = y(x)$.

Teoreemi tõestus on diferentsiaalvõrrandite õpikus [6] lk. 50-58.

5.2.1. CAUCHY ÜLESANDE LAHENDAMINE ASTMERIDADE ABIL

Kui funktsioon $f(x, y)$ on antud analüütiliselt muutujate x, y piirkonnas D, siis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on funktsioon arendatav astmeritta

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(x - x_0)^i (y - y_0)^j,$$

mis koondub punkti (x_0, y_0) teatavas ümbruses. Sellisele funktsioonile vastava diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ lahend on samuti arendatav astmeritta iga x_0 korral määramispiirkonnast $y(x)$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

mis koondub punkti x_0 teatavas ümbruses. Rea kordajad c_k avalduvad kujul

$$c_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Näide 5.4. Olgu antud Cauchy ülesanne

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Lahendame ülesande astmeridade abil. Võrrandi diferentseerimisel saame, arvestades, et funktsioon y on sõltuv argumendist x

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y'' = 2x + 2yy', \qquad y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''',$$

$$y^V = 6(y'')^2 + 6y'y''' + 2y'y''' + 2yy^{IV} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV},$$

$$y^{VI} = 12y''y''' + 8y''y''' + 8y'y^{IV} + 2y'y^{IV} + 2yy^V = 20y''y''' + 10y'y^{IV} + 2yy^V,$$

$$y^{VII} = 20(y''')^2 + 30y''y^{IV} + 12y'^{y^V} + 2yy^{VI}.$$

Siit arvutame

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2,$$

$$y^{IV}(0) = 0, \qquad y^V(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 0, \quad y^{VII}(0) = 80.$$

Seega ülesande

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0$$

lähislahendiks võib võtta funktsiooni

$$y = \frac{2}{3!}x^3 + \frac{80}{7!}x^7 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7.$$

5.3. ESIMEST JÄRKU HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.3.1. ERALDATUD JA ERALDUVATE MUUTUJATEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit kujul $f(x)dx + g(y)dy = 0$, kus dx ja dy on vastavalt muutujate x ja y diferentsiaalid ja $f(x)$ ja $g(y)$ on antud funktsioonid.

Definitsioon 5.10.

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles dx kordaja $f(x)$ sõltub ainult muutujast x ja dy kordaja $g(y)$ sõltub ainult muutujast y.

Üldlahendi saamiseks tuleb võrrand integreerida, leida määramata integraalid kordajatest $f(x)$ ja $g(y)$

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

kus C on suvaline konstant. Üldlahend avaldatakse kujul

$$\boldsymbol{y = F(x, C)}.$$

Kui võrrand on antud kujul $y' \cdot g(y) + f(x) = 0$, siis lahendamisel esimese sammuna asendame

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

ja korrutame võrrandi läbi diferentsiaaliga dx, edasi saame integreerida.

Definitsioon 5.11.

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0, \tag{5.3}$$

kus funktsioonid $f_1(x), f_2(x)$ on argumendi x funktsioonid ja $g_1(y), g_2(y)$ argumendi y funktsioonid.

Diferentsiaalide dx ja dy kordajateks on nüüd selliste funktsioonide korrutised, millest üks tegur sõltub ainult argumendist x ja teine tegur ainult argumendist y.
Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks peame muutujad eraldama. Muutujate eraldamiseks jagame võrrandi (5.3) mõlemaid pooli järgmise avaldisega (tuleb jagada läbi nende funktsioonide korrutisega, mis sisaldavad teist muutujat, kui diferentsiaal):

$$|: \boldsymbol{g_1(y) \cdot f_2(x)},$$

Võrrand saab siis kuju:

$$\boldsymbol{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0}.$$

Integreerime võrrandit liikmeti, saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi (5.3) üldlahendi

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Näide 5.5. Leida eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend (ehk lahendada diferentsiaalvõrrand)

$$e^y y' = 2x + 1.$$

Kõigepealt asendame tuletise diferentsiaalide jagatisega, siis korrutame läbi diferentsiaaliga dx . Üldlahendi saamiseks peame võrrandit integreerima. Lahenduskäik on järgmine: asendame tuletise diferentsiaalide jagatisega, korrutame suurusega dx ja integreerime

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x + 1, \quad |\cdot dx$$

$$e^y dy = (2x + 1)dx.$$

$$\int e^y dy = \int (2x + 1)dx,$$

$$e^y = x^2 + x + C. \quad |\ln$$

Selleks, et avaldada üldlahendis muutuja y, võtame mõlemast võrrandi poolest naturaal-logaritmi, ning kuna $\ln e^y = y$, saame võrrandi üldlahendiks

$$y = \ln(x^2 + x + C).$$

Kontrollime vastuse õigsust, leides üldlahendist tuletise ja asendades esialgsesse võrrandisse:

$$y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + C},$$

$$e^{\ln(x^2+x+C)} \frac{2x + 1}{x^2 + x + C} = (x^2 + x + C)\frac{2x + 1}{x^2 + x + C} = 2x + 1.$$

Näide 5.6. Leida järgmise eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$\frac{x}{1 + y^2}dx + 2y(2 + x^2)dy = 0.$$

Võrrandi lahendamiseks peame kõigepealt muutujad eraldama. Antud võrrandis on diferentsiaali dx kordajaks muutujat y sisaldav funktsioon kujul $1/(1 + y^2)$ ja diferentsiaali dy kordajaks on muutujat x sisaldav funktsioon kujul $(2 + x^2)$. Muutujate eraldamiseks peame võrrandit läbi jagama mõlema funktsiooniga.

$$\frac{x}{1 + y^2}dx + 2y(2 + x^2)dy = 0, \qquad \Big| : \frac{2 + x^2}{1 + y^2}$$

$$\frac{x}{2 + x^2}dx + 2y(1 + y^2)dy = 0,$$

Nüüd on tegemist eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiga, mille lahendamiseks integreerime võrrandi mõlemat poolt

$$\int \frac{x}{2+x^2}dx + \int 2y(1+y^2)dy = C,$$

Esimese integraali leiame järgmise muutuja vahetusega:

$$\text{m. v. } u = 2+x^2, \quad du = 2x\,dx, \quad \frac{du}{2} = x\,dx,$$

$$\int \frac{du}{2u} + 2\int y dy + 2\int y^3 dy = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln|2+x^2| + y^2 + \frac{2}{4}y^4 = C, \quad |\cdot 2$$

Saadud üldlahendis otsitav funktsioon y ei ole logaritmi argument, samas on võrrandis kordajad $1/2$, üldlahendi võime korrutada läbi kordajaga 2, kuna integreerimiskonstant C on suvaline konstant, siis asendame esialgse konstandi uuega, mille tähistame C_1

$$\ln|2+x^2| + 2y^2 + y^4 = 2C, \qquad C_1 = 2C,$$

$$\ln|2+x^2| + 2y^2(1+y^2) = C_1.$$

Näide 5.7. Lahendada eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$yy' = xe^{x+y}$$

algtingimusel

$$y(0) = -1.$$

Muutujate eraldamiseks kirjutame kõigepealt e^{x+y} korrutisena

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

Edasi teisendame otsitava funktsiooni tuletise diferentsiaalide jagatiseks ja korrutame läbi diferentsiaaliga dx

$$yy' = xe^x e^y,$$

$$y\frac{dy}{dx} = xe^x e^y. \quad |\cdot dx$$

Muutujate eraldamisel paneme tähele, et

$$y\,dy = xe^x e^y\,dx, \qquad |: e^y$$

$$\frac{y}{e^y}dy = x\cdot e^x\,dx, \qquad y\cdot e^{-y}\,dy = x\cdot e^x\,dx.$$

$$\int y\cdot e^{-y}\,dy - \int x\cdot e^x\,dx = C.$$

Mõlemad integraalid integreerime ositi.

$$\int y\cdot e^{-y}\,dy = -e^{-y}y + \int e^{-y}\,dy = -e^{-y}y - e^{-y},$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x,$$

$$-e^{-y}y - e^{-y} - xe^x + e^x = C,$$

$$-e^{-y}(y+1)-e^{x}(x-1)=C.$$

Erilahendi saamiseks kasutame rajatingimust, et üldlahendist avaldada C väärtus.

$$y(0)=-1:\ \ -e^{-(-1)}(-1+1)-e^{0}(0-1)=C \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

Erilahend:

$$-e^{-y}(y+1)-e^{x}(x-1)=1.$$

Näide 5.8. Leida järgmise diferentsiaalvõrrandi

$$y'=y^2+1$$

erilahend algtingimusel

$$y(0)=1.$$

$$y'=y^2+1, \qquad \frac{dy}{dx}=y^2+1,$$

$$dy=(y^2+1)dx, \quad |:y^2+1$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=dx.$$

$$\int\frac{dy}{y^2+1}-\int dx=C,$$

$$\arctan y-x=C,$$

$$\arctan y=x+C.$$

Seega võrrandi üldlahendiks on

$$y=\tan{(x+C)}.$$

Erilahendi saamiseks avaldame konstandi C algtingimusest järgnevalt:

$$y(0)=1:\quad \arctan 1-0=C, \qquad C=\frac{\pi}{4}.$$

Saime võrrandi erilahendi

$$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

5.3.1.1. ERALDUVATE MUUTUJATEGA VÕRRANDID KEEMIAS*

Keemilise reaktsiooni võib kirja panna üldise valemiga kujul

$$\boldsymbol{aA+bB+\ \dots=pP+qQ+\ \dots,}$$

kus suurtähtedega $A, B, \dots$ on tähistatud keemilise reaktsiooni lähteaineid (reagente) ja paremal pool võrdusmärki tähistavad tähed $P, Q, \dots$ keemilise reaktsiooni käigus tekkivaid produkte. Väiksed tähed $a, b, \dots$ ja $p, q, \dots$ tähistavad vastava keemilise aine molekulide arvu. Seega tähendab võrrand, et lähteainet A võetakse a molekuli ning lähteainet B võetakse b molekuli, keemilise reaktsiooni tulemusena tekib p molekuli ainet P ning q molekuli ainet Q. Vaatame näiteks keemilist reaktsiooni

$$2H_2+O_2=2H_2O,$$

siin reageerib 2 molekuli vesinikku ja üks molekul hapnikku ning reaktsiooni tulemuseks on kaks molekuli vett.
Termodünaamikas ja kineetikas kirjutatakse üldine keemiline reaktsioon kujul

$$\mathbf{0 = \sum_B \nu_B B,}$$

kus võetakse summa üle kõigi ainete. Nii lähteainete kui ka saaduste jaoks on molekulide arvud määratud kordajaga ν_B, kusjuures lähteainel ja saadusel on erinev märk. Seega saame antud valemi kirjutada kujul

$$0 = -aA - bB + pP + qQ + \ \ldots = \nu_A A + \nu_B B + \nu_P P + \nu_Q Q + \ \ldots$$

Keemilise reaktsiooni vesiniku ja hapniku jaoks võime kirjutada kujul

$$0 = -2H_2 - O_2 + 2H_2O.$$

Keemilise reaktsiooni kiirus.

Olgu n_{A0} algne ainehulk aine A jaoks ajahetkel $t = 0$ ning olgu n_A ainehulk ajahetkel t. Reaktsiooni hulka aja t jooksul antuna reaktsioonimäära ξ kaudu järgmiselt

$$n_A = n_{A0} + \nu_A \xi.$$

Reaktsiooniulatus r saadakse reaktsioonimäära muutumise kiirusest aja järgi ehk

$$r = \frac{d\xi}{dt}.$$

See kiirus on esitatav ka ainehulga muutumise kiirusena iga aine jaoks, kui leiame tuletise n_A avaldisest ja arvestame, et n_{A0} ja ν_A on konstandid:

$$\frac{dn_A}{dt} = \nu_A \frac{d\xi}{dt}.$$

Seega saame avaldada:

$$r = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\nu_A}\frac{dn_A}{dt}.$$

Füüsikalises keemias kasutatakse ainehulga asemel reaktsiooni kiiruse avaldamisel aine kontsentratsiooni, mis tähistatakse nurksulgudega: aine A kontsentratsioon ruumala V jaoks on esitatav:

$$[A] = \frac{n_A}{V}.$$

Siis reaktsiooni kiiruse aine A kontsentratsiooni jaoks saame:

$$v = \frac{r}{V} = \frac{1}{\nu_A}\frac{d[A]}{dt}.$$

Üldise keemilise reaktsiooni jaoks võime kirjutada reaktsiooni kiiruse järgmiselt:

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt} = \ \ldots$$

Keemilise reaktsiooni kiiruse vesiniku ja hapniku näite jaoks saame kirjutada kujul

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[H_2]}{dt} = -\frac{d[O_2]}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[H_2O]}{dt}.$$

Keemilise reaktsiooni toimumise mehhanism on üldiselt keeruline, meie vaatleme ainult lihtsamaid reaktsioone, mille kiirus sõltub ainult lähteainete kogustest, sellise reaktsiooni kiirus on avaldatav järgmiselt:

$$v = k[A]^{\alpha}[B]^{\beta} \ldots,$$

kus k on reaktsiooni kiiruskonstant ja suurused $\alpha, \beta, \ldots$ defineerivad reaktsiooni järgu. Konstant α annab reaktsiooni järgu vastavalt läheaine A kogusele, konstant β annab reaktsiooni järgu vastavalt läheaine B kogusele jne. Summa $\alpha + \beta + \ldots$ annab kogu reaktsiooni järgu.
Näiteks kui reageerib üks molekul lähteainet A, siis on tegemist esimest järku reaktsiooniga, kui reageerib kaks molekuli lähteainet A, siis on tegemist teist järku reaktsiooniga. Kui reaktsioonis osaleb kaks lähteainet $A + B$, mida mõlemat on üks molekul, siis reaktsiooni järgu annab nende ainete molekulide summa ehk tegemist on teist järku reaktsiooniga.

Esimest järku keemilise reaktsiooni kiirus, kui reageerib üks molekul lähteainet A:

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A].$$

Lihtsuse mõttes tähistame aine A kontsentratsiooni $[A]$ ajahetkel t muutujaga x,

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \qquad \Big| : x$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -k, \qquad \Big| \cdot dt$$

$$\frac{dx}{x} = -kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\ln|x| = -kt + C,$$

järelikult

$$x = Ce^{-k \cdot t}.$$

Leiame C väärtuse, olgu alghetkel $t = 0$ aine kontsentratsioon võrdne konstandiga:

$$x(0) = x_0,$$

siis

$$x_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Siit saame, et

$$C = x_0.$$

Seega saab aine A kontsentratsiooni arvutada igal ajahetkel kahaneva eksponentfunktsiooni kaudu:

$$x = x_0 e^{-kt}, \ \ [A] = [A]_0 e^{-kt}.$$

Teist järku keemilise reaktsiooni kiirus, kui reageerib kaks molekuli lähteainet A:

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

ehk

$$\frac{dx}{dt} = -2kx^2, \qquad \Big| : x^2$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = -2k, \qquad \Big| \cdot (-dt\,)$$

$$-\frac{dx}{x^2} = 2kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\frac{1}{x} = 2kt + C.$$

Leiame C väärtuse algtingimusest: olgu alghetkel $t = 0$ aine kontsentratsioon võrdne konstandiga $x(0) = x_0$, siis

$$\frac{1}{x_0} = 0 + C.$$

Siit saame, et $C = 1/x_0$ ja

$$\frac{1}{x} = 2kt + \frac{1}{x_0}.$$

Seega saab aine A kontsentratsiooni arvutada igal ajahetkel järgmiselt:

$$x = \frac{x_0}{1 + 2ktx_0}, \quad [A] = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}.$$

Teist järku keemilise reaktsiooni $A + B \rightarrow$ saadused jaoks reaktsiooni kiirus avaldub:

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B].$$

Olgu algtingimused lähteainete esialgsete kontsentratsioonide jaoks järgmised:

$$[A]_0 = a, [B]_0 = b.$$

Siis ajahetkel t on ainete kontsentratsioonid vastavalt

$$[A] = a - x, [B] = b - x$$

ja vastav reaktsiooni kiirus on

$$-\frac{d(a - x)}{dt} = \frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

Lahendus sõltub algtingimustest. Vaatame kõigepealt juhtu, kus $a = b$.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2, \qquad \bigg| : \frac{(a - x)^2}{dt}$$

$$\frac{dx}{(a - x)^2} = kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\frac{1}{a - x} = kt + C.$$

Leiame C väärtuse algtingimusest, ajahetkel $t = 0$ on aine A kontsentratsioon $a - x$ võrdne $[A]_0 = a$, sest $x(0) = 0$

$$\frac{1}{a} = 0 + C.$$

Seega

$$\frac{1}{a - x} = kt + \frac{1}{a}.$$

Aine A kontsentratsiooni saame arvutada igal ajahetkel järgmiselt:

$$a - x = \frac{a}{1 + akt}, \quad [A] = \frac{[A]_0}{1 + kt[A]_0}.$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $a \neq b$. Siis

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x), \qquad \Big| : \frac{(a-x)(b-x)}{dt}$$

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt.$$

Integreerimiseks peame lahutama murru osamurdude summaks ja leidma määramata kordajad:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{A(b-x) + B(a-x)}{(a-x)(b-x)}.$$

Saame asendades $x = b$ ja $x = a$ leida kordajad A ja B:

$$A = \frac{1}{b-a}, B = \frac{1}{a-b}.$$

Saime

$$\frac{dx}{(a-x)(b-a)} + \frac{dx}{(a-b)(b-x)} = kdt.$$

Integreerime mõlemat võrrandi poolt, saame

$$-\frac{1}{b-a}\ln(a-x) - \frac{1}{a-b}\ln(b-x) = kt + C,$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{b-x}{a-x}\right) = kt + C,$$

Algtingimusest $x(0) = 0$, saame

$$C = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Seega üldlahend on kujul

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{b-x}{a-x}\right) = kt + \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

ehk

$$\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{a(b-x)}{b(a-x)}\right) = kt, \qquad \frac{1}{[B]_0 - [A]_0}\ln\left(\frac{[A]_0[B]}{[B]_0[A]}\right) = kt.$$

5.3.2. HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.3.2.1. HOMOGEENSED FUNKTSIOONID

Olgu D mingi piirkond xy- tasandil, mis koos iga punktiga $(x, y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$.

Definitsioon 5.12.
Piirkonnas D määratud funktsiooni $f(x,y)$ nimetatakse **k-astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x,y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus

$$\boldsymbol{f(tx,ty) = t^k\, f(x,y),}$$

kus k on reaalarv ja $t > 0$.
Üldjuhul, n-muutuja funktsiooni korral, k-astme homogeenseks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kui kehtib võrdus

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kõikide $x_1, x_2, \dots, x_n$ väärtuste ja iga t väärtuse korral.

Näide 5.9. Leida järgmiste homogeensete funktsioonide jaoks aste k.

a) $f(x,y) = ax + by$;

$$f(tx,ty) = atx + bty = t(ax + by) = tf(x,y).$$

Antud funktsioon on esimese astme homogeenne funktsioon ehk $k = 1$.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;

$$f(tx,ty,tz) = (tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2 = t^2(x^2 + y^2 + z^2) = t^2 f(x,y,z).$$

Tegemist on teise astme homogeense funktsiooniga ehk $k = 2$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^4 - y^4}$;

$$f(tx,ty) = \frac{tx + ty}{(tx)^4 - (ty)^4} = \frac{t(x+y)}{t^4(x^4 - y^4)} = t^{-3} f(x,y).$$

Tegemist on (-3). astme homogeense funktsiooniga, $k = -3$.

Euleri teoreem. Kui funktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on k-astme homogeenne funktsioon, siis

$$\boldsymbol{x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \ \dots\ + x_n f'_{x_n} = kf(x_1, x_2, \dots, x_n).}$$

Näide 5.10. Näidata Euleri teoreemi väite kehtivust homogeense funktsiooni
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ jaoks.

$$k = 2. \quad f'_x = 2x, \ \ f'_y = 2y, \ \ f'_z = 2z,$$

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2f(x,y,z).$$

Näide 5.11. Näidata Euleri teoreemi väite kehtivust, kui

$$f(x,y) = \frac{x}{y}.$$

$$f(tx,ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y}.$$

0. järku ehk $k = 0$, siis saame

$$f'_x = \frac{1}{y}, \quad f'_y = -\frac{x}{y^2},$$

$$xf'_x + yf'_y = \frac{x}{y} - y\frac{x}{y^2} = 0f(x, y, z).$$

Näide 5.12. Näidata Euleri teoreemi väite kehtivust, kui

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^4 - y^4}, \qquad k = -3.$$

$$f'_x = \frac{x^4 - y^4 - 4x^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2}, \quad f'_y = \frac{x^4 - y^4 - 4y^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2},$$

$$xf'_x + yf'_y = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2} - y\frac{x^4 - y^4 - 4y^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2} =$$

$$= \frac{x^5 - xy^4 - 4x^4(x + y) - yx^4 + y^5 + 4y^4(x + y)}{(x^4 - y^4)^2} = \frac{-3(x + y)(x^4 - y^4)}{(x^4 - y^4)^2}$$

$$= -3f(x, y, z).$$

5.3.2.2. HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.13.

Homogeenseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit

$$y' = f(x, y),$$

kui $f(x, y)$ on 0-astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), t > 0.$$

Homogeenne diferentsiaalvõrrand on **esitatav kujul**

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5.4}$$

kus $f(y/x)$ sõltub muutujate y ja x suhtest.

HOMOGEENSE DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDAMINE ÜLDKUJUL

Homogeenne diferentsiaalvõrrand **taandub eralduvate muutujatega võrrandiks**, kui teha järgmine muutuja vahetus

$$\frac{y}{x} = z, \qquad y = zx,$$

kus $z = z(x)$ on argumendi x funktsioon.
Muutuja vahetusega peame leidma uue muutuja diferentsiaali, selleks leiame tuletise argumendi x järgi

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Asendame saadud seose võrrandisse (5.4), saame võrrandi uue muutuja $z = z(x)$ kaudu järgmiselt:

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Saadud diferentsiaalvõrrand on muutuja z suhtes eralduvate muutujatega võrrand, lahendades saame

$$xdz = (f(z) - z)dx, \quad |: x\,(f(z) - z)$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C.}$$

Kui teostame integreerimise ja asendame otsitava z tagasi suhtega y/x, jõuame esialgse diferentsiaalvõrrandi üldlahendini. Kuna üldlahendis tegemist on jagatisega, siis valem ei kehti juhul

$$\boldsymbol{f(z) - z = 0} \text{ ehk } \boldsymbol{f(z) = z}.$$

Vaatleme seda juhtu eraldi

$$f(z) = z, \quad f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}.$$

Tegemist on eralduvate muutujatega võrrandiga, esialgne võrrand saab kuju

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

$$dy = \frac{y}{x}dx, \quad |: y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C.$$

Juhul, kui kõikides liikmetes esineb naturaallogaritm, on mõistlik võtta naturaallogaritm ka integreerimiskonstandist, sellega asendame konstandi teise konstandiga $\ln C$, $C > 0$. Järgnevalt saame kasutada naturaallogaritmi omadusi ja teisendada summa korrutiseks või vahe jagatiseks. Edasi tuleks mõlemad võrrandi pooled tõsta arvu e astmeks (võib kirjutada kujul $\uparrow e$), et avaldada otsitav funktsioon y.

$$\boldsymbol{\ln|y| = \ln|xC|, \uparrow e}$$

$$\boldsymbol{e^{\ln|y|} = e^{\ln|xC|},}$$

$$\boldsymbol{y = Cx.}$$

Näide 5.13. Leida homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Lahendamiseks kordame kõiki samme, mida tegime lahendamisel üldkujul, kõigepealt teeme muutuja vahetuse ja arvutame diferentsiaali:

$$\text{m. v.}\quad \frac{y}{x} = z, \qquad y = zx, \qquad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Asendame võrrandisse:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z - z^2,$$

Oleme saanud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi, mille lahendamiseks korrutame võrrandit kõigepealt suurusega dx:

$$zdx + xdz = (z - z^2)dx,$$

Eraldame muutujad ja integreerime

$$xdz = (z - z^2 - z)dx, \qquad |: xz^2$$

$$\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$-\frac{1}{z} + \ln|x| = \ln C, \qquad |\cdot(-1)$$

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln C,$$

Lõpuks asendame tagasi muutuja vahetuse avaldise kaudu

$$\frac{x}{y} = \ln|xC|,$$

Saime võrrandi üldlahendi:

$$y = \frac{x}{\ln|xC|}.$$

Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks taandub võrrand

$$\boldsymbol{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0},$$

kus $\boldsymbol{P(x,y)}, \boldsymbol{Q(x,y)}$ on ühe ja sama astme homogeensed funktsioonid. Selleks tuleks võrrandit läbi jagada argumendi x sellise astmega x^α, mis on võrdne võrrandis oleva argumendi y kõrgeima astmega.

Näide 5.14. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust

$$y(1) = 2.$$

$$(y^2 - x^2)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad |: x^2dx$$

$$\frac{y^2-x^2}{x^2}-2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{y^2}{x^2}-1-2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=0.$$

$$\text{m. v.} \quad \frac{y}{x}=z, \quad y=zx, \quad \frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx},$$

$$z^2-1-2z\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)=0, \quad |\cdot dx$$

$$(-z^2-1)dx-2zxdz=0, \quad |: \quad -(z^2+1)x$$

$$\frac{dx}{x}-\frac{2z}{-(z^2+1)}dz=0.$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2z}{z^2+1}dz=C,$$

$$\text{m. v.} \ \ u=z^2+1, \quad du=2zdz$$

$$\ln|x|+\ln|z^2+1|=\ln C,$$

$$\ln|x(z^2+1)|=\ln C, \quad \uparrow e$$

$$x(z^2+1)=C,$$

$$x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=C,$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C}{x}-1, \quad |x^2$$

Võrrandi üldlahend on kujul

$$y^2=Cx-x^2,$$

Erilahendi leidmiseks asendame üldlahendisse algtingimuse:

$$y(1)=2: \ \ 2^2=C-1,$$

$$C=5.$$

Võrrandi erilahend on kujul

$$y^2=5x-x^2.$$

5.3.3. DIFERENTSIAALVÕRRAND, MIS SISALDAB MURDLINEAARSET AVALDIST

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$y' = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right).$$

Kui $a_3 = b_3 = 0$, siis on tegemist homogeense diferentsiaalvõrrandiga. Võrrandit,

$$y' = g(x, y)$$

kus $g(x, y)$ on kas murdlineaarne avaldis x ja y suhtes või selle funktsioon

$$g(x, y) = F\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right),$$

saab taandada homogeenseks võrrandiks (või eralduvate muutujatega võrrandiks) muutuja vahetusega, see oleneb determinandi D väärtusest:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \text{m. v.} \quad x = X + u \quad y = Y + v,$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{m. v.} \quad z = a_1x + a_2y.$$

Kui $D \neq 0$, muutuja vahetuses sisalduvad konstandid $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ tuleb määrata nii, et muutujatele $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ üle minnes on vabaliikmed saadavas murdlineaarses avaldises võrdsed nulliga. Selleks tuleb lahendada lineaarne võrrandisüsteem tundmatute konstantide u ja v suhtes:

$$\begin{cases} a_1u + a_2v + a_3 = 0 \\ b_1u + b_2v + b_3 = 0 \end{cases}$$

Seega funktsiooni F argument peale muutuja vahetust on kujul

$$\frac{a_1X + a_2Y}{b_1X + b_2Y}.$$

Kui $D = 0$, ei saa u, v üheselt määrata ja kasutatakse muutuja vahetust $z = a_1x + a_2y$. Peale muutuja vahetust saame eralduvate muutujatega võrrandi.

Näide 5.15. Leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab tingimust $y(0) = -2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{-2x + y + 2}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{m. v.} \quad z = 2x - y, \quad z' = 2 - y', \quad \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}.$$

$$2 - \frac{dz}{dx} = \frac{z + 1}{-z + 2},$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{z + 1}{-z + 2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2z + 4 - z - 1}{-z + 2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-3z + 3}{2 - z}. \quad |\cdot dx$$

$$dz = \frac{-3z + 3}{2 - z} dx, \quad |: \frac{-3z + 3}{2 - z}$$

$$\frac{2 - z}{3(1 - z)} dz = dx,$$

$$\int \frac{2 - z}{3(1 - z)} dz = \int dx.$$

Integreerimiseks jagame arvu 2 kaheks liidetavaks, mis võimaldab murru esitada kahe murru summana:

$$\int \frac{1 - z + 1}{3(1 - z)} dz = \int dx,$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1 - z}{1 - z} dz + \frac{1}{3} \int \frac{dz}{1 - z} = \int dx,$$

$$\frac{1}{3} z - \frac{1}{3} \ln|1 - z| = x + C. \quad |\cdot 3$$

$$z - \ln|1 - z| = 3x + C,$$

Minnes tagasi endisele muutujale, kui $z = 2x - y$, saame üldlahendi kujul

$$2x - y - \ln|1 - 2x + y| = 3x + C.$$

Erilahendi saamiseks asendame algtingimuse üldlahendisse:

$$y(0) = -2: \ 2 \cdot 0 + 2 - \ln|1 - 2 \cdot 0 - 2| = 3 \cdot 0 + C,$$

$$C = 2 - \ln|-1| = 2.$$

$$2x - y - \ln|1 - 2x + y| = 3x + 2,$$

$$-x - y - \ln|1 - 2x + y| - 2 = 0,$$

$$x + y + \ln|1 - 2x + y| + 2 = 0.$$

Näide 5.16. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y' = \frac{x - y}{x + y - 3} + 1.$$

Viime võrrandi paremal pool oleva murru ühisele nimetajale, saame

$$y' = \frac{x - y + x + y - 3}{x + y - 3} = \frac{2x - 3}{x + y - 3}.$$

Teeme muutuja vahetuse vastavalt determinandi väärtusele

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\text{m.v.} \ x = X + u, \quad y = Y + v, \quad dx = dX, \ dy = dY.$$

$$Y' = \frac{2X + 2u - 3}{X + u + Y + v - 3},$$

$$\begin{cases} 2u - 3 = 0 \\ u + v - 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; u = \frac{3}{2}, \quad v = 3 - u = \frac{3}{2}.$$

Saadud võrrand on homogeenne diferentsiaalvõrrand kujul:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X}{X + Y} = \frac{2X}{X\left(1 + \frac{Y}{X}\right)},$$

Lahendame homogeense võrrandi

$$\text{m. v.} \quad \frac{Y}{X} = z, \qquad \frac{dY}{dX} = z + X\frac{dz.}{dX}$$

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{2}{1 + z}, \qquad |\cdot dX$$

$$zdX + Xdz = \frac{2}{1 + z}dX,$$

$$Xdz = \left(\frac{2}{1 + z} - z\right)dX,$$

$$Xdz = -\left(\frac{z^2 + z - 2}{1 + z}\right)dX, \quad \Big| : X\left(\frac{z^2 + z - 2}{1 + z}\right)$$

$$\frac{1 + z}{z^2 + z - 2}dz = -\frac{dX}{X},$$

$$\int \frac{1 + z}{z^2 + z - 2}dz = -\int \frac{dX}{X}.$$

Võrrandi vasaku poole integreerimiseks peame nimetaja lahutama teguriteks ning murru lahutama osamurdude summaks

$$z^2 + z - 2 = (z + 2)(z - 1),$$

$$\int \frac{1 + z}{z^2 + z - 2}dz = \int \frac{A}{z + 2}dz + \int \frac{B}{z - 1},$$

$$1 + z = A(z - 1) + B(z + 2),$$

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z + 2} + \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z - 1} = -\int \frac{dX}{X},$$

$$\frac{1}{3}\ln|z + 2| + \frac{2}{3}\ln|z - 1| = -\ln|X| + \ln C, \quad |\cdot 3$$

$$\ln|z + 2| + 2\ln|z - 1| = -3\ln|X| + \ln C,$$

$$\ln|(z + 2)(z - 1)^2| = \ln\left|\frac{C}{X^3}\right|, \qquad |\uparrow e$$

$$(z + 2)(z - 1)^2 = \frac{C}{X^3},$$

Asendades muutuja vahetuse avaldise tagasi, saame

$$\left(\frac{Y}{X}+2\right)\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2=\frac{C}{X^3},$$

$$\left(\frac{Y+2X}{X}\right)\left(\frac{Y-X}{X}\right)^2=\frac{C}{X^3},$$

$$\frac{(Y+2X)(Y-X)^2}{X^3}=\frac{C}{X^3},$$

$$(Y+2X)(Y-X)^2=C,$$

Lõpuks asendame esialgse muututja vahetuse avaldise:

$$x=X+\frac{3}{2},\quad y=Y+\frac{3}{2}.$$

$$\left(y-\frac{3}{2}+2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)\left(y-\frac{3}{2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)^2=C.$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on kujul

$$\left(y+2x-\frac{9}{2}\right)(y-x)^2=C.$$

5.3.4. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.14.

Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.

Lineaarses diferentsiaalvõrrandis on nii otsitav funktsioon kui ka otsitava funktsiooni tuletis esimeses astmes.

Hariliku esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{P_0(x)y'+P_1(x)y=Q(x)},$$

kus $P_0(x), P_1(x)$ ja $Q(x)$ on antud funktsioonid ja $y=y(x)$ on otsitav.

Teoreem 5.2.

Olgu võrrandi $P_0(x)y'+P_1(x)y=Q(x)$ kordajad $P_0(x), P_1(x)$ ja $Q(x)$ **pidevad** funktsioonid vahemikus (a,b), kusjuures $P_0(x)\neq 0$ kõigi $x\in(a,b)$ korral.
Olgu $x_0\in(a,b)$ ja $y_0\in(-\infty,\infty)$ mingid etteantud arvud.
Siis on **võrrandil**

$$\boldsymbol{P_0(x)y'+P_1(x)y=Q(x)}$$

olemas **parajasti üks lahend**

$$\boldsymbol{y=y(x)},$$

mis rahuldab tingimust

$$\boldsymbol{y(x_0)=y_0}.$$

Kui kordaja $P_0(x)$ erineb nullist, saab võrrandi sellega läbi jagada, tulemuseks on **lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand kujul**

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}, \tag{5.5}$$

kus $P(x), Q(x)$ on funktsioonid, mis sõltuvad muutujast x.
Funktsiooni $\boldsymbol{Q(x)}$ nimetatakse **võrrandi vabaliikmeks**.
Kui $\boldsymbol{Q(x) \equiv 0}$, siis nimetatakse võrrandit (5.5) **lineaarseks homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks**. Siin omab sõna "homogeenne" teistsugust tähendust (võrrelda võib homogeensete ja mittehomogeensete lineaarvõrrandisüsteemidega). Võrrandi (5.5) lahendamiseks vaatame kolme erinevat meetodit.

1. **Integreeruvuteguriga korrutamise meetod**.

Vaatame funktsiooni

$$\mu = e^{p(x)},$$

kus funktsioon $p(x)$ on funktsiooni $P(x)$ mingi algfunktsioon: $p'(x) = P(x)$.
Funktsiooni $\mu = e^{p(x)}$ nimetatakse lineaarse diferentsiaalvõrrandi (5.5) **integreeruvusteguriks**.
Korrutame võrrandit (5.5) funktsiooniga $e^{p(x)}$, saame võrrandi kujul

$$y'e^{p(x)} + P(x)ye^{p(x)} = Q(x)e^{p(x)}.$$

Võrrandi vasak pool on korrutise $ye^{p(x)}$ tuletis, seega saame kirjutada võrrandi kujul

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{p(x)}\right) = Q(x)e^{p(x)}.$$

Integreerides saame

$$ye^{p(x)} = \int Q(x)e^{p(x)}\,dx + C.$$

Otsitava funktsiooni y avaldamiseks korrutame võrrandi mõlemat poolt suurusega $e^{-p(x)}$, saame

$$y = e^{-p(x)}\left(\int Q(x)e^{p(x)}\,dx + C\right)$$

ehk

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx + C\right).$$

Oleme saanud valemi lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks, üldlahendi samal kujul saame ka kasutades muutuja vahetusega või konstantide varieerimise meetodiga lahendust.

2. **Muutuja vahetusega lahendus**.

Otsitav funktsioon on kahe esialgu tundmatu funktsiooni $u(x)$ ja $v(x)$ korrutis:

$$\boldsymbol{y = uv}, \quad u = u(x), v = v(x).$$

Meie eesmärgiks on leida nende kahe funktsiooni kujud. Selleks kõigepealt leiame korrutise tuletise:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}}. \tag{5.6}$$

Asendame võrrandisse (5.6) ja toome muutuja v sulgude ette:

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+\ P(x)uv=Q(x),$$

$$v\left(\frac{du}{dx}+\ P(x)u\right)+u\frac{dv}{dx}=Q(x).$$

Funktsioonide u ja v kohta pole midagi eeldatud.
Nõuame, et sulgudes olev avaldis võrduks nulliga, siis saame kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\frac{du}{dx}+\ P(x)u=0, \tag{5.7}$$

$$u\frac{dv}{dx}=Q(x). \tag{5.8}$$

Võrrand (5.7) on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand $u=u(x)$ suhtes. Eraldame muutujad ja integreerime, saame

$$\frac{du}{u}=-\ P(x)dx, \qquad \ln|u|=-\int P(x)dx,$$

$$\boldsymbol{u=e^{-\int P(x)dx}}. \tag{5.9}$$

Asendame saadud u avaldise võrrandisse (5.8), saame

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x), \qquad \frac{dv}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$\boldsymbol{v=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C}.$$

Me otsime lahendit kujul $\boldsymbol{y=u\cdot v}$, seega lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{y'+P(x)y=Q(x)}$$

lahend on kujul

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx+C\right).}$$

Võrrandi praktilisel lahendamisel võib korrata iga kord seda mõttekäiku, samuti on võimalik võrrandi lahendamisel asendada lahendivalemisse konkreetsed funktsioonid $P(x)$ ja $Q(x)$ ja leida lahend valemi järgi.

3. Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod).

Konstandi varieerimise meetodil lahendus taandub samuti kahe eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Kõigepealt lahendatakse vastav homogeenne võrrand:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}+P(x)y=0}.$$

See on eralduvate muutujatega võrrand:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln C,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx,$$

$$\frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx},$$

$$\boldsymbol{y_h = Ce^{-\int P(x)dx}}. \tag{5.10}$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (5.5) lahendit otsime kujul (5.10), kus **konstanti C loeme argumendi x funktsiooniks**. Seega

$$\boldsymbol{y = C(x)e^{-\int P(x)dx}},$$

Leiame tuletise otsitavast funktsioonist arvestades, et $C(x)$ on tundmatu funktsioon, mis sõltub argumendist x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}\, e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}\big(-P(x)\big).$$

Asendame y ja dy/dx mittehomogeensesse diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$\frac{dC(x)}{dx}\, e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot \big(-P(x)\big) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx},$$

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C.$$

Asendame saadud $C(x)$ avaldise lahendisse (5.10), saame

$$\boldsymbol{y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C\right) e^{-\int P(x)dx}}.$$

Saime lineaarse võrrandi üldlahendi jaoks sama valemi.

Näide 5.17. Lahendada lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$y' + y = x.$$

1) Lahendame kõigepealt võrrandi **integreeruvusteguriga korrutades.**
Kuna antud võrrandis $P(x) = 1$ ja $Q(x) = x$, siis integreeruvustegur $e^{p(x)}$ on

$$e^{p(x)} = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x,$$

Siis korrutame võrrandi vasakut ja paremat poolt funktsiooniga e^x, saame

$$e^x y' + e^x y = e^x x,$$

kuna $e^x y' + e^x y = (e^x y)'$, saame võrrandi kujul

$$\frac{d}{dx} e^x y = xe^x,$$

integreerimisel saame

$$e^x y = e^x(x - 1) + C$$

ehk

$$y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

2) **Konstandi varieerimise meetodil** jaguneb lahendus kaheks osaks:
2.1) **vastav** lineaarne **homogeenne** võrrand on kujul $y' + y = 0$, mille lahendamisel saame

$$\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} + dx = 0,$$

$$\ln|y| + x = \ln C,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x,$$

$$\frac{y}{C} = e^{-x}, \quad y_h = Ce^{-x}.$$

2.2) **erilahendit** otsime kujul

$$y_h = C(x)e^{-x}.$$

Asendades y_h esialgsesse võrrandisse $y' + y = x$, saame

$$y'_h = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x},$$

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = x,$$

$$C'(x)e^{-x} = x,$$

$$C'(x) = xe^{x},$$

$$C(x) = \int xe^{x}\, dx = e^{x}(x-1) + C_1,$$

$$y = (e^{x}(x-1) + C_1)e^{-x} = x - 1 + C_1e^{-x}.$$

Lahendamiseks võib ka kohe funktsioonid asendada lahendivalemisse. Seega

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + C\right)e^{-\int P(x)dx} = \left(\int xe^{\int dx}\, dx + C\right)e^{-\int dx} =$$

$$= \left(\int xe^{x}\, dx + C\right)e^{-x} = (e^{x}(x-1) + C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Näide 5.18. Lahendada lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}\,.$$

Lahendame võrrandi muutuja vahetusega:

$$y = uv, \qquad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Asendame võrrandisse, saame

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}uv = x\sqrt{x^2+1},$$

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}\cdot u\right) + u\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2+1},$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}u = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2x}{x^2+1}dx,$$
$$\ln|u| = \ln|x^2+1|,$$
$$u = x^2 + 1.$$
$$(x^2+1)\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2+1},$$
$$dv = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}dx,$$
$$dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$
$$v = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Lahendiks on u ja v korrutis, seega $y = uv = (x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1} + C\right)$.

Märkus. Mõned diferentsiaalvõrrandid kujul

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

mis on mittelineaarsed ühe muutuja suhtes, võivad osutuda lineaarseks teise muutuja suhtes. Siis võib vaadelda näiteks sõltumatu muutuja osas suurust y, siis $dy \neq 0$ ning jagades võrrandit suurusega dy, jõuame lineaarse võrrandini, kus otsitavaks on funktsioon $x = x(y)$.

Näide 5.19. Lahendada lineaarne diferentsiaalvõrrand

$$dx - (x\cos(y) + 2\sin(2y))dy = 0.$$

Jagame võrrandit suurusega dy, saame lineaarse võrrandi kujul

$$\frac{dx}{dy} - (\cos(y))x = \sin(2y).$$

Lahendamiseks asendame funktsioonid lahendivalemisse. Selles ülesandes

$$P(y) = -\cos(y), Q(y) = \sin(2y),$$

seega

$$x = \left(\int Q(y) \cdot e^{\int P(y)dy}\, dy + C\right) e^{-\int P(y)dy}$$

$$= \left(\int \sin(2y) \cdot e^{\int -\cos(y)dy}\, dy + C\right) e^{-\int -\cos(y)dy} =$$

$$= \left(\int \sin(2y) \cdot e^{-\sin(y)}\, dy + C\right) e^{\sin(y)}.$$

Leiame integraali

$$\int \sin(2y) \cdot e^{-\sin(y)}\, dy.$$

Selleks teeme muutuja vahetuse

$$t = \sin(y)\,, dt = \cos(y)\, dy.$$

Kuna $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$, saame peale muutuja vahetust ja ositi integreerimist

$$\int \sin(2y)\cdot e^{-\sin(y)}\,dy = 2\int t\cdot e^{-t}\,dt = 2(-te^{-t}) + 2\int e^{-t}\,dt = -2te^{-t} - 2e^{-t} =$$

$$= -2\sin(y)\,e^{-\sin(y)} - 2e^{-\sin(y)} + C_1,$$

kus C_1 on suvaline konstant, mille võtame $C_1 = 0$, sest lahendivalemis on konstant C juba olemas. Asendame saadud tulemuse lahendivalemisse, saame võrrandi lahendiks järgmise avaldise

$$x = \left(-2\sin(y)\,e^{-\sin(y)} - 2e^{-\sin(y)} + C\right)e^{\sin(y)} = Ce^{\sin(y)} - 2(1+\sin(y)).$$

5.3.4.1. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID KEEMIAS*

Enamus keemilisi reaktsioone toimuvad mitmes elementaarses järgus ja nende kirjeldus protsessi kiiruse kohta hõlmab esimest järku diferentsiaalvõrrandit. Esimest järku protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

Aine A koosneb alghetkel $(t = 0)$ a molekulist ehk

$$[A]_0 = a$$

ja tema kontsentratsioon ajahetkel t on $a - x$ ehk

$$[A] = a - x.$$

Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema molekulide arv alghetkel on 0:

$$[B]_0 = 0$$

ja ajahetkel t on molekulide arv y ehk

$$[B] = y.$$

Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema molekulide arv alghetkel on 0:

$$[C]_0 = 0$$

ja ajahetkel t on $x - y$:

$$[C] = x - y.$$

Sellist protsessi saab modelleerida kahe esimest järku diferentsiaalvõrrandiga, millest esimene on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand ja teine on lineaarne.

$$\begin{cases} \dfrac{d[A]}{dt} = -k_1[A] \\ \dfrac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B] \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2 y \end{cases}$$

Lahendades esimese võrrandi süsteemist, saame

$$a - x = ae^{-k_1 t},$$

seejärel asendame saadud suuruse teise võrrandisse, saame muutuja y suhtes lineaarse võrrandi:

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}. \tag{5.11}$$

Lahendame selle võrrandi konstandi varieerimise meetodil. Lahendamiseks peame eeldama, et $k_1 \neq k_2$. Kõigepealt lahendame võrrandile (5.11) vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi:

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = 0, \qquad \Big| \cdot \frac{dt}{y} \tag{5.12}$$

$$\frac{dy}{y} = -k_2 dt.$$

Integreerides saame:

$$\ln|y| = -k_2 t + C_1.$$

Homogeense diferentsiaalvõrrandi (5.12) üldlahendiks on sellisel juhul

$$y = C_1 e^{-k_2 t}. \tag{5.13}$$

Otsime nüüd esialgse diferentsiaalvõrrandi (5.11) lahendit kujul

$$y = C_2(t) e^{-k_2 t},$$

asendame konstandi C_1 uue otsitava funktsiooniga muutujast t. See lahend peab rahuldama ka diferentsiaalvõrrandit (5.11). Asendame lahendi võrrandisse (5.11) ja teeme järgmised teisendused:

$$\frac{d(C_2(t)e^{-k_2 t})}{dt} + k_2 C_2(t) e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$\frac{d\big(C_2(t)\big)}{dt} e^{-k_2 t} - k_2 C_2(t) e^{-k_2 t} + k_2 C_2(t) e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$\frac{d(C_2(t))}{dt} e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$\frac{d(C_2(t))}{dt} = k_1 a e^{(k_2 - k_1)t}.$$

Integreerides saame:

$$C_2(t) = \frac{ak_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + C_3,$$

kus C_3 on integreerimiskonstant.
Asendame saadud $C_2(t)$ võrrandisse (5.13), saame diferentsiaalvõrrandi (5.11) lahendi kujul:

$$y = \left(\frac{ak_1}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + C_3\right) e^{-k_2 t}. \tag{5.14}$$

Leiame C_3 väärtuse kasutades algtingimust $y(0) = 0$, saame:

$$C_3 = -\frac{ak_1}{k_2 - k_1}.$$

Asendame saadud konstandi C_3 väärtuse võrrandisse (5.14) ja saame lahendiks:

$$y = \frac{ak_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Lahendist on näha, miks pidime eeldama, et $k_1 \neq k_2$. Kui $k_1 = k_2$, saame lahendiks $y = [A]_0 k_1 t e^{-k_1 t}$. Saime ainete A, B ja C kontsentratsioonid ajahetkel t:

$$\begin{cases} [A] = [A]_0 e^{-k_1 t}, \\ [B] = \begin{cases} \dfrac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right), k_1 \neq k_2, \\ [A]_0 k_1 t e^{-k_1 t}, \qquad\qquad k_1 = k_2, \end{cases} \\ [C] = [A]_0 - [A] - [B]. \end{cases}$$

5.3.5. BERNOULLI DIFERENTSIAALVÕRRAND

Definitsioon 5.15.

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^a, \tag{5.15}$$

kus P ja Q on teadaolevad argumendi x funktsioonid, mis on pidevad vahemikus (c, d) ning a on mingi **reaalarv**. Eeldame, et $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest siis on tegemist lineaarse võrrandiga).

Bernoulli võrrand on **teisendatav lineaarseks võrrandiks muutuja vahetusega**

$$z = y^{1-a},$$

seejuures eeldame, et $y \neq 0$.

Lahendamiseks korrutame võrrandit (5.15) suurusega y^{-a}

$$\frac{dy}{dx} y^{-a} + P(x) y^{1-a} = Q(x),$$

ja teeme muutuja vahetuse:

$$z = y^{1-a}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-a) y^{-a} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} y^{-a} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{1-a}.$$

Asendame võrrandisse uue muutuja ja diferentsiaali:

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{1-a} + P(x)z = Q(x),$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-a)P(x)z = (1-a)Q(x).$$

Saime z suhtes lineaarse võrrandi. Kui $a > 0$, siis on võrrandi lahendiks ka $y = 0$.

Näide 5.20. Lahendada Bernoulli diferentsiaalvõrrand

$$y' - 2xy = 2x^3 y^2.$$

Võrrandis $a = 2$. Lahendamiseks kõigepealt jagame võrrandit suurusega $|: y^2$, saame

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3,$$

$$\text{m.v.} \quad z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx},$$

$$-z' - 2xz = 2x^3,$$
$$z' + 2xz = -2x^3.$$
Saime lineaarse diferentsiaalvõrrandi, mille üldlahendiks on
$$z = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$
$$z = \left(\int (-2x^3) \cdot e^{x^2} dx + C\right) \cdot e^{-x^2} = \left(-x^2 e^{x^2} + e^{x^2} + C\right) e^{-x^2} = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}.$$
$$y = \frac{1}{1 - x^2 + Ce^{-x^2}}.$$
Lisaks sellele rahuldab võrrandit konstantne funktsioon $y = 0$, mida ei ole võimalik saada üldlahendist konstandi C mitte mingil konkreetsel väärtusel.

Näide 5.21. Lahendada Bernoulli diferentsiaalvõrrand
$$x^2(x-1)y' - y^2 - x(x-2)y = 0.$$
Jagame võrrandit suurusega $|: x^2(x-1)y^2$
$$\frac{y'}{y^2} - \frac{x(x-2)}{yx^2(x-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)},$$
$$a = 2, \quad z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}.$$
$$z' - \frac{x-2}{x(x-1)} z = \frac{1}{x^2(x-1)},$$
$$z = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx},$$
$$z = \left(\int \frac{1}{x^2(x-1)} \cdot e^{\int -\frac{x-2}{x(x-1)}dx} dx + C\right) \cdot e^{-\int -\frac{x-2}{x(x-1)}dx},$$
$$\int -\frac{x-2}{x(x-1)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x-1} dx,$$
$$-\frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1},$$
$$-(x-2) = A(x-1) + Bx, \qquad A = -2, \quad B = 1.$$
$$\int -\frac{x-2}{x(x-1)} dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -2\ln|x| + \ln|x-1| = \ln\frac{x-1}{x^2},$$
$$e^{\ln\frac{x-1}{x^2}} = \frac{x-1}{x^2}.$$
$$z = \left(\int \frac{1}{x^2(x-1)} \cdot \frac{x-1}{x^2} dx + C\right) \cdot \frac{x^2}{x-1} = \left(-\frac{1}{3x^3} + C\right) \cdot \frac{x^2}{x-1},$$
$$y = \frac{x^2}{1 + C(x-1)}.$$

Näide 5.22. Lahendada võrrand $3x^2dx - (x^3 + y + 1)dy = 0$.

Jagame võrrandit kõigepealt suurusega dy, saame võrrandi

$$3x^2\frac{dx}{dy} - x^3 - y - 1 = 0,$$

Jagame võrrandit suurusega $3x^2$, saame

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x = \frac{y+1}{3}x^{-2}.$$

Tegemist on Bernoulli võrrandiga, kus $x = x(y)$ on otsitav funktsioon ja $a = -2$. Lineaarse võrrandi saamiseks teeme muutuja vahetuse

$$z = x^{1-(-2)} = x^3,$$

$$\frac{dz}{dx} = 3x^2\frac{dx}{dy}.$$

Lineaarne võrrand on kujul

$$z' - z = y + 1.$$

Lineaarse võrrandi lahendiks saame funktsiooni

$$z = Ce^y - y - 2,$$

Asendame muutuja z avaldisega x^2, saame ülesande lahendiks funktsiooni

$$x = (Ce^y - y - 2)^{\frac{1}{3}}.$$

5.3.6. EKSAKTNE DIFERENTSIAALVÕRRAND

Definitsioon 5.16.

Diferentsiaalvõrrandit kujul $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ nimetatakse **eksaktseks** ehk **täisdiferentsiaaliga** võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $\boldsymbol{u(x,y)}$, nii et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.} \tag{5.16}$$

Eksaktsuse tingimus.

Kui teadaolevad funktsioonid M ja N ning nende osatuletised $\partial M/\partial y$ ja $\partial N/\partial x$ on pidevad muutujate x, y mingis piirkonnas D, siis **võrrandi eksaktsuseks piirkonnas D on tarvilik ja piisav**, et iga $(x,y) \in D$ korral **kehtib võrdus**

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}.$$

Eksaktse võrrandi võib kirjutada ka kujul

$$du(x,y) = 0,$$

võrrandi **üldlahend** on kujul

$$\boldsymbol{u(x,y) = C}.$$

Saadud võrdus määrab eksaktse võrrandi üldlahendi muutujate x, y piirkonnas, milles $M^2(x,y)dx + N^2(x,y)dy \neq 0$. Eksaktse võrrandi mistahes lahend on saadav üldlahendist konstandi C mingil konkreetsel väärtusel (konstant C saab omada ainult niisuguseid väärtusi, mis kuuluvad funktsiooni $u(x,y)$ väärtuste piirkonda). Funktsiooni $u(x,y)$ leidmiseks on mitmeid meetodeid. Vaatleme lähemalt neist kahte.

1) Lähtume võrdusest (5.16) ja leiame funktsiooni $u(x,y)$ järgmise võrrandisüsteemi abil:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$$

Kõigepealt integreerime esimese võrduse mõlemaid pooli muutuja x järgi, kusjuures loeme muutuja y konstantseks.

$$\boldsymbol{u(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)}, \tag{5.17}$$

kus $C(y)$ on suvaline funktsioon muutujast y. Valime $C(y)$ nii, et oleks täidetud ka teine pool seosest:

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)}.$$

Selleks diferentseerime võrduse (5.17) mõlemal poolel olevat avaldist muutuja y järgi ja võrdsustame tulemuse funktsiooniga $N(x,y)$.
Saadavast võrrandist leiame $\boldsymbol{C(y)}$ ja seejärel võrduse (5.17) abil kirjutame välja funktsiooni $\boldsymbol{u(x,y)}$.

2) Lähtume valemist

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

või valemist

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy.$$

Arvud x_0 ja y_0 võib valida vabalt, kuid nii, et punkt (x_0, y_0) kuuluks muutujate x, y piirkonda, milles funktsioonid $M, N, \partial M/\partial y$ ja $\partial N/\partial x$ on pidevad.

Näide 5.23. Lahendada võrrand $\underbrace{(x^3 + xy^2)}_{M} dx + \underbrace{(x^2y + y^3)}_{N} dy = 0$.

Antud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2) = 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3) = 2xy.$$

Järelikult

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = du(x,y).$$

Üheaegselt peavad kehtima võrdused

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^3+xy^2,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+y^3,$$

loeme y parameetriks ja integreerime x järgi

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+C(y)=\int(x^3+xy^2)dx+C(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+C(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+C(y)\right)=x^2y+y^3,\ \ x^2y+C'(y)=x^2y+y^3,$$

$$C'(y)=y^3,\ \ C(y)=\frac{y^4}{4}+C_1,\ \ C_1=0.$$

$$u(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4},$$

Võrrandi üldlahend on kujul $u(x,y)=C$ ehk

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=C.$$

Näide 5.24. Lahendada võrrand $\underbrace{(x+2y)}_{N}dy+\underbrace{(y+3x^2)}_{M}dx=0.$

Kontrollime eksaktsuse tingimust:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y+3x^2)=1,\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x+2y)=1.$$

Võrrandi lahend avaldub kujul

$$u(x,y)=\int(x+2y)dy+C(x)=yx+y^2+C(x).$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(yx+y^2+C(x)\big)=y+3x^2,\ \ \ y+C'(x)=y+3x^2,\qquad C(x)=x^3,$$

$$u(x,y)=yx+y^2+x^3.$$

Üldlahendiks on

$$yx+y^2+x^3=C.$$

5.4. NUMBRILISED MEETODID

Analüütiline lahendus on alati parem kui numbriline, sest analüütilist lahendit saame kasutada mistahes sõltumatu muutuja numbriliste väärtuste korral, numbriline lahend arvutatakse tabelina konkreetsete muutuja väärtuste korral.

5.4.1. EULERI MEETOD

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{5.18}$$

mis rahuldab algtingimust $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$, otsitavaks funktsiooniks on $\boldsymbol{y = y(x)}$. Võrrandi (5.18) parem pool $f(x, y)$ olgu pidev muutujate x, y piirkonnas D ning arvud x_0 ja y_0 olgu sellised, et $(x_0, y_0) \in D$.

Tahame teada funktsiooni väärtust punktis $\boldsymbol{x = b}$, seega võtame lõigu $[x_0, b]$ ja jaotame $\underline{n}$ võrdseks osaks

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b, x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots < x_n.$$

Tähistame vahed

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x = h.$$

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Olgu mingi funktsioon $y = \varphi(x)$ võrrandi (18) mingi ligikaudne lahend ja

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n).$$

Tähistame

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Asendame võrrandi (18) tuletise igas punktis $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ lõplike vahede suhtega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y), \quad \Delta y = f(x, y)\Delta x.$$

Kui $x = x_0$, siis

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = f(x_0, y_0),$$

$$\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\Delta x,$$

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h,$$

$$\boldsymbol{y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.}$$

Teada on y_0, x_0, h. Kui $x = x_1$, siis

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x} = f(x_1, y_1),$$

$$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\Delta x,$$

$$y_2 - y_1 = f(x_1, y_1)h,$$

$$\boldsymbol{y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h.}$$

Teada on y_1, x_1, h. Analoogiliselt leiame

$$\boldsymbol{y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h, \dots, y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.}$$

Saime valemi diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks Euleri meetodil

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.}$$

Seega on lahendi ligikaudsed väärtused punktides $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ leitud. Ühendame koordinaattasandil punktid $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Saame integraalkõvera ligikaudse

kujutisena murdjoone. Seda murdjoont nimetatakse Euleri murdjooneks. Mida väiksemad sammud me teeme, seda lähedasem on Euleri murdjoon integraalkõverale.
Ülesannet võib lahendada ka graafiliselt, konstrueerides Euleri murdjoone. Joonistame punkti $M_0(x_0, y_0)$ läbiva joonelemendi, see on joon tõusuga $f(x_0, y_0)$. Liigume mööda joont argumendi x kasvavate väärtuste suunas punktist M_0 paremale punktini $M_1(x_1, y_1)$. Kordame sama tegevust: joonistame punkti $M_1(x_1, y_1)$ läbiva joonelemendi ja liigume selle sihis paremale järgmise punktini $M_2(x_2, y_2)$ jne.

Näide 5.25. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = y + x$$

ligikaudne lahend kohal $x = 1$, mis rahuldaks algtingimust $y(0) = 1$.

Jaotame lõigu [0,1] kümneks osaks. Siis

$$x_k = 0; 0{,}1; \ldots; 1, \quad h = 0.1, \quad f(x, y) = y + x.$$

$$\frac{dy}{dx} = y + x,$$

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h.$$

x_k	y_k	$f(x_k, y_k) = x_k + y_k$	$f(x_k, y_k)h = (x_k + y_k)h$	$y_{k+1} = y_k + (x_k + y_k)h$
0	**1**	**1**	**0.1**	**1.1**
0.1	**1.1**	**1.2**	**0.12**	**1.22**
0.2	**1.22**	**1.42**	**0.142**	**1.362**
0.3	**1.362**	**1.662**	**0.1662**	**1.5282**
0.4	**1.5282**	**1.9282**	**0.1928**	**1.721**
0.5	**1.721**	**2.221**	**0.2221**	**1.9431**
0.6	**1.9431**	**2.5431**	**0.2543**	**2.1974**
0.7	**2.1974**	**2.8974**	**0.2897**	**2.4871**
0.8	**2.4871**	**3.2871**	**0.3287**	**2.8158**
0.9	**2.8158**	**3.7158**	**0.37158**	**3.1874**
1.0	3.1874 **Ligikaudne lahend** $y(1) \approx 3{,}1874$			

Täpse lahendi (analüütilise lahendi) saamiseks lahendamine võrrandi $y' = y + x$. Tegemist on lineaarse diferentsiaalvõrrandiga, mille lahendame muutuja vahetusega.

$$y = uv \;\; y' = u'v + v'u, \qquad u'v + v'u = uv + x \;\; v(u' - u) + uv' = x.$$

Lahendame kahes osas: 1) $(u' - u) = 0$, 2) $uv' = x$,

$$1)\ (u' - u) = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = u,$$

$$du = udx,$$

$$\frac{du}{u} = dx,$$

$$\ln|u| = x,$$

$$u = e^x.$$

$$2)\ uv' = x,$$
$$v'e^x = x,$$
$$\frac{dv}{dx}e^x = x,$$
$$dv = xe^{-x}dx,$$
$$\int dv = \int xe^{-x}dx\,.$$
Paremal pool võrdusmärki oleva integraali ositi integreerimiseks tähistame
$$u = x, \qquad dv = e^{-x}dx, \quad du = dx, \quad v = -e^{-x}.$$
$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx$$
$$v = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C,$$
$$y = uv = e^x \cdot [(-e^{-x})(x+1) + C] = -x - 1 + Ce^x,$$
$$y(0) = 1:\ 1 = -0 - 1 + Ce^0, \qquad C = 2.$$
Üldlahend: $y = -x - 1 + Ce^x$, **erilahend** $y = -x - 1 + 2e^x$.
Arvutame nüüd erilahendi väärtuse kohal
$$x = 1:\ y(1) = -1 - 1 + 2e^1 = 2e - 2 = 3{,}43656.$$
Ligikaudne lahend on täpsem, kui suurendame osalõikude arvu, sellisel juhul on mõistlikum kasutada tabelarvutusprogrammide abi, et vältida arvutusvigade tekkimist.

5.4.2. RUNGE-KUTTA MEETODID

Meetodid on algoritmide pere harilike diferentsiaalvõrrandite (ja harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemide) ilmutatud või ilmutamata ligikaudse lahendi numbriliseks leidmiseks algtingimustega ülesande korral. Nad põhinevad iteratsioonil. Meetodi algse kuju töötas välja Saksa matemaatik Carl Runge aastal 1895 ning seda üldistas Martin Wilhelm Kutta aastal 1901. Kõige suurema täpsusega on 4. järku klassikaline Runge-Kutta meetod, see meetod on nii laialt levinud, et seda nimetatakse sageli lihtsalt **Runge-Kutta meetodiks**.
Olgu meil Cauchy ülesanne
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0\,.$$
Siis funktsiooni väärtus järgmises punktis arvutatakse järgmise valemi järgi:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\cdot(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3),$$
h on sammu suurus x järgi.

Näide 5.26. Leida võrrandi

$$y' = y + x$$

ligikaudne lahend Runge-Kutta meetodiga kohal $x = 1$, mis rahuldaks algtingimust

$$y(0) = 1.$$

Tegemist on sama ülesandega, mis näites 5.25. Seekord jaotame lõigu [0,1] viieks osaks:

$$x_k = 0; 0{,}2; \dots; 1, \quad h = 0.2, \quad f(x,y) = y + x.$$

$$\frac{dy}{dx} = y + x,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) = x_n + y_n,$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}k_1,$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) = x_n + \frac{h}{2} + y_n + \frac{h}{2}k_2,$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) = x_n + h + y_n + hk_3.$$

x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
0	**1**	**1**	**1,2**	**1,22**	**1,444**	**1,2428**
0,2	**1,2428**	**1,4428**	**1,68708**	**1,711508**	**1,9851016**	**1,583636**
0,4	**1,583636**	1,983636	2,281999512	2,311835871	2,646003094	2,044212913
0,6	2,044213	2,644213	3,008634204	3,045076333	3,453228179	2,651041652
0,8	2,651042	3,451042	3,896145817	3,940656233	4,439172898	3,436502273
1,0	**3,436502** Ligikaudne lahend $\boldsymbol{y(1) \approx 3{,}436502}$					

Täpne lahend oli $y = -x - 1 + 2e^x$, $(1) = 2e - 2 = 3{,}43656$. Kuna tegemist oli täpsema arvutusmeetodiga, on lahend ka poole vähema osalõikude arvu korral täpsem.

Arvutustabeli võib teha kasutades ka mõnda tabelarvutusprogrammi (Microsoft Excel või muud). Tuleb kirja panna valemid esimese rea jaoks ja teises reas valem, mis viitab esimese rea viimasele veerule (y_{n+1}), ülejäänud valemid tuleb kopeerida soovitud arvu kordi.

0	**1**	**1**	**1,2**	**1,22**	**1,444**	**1,2428**
0,2	**1,2428**	1,4428	1,68708	1,711508	1,985102	1,583636
0,4	1,583636	1,983636	2,282	2,311836	2,646003	2,044213
0,6	2,044213	2,644213	3,008634	3,045076	3,453228	2,651042
0,8	2,651042	3,451042	3,896146	3,940656	4,439173	3,436502
1	3,436502					

5.5. TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.5.1. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Konstantsete kordajatega lineaarseks homogeenseks teist järku diferentsiaal-võrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, \qquad (5.19)$$

kus a, b on konstandid.

Teoreem 5.3.
Lineaarse homogeense võrrandi (5.19) erilahendite summa on samuti selle võrrandi lahend.

Teoreem 5.4.
Kui $y_1(x)$ on lineaarse homogeense võrrandi (5.19) lahend, siis on lahendiks ka $Cy_1(x)$, kus C on suvaline konstant.

Järeldus.
Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarse homogeense võrrandi (5.19) lahendid, siis on lahendiks ka nende erilahendite lineaarne kombinatsioon $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Kui $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on **lineaarselt sõltumatud** võrrandi (5.19) **erilahendid**, siis on

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

võrrandi (5.19) **üldlahendiks**.

Kaht funktsiooni $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = 0$$

kehtib vaid

$$C_1 = C_2 = 0$$

korral. Funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, kui nad ei ole lineaarselt sõltumatud. Kahe lineaarselt sõltuva funktsiooni suhe on konstantne

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{C_2}{C_1} = C.$$

Võrrandi (5.19) lahendit on loomulik otsida selliste funktsioonide seast, mille tuletised on sarnased lähtefunktsiooniga, nii et pärast võrrandisse asendamist võiksid kõik liikmed välja koonduda. Üheks selliseks funktsiooniks on

$$y = e^{kx},$$

kus k on parameeter. Leiame selle funktsiooni tuletised:

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2e^{kx}.$$

Kui funktsioon on võrrandi lahendiks, siis võrrandisse asendamisel peame saama samasuse, seega

$$k^2e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} \equiv 0$$

ehk

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) \equiv 0.$$

Kuna $e^{kx} \neq 0$, siis samasuse kehtimiseks peab olema null teine tegur:

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Saime ruutvõrrandi, mille lahendid avalduvad kujul

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Definitsioon 5.17.

> Diferentsiaalvõrrandile (5.19) **vastavaks karakteristlikuks võrrandiks** nimetatakse ruutvõrrandit
>
> $$k^2 + ak + b = 0.$$

Diferentsiaalvõrrandi (5.19) üldlahendi leidmisel tuleb vaadelda 3 eri juhtu vastavalt karakteristliku võrrandi lahenditele:

1) reaalsed ja erinevad,
2) reaalsed ja võrdsed,
3) komplekssed.

1) Reaalsed ja erinevad karakteristliku võrrandi lahendid.

Olgu võrrandi $\boldsymbol{k^2 + ak + b = 0}$ lahendid $\boldsymbol{k_1, k_2}$. Diferentsiaalvõrrandi (5.19) **erilahendid** on

$$\boldsymbol{y_1 = e^{k_1 x}} \text{ ja } \boldsymbol{y_2 = e^{k_2 x}}.$$

Kontrollime, kas erilahendid rahuldavad võrrandit:

$$(e^{k_1 x})' = k_1 e^{k_1 x}, \quad (e^{k_2 x})' = k_2 e^{k_2 x},$$

$$(e^{k_1 x})'' = k_1^2 e^{k_1 x}, \quad (e^{k_2 x})'' = k_2^2 e^{k_2 x},$$

$$(e^{k_1 x})'' + a(e^{k_1 x})' + be^{k_1 x} = k_1^2 e^{k_1 x} + ak_1 e^{k_1 x} + be^{k_1 x} = e^{k_1 x}(k_1^2 + ak_1 + b) = 0.$$

Erilahend rahuldab võrrandit, sest

$$k_1^2 + ak_1 + b = 0,$$

sest k_1 on karakteristliku võrrandi

$$k^2 + ak + b = 0$$

lahend. Samasuguse tulemuse saame teise erilahendi jaoks:

$$(e^{k_2 x})'' + a(e^{k_2 x})' + be^{k_2 x} = k_2^2 e^{k_2 x} + ak_2 e^{k_2 x} + be^{k_2 x} = e^{k_2 x}(k_2^2 + ak_2 + b) = 0.$$

Seega

$$(e^{k_1 x})'' + a(e^{k_1 x})' + be^{k_1 x} = 0\,,$$

$$(e^{k_2 x})'' + a(e^{k_2 x})' + be^{k_2 x} = 0,$$

sõltumata x väärtustest. Järelikult on $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ võrrandi (5.19) erilahendid. Leiame $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ suhte

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{k_1 x - k_2 x} \neq \text{const}.$$

Funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud.

Reaalsete ja erinevate karakteristliku võrrandi

$$k^2 + ak + b = 0$$

lahendite k_1 ja k_2 korral on diferentsiaalvõrrandi (5.19) **üldlahend** kujul

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},}$$

2) Reaalsed ja võrdsed karakteristliku võrrandi lahendid.

$$k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}; \quad a^2 - 4b = 0,$$

siis diferentsiaalvõrrandi (5.19) üldlahendiks on funktsioonide (erilahendite)

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

lineaarne kombinatsioon. Üldlahend on

$$y = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x} = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Näitame, et y_1 ja y_2 rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (5.19):

$$\left(e^{-\frac{a}{2}x}\right)' = -\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x},$$

$$\left(e^{-\frac{a}{2}x}\right)'' = \frac{1}{4}a^2 e^{-\frac{a}{2}x},$$

$$\frac{1}{4}a^2 e^{-\frac{a}{2}x} + a\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\right) + be^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b\right) =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a^2}{4} + b\right) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{a}{2}x}(a^2 - 4b) = 0,$$

$$\left(xe^{-\frac{a}{2}x}\right)' = e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}xe^{-\frac{a}{2}x},$$

$$\left(xe^{-\frac{a}{2}x}\right)'' = -\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}x} + \frac{a^2}{4}xe^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}x - a\right),$$

$$e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}x - a\right) + a\left(e^{-\frac{a}{2}x} - \frac{a}{2}xe^{-\frac{a}{2}x}\right) + bxe^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x}\left(\frac{a^2}{4}x - a + a - \frac{a^2}{2}x + bx\right) =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x}\left(-\frac{a^2}{4}x + bx\right) = -\frac{1}{4}xe^{-\frac{a}{2}x}(a^2 - 4b) = 0.$$

Eelduse kohaselt

$$a^2 - 4b = 0,$$

järelikult erilahendid

$$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}, y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}.$$

rahuldavad diferentsiaalvõrrandit (5.19). Kontrollime, kas erilahendid on lineaarselt sõltumatud

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^{-\frac{a}{2}x}}{xe^{-\frac{a}{2}x}} = \frac{1}{x} \neq \text{const.}$$

Funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud.

Reaalsete ja võrdsete karakteristliku võrrandi lahendite

$$k_1 = k_2 = -a/2$$

korral on diferentsiaalvõrrandi (5.19) **üldlahend** on kujul

$$\boldsymbol{y = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{a}{2}x}}.$$

3) Kompleksed karakteristliku võrrandi lahendid.

Komplekssete lahendite korral peab ruutvõrrandi lahendivalemi ruutjuure alune avaldis olema negatiivne

$$a^2 - 4b < 0,$$

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \cdot \sqrt{4b - a^2}.$$

Tähistame

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}, \qquad k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta.$$

Avaldame a ja b

$$a = -2\alpha, \qquad \beta^2 = \frac{1}{4}(4b - a^2),\ \ b = \beta^2 + \frac{1}{4}a^2 = \beta^2 + \frac{1}{4} \cdot 4\alpha^2 = \beta^2 + \alpha^2,$$

$$b = \beta^2 + \alpha^2.$$

Diferentsiaalvõrrandi (5.19) erilahendid on

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Näitame erilahendite kehtivust. Leiame tuletised

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x),$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_1}{dx^2} &= \alpha e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - \alpha\beta\sin\beta x - \alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_2}{dx^2} &= \alpha e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) + e^{\alpha x}(\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x) = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + \alpha\beta\cos\beta x + \alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x) = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x).\end{aligned}$$

Asetame funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ võrrandisse (5.19), asendame $a = -2\alpha, b = \beta^2 + \alpha^2$.

$$e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x) + ae^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + be^{\alpha x}\cos\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x + a(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + b\cos\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b) + \sin\beta x(-2\alpha\beta - a\beta)\big) =$$

$$= e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(\alpha^2-\beta^2-2\alpha^2+\beta^2+\alpha^2)+\sin\beta x(-2\alpha\beta+2\alpha\beta)\big)=0.$$

$$e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x+2\alpha\beta\cos\beta x-\beta^2\sin\beta x)+ae^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)+be^{\alpha x}\sin\beta x=$$

$$=e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x+2\alpha\beta\cos\beta x-\beta^2\sin\beta x+a(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x)+b\sin\beta x)=$$

$$=e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(2\alpha\beta+a\beta)+\sin\beta x(\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b)\big)=$$

$$=e^{\alpha x}\big(\cos\beta x(2\alpha\beta-2\alpha\beta)+\sin\beta x(\alpha^2-\beta^2-2\alpha^2+\beta^2+\alpha^2)\big)=0.$$

Järelikult funktsioonid

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x\,,\qquad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

on diferentsiaalvõrrandi (5.19) lahendid. Vaatame, kas nad on lineaarselt sõltumatud

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x}=\cot\beta x\neq\text{const}.$$

Funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud.

Kompleksarvuliste karakteristliku võrrandi lahendite

$$\boldsymbol{k_1=\alpha+\beta i, k_2=\alpha-\beta i}$$

korral on diferentsiaalvõrrandi (5.19) **üldlahend** on kujul

$$\boldsymbol{y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)}.$$

Näide 5.27. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y''+4y'+3y=0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^2+4k+3=0,\ k_1=-3,\ k_2=-1.$$

Lahendid on reaalsed ja erinevad, seega on üldlahend

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}=C_1e^{-3x}+C_2e^{-x}.$$

Näide 5.28. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y''+6y'+9y=0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^2+6k+9=0,\ k_1=k_2=-3.$$

Lahendid on võrdsed, seega võrrandi üldlahend on

$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{a}{2}x}=(C_1+C_2x)e^{-3x}.$$

Näide 5.29. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y''+6y'+13y=0.$$

Vastav karakteristlik võrrand ja selle lahendid on

$$k^2+6k+13=0,\ k_1=-3+2i,\ k_2=-3-2i.$$

Lahendid on komplekssed, seega on üldlahend $\alpha=-3,\beta=2$:

$$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

5.5.2. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=F(x), \tag{5.20}$$

kus a, b on konstandid ja $F(x)$ on argumendi x funktsioon.

Võrrandi (5.20) **üldlahend** on esitatav summa kujul

$$y=y_h+Y,$$

kus y_h on vastava homogeense võrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

üldlahend ja Y on võrrandi (5.20) mingi **erilahend**.

Määramata kordajate meetod erilahendi otsimiseks.

Erilahendit tuleb otsida sarnaselt funktsiooni $F(x)$ kujule, lisades otsitavad määramata kordajad, nende arv sõltub funktsiooni $F(x)$ kujust.

1) **$F(x)$ on konstant: $F(x)=C$.**

Esitame otsitava erilahendi samuti konstandi kujul

$$Y=A.$$

Kuna tegemist on konstandiga, siis tuletised $Y'=Y''=0$ ja võrrandisse (5.20) asendades saame

$$bA=C,\quad A=\frac{C}{b},\qquad Y=\frac{C}{b}.$$

Erijuht. Kui võrrandis (5.20) $b=0$, siis tuleb erilahendit otsida kujul

$$Y=Ax.$$

Leiame tuletised $Y'=C_0,\ Y''=0$ ja asendame võrrandisse, saame

$$aC_0=C,\quad C_0=\frac{C}{a},\qquad Y=\frac{C}{a}x.$$

2) **$F(x)$ on polünoom.**

Võrrandi (5.20) erilahendit otsitakse **sama astme polünoomina**, näiteks kui

$$F(x)=px^2+qx+r,$$

kus p, q ja r on etteantud, siis otsime erilahendit ruutpolünoomi kujul

$$Y=Ax^2+Bx+C.$$

Tuleb määrata konstandid A, B ja C nii, et Y oleks võrrandi (5.20) erilahend. Selleks leiame tuletised

$$Y' = 2Ax + B, Y'' = 2A.$$

Asendame võrrandisse (5.20), saame:

$$2A + a(2Ax + B) + b(Ax^2 + Bx + C\,) = px^2 + qx + r.$$

Korrastame vasakul pool võrdusmärki olevad liikmed:

$$Abx^2 + x(2Aa + Bb) + 2A + aB + bC = px^2 + qx + r.$$

Arvestame, et x sama astmete kordajad peavad olema võrdsed mõlemal pool võrdusmärki.

$$x^2: \quad Ab = p, \quad A = \frac{p}{b}, \qquad x: \; 2Aa + Bb = q, \quad B = \left(q - \frac{2ap}{b}\right)\frac{1}{b},$$

$$x^0: \quad 2A + aB + bC = r, \qquad C = \frac{1}{b}\left[r - \frac{2p}{b} - \frac{a}{b}\left(q - \frac{2ap}{b}\right)\right].$$

Erijuht. Kui võrrandis (5.20) $b = 0$, siis tuleb erilahendit otsida kujul

$$Y = x(Ax^2 + Bx + C).$$

3) **Eksponentkujul** $F(x) = pe^{nx}$.

Erilahendit otsime kujul

$$\boldsymbol{Y = Ae^{nx}}.$$

Leiame tuletised

$$Y' = Ane^{nx}, Y'' = An^2e^{nx}$$

ja asendame võrrandisse.

$$An^2e^{nx} + aAne^{nx} + bAe^{nx} = pe^{nx} \qquad |:e^{nx}$$

$$A(n^2 + an + b) = p, \qquad A = \frac{p}{n^2 + an + b}.$$

Erijuht. Kui

$$n^2 + an + b = 0$$

ehk n **on karakteristliku võrrandi lahend**, siis otsime üldlahendit järgnevalt: kui n on **ühekordne** lahend ($n = k_1$ või $n = k_2$), siis

$$Y = Axe^{nx};$$

kui n on **kahekordne** lahend ($n = k_1 = k_2$), siis

6

$$Y = Ax^2e^{nx}.$$

4) $\boldsymbol{F(x)}$ **on trigonomeetrilisel kujul**:

$$F(x) = \sin\omega x, \qquad F(x) = \cos\omega x, \qquad F(x) = p\sin\omega x + q\cos\omega x.$$

Erilahendit otsime alati ühesugusel kujul (sõltumata sellest, kas $F(x)$ on siinus, koosinus või summa nendest)

$$\boldsymbol{Y = A\sin\omega x + B\cos\omega x}.$$

Olgu $F(x) = \sin\omega x$. Leiame tuletised ja asendame võrrandisse:

$$Y' = A\omega\cos\omega x - B\omega\sin\omega x, \qquad Y'' = -A\omega^2\sin\omega x - B\omega^2\cos\omega x,$$

$$-A\omega^2\sin\omega x - B\omega^2\cos\omega x + a(A\omega\cos\omega x - B\omega\sin\omega x) + b(A\sin\omega x + B\cos\omega x) = \sin\omega x.$$

Võrdsustame $\sin \omega x$ ja $\cos \omega x$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki, saame võrrandisüsteemi kordajate A ja B leidmiseks:

$$\begin{cases} -A\omega^2 - aB\omega + bA = 1 \\ -B\omega^2 + aA\omega + bB = 0 \end{cases}.$$

Erijuht. Kui võrrandis (5.20) $a = 0$, siis on tegemist erijuhuga, kui $k_{1,2} = \pm\beta i$ ja $\omega = \beta$, siis otsime erilahendit kujul

$$Y = x(A\sin \omega x + B\cos \omega x).$$

Märkused.

1. Kui võrrandi (5.20) paremal pool esineb eespool vaadeldud **funktsioonide summa**, siis erilahendi saame, kui otsime teda **samade funktsioonide summana**.
2. Ülalkirjeldatud meetod sobib ka juhul, kui võrrandi (5.20) parem pool osutub **korrutiseks**, siis otsitakse erilahendit **korrutise kujul**.
3. Erijuhtude arvestamata jätmisel tekib määramata kordajate leidmise käigus vastuolu mistõttu kordajaid ei ole võimalik määrata.

Näide 5.30. Leida võrrandi

$$y'' + 2y' - 8y = 2x + 1$$

üldlahend.

Alguses leiame võrrandile vastava homogeense võrrandi

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

üldlahendi karakteristliku võrrandi

$$k^2 + 2k - 8 = 0,$$

lahendite

$$k_1 = -4, \qquad k_2 = 2,$$

järgi

$$y_h = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}.$$

Erilahendit otsime antud ülesande paremal pool võrdusmärki asuva funktsiooni

$$F(x) = 2x + 1$$

kujuga sarnasel kujul aga määramata kordajatega.

$$Y = Ax + B, \qquad Y' = A,\ Y'' = 0,$$

Määramata kordajate A ja B leidmiseks asendame otsitava erilahendi ja selle tuletised lahendatavasse võrrandisse ja võrdsustame mõlemat pool võrdusmärki olevad x kordajad ning vabaliikmed

$$2A - 8Ax - 8B = 2x + 1,$$

$$x: \quad -8A = 2, \quad A = -\frac{1}{4},$$

$$x^0: \quad 2A - 8B = 1, \quad B = -\frac{3}{16},$$

$$Y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16},$$

$$y = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

Märkus. Kui võrrandi paremal pool olev funktsioon ei oleks sisaldanud vabaliiget

$$F(x) = 2x,$$

siis sellele vaatamata olesime pidanud otsima erilahendit samal kujul koos vabaliikmega.

Näide 5.31. Leida võrrandi

$$y'' - 2y' = x^2 + 4x$$

üldlahend.

Vastava homogeense võrrandi üldlahend

$$k^2 - 2k = 0, \quad k_1 = 0, \qquad k_2 = 2, \quad y_* = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Erilahendit otsime kujul (tegemist on erijuhuga, kuna $b = 0$)

$$Y = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

$$Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \; Y'' = 6Ax + 2B:$$

$$6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 4x.$$

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2 + 4x,$$

$$x^2 : \; -6A = 1, \quad A = -\frac{1}{6},$$

$$x : \; 6A - 4B = 4, \qquad B = -\frac{5}{4},$$

$$x^0 : \; 2B - 2C = 0, \qquad C = -\frac{5}{4},$$

$$Y = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x,$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x.$$

Näide 5.32. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 3y' - 10y = 16e^{3x}$$

üldlahend.

Vastava homogeense võrrandi üldlahend

$$k^2 + 3k - 10 = 0, \quad k_1 = -5, \qquad k_2 = 2, \quad y_h = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}.$$

Erilahendit otsime kujul

$$Y = Ae^{3x}, \quad Y' = 3Ae^{3x}, \quad Y'' = 9Ae^{3x}.$$

$$9Ae^{3x} + 3 \cdot 3Ae^{3x} - 10Ae^{3x} = 16e^{3x},$$

$$8A = 16, \quad A = 2.$$

$$Y = 2e^{3x},$$

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + 2e^{3x}.$$

Näide 5.33. Leida võrrandi

$$y'' + 4y = 12\cos 2x$$

üldlahend.

Vastava homogeense võrrandi üldlahend

$$k^2+4=0,\quad k_1=2i,\qquad k_2=-2i,\quad y_h=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Erilahendit otsime kujul

$$Y=x(A\sin 2x+B\cos 2x),$$

sest tegemist on erijuhuga, sest kuna $a=0$, siis $k_{1,2}=\pm 2i$ ja võrrandi paremal pool oleva trigonomeetrilise funktsiooni argumendi kordaja $\omega=2$ on võrdne karakteristliku väärtuse imaginaarosaga.

$$Y'=A\sin 2x+B\cos 2x+x(2A\cos 2x-2B\sin 2x),$$

$$Y''=2A\cos 2x-2B\sin 2x+2A\cos 2x-2B\sin 2x+x(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)=$$

$$=4A\cos 2x-4B\sin 2x-4Ax\sin 2x-4Bx\cos 2x,$$

$$4A\cos 2x-4B\sin 2x-4Ax\sin 2x-4Bx\cos 2x+4(Ax\sin 2x+Bx\cos 2x)=12\cos 2x,$$

$$\cos 2x(4A-4Bx+4Bx)+\sin 2x(-4B-4Ax+4Ax)=12\cos 2x,$$

$$\cos 2x:\quad 4A=12\quad A=3\qquad\qquad \sin 2x:\quad -4B=0\quad B=0$$

$$Y=3x\sin 2x,\qquad y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+3x\sin 2x.$$

5.5.3. TEIST JÄRKU VÕRRANDID FÜÜSIKAS. MEHAANILISED VÕNKUMISED*

Olgu koormus massiga m elastsel vedrul, mis on kinnitatud mingis punktis A. Koormuse kõrvalekallet tasakaaluasendi suhtes tähistame y. Kõrvalekallet alla loeme positiivseks ja üles negatiivseks. Tasakaaluasendis koormus on tasakaalus vedru elastsusega. Oletame, et jõud F_1, mis püüab koormust viia tasakaaluasendisse, on võrdeline siirdega y:

$$F_1=-ky,\quad k=\text{const}, k>0,$$

k on vedru jäikus. Koormuse liikumist takistab vastupanujõud F_2, mis on suunatud liikumise vastassuunas ja on võrdeline massi liikumise kiirusega

$$F_2=-\lambda v=-\lambda\frac{dy}{dt},\quad \lambda=\text{const},\qquad \lambda>0.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$ma=F_1+F_2,\quad a=\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky-\lambda\frac{dy}{dt},\quad \lambda>0, k>0.$$

Saime II järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p\frac{dy}{dt}+qy=0,\qquad p=\frac{\lambda}{m}, q=\frac{k}{m}. \tag{5.21}$$

Võrrandit (5.21) nimetatakse **vabavõnkumiste võrrandiks**.
Oletame, et vedru alumine punkt A liigub vertikaalselt vastavalt seadusele

$$z=\varphi(t).$$

Vedru alumine ots on kinnitatud rulli külge, mis koos vedru ja koormusega liigub mööda konarusi. Sellisel juhul on taastav jõud

$$F_1 = -ky - k\varphi(t),$$

ning takistav jõud

$$F_2 = -\lambda v - \lambda\varphi'(t) = -\lambda y' - \lambda\varphi'(t).$$

Võrrandi (5.21) asemel saame

$$my'' = -ky - k\varphi(t) - \lambda y' - \lambda\varphi'^{(t)},$$

$$my'' + \lambda y' + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t),$$

$$y'' + p\,y' + qy = f(t), \quad f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m}, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}. \tag{5.22}$$

Võrrandit (5.22) nimetatakse **sundvõnkumiste võrrandiks**.

5.5.3.1. VABAVÕNKUMISED*

Vabavõnkumiste võrrand, kus otsitav funktsioon on $y = y(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}. \tag{5.23}$$

Lahendame võrrandi, moodustame karakteristliku võrrandi ja analüüsime võimalikke lahendeid.

$$k^2 + pk + q = 0, \quad k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Lahend sõltub karakteristliku võrrandi lahendist:

1. Kui $p^2/4 > q$, siis lahendid on reaalsed ja negatiivsed ning üldlahend

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \qquad k_1 < 0, k_2 < 0.$$

Järelikult $y \to 0$, kui $t \to \infty$, järelikult <u>võnkumist ei teki</u>, kuna takistavad jõud on suured võrreldes vedru elastsuskoefitsendiga k.

2. Kui $p^2/4 = q, k_1 = k_2 = -p/2$, siis üldlahend

$$y = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{p}{2}t},$$

siis $y \to 0$, kui $t \to \infty$, ainult mitte nii kiiresti.

3. Olgu $p = 0$, takistusjõud puudub, siis $k^2 + q = 0$, $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$, $\beta = \sqrt{q}$. Üldlahend

$$y = C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t.$$

Tähistame

$$C_1 = A\sin\varphi_0, C_2 = A\cos\varphi_0,$$

kus A, φ_0 on suvalised, avaldame A, φ_0.

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctan\frac{C_1}{C_2},$$

$$y = A\sin\varphi_0\cos\beta t + A\cos\varphi_0\sin\beta t = A\sin(\varphi_0 + \beta t),$$

$$y = A\sin(\varphi_0 + \beta t).$$

Sellist võnkumist nimetatakse harmooniliseks võnkumiseks. Integraalkõveraks on sinusoidid. Võnkeperioodiks nimetatakse ajavahemikku T, mille jooksul siinuse argument muutub suuruse 2π võrra.
Antud juhul

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Võnkesageduseks nimetatakse võngete arvu aja 2π jooksul. Antud juhul on sagedus β.
Võnkeamplituudiks nimetatakse suurimat hälvet tasakaaluasendist. Suurim hälve tasakaaluasendist on A. Suurust φ_0 nimetatakse algfaasiks.

5.5.3.2. SUNDVÕNKUMISED*

Vaatame võrrandit

$$y'' + p\,y' + qy = f(t), \quad f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m}, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}. \tag{5.24}$$

Praktikas on sage juhtum, kus võnkeid põhjustav välisjõud on perioodiline ja muutub vastavalt seadusele

$$f(t) = a\,\sin\omega t, \qquad y'' + p\,y' + qy = a\,\sin\omega t, \qquad p \neq 0, \qquad \frac{p^2}{4} < q,$$

q vedru jäikus, p vedru takistus, võrdeline kiirusega. Karakteristliku võrrandi lahendid on siis kompleksed

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad k_1 = \alpha + i\beta,$$

$$k_2 = \alpha - i\beta, \qquad k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q}.$$

$$y = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t).$$

Tähistame

$$C_1 = A\sin\varphi_0, C_2 = A\cos\varphi_0,$$

$$y = Ae^{\alpha t}(\sin\varphi_0\cos\beta t + \cos\varphi_0\sin\beta t) = Ae^{\alpha t}\sin(\varphi_0 + \beta t).$$

Mittehomogeense võrrandi erilahendit otsime kujul

$$Y = N\sin\omega t + M\cos\omega t.$$

Leiame tuletised ja asendame võrrandisse:

$$Y' = N\omega\cos\omega t - M\omega\sin\omega t, \quad Y'' = -N\omega^2\sin\omega t - M\omega^2\cos\omega t.$$

$$-N\omega^2\sin\omega t - M\omega^2\cos\omega t + p(N\omega\cos\omega t - M\omega\sin\omega t) + q(N\sin\omega t + M\cos\omega t) = a\,\sin\omega t$$

$$\sin\omega t: \quad -N\omega^2 - pM\omega + qN = a, \qquad \cos\omega t: \quad -M\omega^2 + pN\omega + qM = 0,$$

$$M = \frac{-ap\omega}{(\omega^2 - q)^2 + p^2\omega^2}, \qquad N = \frac{a(q - \omega^2)}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Uued konstandid A_*, φ_*, $\quad M = A_*\sin\varphi_*, \; N = A_*\cos\varphi_*$.

$$A_* = \sqrt{M^2+N^2} = \sqrt{\frac{a^2p^2\omega^2 + a^2(q-\omega^2)^2}{[(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2]^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}},$$

$$\varphi_* = \arctan\frac{M}{N},$$

$$Y = N\sin\omega t + M\cos\omega t = A_*\cos\varphi_*\sin\omega t + A_*\sin\varphi_*\cos\omega t =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2\,(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi_*).$$

Üldlahend

$$y = Ae^{\alpha t}\sin\left(\varphi_0+\beta t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2\,(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi_*).$$

Esimene liidetav kujutab sumbuvat võnkumist, aja t kasvades see liige kahaneb ja teise liidetava osatähtsus suureneb. Teine liidetav määrab sundvõnkumise. Võngete sagedus ω on võrdne välisjõu $f(t)$ sagedusega. Sundvõnkumiste amplituud on seda suurem, mida väiksem on p ja mida lähemal on suuruse ω^2 väärtus q väärtusele.

5.5.3.3. SOOJUSE LEVIMINE VARDAS*

Horisontaalselt paigutatud metallvarras on paigutatud otstega tugedele. Tugede vaheline kaugus on L. Vasakus otsas on konstantne temperatuur t_1. Parem tugi hoiab konstantset temperatuuri $t_2 < t_1$. Varda materjal on soojusjuhtivusega λ. Varda ristlõikepindala on A ja ristlõike ümbermõõt on P. Soojuse äraandmise koefitsient varda pinnalt ümbritsevasse keskkonda on konstantne

$$\alpha\ \left(\frac{\text{kcal}}{\text{m}^2\cdot\text{h}\cdot\text{grad}}\right),\quad \alpha = \frac{\lambda}{t_s - t}.$$

Ümbritseva keskkonna temperatuur on t_s.
Ülesanne: leida seos varda suvalise punkti temperatuuri ja kauguse vahel soojemast otsast.
Oletame et varras on nii peenike, et temperatuur on ristlõike ulatuses konstantne, siis on $t = t(x)$, x on kaugus. Võtame elementaarlõigu kaugusel x pikkusega dx. Soojushulk, mis läbib aja $d\tau$ jooksul varda ristlõiget kaugusel x, on võrdne

$$-\lambda A\frac{dt}{dx}d\tau.$$

Soojushulk, mis läbib aja $d\tau$ jooksul varda ristlõiget kaugusel $x+dx$, on võrdne

$$-\lambda A\left(\frac{dt}{dx}+\frac{d^2t}{dx^2}dx\right)d\tau.$$

Varda piirkond, mis ristlõigete vahel x ja $x+dx$ saab ajavahemiku $d\tau$ jooksul soojushulga, mis on võrdne nende soojushulkade vahega

$$\lambda A\frac{d^2t}{dx^2}dxd\tau.$$

Sama aja jooksul soojuskadu sellelt vardaosalt on

$$\alpha P dx(t-t_s)d\tau.$$

Kuna vaadeldav protsess on statsionaarne, siis

$$\lambda A \frac{d^2 t}{dx^2} dx d\tau = \alpha P dx (t - t_s) d\tau,$$

millest

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda A}(t - t_s) = 0.$$

Saime teist järku konstantsete kordajatega lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi.

5.5.4. LINEAARSED HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne homogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,}$$

kus $\boldsymbol{p_1(x), p_2(x)}$ on pidevad funktsioonid.

Kui on teada lineaarse homogeense võrrandi kaks lineaarselt sõltumatut lahendit $y_1(x), y_2(x)$, siis selle võrrandi **üldlahendiks** on

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).} \tag{5.25}$$

Võrrandi erilahendi saame üldlahendist konstantide C_1, C_2 sobiva fikseerimise teel.

Wronski determinant.

Vaatleme algul kahte funktsiooni $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$, mis on pidevalt diferentseeruvad ning lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b). Siis leiduvad arvud $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, millest vähemalt üks on nullist erinev, et iga $x \in (a, b)$ korral kehtiks võrdus

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0.$$

Diferentseerime saadud võrdust, saame

$$k_1 y_1'(x) + k_2 y_2'(x) \equiv 0.$$

Neid kahte samasust võime vaadelda lineaarse homogeense võrrandisüsteemina suuruste k_1 ja k_2 suhtes. Süsteemi determinant võrdub nulliga, kui tegemist on lineaarselt sõltuvate funktsioonidega ehk iga $x \in (a, b)$ korral

$$W(x) = 0,$$

kus

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x).$$

Determinanti $W(x)$ nimetatakse funktsioonide y_1 ja y_2 **Wronski determinandiks**.
Funktsioonide y_1 ja y_2 Wronski determinandi võrdumine nulliga on tarvilikuks tingimuseks nende funktsioonide lineaarseks sõltuvuseks antud vahemikus.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.

Lineaarse homogeense võrrandi saab lahendada nii, et leiame kõigepealt selle võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit ja kirjutame vastuse kujul (5.25), selleks üldine meetod puudub. Sellepärast tuleb võrrandi lahendamiseks sageli kasutada **järgu alandamise võtet**. Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis võime võrrandi järku alandada võrrandi lineaarsust säilitades. Seda saame teha kahe asendusega: esiteks asendame võrrandis

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

$$\boldsymbol{y = y_1 \cdot z}$$

ning siis alandame võrrandi järku asendusega

$$\boldsymbol{z' = u}, \quad z = z(x), u = u(x).$$

Vaatame **Liouville'i-Ostrogradski valemini** jõudmise mõttekäiku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi jaoks kujul

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Olgu $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ vaadeldava võrrandi mingid kaks lahendit, mis on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b). Siis iga $x \in (a, b)$ korral

$$y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x) = 0$$

ja

$$y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x) = 0.$$

Korrutades esimest võrdust suurusega $(-y_2(x))$ ja teist võrdust suurusega $y_1(x)$ ning liites tulemused, saame:

$$-y_1''(x)y_2(x) + y_2''(x)y_1(x) + p_1(x)\big(y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) = 0.$$

Siin $p_1(x)$ kordaja on võrdne lahendite $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ Wronski determinandiga

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

esimese kahe liikme vahe aga on Wronski determinandi tuletis $W'(x)$

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Seega iga $x \in (a, b)$ korral kehtib võrdus

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0.$$

Selle võrrandi lahendiks saame Liouville'i-Ostrogradski valemi. Rakendades Liouville'i-Ostrogradski valemit $C = 1$ korral, saame

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int p_1(x)dx}.$$

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Saime esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi teise erilahendi y_2 leidmiseks. Jagame mõlemad võrrandi pooled läbi suurusega $\big(y_1(x)\big)^2$, esitame võrrandi kujul

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2}.$$

Integreerides mõlemaid võrrandi pooli saame

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2} dx + C,$$

võttes $C = 0$, saame avaldada otsitava funktsiooni

$$\boldsymbol{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}dx.}$$

Näide 5.34. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Võrrandi kordajateks on polünoomid:

$$p_0(x) = x^2 + 1,\ p_1(x) = -2x,\ p_2(x) = 2.$$

On vaja leida üks võrrandi lahend, et saaks Liouville'i-Ostrogradski valemit kasutada. Selleks tuleb proovida kordajatega sarnaseid funktsioone, alustades kõige lihtsamast $p_2(x) = 2$ ehk proovime $y_1(x) = C$, asendame võrrandisse, saame $y_1 = 0$, seega see lahend ei sobi, võtame järgmise:

$$p_1(x) = -2x\colon\ y_1(x) = Ax + B,\ y_1' = A,\ y_1'' = 0.$$

$$-2Ax + 2Ax + 2B = 0, \quad B = 0.$$

Otsitavaks erilahendiks sobib $y_1(x) = Ax$, kus A on suvaline konstant. Võtame erilahendiks

$$y_1(x) = x.$$

Lahendame võrrandi kõigepealt Liouville'-Ostrogradski valemi abil

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = 0,$$

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\left(y_1(x)\right)^2}dx.$$

Valemi järgi leiame erilahendi y_2

$$p_1(x) = -\frac{2x}{x^2+1}, \qquad y_2(x) = x\int \frac{e^{-\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}}{x^2}dx.$$

Saime esimest järku lineaarse võrrandi.

$$y_2(x) = x\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx.$$

$$y_2(x) = x\left(\int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx\right) = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1.$$

Tulemuseks on teine võrrandi erilahend, mille lineaarne kombinatsioon esimesena leitud lahendiga annab meile võrrandi üldlahendi.

$$y_1 = x, y_2 = (x^2 - 1),$$

$$y = C_1(x^2-1) + C_2x.$$

Lahendame sama ülesande erilahendi $y_1 = x$ korral, kasutades **järgu alandamise võtet**

$$y = y_1z, \qquad z' = u.$$

Siis

$$y = xz$$

ja tuletised on kujul (korrutise tuletise valemi järgi)

$$y' = z + xz', y'' = 2z' + xz''.$$

Diferentsiaalvõrrand saab peale asendust kuju

$$(x^2 + 1)(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + 2xz = 0,$$

millest saame

$$(x^3 + x)z'' + 2z' = 0.$$

Teise sammuna teeme asenduse

$$z' = u, \qquad z'' = u',$$

saame

$$(x^3 + x)u' + 2u = 0,$$

tegemist on esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandiga. Võrrandi järk on alandatud ning saadud madalamat järku võrrand on samuti lineaarne. See ongi lineaarsuse säilitamine. Kuna tegemist on lineaarse homogeense võrrandiga, saame selle lahendada muutujate eraldamise teel:

$$\frac{du}{u} = \frac{-2dx}{x^3 + x}.$$

Integreerimiseks peame võrrandi paremal pool asuva murru teisendama osamurdude summaks:

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}$$

Konstandid A, B ja C leiame, asendades võrrandisse

$$-2 = x^2(A + B) + Cx + A$$

argumendi väärtuseks $x = 0$, siis

$$A = -2.$$

Edasi võrdsustades x^2 kordajad vasakul ja paremal pool võrdusmärki, saame seose

$$A + B = 0,$$

sest vasakul pool vastav liige puudub, see tähendabki, et ruutliikme kordaja on võrdne nulliga. Asendades juba leitud kordaja $A = -2$, saame

$$B = 2.$$

Viimaks kordaja C leidmiseks võrdsustame x kordajad mõlemal pool võrdusmärki, tulemuseks

$$C = 0.$$

Kokkuvõttes oleme saanud

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Integreerime võrrandit

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-2dx}{x^3 + x} = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx,$$

$$\ln|u| = -2\ln|x| + \ln|x^2 + 1| + \ln C,$$

$$u = C\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right).$$

Lõpuks asendame $u = z'$ ja leiame z avaldise

$$z' = C_1\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right),$$

$$z = \int C_1\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx = C_1\int 1\,dx + C_1\int \frac{1}{x^2}dx = C_1x + \frac{C_1}{x} + C_2,$$

Kuna $yx = z$, siis

$$\frac{y}{x} = C_1\left(x + \frac{1}{x}\right) + C_2, \qquad y = C_1(x^2+1) + C_2x.$$

5.5.5. LINEAARSED MITTEHOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne teist järku mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),}$$

kus $\boldsymbol{p_1(x), p_2(x)}$ on pidevad funktsioonid ja $f(x)$ teadaolev funktsioon.

Kui on teada homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ kaks lineaarselt sõltumatut lahendit $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ja mittehomogeense võrrandi üks erilahend Y, siis üldlahend avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = Y + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).} \tag{5.26}$$

Võrrandi (5.26) mistahes lahend on saadav üldlahendist konstantide C_1, C_2 väärtuste fikseerimisel.

Erilahendi leidmine konstantide varieerimise meetodiga.
Kui on leitud lineaarse homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ kaks lineaarselt sõltumatut lahendit, siis erilahendit $Y(x)$ otsitakse kujul

$$Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Homogeense võrrandi üldlahendisse (20) asendame suvalised konstandid C_1, C_2 funktsioonidega $C_1(x), C_2(x)$. Funktsioonid $C_1(x), C_2(x)$ määratakse nii, et $Y(x)$ rahuldaks mittehomogeenset võrrandit. Kõigepealt võtame erilahendi avaldisest tuletise ja arvestame, et tegemist on korrutisega kahest argumendi x funktsioonist

$$Y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Kuna meil on kaks otsitavat funktsiooni ja ainult üks võrrand, siis võtame teiseks võrrandiks seose

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Siis

$$Y'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

$$Y''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Asetame viimased kaks võrrandit esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + a\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) \\ + b\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = f(x).$$

Kuna y_1 ja y_2 on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendid, siis asendades need homogeensesse võrrandisse, tekib samasus, ehk osa liikmeid saadud võrrandist annavad kokku arvu 0.

$$C_1(x)y_1''(x) + a\big(C_1(x)y_1'(x)\big) + b\big(C_1(x)y_1(x)\big) = C_1(x)\big(y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)\big) \\ = C_1(x)\cdot 0 = 0$$

$$C_2(x)y_2''(x) + a\big(C_2(x)y_2'(x)\big) + b\big(C_2(x)y_2(x)\big) = C_2(x)\big(y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)\big) \\ = C_2(x)\cdot 0 = 0$$

Järelejäänud liikmetest saame võrrandi kujul

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Funktsioonide $C_1(x), C_2(x)$ leidmiseks saime süsteemi

$$\begin{cases} \boldsymbol{C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0,} \\ \boldsymbol{C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x).} \end{cases} \tag{5.27}$$

See on suuruste $C_1'(x), C_2'(x)$ suhtes lineaarne mittehomogeenne võrrandisüsteem. Süsteem on üheselt lahenduv:

$$C_i'(x) = g_i(x), i = 1{,}2 \quad C_i(x) = \int g_i(x)\,dx + \overline{C_i}\ , i = 1{,}2.$$

Kuna meid huvitab ainult üks erilahend, siis võime võtta $\overline{C_1} = \overline{C_2} = 0$.

$$\boldsymbol{C_i(x) = \int g_i(x)\,dx.}$$

Näide 5.35. Lahendada diferentsiaalvõrrand $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2$.

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = x^2 + 1.$$

Vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand on juba lahendatud eelmises näites (näide 5.34), lahendiks on

$$y_* = C_1(x^2-1) + C_2 x.$$

Järelikult antud võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$y = Y(x) + C_1(x^2-1) + C_2 x.$$

Leiame erilahendi $Y(x)$ süsteemist (5.26)

$$Y(x) = C_1(x)(x^2-1) + C_2(x)x,$$

$$y_1 = x^2 - 1, y_2 = x, y_1' = 2x, y_2' = 1.$$

Süsteemist (5.27)

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x^2-1) + C_2'x = 0, \\ 2xC_1' + C_2' = x^2+1. \end{cases}$$

Leiame suurused C_1' ja C_2':

$$C_2' = -C_1'\frac{x^2-1}{x}.$$

Asendame selle süsteemi teise võrrandisse, saame

$$2xC_1' - C_1'\frac{x^2-1}{x} = x^2+1,$$

$$C_1'(2x^2 - x^2 + 1) = (x^2+1)x,$$

$$C_1'(x^2+1) = (x^2+1)x.$$

$$C_1' = x,$$

$$C_2' = -C_1'\frac{(x^2-1)}{x} = -(x^2-1) = 1 - x^2.$$

Integreerime

$$C_1(x) = \frac{x^2}{2} + \overline{C_1}, \qquad C_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \overline{C_2},$$

kus $\overline{C_1}$ ja $\overline{C_2}$ konstandid. Piisab ühest erilahendist, võtame $\overline{C_1}$=$\overline{C_2}$ $= 0$. Saime

$$C_1(x) = \frac{x^2}{2}, \quad C_2(x) = x - \frac{x^3}{3}.$$

Erilahend avaldub kujul

$$Y(x) = \frac{x^2}{2}(x^2-1) + x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

Üldlahend

$$y = C_1(x^2-1) + C_2x + \frac{x^2(x^2-1)}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3}.$$

5.5.6. SPETSIAALSED LINEAARSED VÕRRANDID*

Legendre võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0,$$

kus $\boldsymbol{l}$ on reaalarv.
Legendre võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$y(x) = a_0y_1(x) + a_1y_2(x),$$

kus a_0 ja a_1 on konstandid ja y_1 sisaldab ainult paarisarvulisi muutuja x astmeid ja y_2 sisaldab ainult paarituarvulisi muutuja x astmeid. Kui l on paarisarv, siis $a_1 = 0$ ja kui l on paaritu, siis $a_0 = 0$. Loodusteadustes pakuvad huvi sellised võrrandi lahendid, mis asuvad vahemikus $-1 \le x \le 1$. Selle võrrandi erilahenditeks on l astme polünoomid, mida nimetatakse Legendre polünoomideks:

$$P_l(x)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2l-1)}{l!}\left\{x^l-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2}+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot 4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4}-\ \ldots\right\}$$

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\quad P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x).$$

Legendre polünoomide vahel kehtib rekursiivne seos:

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0,$$

ette andes $P_0(x)=1$ ja $P_1(x)=x$, saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid.
Kui $\boldsymbol{l=1}$, siis

$$2P_2-3xP_1+P_0=0,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3xP_1-P_0)=\frac{1}{2}(3x^2-1).$$

Kui $\boldsymbol{l=2}$, siis $3P_3-5xP_2+2P_1=0$,

$$P_3(x)=\frac{1}{3}(5xP_2-2P_1)=\frac{1}{3}\left(5x\frac{1}{2}(3x^2-1)-2x\right)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

Näide 5.36. Näitame, et $P_3(x)$ on Legendre võrrandi lahend $l=3$ korral,

$$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0.$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_3'(x)=\frac{1}{2}(15x^2-3)=\frac{3}{2}(5x^2-1),$$

$$P_3''(x)=\frac{1}{2}(30x)=15x,$$

$$(1-x^2)15x-2x\frac{3}{2}(5x^2-1)+12\frac{1}{2}(5x^3-3x)=$$

$$=15x-15x^3-15x^3+3x+30x^3-18x=0.$$

Legendre polünoomid on vahemikus $\boldsymbol{-1\le x\le 1}$ ortogonaalsed:

$$\int_{-1}^{1}P_l(x)P_{l'}(x)\,dx=0,\quad l\neq l'.$$

Näide 5.37. Näitame, et $P_1(x)$ on ortogonaalne $P_2(x)$ja $P_3(x)$ suhtes.

$$P_1(x)=x,\qquad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

$$\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=0.$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_3(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{5x^5}{5}-\frac{3x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}\big(1-1-(-1)+(-1)\big) = 0.$$

Hermite võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

kus $\boldsymbol{n}$ on reaalarv. Võrrandi üldlahend on kujul

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

kus $\boldsymbol{a_0}$ ja $\boldsymbol{a_1}$ on konstandid ja $\boldsymbol{y_1}$ sisaldab ainult paarisarvulisi muutuja x astmeid ja y_2 sisaldab ainult paarituarvulisi muutuja x astmeid. Kui n on paarisarv, siis $a_1 = 0$ ja kui n on paaritu, siis $a_0 = 0$. Selle võrrandi erilahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Hermite polünoomideks

$$\boldsymbol{H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \ \ldots}$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

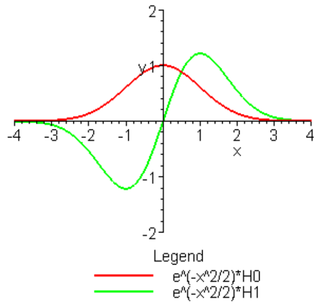
Kehtib ka rekursiivne seos

$$\boldsymbol{H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0},$$

ette andes $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid.

Hermite funktsioonid

$$y_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$



on lahendiks diferentsiaalvõrrandile, mis on kujul

$y'' + (1 - x^2 + 2n)y = 0,$

lahendamiseks tuleb teha muutuja vahetus

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}v(x).$$

Hermite funktsioonid on ortogonaalsed. Nad on seotud kvantum-mehaanika ülesannetega ja ka Schrödingeri võrrandiga.

Laguerre võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$\boldsymbol{xy'' + (1-x)y' + ny = 0},$$

kus $\boldsymbol{n}$ on reaalarv. Selle võrrandi erilahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Laguerre polünoomideks

$$\boldsymbol{L_n(x) = (-1)^n\left[x^n - \frac{n^2}{1!}x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \ \ldots + (-1)^n n!\right]}.$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 2 - 4x + x^2, \quad L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3.$$

Kehtib järgmine rekursiivne seos

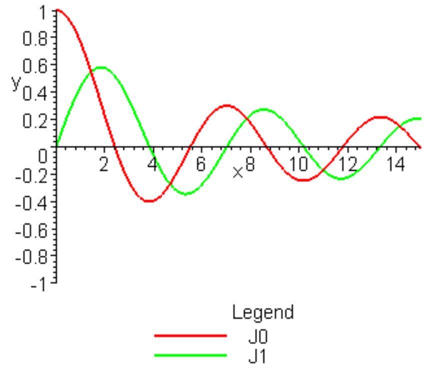
$$\boldsymbol{L_{n+1}(x) - (1 - 2n - x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0,}$$

millest saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid, andes ette $L_0(x) = 1$ ja $L_1(x) = 1 - x$.

Besseli võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$\boldsymbol{x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,}$$

kus n on reaalarv. Kasutatakse membraanide vibratsioonide leidmisel ja ka Schrödingeri võrrandi lahendamisel ringis ning sfääril. Selle võrrandi erilahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Besseli funktsioonideks, I liiki



$$\boldsymbol{J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.}$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \ \dots$$

Suurte $\boldsymbol{x}$ väärtuste korral kehtib

$$\boldsymbol{J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).}$$

Besseli funktsioon $\boldsymbol{J_{n+1/2}(x)}$ jaoks

$$\boldsymbol{J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).}$$

Kehtib ka rekursiivne seos

$$\boldsymbol{J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0.}$$

Kasutusel on sfäärilised Besseli funktsioonid järguga $\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \qquad n \geq 0.}$$

Sfäärilised Neumanni funktsioonid avalduvad järgmiselt:

$$\boldsymbol{\eta_n(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x), \qquad n \geq 0.}$$

5.6. KÕRGEMAT JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Olgu võrrandis kõige kõrgem tuletise järk n, siis on **n-järku diferentsiaalvõrrandi üldkuju** on

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Definitsioon 5.18.
Olgu funktsioon $F = F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_n)$ määratud muutujate $x, y, y_1, y_2, \dots, y_n$ piirkonnas G. Vahemikus (a, b) **määratud** funktsiooni

$$\boldsymbol{y = y(x)}$$

nimetatakse võrrandi

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$$

lahendiks selles vahemikus, kui

1) funktsioon $y(x)$ on **n korda pidevalt diferentseeruv** vahemikus (a, b);
2) iga $x \in (a, b)$ korral punkt koordinaatidega $(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))$ kuulub funktsiooni F määramispiirkonda G;
3) funktsiooni $y(x)$ asetamisel võrrandisse $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ otsitava y kohale saame **samasuse** $x \in (a, b)$ suhtes:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \text{ iga } x \in (a, b) \text{ korral.}$$

Siis öeldakse ka, et funktsioon $y = y(x)$ **rahuldab** võrrandit vahemikus (a, b).

Definitsioon 5.19.
Võrrandit kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)} \tag{5.28}$$

nimetatakse n-järku hariliku diferentsiaalvõrrandi **normaalkujuks**.

Võrrandi lahendi all mõistame funktsiooni, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatu muutuja suhtes.

Definitsioon 5.20.
Normaalkujulise n-järku diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** nimetatakse võrrandi (5.28) lahendit

$$\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)},$$

kus $C_1, C_2, \dots, C_n$ on suvalised konstandid.

Suvalised konstandid võib määrata **algtingimustest**

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{5.29}$$

Kui $n > 2$, siis võivad n-järku diferentsiaalvõrrandiga kaasneda ka tingimused, mis seovad otsitava funktsiooni $y = y(x)$ ja tema tuletiste väärtusi integreerimislõigu $[a, b]$ rajapunktides $x = a$ ja $x = b$. Niisuguseid tingimusi nimetatakse rajatingimusteks, diferentsiaalvõrrandit koos rajatingimustega aga rajaülesandeks.

Teoreem 5.6.
Cauchy teoreem. Olgu funktsioon

$$f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

pidev muutujate $x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ piirkonnas D ning olgu tal olemas esimest järku osatuletised argumentide $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ järgi, mis olgu samuti pidevad piirkonnas D. Siis iga punkti $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel (5.28), (5.29) olemas parajasti üks lahend $\boldsymbol{y = y(x)}$.

Definitsioon 5.21.
Normaalkujulise **n-järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks** piirkonnas D nimetatakse seost

$$\boldsymbol{y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)},$$

kus $C_1, C_2, \dots, C_n$ on suvalised konstandid, mille puhul iga $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in D$ jaoks leiduvad konstantide väärtused nii, et neile väärtustele vastav lahend rahuldab algtingimusi (5.29).

Definitsioon 5.22.
Normaalkujulise **n-järku diferentsiaalvõrrandi erilahendiks** nimetatakse lahendit, mis saadakse üldlahendist konstantide $C_1, C_2, \dots, C_n$ konkreetsete väärtuste korral.

Näide 5.38. Lahendada võrrand $y^{(n)} = f(x)$.

Leiame üldlahendi algtingimustel $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Integreerime võrrandi mõlemat poolt, saame

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

kus x_0 on argumendi mistahes fikseeritud väärtus ja C_1 on integreerimiskonstant. Integreerime veelkord,

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Jätkame protsessi, saame

$$y = \int_{x_0}^{x} \dots \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n .$$

Kui meil on algtingimused

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

siis saame

$$C_n = y_0, C_{n-1} = y_1, C_{n-2} = y_2, \dots, C_1 = y_{n-1}.$$

Näide 5.39. Lahendada võrrand

$$y''' = e^{kx+1},$$

kus k on mingi nullist erinev reaalarv.

Integreerime võrrandi mõlemaid pooli muutuja x järgi, saame

$$y'' = \frac{1}{k} e^{kx+1} + C,$$

kus C on suvaline konstant. Integreerides veel kaks korda, saame lahendi avaldiseks

$$y = \frac{1}{k^3} e^{kx+1} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

kus C_1, C_2 ja C_3on suvalised konstandid.

Diferentsiaalvõrrand kujul

$$\boldsymbol{F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}\right) = 0,}$$

on lahendatav järgu alandamise teel muutuja vahetusega

$$\boldsymbol{y^{(k)} = z,}$$

lugedes suuruse z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$. Uue otsitava funktsiooni kaudu saadud diferentsiaalvõrrand on $n - k$- järku

$$F\left(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Näide 5.40. Lahendada võrrand $y^{(4)} = \sqrt{y'''}$.

Alandame võrrandi järku asendusega

$$y''' = z,$$

lugedes suuruse z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$. Siis saame diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\sqrt{z} = z'$$

ehk esimest järku eralduvate muutujatega võrrandi, lahendame selle võrrandi

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{z},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = dx,$$

$$2\sqrt{z} = x + C_1 \text{ ehk } 4z = (x + C_1)^2.$$

Kuna muutujate eraldamisel jagades läbi suurusega $\sqrt{z}$ eeldame, et $\sqrt{z} \neq 0$, seetõttu võrrandi lahendiks on ka $z = 0$. Asendame tagasi z avaldise, saame võrrandi

$$y''' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$

mille lahendamiseks integreerime kolm korda järjest, saame

$$y'' = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}(x + C_1)^4 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{240}(x + C_1)^5 + \frac{x^2}{2} C_2 + C_3 x + C_4.$$

Lahendades võrrandist $z = 0$ saadava võrrandi $y''' = 0$, saame lisaks üldlahendi kujul

$$y = C_5x^2 + C_6x + C_7.$$

Võrrand kujul

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0, \qquad n \geq 2,$$

mis ei sisalda sõltumatut muutujat x, on lahendatav järgu alandamise teel muutuja vahetusega

$$y' = z,$$

kus $z = z(y)$ on muutuja y funktsioon, mitte argumendi x funktsioon. Siis

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z,$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(z'z)}{dx} = \frac{d(z'z)}{dy}\frac{dy}{dx} = z''z^2 + (z')^2z.$$

Järgnevate tuletistega säilib saadud seaduspärasus: iga järgmine y tuletis sisaldab uue muutuja z tuletisi, alates esimest järku tuletisest kuni ühe võrra väiksema järguni: $y^{(k)}$ sisaldab uue muutuja z tuletisi $z', z'', \dots, z^{(k-1)}$, $2 \leq k \leq n$.

Näide 5.41. Lahendada võrrand $y'^2 + yy'' = 0$.

Alandame võrrandi järku asendusega

$$y' = z,$$

lugedes suuruse z muutuja y funktsiooniks $z = z(y)$. Siis

$$y'' = z'z$$

ja diferentsiaalvõrrand saab kuju

$$z^2 + yz'z = 0$$

ehk

$$\frac{dz}{dy}zy = -z^2$$

$$\frac{z}{z^2}dz = -\frac{1}{y}dy.$$

Lahendame saadud esimest järku võrrandi, saame

$$\ln|z| = -\ln|y| + \ln C_1,$$

$$|z| = \frac{C_1}{|y|}.$$

Asendame $z = y'$, saame esimest järku võrrandi

$$y' = \frac{C_1}{y},$$

mille lahendiks on

$$y^2 = C_1x + C_2.$$

5.6.1. KÕRGEMAT JÄRKU LINEAARSED VÕRRANDID

Lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand üldkujul on

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,} \tag{5.30}$$

kus $\boldsymbol{p_1(x), \ldots, p_n(x)}$ on pidevad funktsioonid. Seda võrrandit nimetatakse **lineaarseks homogeenseks $\boldsymbol{n}$-järku diferentsiaalvõrrandiks**.

Definitsioon 5.23.
Olgu $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vahemikus (a, b) määratud ja $n - 1$ korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Determinanti

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nimetatakse funktsioonide $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ **Wronski determinandiks** ehk wronskiaaniks (punktis x).

Wronski determinanti tähistatakse ka $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$, kus argument näitab, millitest funktsioonidest on Wronski determinant võetud.

Teoreem 5.7. Olgu $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vahemikus (a, b) määratud ja $n - 1$ korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Kui funktsioonid $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on **lineaarselt sõltuvad** vahemikus (a, b), siis nende funktsioonide **Wronski determinant $\boldsymbol{W(x)}$ on võrdne nulliga** iga $x \in (a, b)$ korral.

Vastupidine väide üldiselt ei kehti: Wronski determinant võib võrduda nulliga, kuid funktsioonid võivad olla lineaarselt sõltumatud antud piirkonnas.

Näide 5.42. Funktsioonid

$$y_1(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

ja

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$$

on lineaarselt sõltumatud vahemikus $(-\infty, \infty)$, kuid nende funktsioonide Wronski determinant $W(x)$ on võrdne nulliga iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral.
Kui arvutame funktsioonidest Wronski determinandi, saame $x < 0$ korral

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ja ka $x \geq 0$ korral

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 0 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Samas tingimusest

$$0 = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = \begin{cases} k_1 x^3, x < 0, \\ k_2 x^3, x \geq 0 \end{cases}$$

järeldub, et $k_1 = k_2 = 0$ ehk funktsioonid y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud.

Teoreem 5.8.
Kui lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (30) lahendid $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ on vahemikus **lineaarselt sõltumatud**, siis nende funktsioonide **Wronski determinant $W(x)$ on nullist erinev** iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 5.24.
Öeldakse, et n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5.30) mis tahes n lineaarselt sõltumatut lahendit moodustavad selle võrrandi **lahendite fundamentaalsüsteemi**.

Teoreem 5.9.
Olgu lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (5.30) kordajad pidevad funktsioonid vahemikus (a, b). Olgu $\boldsymbol{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)}$ võrrandi lahendite fundamentaalsüsteem, siis võrrandi (5.30) **üldlahend** avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x).} \tag{5.31}$$

Üldlahendiga on määratud ära võrrandi (5.30) kõik lahendid, st võrrandi (5.30) mistahes lahendi saame üldlahendist konstantide $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sobiva fikseerimise teel.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.
Lineaarse homogeense võrrandi saab lahendada nii, et leiame kõigepealt selle võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit ja kirjutame vastuse kujul (5.31), selleks üldine meetod puudub. Sellepärast tuleb võrrandi lahendamiseks sageli kasutada üldist **järgu alandamise võtet**.
Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1(x) \neq 0$, siis võime võrrandi järku alandada võrrandi lineaarsust säilitades. Seda saame teha kahe asendusega: esiteks asendame võrrandis

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0,$$

$$\boldsymbol{y = y_1 \cdot z,}$$

ning siis alandame võrrandi järku asendusega

$$\boldsymbol{z' = u}, \quad z = z(x), u = u(x).$$

Liouville'i-Ostrogradski valem.

Olgu $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ mingid pidevad funktsioonid, kui $a < x < b$, ning oletame, et funktsioonid $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0}$$

jaoks. Siis funktsioonide $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ Wronski determinant $W(x)$ on vahemikus (a, b) nullist erinev iga $x \in (a, b)$ korral.
Siis võrrandist

$$W' + p_1(x) W = 0$$

saame Wronski determinandi W jaoks avaldise, mida nimetatakse **Liouville'i-Ostrogradski valemiks** (mõnikord ka Abeli valemiks)

$$\boldsymbol{W(x) = C e^{-\int p_1(x) dx}, \qquad a < x < b,}$$

kus C on suvaline konstant, mis ei saa olla null.

Kuigi võrrandi (5.30) lahendite fundamentaalsüsteem $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ sõltub selle võrrandi kõigist kordajatest $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$, sõltub lahendite Wronski determinant $W(x)$ ainult kordajast $p_1(x)$.

Lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x).}$$

Kui on teada lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

jaoks n lineaarselt sõltumatut lahendit

$$y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$$

ja mittehomogeense võrrandi üks **erilahend $\boldsymbol{Y}$**, siis **mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend** avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = Y + C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x).} \tag{5.32}$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi mistahes lahend on saadav üldlahendist (5.32) konstantide $C_1, C_2, \dots, C_n$ väärtuste fikseerimisel.

Erilahendi $\boldsymbol{Y}$ leidmine konstantide varieerimise meetodiga.

Erilahendit $Y(x)$ otsitakse järgmisel kujul

$$Y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x),$$

homogeense võrrandi üldlahendisse (31) asendame suvalised konstandid $C_1, C_2, \dots, C_n$ funktsioonidega $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Funktsioonid $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ määratakse nii, et $Y(x)$ rahuldaks mittehomogeenset võrrandit. See on ainult üks tingimus n funktsiooni määramiseks. Puuduvad tingimused võime vabalt ette anda, need anname ette nii, et lahendi $y_h(x)$ tuletised kuni järguni $n-1$ oleksid võimalikult lihtsa kujuga.

Diferentseerime $Y(x)$ avaldist, saame

$$Y' = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) +$$
$$+C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x).$$

Esimese vabalt valitud tingimusena nõuame, et viimase avaldise paremal pool olev esimene summa oleks võrdne nulliga:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Siis

$$Y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x),$$

mille diferentseerimisel saame

$$Y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) +$$
$$+C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x).$$

Teise tingimusena nõuame, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Siis

$$Y'' = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x).$$

Sarnaselt diferentseerime edasi ja toome sisse uued lisatingimused kuni saame

$$Y^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) +$$

$$+C_1(x)y_1^{(n)}(x) + C_2(x)y_2^{(n)}(x) + \ ... + C_n(x)y_n^{(n)}(x).$$

Nüüd kasutame tingimust, et $Y(x)$ peab rahuldama mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit. Selleks asendame Y esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse, kust saame

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k^{(n)}(x) + p_1(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ ...$$

$$... + p_n(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x) = f(x).$$

Kirjutame võrduse ümber

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left(y_k^{(n)}(x) + p_1(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ ... + p_n(x)y_k(x)\right) = f(x).$$

Kuna y_k on võrrandi lahend ($k = 1, 2, ..., n$), siis sulgudes olev funktsioon on nullfunktsioon. Järelikult on Y võrrandi lahendiks, kui kehtib tingimus

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Võttes kokku kõik sisse toodud tingimused ja viimase võrduse, saame funktsioonide $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ leidmiseks süsteemi

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ ... + C_n'(x)y_n(x) = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ ... + C_n'(x)y_n'(x) = 0,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ ... + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).} \end{array}\right. \quad (5.33)$$

See on suuruste

$$C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)$$

suhtes lineaarne mittehomogeenne võrrandisüsteem n võrrandi ja n tundmatuga. Süsteem on üheselt lahenduv. Süsteemi lahendamisel avaldame kõigepealt tuletised

$$C_1'(x), C_2'(x), ..., C_n'(x)$$

ja siis funktsioonide avaldised saame integreerimisel:

$$C_i'(x) = g_i(x), i = 1,2, ..., n,$$

$$C_i(x) = \int g_i(x)\,dx + \overline{C_i}\ , i = 1,2, ..., n.$$

Kuna meid huvitab ainult üks erilahend, siis võime võtta $\overline{C_1} = \overline{C_2} = \ ... = \overline{C_n} = 0.$

$$C_i(x) = \int g_i(x)\,dx.$$

Kõrgemat järku lineaarse konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),} \quad (5.34)$$

kus $\boldsymbol{a_1, \dots, a_n}$ on konstandid ja $f(x)$ antud vabaliige ja $y = y(x)$ otsitav funktsioon. Võrrand on erijuht võrrandist (5.30).

Võrrandi lahendamiseks tuleb lahendada kõigepealt **vastav homogeenne võrrand** kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \tag{5.35}$$

selleks koostame karakteristliku võrrandi

$$\boldsymbol{k^n + a_1 k^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} k + a_n = 0} \qquad (.536)$$

ja leiame lahendina karakteristlikud väärtused $k_1, \dots, k_n$.

Definitsioon 5.25.
Võrrandit (5.36)

$$\boldsymbol{k^n + a_1 k^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} k + a_n = 0}$$

nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (5.35) **karakteristlikuks võrrandiks**, võrrandi (5.36) lahendeid nimetatakse **karakteristlikeks väärtusteks**. Võrrandi (5.36) vasakul poolel olevat polünoomi

$$\boldsymbol{P(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ \dots + a_{n-1} k + a_n}$$

nimetatakse võrrandi (5.35) **karakteristlikuks polünoomiks**.

Karakteristlike väärtuste iseloomule vastavalt (reaalsed või kompleksed, kordsed) kirjutame välja võrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid $y_1, \dots, y_n$ ja nende lineaarse kombinatsioonina ka võrrandi üldlahendi.

a) igale **reaalsele ühekordsele** karakteristlikule väärtusele k_i vastab erilahend kujul

$$\boldsymbol{y_i = e^{k_i x};}$$

b) igale **m-kordsele reaalsele** karakteristlikule väärtusele k_i vastab m erilahendit kujul

$$\boldsymbol{e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{k_1 x};}$$

c) igale komplekssete karakteristlike väärtuste paarile $k_{j,l} = \alpha \pm i\beta$ vastab kaks reaalset erilahendit kujul

$$\boldsymbol{e^{\alpha x} \cos \beta x\, , e^{\alpha x} \sin \beta x\, ;}$$

d) igale **m-kordsele komplekssete** karakteristlike väärtuste paarile $k_{j,l} = \alpha \pm i\beta$ vastab $2m$ reaalset erilahendit kujul

$$\boldsymbol{e^{\alpha x} \cos \beta x\, , x\, e^{\alpha x} \cos \beta x\, , \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,}$$

$$\boldsymbol{e^{\alpha x} \sin \beta x\, , x e^{\alpha x} \sin \beta x\, , \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.}$$

Teoreem 5.10.
Kui funktsioon $y = u + iv$ on lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi komplekseks lahendiks, siis selle reaalosa u ja imaginaarosa kordaja v on samuti võrrandi lahendiks.

Teoreem 5.11.
Kui konstantsete kordajatega lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (5.35) karakteristlikud väärtused $k_1, \dots, k_n$ on paarikaupa erinevad, siis funktsioonid $y_i = e^{k_i x}$ moodustavad diferentsiaalvõrrandi (5.35) lahendite fundamentaalsüsteemi ja seega tema üldlahendiks on

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ \dots + C_n e^{k_n x},}$$

kus $-\infty < x < \infty$ ja $C_1, C_2, \dots, C_n$ on suvalised konstandid.

Teoreem kehtib ka kompleksarvuliste karakteristlike väärtuste korral

$$k_j = \alpha + i\beta, k_l = \alpha - i\beta,$$

kuid sellisel juhul vastab komplekssetele lahenditele kaks reaalset lahendit, milleks on komplekse lahendi reaalosa ja imaginaarosa kordaja. Näiteks kui

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ja

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

siis sellest, et y_1 on võrrandi kompleksseks lahendiks, järeldub teoreemist 5.10, et ka lahendi reaalosa $Re(y_1) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja imaginaarosa kordaja $Im(y_1) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ on selle võrrandi lahenditeks. Seega komplekssetele lahenditele y_1 ja y_2 vastab kaks reaalset lahendit kujul

$$\tilde{y}_1 = Re(y_1) = e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \qquad \tilde{y}_2 = Im(y_1) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Näide 5.43. Leida üldlahend võrrandile

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on kujul

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0$$

ning karakteristlikud väärtused on

$$k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3.$$

Võrrandi erilahendid on

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{3x}$$

ja võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Näide 5.44. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on kujul

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0$$

ja selle lahendid on

$$k_1 = -1, k_2 = k_3 = 1.$$

Võrrandi erilahendid on

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x, y_3 = xe^x$$

ja võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

Näide 5.45. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y^{(7)} - 2y^{(6)} + 2y^{(5)} - 4y^{(4)} + y''' - 2y'' = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on kujul

$$k^7 - 2k^6 + 2k^5 - 4k^4 + k^3 - 2k^2 = k^2(k-2)(k^2+1)^2 = 0$$

ja selle lahendid on

$$k_1 = k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = k_5 = i, k_6 = k_7 = -i.$$

Võrrandi erilahendid on

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = x, \qquad y_3 = e^{2x}, \qquad y_4 = \cos x,$$

$$y_5 = x\cos x\,, \qquad y_6 = \sin x\,, \qquad y_7 = x\sin x.$$

ja võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + (C_4 + C_5x)\cos x + (C_6 + C_7x)\sin x.$$

Mittehomogeense võrrandi lahend avaldub vastava homogeense võrrandi lahendi ja ühe mittehomogeense võrrandi erilahendi summana:

$$\boldsymbol{y = C_1y_1 + \ \dots + C_ny_n + Y,}$$

kus Y on mittehomogeense võrrandi üks erilahend.

Näide 5.46. Leida erilahend võrrandile

$$y''' - y'' = e^x.$$

Kuna vastava karakteristliku võrrandi

$$k^3 - k^2 = 0$$

lahendid on $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 0$, siis vastava homogeense võrrandi üldlahendiks on

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Seega üks karakteristliku võrrandi lahenditest $k_1 = 1$ on võrdne arvu e^x astmes oleva argumendi x kordajaga. Seetõttu otsime erilahendit kujul

$$Y = Axe^x,$$

siis

$$Y' = Ae^x + Axe^x,$$

$$Y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x,$$

$$Y''' = 2Ae^x + Ae^x + Axe^x = 3Ae^x + Axe^x.$$

Tundmatu kordaja A määramiseks asetame võrrandisse otsitava y tuletiste asemele vastavad Y tuletiste avaldised. Saame

$$3Ae^x + Axe^x - 2Ae^x - Axe^x = e^x$$

ehk

$$Ae^x = e^x.$$

Siit saame, et $A = 1$ ja otsitavaks erilahendiks on

$$Y = xe^x.$$

5.7. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMID

Paljude ülesannete lahendamisel tuleb leida funktsioonid

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x),$$

mis rahuldavad diferentsiaalvõrrandite süsteemi argumendi x, otsitavate funktsioonide $y_1, y_2, \dots, y_n$ ning nende tuletiste suhtes. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkujus võib olla otsitavate funktsioonide kõrgemat järku tuletisi. Kõrgemat järku tuletised on võimalik uute muutujate sissetoomise teel asendada temaga samaväärse normaalkujulise süsteemiga.

Definitsioon 5.26.

Normaalkujuliseks süsteemiks (normaalsüsteemiks) nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi, kus võrrandite vasakuteks poolteks on otsitavate funktsioonide esimest järku tuletised, paremad pooled aga tuletisi ei sisalda:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . \\ \dfrac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \tag{5.37}$$

kus $F_k(x, y_1, \dots, y_n)$ on antud funktsioonid $k = 1,2, \dots, n$,
$y_k = y_k(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Näide 5.47. Leida järgmise süsteemi normaalkuju

$$\begin{cases} y' - 2zz' = 0, \\ \sin x + y'' - z^2 = 0. \end{cases}$$

Avaldame teisest võrrandist suuruse y'' ja esimesest suuruse z', saame süsteemi kujul

$$\begin{cases} z' = \dfrac{y'}{2z}, \\ y'' = z^2 - \sin x . \end{cases}$$

Võtame kasutusele uue funktsiooni

$$w = y',$$

saame süsteemi asendada kolmandat järku normaalkujulise süsteemiga otsitavate y, z ja w suhtes:

$$\begin{cases} y' = w, \\ z' = \dfrac{w}{2z} , \\ w' = z^2 - \sin x . \end{cases}$$

Normaalsüsteemi järguks nimetatakse normaalsüsteemis sisalduvate võrrandite arvu. Süsteem (5.37) on $\boldsymbol{n}$-järku.

Definitsioon 5.27.

Normaalsüsteemi (5.37) **lahendiks vahemikus** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ nimetatakse suvalist kogumit n funktsioonist $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, mis on määratud ja pidevalt diferentseeruvad vahemikus (a, b), kui ta muudab samasuseks süsteemi (5.37) iga võrrandi iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 5.28.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.37) jaoks **Cauchy ülesanne** seisneb järgnevas: leida süsteemi lahendite hulgast niisugune

$$\boldsymbol{y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x),}$$

mis rahuldab tingimusi

$$\boldsymbol{y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0,}$$

kui $x = x_0$, kus $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ on ette antud arvud ehk algväärtused

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

Arv x_0 on sõltumatu muutuja x algväärtus.
Algtingimused **on kujul**

$$y_k(x_0) = y_k^0, \qquad k = 1,2, \dots, n.$$

Definitsioon 5.29.
Normaalsüsteemi (5.37) **üldlahendiks** (piirkonnas $\boldsymbol{D}$) nimetatakse n suvalisest konstandist $C_1, C_2, \dots, C_n$ sõltuvat süsteemi lahendit

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = f_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)} \\ \boldsymbol{y_2 = f_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \boldsymbol{y_n = f_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)} \end{cases} \tag{5.38}$$

millel on järgmine omadus: iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ leiduvad sellised konstantide väärtused $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$, et vastav lahend (integraalkõver) (5.35) kulgeb läbi mainitud punkti, st rahuldab tingimusi

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = f_1\left(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0\right)} \\ \boldsymbol{y_2 = f_2\left(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0\right)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \boldsymbol{y_n = f_n\left(x_0, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0\right)} \end{cases}$$

Üldlahendist (5.38) konstantide $C_1, C_2, \dots, C_n$ väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse süsteemi (5.37) erilahenditeks.

Näide 5.48. Näidata, et järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y \end{cases}$$

lahendiks on

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}, \end{cases}$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Leiame lahenditest tuletised (võrrandite vasakud pooled) ja näitame, et need on võrdsed võrrandite paremate pooltega.

$$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x},$$

$$y - z = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x},$$

$$z' = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x},$$

$$z - 4y = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x}.$$

Järelikult funktsioonid y ja z on tõepoolest süsteemi lahendid konstantide C_1 ja C_2 mis tahes väärtuste korral.

Mõnikord ei sõltu süsteemis olevad võrrandid teistest muutujatest, siis on võimalik lahendada võrrandid eraldi diferentsiaalvõrranditena. Järgnevas näites koosneb süsteem kahest teineteisest sõltumatust diferentsiaalvõrrandist ja süsteemi lahendamine taandub kahe eraldi võrrandi lahendamisele.

Näide 5.49. Leida järgmise normaalsüsteemi erilahend

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x} \end{cases},$$

algtingimustel

$$y(1) = 2 \text{ ja } z(1) = 3.$$

Tegemist on sellise süsteemiga, mille mõlemad võrrandid on eraldi lahendatavad, nad ei sõltu teisest muutujast. Kõigepealt korrutame mõlemat võrrandit suurusega dx ja seejärel jagame esimest võrrandit suurusega y ja teist võrrandit suurusega z, saame

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}, \\ \dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}. \end{cases}$$

Integreerides mõlemaid võrrandeid, saame

$$\begin{cases} \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \\ \ln|z| = \ln|x| + \ln C_2. \end{cases}$$

Üldlahend avaldub järgmiselt

$$\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 x. \end{cases}$$

Erilahendi saamiseks rakendame rajatingimusi, saame konstantide C_1 ja C_2 väärtused järgmiselt:

$$C_1 = 2, C_2 = 3.$$

Seega erilahendiks on

$$y = 2x, z = 3x.$$

5.7.1. ÜHELE VÕRRANDILE TAANDAMISE MEETOD

Diferentsiaalvõrrandite süsteemide üks põhilisi lahendusmeetodeid seisneb nende taandamises ühele kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandile. Lahendades selle võrrandi, leiame ühe otsitavatest funktsioonidest. Ülejäänud otsitavad funktsioonid leiame lähtesüsteemi võrrandite ja süsteemi teisendamise käigus saadud seoste abil. Kuna diferentsiaalvõrrandite süsteemi ühele kõrgemat järku võrrandile taandamisel on põhilisteks operatsioonideks võrrandite diferentseerimine ja muutujate elimineerimine, nimetatakse ühele muutujale taandamise meetodit tihti ka **elimineerimismeetodiks**.

Näide 5.50. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y' = z, \qquad z' = y,$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Diferentseerime esimest võrrandit, saame

$$y'' = z'$$

ja asendame teise võrrandisse, saame teist järku diferentsiaalvõrrandi kujul

$$y'' = y,$$

üldlahendiks saame

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Esimesest võrrandist saame otsitava funktsiooni z:

$$z = -C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Näide 5.51. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y - 2zz' = 0 \\ \sin x + y'' - z^2 = 0 \end{cases},$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Diferentseerime teist võrrandit, saame

$$\cos x + y''' - 2zz' = 0$$

ja elimineerime korrutise $2zz'$, liites võrrandid kokku, saame kolmandat järku konstantsete kordajatega lineaarse võrrandi

$$y''' - y = -\cos x,$$

mille üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + Y,$$

kus Y on võrrandi erilahend ja $\{y_1, y_2, y_3\}$ vastava homogeense võrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid. Vastava homogeense võrrandi

$$y''' - y = 0$$

karakteristlik võrrand on kujul

$$k^3 - 1 = 0,$$

karakteristliku võrrandi lahenditeks on

$$k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

seega homogeense võrrandi üldlahendiks on

$$y_* = C_1e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Mittehomogeense võrrandi erilahendit otsime samal kujul funktsiooniga $(-\cos x)$, ehk trigonomeetriliste funktsioonide summana:

$$Y = A\sin x + B\cos x, \qquad Y' = A\cos x - B\sin x,$$

$$Y'' = -A\sin x - B\cos x\,, \qquad Y''' = -A\cos x + B\sin x.$$

Asendame erilahendi võrrandisse, saame:

$$-A\cos x + B\sin x - \ A\sin x - B\cos x = -\cos x.$$

Konstantide A ja B määramiseks peavad $\sin x$ ja $\cos x$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki olema võrdsed, siit saame kaks võrrandit:

$$-A - B = -1, \qquad B - A = 0,$$

ehk

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

Saime erilahendiks

$$Y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$$

ja üldlahendiks

$$y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Nüüd on vaja leida teine otsitav funktsioon z, selleks kasutame teist võrrandit ja leiame üldlahendist y teise tuletise:

$$z^2 = \sin x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C_1 e^x + \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$+e^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{3}{4}C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{4}C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Näide 5.52. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = 2 - z \\ z' = y - 4\cos x \end{cases},$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Avaldame esimesest võrrandist otsitava z ja diferentseerime saadud võrrandit:

$$z = 2 - y', \ \ z' = -y''.$$

Nüüd asendame saadud z' avaldise teise võrrandisse, saame

$$-y'' = y - 4\cos x$$

ehk

$$y'' + y = 4\cos x. \tag{5.39}$$

Saime teist järku konstantsete kordajatega lineaarse diferentsiaalvõrrandi, mille üldlahend on kujul

$$y = y_h + Y,$$

kus y_h on võrrandile vastava homogeense võrrandi lahend ja Y on mittehomogeense võrrandi erilahend. Kõigepealt lahendame võrrandile vastava homogeense võrrandi

$$y'' + y = 0.$$

Lahendamiseks moodustame võrrandile vastava karakteristliku võrrandi

$$k^2 + 1 = 0,$$
mille lahenditeks on
$$k_1 = i, k_2 = -i.$$
Kuna tegemist on kompleksarvuliste karakteristliku võrrandi lahenditega, siis homogeense võrrandi üldlahend avaldub kujul
$$y_h = e^{0x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$
Mittehomogeense võrrandi erilahendi leidmisel peame arvestama, et võrrandil $a = 0$, see tähendab, et võrrandis üldkujuga
$$y'' + ay' + by = F(x)$$
puudub liige, mis sisaldab y'. Kuna $F(x) = 4\cos x$ ehk koosinuse argument on 1 korda x ja karakteristliku võrrandi lahendis imaginaarühiku kordaja on 1, siis meil on tegemist **erijuhuga**, mille korral peame erilahendit Y otsima kujul
$$Y = x(A \sin x + B \cos x).$$
Tuletiste leidmisel kasutame korrutise tuletise reeglit. Siis
$$Y' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x),$$
$$Y'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x).$$
Asendades suurused Y, Y'' mittehomogeensesse võrrandisse (5.39), saame
$$A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(-A \sin x - B \cos x) + x(A \sin x + B \cos x) = 4\cos x,$$
$$2A \cos x - 2B \sin x - x(A \sin x + B \cos x) + x(A \sin x + B \cos x) = 4 \cos x.$$
Nüüd taanduvad välja liikmed, mis sisaldavad $xA \sin x, xB \cos x$ (nii juhtub alati) ja on võimalik leida kordajate A, B väärtused, võrdsustades vasakul ja paremal pool võrdusmärki trigonomeetriliste funktsioonide kordajad.
$$\cos x \text{ kordajad: } 2A = 4,\ A = 2,$$
$$\sin x \text{ kordajad: } -2B = 0,\ B = 0.$$
Seega otsitav erilahend on kujul
$$Y = 2x \sin x$$
ja võrrandi üldlahendi saame
$$y = y_h + Y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x \sin x.$$
Kuna meil on tegemist süsteemiga, milles on vaja leida ka otsitav funktsioon $z = z(x)$, kasutame selleks eespool esimesest võrrandist saadud avaldist:
$$z = 2 - y',$$
$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x + 2 \sin x + 2x \cos x,$$
$$z = 2 - y' = 2 - C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 \sin x - 2x \cos x.$$
Diferentsiaalvõrrandisüsteemi lahenditeks on seega
$$\begin{cases} y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2x \sin x, \\ z = 2 - C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2 \sin x - 2x \cos x. \end{cases}$$

5.7.2. INTEGREERUVATE KOMBINATSIOONIDE MEETOD

Teiseks meetodiks, mida sageli kasutatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamisel, on **integreeruvate kombinatsioonide meetod** ehk **kombineerimismeetod**. See meetod seisneb süsteemi võrrandite teisendamisel kujule, millest on lihtne leida võrrandeid kujul $\varphi(x, y_1, .., y_n) = C$. Süsteemi võrrandite teisendamisel kasutatakse sageli järgmiseid võtteid: liidetakse võrrandid omavahel, lahutatakse ühest võrrandist teine. Nendele võtetele võib lisaks kasutada ka võrrandite läbikorrutamist sobivate funktsioonidega enne liitmist või lahutamist, et oleks võimalik integreerida.

Näide 5.53. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y, \end{cases}$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.
Tegemist on ülesandes 5.50 oleva süsteemiga, mille lahendasime elimineerimismeetodil. Lahendame sama ülesande teisel meetodil. Liites antud võrrandite vasakud ja paremad pooled, saame

$$y' + z' = z + y$$

ehk

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z.$$

See ongi üheks integreeruvaks kombinatsiooniks, mille lahendamiseks teeme asenduse $u = y + z$ ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$u' = u,$$

mille lahendiks on

$$u = C_1 e^x,$$

edasi asendades u avaldise

$$y + z = C_1 e^x$$

ja avaldades integreerimiskonstandi, saame

$$C_1 = e^{-x}(y + z).$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks lahutame süsteemi esimesest võrrandist teise:

$$y' - z' = z - y$$

ehk

$$\frac{d(y-z)}{dx} = -(y - z).$$

See ongi üheks integreeruvaks kombinatsiooniks, mille lahendamiseks teeme asenduse

$$u = y - z$$

ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$u' = -u,$$

mille lahendiks on

$$u = C_2 e^{-x},$$

edasi asendades u avaldise

$$y - z = C_2 e^{-x}$$

ja avaldades integreerimiskonstandi, saame

$$C_2 = e^{x}(y - z).$$

Süsteemi üldlahendi võib esitada kujul

$$\begin{cases} e^{-x}(y + z) = C_1, \\ e^{x}(y - z) = C_2. \end{cases}$$

Kui avaldada saadud seostest otsitavad funktsioonid y ja z, saame süsteemi üldlahendi kujul:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Saime sama tulemuse, mis ülesandes 5.50.

Näide 5.54. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendage järgmine diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1, \end{cases}$$

kus $x = x(t), y = y(t)$ ja $z = z(t)$ on otsitavad funktsioonid.

Lahutame süsteemi esimesest võrrandist teise, saame

$$\frac{d(x - y)}{dt} = 0,$$

millest integreerimisel saame

$$x - y = C_1.$$

Asendades saadud avaldise süsteemi teise ja kolmandasse võrrandisse, saame teist järku süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{C_1}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = C_1 + 1. \end{cases}$$

Selle süsteemi teisest võrrandist saame integreerides avaldada z:

$$z = t + C_1 t + C_2.$$

Asendades saadud avaldise uue süsteemi esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{t + C_1 t + C_2 - t} = \frac{C_1}{C_1 t + C_2}.$$

Saadud võrrandi lahendamisel saame

$$y = \ln|C_1 t + C_2| + C_3.$$

Süsteemi üldlahend on kujul

$$\begin{cases} x = \ln|C_1 t + C_2| + C_1 + C_3, \\ y = \ln|C_1 t + C_2| + C_3, \\ z = t(1 + C_1) + C_2. \end{cases}$$

5.7.3. SÜMMEETRILISTE SÜSTEEMIDE LAHENDAMINE KOMBINEERIMISMEETODIL

Kirjutame normaalkujul oleva süsteemi (5.37) võrrandid ümber sümmeetrilisele kujule arvestades, et diferentsiaalide jagatised on otsitavate tuletised ja avaldades argumendi diferentsiaali igast võrrandist. Saame

$$dx = \frac{dy_1}{y_1'}, dx = \frac{dy_2}{y_2'}, \dots, dx = \frac{dy_n}{y_n'}.$$

Süsteemi (5.37) **sümmeetriline** kuju on

$$\frac{dy_1}{F_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{F_2(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{F_n(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1}.$$

Tegemist on süsteemi teise kirjutusviisiga, seetõttu võime lubada olukorda, kus osa nimetajatest sümmeetrilisel kujul on nullid. Nulliga võrduv nimetaja sümmeetrilises süsteemis tähendab selle muutuja diferentsiaali võrdumist nulliga. Näiteks kui

$$dy_1 = 0,$$

siis vastavat võrrandit integreerides saame $y_1 = C$, kus C on suvaline konstant.
Sümmeetrilise süsteemi lahendamiseks integreeruvate kombinatsioonide meetodil on võimalik kasutada **võrdsete murdude omadust**, mille kohaselt mistahes kordajate $k_1, k_2, .., k_n$ $(|k_1| + |k_2| + \dots + |k_n| \neq 0)$ korral kehtib

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \dots = \frac{p_n}{q_n} = \frac{k_1 p_1 + k_2 p_2 + .. + k_n p_n}{k_1 q_1 + k_2 q_2 + \dots + k_n q_n}.$$

Selle omaduse tõttu võime korrutada iga murru lugejat ja nimetajat ühe ja sama kordajaga ning tulemuseks on murd, mille lugejas on kõikide murdude lugejate summa ning nimetajas kõikide nimetajate summa. Integreeruva kombinatsiooni saamiseks võib teostada korrutamised ja liitmised nii, et nimetaja võrduks nulliga, mistõttu saame lugeja integreerimisel esimese integraali avaldise.

Näide 5.55.

Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendage järgmine sümmeetriline diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-\ln x} = \frac{dz}{\ln x - 2y}.$$

Esimene võrdus annab

$$-\ln x\, dx = 2y dy,$$

mille integreerimisel saame

$$-x \ln x - x = y^2 + C_1,$$

siit

$$y^2 + x(\ln x - 1) = C_1.$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks proovime nimetajasse sada nulli, selleks liidame esialgse süsteemi kõikide murdude lugejad ja kõikide murdude nimetajad kokku, saame

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-\ln x} = \frac{dz}{\ln x - 2y} = \frac{d(x+y+z)}{2y - \ln x + \ln x - 2y} = \frac{d(x+y+z)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame

$$d(x+y+z) = 0,$$

millest

$$x + y + z = C_2.$$

Süsteemi üldlahend on kujul

$$y^2 + x(\ln x - 1) = C_1, x + y + z = C_2.$$

Saadud esimesed integraalid on lineaarselt sõltumatud, kuna ühes avaldistest puudub muutuja z, seetõttu ei ole võimalik ühte teise kaudu avaldada.

Näide 5.56.

Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendage järgmine sümmeetriline diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Teine võrdus annab

$$ydy = zdz,$$

mille integreerimisel saame

$$\frac{y^2}{2} = z^2 + C_1,$$

siit

$$y^2 - z^2 = C_1.$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks lahutame teise ja kolmanda murru lugejad ja nimetajad liikmeti ja võrdsustame esimese murruga.

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y} = \frac{d(y-z)}{z-y},$$

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{-d(z-y)}{z-y},$$

Teeme muutuja vahetuse $u = z - y$, siis

$$\frac{dx}{u^2} = -\frac{du}{u},$$

kust saame

$$dx = -udu$$

ja integreerides võrrandit, on tulemuseks

$$x = -\frac{u^2}{2} + C_2.$$

Korrutades võrrandit kahega ja asendades tagasi muutuja vahetuse avaldise, saame

$$2x - (z - y)^2 = C_2.$$

Saime süsteemi üldlahendi kujul

$$y^2 - z^2 = C_1, 2x - (z - y)^2 = C_2.$$

Näide 5.57.

Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendage järgmine sümmeetriline diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{4z - 5y} = \frac{dy}{5x - 3z} = \frac{dz}{3y - 4x} \quad (4z \neq 5y).$$

Korrutame esimest murdu (lugejat ja nimetajat) arvuga 3, teist arvuga 4 ja kolmandat arvuga 5 ja liites kõik lugejad ja nimetajad kokku, saame

$$\frac{3dx}{12z - 15y} = \frac{4dy}{20x - 12z} = \frac{5dz}{15y - 20x} = \frac{d(3x + 4y + 5z)}{12z - 15y + 20x - 12z + 15y - 20x} =$$

$$= \frac{d(3x + 4y + 5z)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame

$$d(3x + 4y + 5z) = 0,$$

millest

$$3x + 4y + 5z = C_1.$$

Korrutame esimest murdu (lugejat ja nimetajat) suurusega $2x$, teist murdu suurusega $2y$ ja kolmandat suurusega $2z$ ja liites kõik lugejad ja nimetajad kokku, saame

$$\frac{2xdx}{8xz - 10xy} = \frac{2ydy}{10xy - 6yz} = \frac{2zdz}{6yz - 8zx} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{8xz - 10xy + 10xy - 6yz + 6yz - 8zx} =$$

$$= \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

millest

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Leitud esimesed integraalid on sõltumatud, kuna eeldame, et $4z \neq 5y$. Saime süsteemi üldlahendi kujul

$$3x + 4y + 5z = C_1, x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

VI PTK
OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

6.1. OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE

Definitsioon 6.1.

Võrrandit, mis seob otsitavat mitme muutuja funktsiooni tema osatuletistega ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse **osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks**.

Üldkuju kahe sõltumatu muutuja korral.

Kahe sõltumatu muutuja x ja y korral on esimest järku **osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks**

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

kus $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon.

Funktsioon F esitab seose sõltumatute muutujate x ja y ning funktsioonide

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

vahel. Tähistades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Olgu funktsioon $F(x, y, u, p, q)$ määratud muutujate x, y, u, p, q piirkonnas G.

Definitsioon 6.2.

Esimest järku osatuletisega diferentsiaalvõrrandi **lahendiks** muutujate x, y piirkonnas D nimetatakse sellist funktsiooni $\boldsymbol{u = u(x, y)}$, kui ta on piirkonnas D määratud ja pidevalt diferentseeruv ning

$$\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) \in G$$

ja

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0$$

iga $(x, y) \in D$ korral, ehk mis sellesse võrrandisse asetatuna muudab võrrandi **samasuseks**.

Oluline erinevus harilike ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite vahel seisneb selles, et harilike diferentsiaalvõrrandite üldlahendites sisaldusid suvalised konstandid, osatuletistega diferentsiaalvõrrandites aga suvalised funktsioonid. Seega võrrandi lahend $u = u(x, y)$ võib sõltuda ühest **suvalisest funktsioonist**.

Näide 6.1. Võrrandi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

üheks lahendiks on funktsioon $u = x + y$, kuna tema osatuletised on

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 1 = 0,$$

ehk saame samasuse $0 \equiv 0$.

Näide 6.2. Lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Integreerime võrrandit argumendi x järgi, nagu harilikku diferentsiaalvõrrandit, saame $u = C$. Kuna u on kahe muutuja funktsioon, siis C ei sõltu argumendist x, aga võib sõltuda argumendist y, võrrand on ikka rahuldatud. Võrrandi üldlahendiks on suvaline funktsioon argumendist y:

$$u = C(y).$$

Näide 6.3. Lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Vaatleme muutujat x parameetrina ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dy} = -\frac{1}{x},$$

$$\ln|u| = -\frac{y}{x} + \ln|C(x)|,$$

$$u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}.$$

Selle võrrandi lahendis olev integreerimiskonstant võib sõltuda argumendist x. Kontrollime lahendit, asendades selle esialgsesse võrrandisse:

$$x\frac{\partial\left(C(x)e^{-\frac{y}{x}}\right)}{\partial y} + C(x)e^{-\frac{y}{x}} = 0,$$

$$x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot C(x)e^{-\frac{y}{x}} + C(x)e^{-\frac{y}{x}} = 0.$$

Geomeetriliselt vastab võrrandi lahendile $u = u(x, y)$ **pind ruumis**, seda pinda nimetatakse integraalpinnaks. Kuna üldlahendis on suvalised funktsioonid, sisaldab võrrand lõpmata palju integraalpindu.

Definitsioon 6.3.

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse võrrandis leiduvat kõrgeimat osatuletise järku.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab kaht suvalist funktsiooni. Loodusteadustes kasutatavad teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandid:

a) **Lainevõrrand**, mis kirjeldab laine levikut, näiteks pillikeele võnkumist, on kujul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

kus α on konstant. Pillikeele jaoks on $\alpha^2 = T/\varrho$, kus T tähistab keele otstes mõjuvat tõmbejõudu ja ϱ lineaarset tihedust ehk massi pikkusühiku kohta.

b) **Difusioonivõrrand**, mis on kujul

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kus otsitav funktsioon $u = u(x, t)$ võib tähistada näiteks gaasi kontsentratsiooni või osarõhku, mis muutub ajas. Konstant D tähistab difusioonikordajat.

Näide 6.4. Lahendada teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Kirjutame antud võrrandi kujul

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Kõigepealt integreerime argumendi x järgi (nagu harilikku diferentsiaalvõrrandit), seejärel integreerime argumendi y järgi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C(y), \qquad u = \int C(y)\,dy + C_2(x).$$

Kuna integreerisime muutuja y järgi, võib integreerimiskonstant sõltuda suvalisest argumendi x funktsioonist. Tähistades

$$\int C(y)\,dy \doteq C_1(y),$$

saame üldlahendi, mis sisaldab kaht suvalist funktsiooni

$$u = C_1(y) + C_2(x).$$

Seega teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend sõltub kahest suvalisest funktsioonist. Kui järk on kõrgem, siis samuti suvaliste funktsioonide arv, millest üldlahend sõltub, on võrdne võrrandi järguga.

6.2. CAUCHY ÜLESANNE

Cauchy ülesanne osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks on järgmine: **leida integraalpind, mis läbib etteantud kõverat**. Selle kõvera võrrandid võivad olla antud **ristkoordinaatides**

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

või **parameetrilisel kujul**: leida integraalpind, mis läbib etteantud kõverat

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), u = \chi(t),$$

kus parameeter t muutub mingis vahemikus (t_1, t_2). Tuleb leida selline võrrandi lahend, mille korral

$$\Phi\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big) \equiv 0.$$

Kui etteantud kõver asub mingil tasandil $x = x_0$ või $y = y_0$, kus x_0 ja y_0 on mingid etteantud arvud

$$x = x_0, u = \chi(y)$$

või

$$y = y_0, u = \psi(x),$$

siis algtingimuse saab kirjutada vastavalt

$$u(x_0, y) = \chi(y),$$

või

$$u(x, y_0) = \psi(x).$$

Näide 6.5. Lahendada Cauchy ülesanne

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \qquad u(x,1) = x^2.$$

Üldlahendi leidsime näites 6.3, algtingimusest asendame üldlahendisse vastavad suurused, saame

$$u = C(x)e^{-\frac{y}{x}},$$

$$x^2 = C(x)e^{-\frac{1}{x}},$$

$$C(x) = x^2e^{\frac{1}{x}},$$

$$u = x^2e^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{y}{x}} = x^2e^{\frac{1-y}{x}}.$$

Näide 6.6. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy, \qquad u|_{x^2+y^2=1} = 1.$$

Loeme parameetriks argumendi y ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{du}{dx} = xy, \qquad u = y\cdot\frac{x^2}{2} + C(y),$$

Üldlahendis $C(y)$ on muutuja y funktsioon. Leiame $C(y)$ nii, et oleks rahuldatud antud tingimus

$$1 = y\cdot\frac{1-y^2}{2} + C(y),$$

$$C(y) = 1 - \frac{y(1-y^2)}{2},$$

seega otsitav lahend Cauchy ülesandele on

$$u = y\cdot\frac{x^2}{2} + 1 - \frac{y(1-y^2)}{2}.$$

Näide 6.7. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \qquad u(1,y) = y^2.$$

Integreerime argumendi x järgi, üldlahend on

$$u(x,y) = xy + C(y),$$

$$u(1,y) = 1y + C(y),$$

$$y + C(y) = y^2.$$

Avaldame $C(y)$:

$$C(y) = y^2 - y.$$

Erilahend on

$$u(x,y) = xy + y^2 - y.$$

Näide 6.8. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u,\ \ u\left(\frac{1}{y}, y\right) = y.$$

Jagame suurusega u ja integreerime x järgi

$$\frac{\partial u}{u} = \partial x, \qquad \ln|u| = x + \ln C(y), \qquad u(x,y) = C(y)e^x.$$

Erilahend

$$C(y)e^{\frac{1}{y}} = y;\ \ C(y) = ye^{\frac{1}{y}}.$$

Üldlahend on:

$$u(x,y) = ye^{\frac{1}{y}}e^x = ye^{x-\frac{1}{y}}.$$

Cauchy ülesanne ei ole alati lahenduv: võib juhtuda, et läbi etteantud kõvera ei lähe ükski integraalpindadest. Samas võib läbi lähtekõvera minna rohkem kui üks integraalpindadest.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **erilahendi** leidmiseks peab olema teada ka otsitava funktsiooni u esimest järku **osatuletiste väärtus** lähtekõvera punktides, sest vaja on teada kahe suvalise funktsiooni väärtust $C_1(x), C_2(y)$.

Näide 6.9. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0;\ \ u(1,y) = y^2;\ \ \frac{\partial u}{\partial x} = y.$$

Integreerime argumendi x järgi kaks korda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y),$$

$$u = \int C_1(y)\,dx + C_2(y) = xC_1(y) + C_2(y).$$

Erilahendi saamiseks teisest tingimusest, asendades eelnevasse võrrandisse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(y),$$

$$C_1(y) = y$$

ja esimesest tingimusest saame asendades üldlahendisse

$$x = 1, u = y^2:$$

$$1 \cdot C_1(y) + C_2(y) = y^2;$$
$$y + C_2(y) = y^2;$$
$$C_2(y) = y^2 - y.$$

Erilahend

$$u(x, y) = xy + y^2 - y.$$

6.3. LINEAARSED OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y).} \tag{6.39}$$

Kvaasilineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$p(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y,u).$$

Lineaarse homogeense esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.} \tag{6.40}$$

Lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **lahendamiseks** tuleb lahendada temaga sümmeetriline harilik diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dx}{p(x,y)} = \frac{dy}{q(x,y)}. \tag{6.41}$$

Osutub, et osatuletistega diferentsiaalvõrrandi (6.40) ja võrrandi (6.41) lahendamise ülesanded on ekvivalentsed. Sellise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\psi(x,y) = C$$

korral osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** on

$$\boldsymbol{u = \psi(x,y).}$$

Kui otsitav funktsioon on **kolme** muutuja funktsioon

$$\boldsymbol{p(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + r(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,} \tag{6.42}$$

tuleb lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks lahendada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{p(x,y,z)} = \frac{dy}{q(x,y,z)} = \frac{dz}{r(x,y,z)}. \tag{6.43}$$

Kehtivad järgmised laused.

Lause 6.1.
Kui valem

$$\psi(x,y,z) = C$$

esitab diferentsiaalvõrrandite süsteemi (6.43) lahendit (integraali), siis funktsioon

$$u = \psi(x, y, z)$$

on diferentsiaalvõrrandi (6.42) üheks erilahendiks.

Tõestus. Olgu

$$\psi(x, y, z) = C$$

süsteemi (6.43) lahend. Diferentseerime lahendit:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = 0. \tag{6.44}$$

Süsteemis (6.43) tähistame suhte

$$\frac{dx}{p(x, y, z)} = \frac{dy}{q(x, y, z)} = \frac{dz}{r(x, y, z)} = \lambda,$$

siis

$$dx = \lambda p, dy = \lambda q, dz = \lambda r.$$

Asetame need võrrandisse (6.44), seejärel jagame läbi liikmega λ, saame

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} p + \frac{\partial \psi}{\partial y} q + \frac{\partial \psi}{\partial z} r = 0.$$

Tulemuseks saime võrrandi (6.42), kus otsitava u asemel on funktsioon ψ. See aga tähendab, et funktsioon ψ rahuldab võrrandit (6.42), mistõttu on võrrandi üheks erilahendiks. ■

Kehtib ka vastupidine väide: Kui

$$\psi = \psi(x, y, z)$$

on võrrandi (6.42) erilahend, siis

$$\psi(x, y, z) = C$$

on süsteemi (6.43) lahend.

Lause 6.2.

Kui

$$\psi_1(x, y, z) = C_1 \text{ ja } \psi_2(x, y, z) = C_2$$

on kaks lahendit (integraali) vastavale harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile (6.43), siis

$$\boldsymbol{u = \varphi(\psi_1, \psi_2)}$$

ehk suvaline funktsioon funktsioonidest ψ_1 ja ψ_2 rahuldab vastavat osatuletistega diferentsiaalvõrrandit (6.42).

Tõestus. Arvutame osatuletised funktsioonist

$$u = \varphi(\psi_1, \psi_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial z},$$

seejärel asetame saadud osatuletised võrrandisse (6.42). Saame

$$\left(p(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+r(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}+$$
$$+\left(p(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+r(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\equiv 0.$$

Tulemus on samaselt null, sest lause 6.1 põhjal on mõlemad sulgudes olevad avaldised on samaselt nullid. Seega on **võrrandi (6.42) lahendiks funktsioon**

$$\boldsymbol{u=\varphi(\psi_1,\psi_2)}.$$ ■

Seega saadud lahend $\boldsymbol{u=\varphi(\psi_1,\psi_2)}$ on võrrandi (6.42) **üldlahend**, kui funktsioonid

$$\boldsymbol{\psi_1(x,y,z)=C_1} \text{ ja } \boldsymbol{\psi_2(x,y,z)=C_2}$$

on lineaarselt sõltumatud.

Näide 6.10. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Vastav harilik diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}.$$

Lahendamiseks korrutame võrrandit suurusega xy, saame

$$xdx=-ydy,$$
$$\frac{x^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+\frac{C}{2},$$
$$x^2+y^2=C.$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend on suvaline funktsioon leitud lahendi vasakust poolest

$$u=\psi(x^2+y^2).$$

Näide 6.11. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},$$
$$\ln\,|x|=\ln|\,y|+\ln C_1,$$
$$x=C_1y,$$
$$\frac{x}{y}=C_1.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z},$$

$$\ln|x| = \ln|z| + \ln C_2,$$

$$x = C_2 z,$$

$$\frac{x}{z} = C_2.$$

Seega

$$\psi_1 = \frac{x}{y}, \psi_2 = \frac{x}{z},$$

üldlahend on

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).$$

Kui tundmatuks on n muutuja funktsioon $\boldsymbol{u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, siis esimest järku lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamine toimub analoogiliselt. Võrrand on kujul

$$\boldsymbol{p_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + p_n(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0} \qquad (6.45)$$

ja temale vastav harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem on kujul

$$\boldsymbol{\frac{dx_1}{p_1(x,y,z)} = \frac{dx_2}{p_2(x,y,z)} = \ \ldots = \frac{dx_n}{p_n(x,y,z)}}.$$

Süsteem sisaldab $n-1$ sõltumatut võrrandit, järelikult saame leida süsteemile $n-1$ sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1,$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}.$$

Võrrandi (6.45) üldlahend on suvaline funktsioon, mis sõltub leitud lahenditest:

$$u = \varphi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n).$$

Kvaasilineaarse mittehomogeense võrrandi kujul

$$\boldsymbol{p(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y,u)}$$

lahendamise saab viia lineaarse homogeense võrrandi lahendamisele. Kuna võrrandi kordajad p, q ja r võivad sõltuda ka otsitavast funktsioonist u, on võrrand kvaasilineaarne. Võrrandi lahendit otsime ilmutamata kujul

$$V(x,y,u) = 0,$$

otsitavaks on funktsioon kujul V. Leiame funktsioonist V osatuletised argumentide x ja y järgi (ilmutamata funktsiooni tuletise valemi põhjal)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

ning asetame võrrandisse (6.39):

$$p(x, y, u)\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\right) + q(x, y, u)\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\right) + r(x, y, u) = 0.$$

Korrutame suurusega $-\partial V/\partial u$, saame

$$p(x, y, u)\frac{\partial V}{\partial x} + q(x, y, u)\frac{\partial V}{\partial y} + r(x, y, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Tulemuseks on lineaarne homogeenne osatuletistega diferentsiaalvõrrand funktsiooni V suhtes. Moodustame võrrandile vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{p(x, y, u)} = \frac{dy}{q(x, y, u)} = \frac{du}{r(x, y, u)}}.$$

Sellele süsteemile saame leida kaks sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x, y, u) = C_1,$$

$$\psi_2(x, y, u) = C_2.$$

Võrrandi üldlahend on

$$V = \varphi(\psi_1, \psi_2),$$

kus φ on suvaline funktsioon. Seega esialgse võrrandi (6.39) lahendiks on funktsioon

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0.$$

Samal meetodil saab lahendada kvaasilineaarset homogeenset võrrandit, sellisel juhul tekib süsteemi viimases võrrandis nulliga jagamine. Saame süsteemi kahe võrrandiga, millest teine võrrand on $du = 0$, mille lahend on $u = C_1$ (näide 6.13).

Näide 6.12. Lahendada diferentsiaalvõrrand

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = xy.$$

Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy}.$$

Saime harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi kahe võrrandiga, millest lahendame kõigepealt esimese:

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

$$y = C_1 x,$$

kust

$$x = \frac{y}{C_1}.$$

Teise võrrandi lahendamisel saame

$$\frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{udu}{xy},$$

$$dy = \frac{udu}{x}.$$

Asendame argumendi x esimeses süsteemis saadud avaldisega

$$dy = \frac{C_1 udu}{y},$$

$$ydy = C_1 udu,$$

$$\frac{y^2}{2} = C_1 \frac{u^2}{2} + \frac{C_2}{2},$$

$$y^2 = C_1 u^2 + C_2.$$

Lõpuks on vaja leitud lahendid viia kujule

$$\psi_1(x, y, z) = C_1 \text{ ja } \psi_2(x, y, z) = C_2,$$

et suvalised konstandid oleksid mõlemal juhul paremal pool võrdusmärki:

$$\frac{y}{x} = C_1,$$

$$y\left(y - \frac{u^2}{x}\right) = C_2.$$

Üldlahendiks on

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, y\left(y - \frac{u^2}{x}\right)\right) = 0.$$

Sellest lahendist on võimalik avaldada otsitav funktsioon u, kui teises argumendis oleva funktsiooni kirjutame kujul

$$y\left(y - \frac{u^2}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ning avaldame suuruse u^2

$$u^2 = xy + f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

kus

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Näide 6.13. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

lahend, mis läbib sirget

$$x = y = u.$$

Siin on tegemist kvaasilineaarse võrrandiga, mis on homogeenne. Selle võrrandi lahendamiseks saame kasutada antud meetodit. Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on kujul

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{0},$$

millest saame süsteemi kahe võrrandiga. Kui nimetajas on null, siis võrdsustame lugeja nulliga.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{-1}, du = 0.$$

Teisest võrrandist saame leida otsitava funktsiooni u avaldise:

$$u = C_1,$$

asendame esimesse võrrandisse ja lahendame, saame

$$C_1 y = -x + C_2,$$

asendades esimesena saadud C_1 avaldise, saame võrrandi paremale poole konstandi

$$uy + x = C_2.$$

Võrrandi üldlahendiks on

$$\varphi(u, uy + x) = 0.$$

Erilahendi leidmiseks asendame üldlahendisse $y = u$ ja $z = u$, saame

$$C_1 = u,$$

$$C_2 = u^2 + u.$$

Seega

$$C_2 = C_1(1 + C_1).$$

Sellest saame avaldada erilahendi

$$uy + x = u(1 + u).$$

6.4. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEM KAHEST OSATULETISTEGA VÕRRANDIST

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkuju:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, u) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y, u) \end{cases}$$

Otsitav funktsioon $u = u(x, y)$, funktsioonid f ja g olgu pidevalt diferentseeruvad mingis muutujate x, y, u piirkonnas D.

Teoreem 6.1.
Süsteem on täielikult integreeruv parajasti siis, kui piirkonnas D kehtib samasus

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} g \equiv \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} f.}$$

Sellisel juhul on süsteemil üks lahend, mis läbib etteantud punkti.

Järeldus. Kui on täidetud samasuse tingimus, siis on süsteemil olemas ühest parameetrist sõltuv lahendite parv $\boldsymbol{u = u(x, y, b)}$, kus b on parameeter.

Näide 6.14. Lahendada süsteem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ax + y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{y}{a}.$$

Integreerumise tingimus on täidetud:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} g \equiv 1 \equiv \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u} f,$$

$$\frac{du}{dx} = ax + y,$$

$$u = \frac{ax^2}{2} + yx + C(y),$$

$$\frac{du}{dy}:\ x + C'(y) = x + \frac{y}{a},$$

$$C'(y) = \frac{y}{a},$$

$$C(y) = \frac{y^2}{2a} + b.$$

$$u = \frac{ax^2}{2} + yx + \frac{y^2}{2a} + b = \frac{1}{2a}(y + ax)^2 + b.$$

K I R J A N D U S

1. Mati Kilp, “Algebra I”, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.
2. Aivo Parringu konspekt “Algebra ja geomeetria”, http://math.ut.ee/pmi/kursused/ag/parring/
3. Lembit Roots, Elmar Sakkov, „Kõrgem matemaatika: õppevahend majandusteaduskonna üliõpilastele”, Tartu Riiklik Ülikool, teoreetilise mehaanika kateeder, Tartu, 1982.
4. Elmar Reimers. Matemaatilise analüüsi praktikum II. Tallinn, 1988. https://drive.google.com/file/d/0BwtuAJRdWlyMS2s0ZzctTGdsS0U/view
5. L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2009.
6. N. S. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus II. Tallinn, 1983.
7. Erich Steiner. The Chemistry Maths Book, Oxford University Press, 2008. https://syaifulhamzah.files.wordpress.com/2013/08/erich_steiner-the-chemistry-maths-book-second.pdf
8. Thomas’ Calculus. 12th edition. https://archive.org/details/ThomasCalculusEarlyTranscendentals12thTextbook
9. Arvet Pedas, Gennadi Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid : teooria, näiteid, ülesandeid. Tartu : Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011.
10. Peep Miidla. Diferentsiaalvõrrandite õppematerjalid: **http://math.ut.ee/~peepm/dv/**
11. Lembit Roots. Valitud küsimusi kõrgemast matemaatikast. 1, [Osatuletistega diferentsiaal-võrrandid] : õppevahend Tartu Riikliku Ülikooli keemiaosakonna üliõpilastele, Tartu Riiklik Ülikool, teoreetilise mehaanika kateeder, 1981.

Veebimaterjalid:

1. **http://mathinsight.org**