

Praktikum 3: Elementaarfunktsioonid

1. Leida funktsiooni $f(z) = \sqrt[4]{z-1}$ see haru, mille puhul $f(2) = -1$.
2. a) Näidata, et üldiselt $\sqrt[4]{z^2} \neq (\sqrt[4]{z})^2$.
b) Missuguste $m, n \in \mathbf{N}$ korral $\sqrt[n]{z^m} = (\sqrt[n]{z})^m$?
3. Leida piirkonnas $D = \{z \in \mathbf{C} : |\arg z| < \pi/6\}$ regulaarne funktsioon, mis kujutab piirkonna D ülemiseks pooltasandiks $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
4. Missugusteks joonteks kujutab funktsioon $f(z) = e^z$ jooned $\operatorname{Re} z = a$ ja $\operatorname{Im} z = b$?
5. Arvutada $\ln(1 + \sqrt{3}i)$ ja $\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$.
6. Kas iga $z_1, z_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ korral kehtib $\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$? Aga $\operatorname{Ln} z_1 z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$?
7. Leida $(\ln z)'$.
8. Arvutada i^i . (Märkus: $z^A = e^{A \operatorname{Ln} z}$).
9. Missuguseks hulgaks kujutab funktsioon $f(z) = i \frac{z-1}{z+1}$ ühikringi ülemise poole?
10. Lahendada võrrandid
a) $\cos z = 10$, b) $\tan z = i$.
- 11*. (2 p.) Kas leidub selline murdlineaarne funktsioon, mis kujutab ühikringi ülemise poole ühikringiks? Põhjendada.

Praktikum 4: Integreerimine

1. a) Arvutada $\int_{\gamma} e^z dz$, kus γ on ruut küljepikkusega 2 ja keskpunktiga nullpunktis.
b) Arvutada $\int_{\gamma} \ln z dz$, kus γ on ühikringjoon.
c) Arvutada $\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z} dz}{z+i}$.
d) Arvutada $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$, kus γ on sirglõik otspunktidega $-1-i$ ja $-1+i$.
2. Näidata, et $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{2\pi}{3}$, kus γ on ringjoone $|z|=2$ ülemises pooltasandis asuv osa.
3. Arvutada $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}$, kus γ on ringjoone $|z|=2$ ülemises pooltasandis asuv osa
a) kompleksmuutuja funktsiooni integraali definitsiooni abil,
b) Newton-Leibnizi valemi abil,
c) Cauchy valemi abil reaalmuutuja integraalile taandades.
- 4.* (2 p.) Näidata, et iga ühikringis regulaarse ja kuni rajani pideva funktsiooni f korral kehtib võrratus $\max_{|z|=1} \left| f(z) - \frac{1}{z} \right| \geq 1$. (Seetõttu ei saa funktsiooni $\frac{1}{z}$ ühikringjoonel ühtlaselt lähendada ühikringis regulaarsete funktsioonidega, näiteks polünoomidega.)
- 5.* (3 p.) Olgu f regulaarne kogu komplekstasandil.
a) Näidata, et kui leidub $M > 0$ nii, et $|f(z)| > M$ iga $z \in \mathbf{C}$ korral, siis f on konstantne.
b) Näidata, et kui $\operatorname{Re} f$ on tõkestatud alt või ülalt, siis f on konstantne.