

Praktikum 1: Tehted kompleksarvudega. Kompleksarvude hulgad.

1. Näidata, et $(r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$ ja $(re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}$, $n \in \mathbf{N}$.
2. Näidata, et $\tan(\arg(x + iy)) = \frac{y}{x}$. Kas on õige, et $\arg(x + iy) = \arctan \frac{y}{x}$?
3. Näidata, et $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ja $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$. Millal kehtivad võrdsused?
4. Näidata, et $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$. Millal kehtivad võrdsused?
5. Joonistada järgmised hulgad komplekstasandil:
 - a) $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 2\}$,
 - b) $\{z \in \mathbf{C} : -\pi < \arg z < \pi, 0 < |z| < 2\}$,
 - c) $\{z \in \mathbf{C} : |z - 1 + i| \geq |z - 1 - i|\}$,
 - d) $\{z \in \mathbf{C} : 1 < |z - 2i| < 2, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\}$,
 - e) $\{z \in \mathbf{C} : |z| = 2|z - i|\}$.
6. Näidata, et võrrand $az\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + b = 0$, kus $A \in \mathbf{C}$, $a, b \in \mathbf{R}$ ning $|A|^2 - ab > 0$, on sirgete ja ringjoonte üldvõrrand (s.t. see võrrand kirjeldab alati kas sirge või ringjoone ning kõiki sirgeid ja ringjooni on võimalik kirjeldada selle võrrandiga).
- 7* (1 p.) Näidata, et kompleksarvude hulgal ei saa defineerida järjestusseost $>$, mis rahuldaks üheaegselt järgmisi tingimusi:
 - a) kui $z \neq 0$, siis kas $z > 0$ või $-z > 0$, kuid mitte mõlemad;
 - b) kui $z_1 > 0$ ja $z_2 > 0$, siis $z_1 z_2 > 0$.

Praktikum 2:

Funktsiooni piirväärtus, pidevus ja diferentseeruvus

1. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $w = Az + C$, kus A ja C on fikseeritud kompleksarvud, sirged $x = a$ ja $y = b$? Teha joonis.
2. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $w = z^2$ sirged $x = a$ ja $y = b$? Teha joonised.
3. Leida piirväärtused või näidata, et piirväärtust ei leidu
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n - i}{n + i}$, c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$, d) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{|z|^2}$, e) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{|z|^2 - 1}{z^2 + 1}$.
4. Näidata, et iga lõplikuks arvuks koonduv jada on tõkestatud.
5. Näidata, et funktsioon $f(z) = \bar{z}$ on ühtlaselt pidev kogu komplekstasandil.
6. Näidata, et funktsioon $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$ pole kusagil diferentseeruv.
7. Tõestada liitfunktsiooni diferentseerimise reegel.
- 8* (3 p.) Näidata, et funktsioon $f(z) = \begin{cases} z^3/\bar{z}^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ rahuldab Cauchy-Riemanni võrrandeid punktis $z = 0$, kuid pole diferentseeruv punktis $z = 0$. Kas see on vastuolus teooriaga?