Matemaatiline analüüs II

praktikumiülesannete kogu

2015. a. kevadsemester

1. Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond, selle raja, kinnisus ja lahtisus.

Olgu X ja Y hulgad.

Kujutus e. *funktsioon* $f\colon X \to Y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ eeskiri, mis hulga X igale elemendile x seab vastavusse kindla elemendi $f(x)$ hulgast Y.

X – kujutuse f *lähtehulk* (e. *määramispiirkond*),
Y – kujutuse f *sihthulk*,
$f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$ – kujutuse f *väärtuste hulk* (e. *muutumispiirkond*).
Olgu $f\colon X \to Y$ ja $g\colon U \to V$.

$$f = g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} X = U, \\ Y = W, \\ \forall x \in X = U \ \ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Teatavasti $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m)\colon x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$.
Sageli tähistame hulga $\mathbb{R}^m$ elemente ka suurte tähtedega, näiteks $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m)$.
Olgu $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$.
$\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2}$ (punktide $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{Y}$ vaheline *kaugus*).
Olgu $\delta > 0$ ning $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$.
$U_\delta(\mathbf{A}) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m\colon \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta\}$ (punkti $\mathbf{A}$ δ*-ümbrus*).
Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$.

$\mathbf{A}$ on D *sisepunkt* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \delta > 0 \ \ U_\delta(\mathbf{A}) \subset D$.

$\mathbf{A}$ on D *rajapunkt* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \delta > 0 \ \begin{cases} U_\delta(\mathbf{A}) \cap D \neq \varnothing, \\ U_\delta(\mathbf{A}) \cap (\mathbb{R}^m \backslash D) \neq \varnothing. \end{cases}$

$D^\circ \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m\colon \mathbf{X}$ on D sisepunkt$\}$ (hulga D *sisemus*),
$\partial D \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m\colon \mathbf{X}$ on D rajapunkt$\}$ (hulga D *raja*).
Lause. $D^\circ \subset D$.
Lause. Hulga $\mathbb{R}^m$ iga punkt kuulub täpselt ühte kolmest hulgast: D°, ∂D, $(\mathbb{R}^m \backslash D)^\circ$.

D on *lahtine* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad D = D^\circ$.
D on *kinnine* $\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \partial D \subset D$.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.
$\mathrm{Gr}\, f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, f(x,y))\colon (x,y) \in D\}$ (funktsiooni f *graafik*).
Analoogiliselt defineeritakse funktsiooni graafik, kui $D \subset \mathbb{R}^m$.

1. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad D ja joonistage need. Leidke hulgad ∂D. Määrake, millised hulkadest D on kinnised ja millised on lahtised.

a) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$;
b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
c) $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$;
d) $f(x,y) = \ln(x+y)$;
e) $f(x,y) = \ln(x+y) + \dfrac{1}{\ln x}$;
f) $f(x,y) = 3 + \sqrt{-(x-y)^2}$;
g) $f(x,y) = x + \mathrm{e} + \arccos y$;
h) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;
i) $f(x,y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$;
j) $f(x,y) = \ln(x^2 + y) + \sin x$;
k) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;
l) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+y)}$;
m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$;
n) $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
o) $f(x,y) = \sqrt{y \sin x}$;
p) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2 - 3)$;
q) $f(x,y) = \sqrt{\ln\cos(x^2 + y^2)}$;
r) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$;
s) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$;
t) $f(x,y) = \sqrt{\sin \pi x \sin \pi y} + \sqrt{4 - |x - 4|} + {}$
$+ \sqrt{16 - (y-4)^2}$.

2. Millistes järgmistes paarides on samad funktsioonid ja millistes erinevad?

a) $f(x,y) = |xy|$, $g(x,y) = xy \operatorname{sgn} x \operatorname{sgn} y$;
b) $f(x,y) = \ln x + \ln y$, $g(x,y) = \ln(xy)$;
c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 y}$, $g(x,y) = x\sqrt{y}$;
d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 y^2}$, $g(x,y) = \dfrac{1}{xy}$;
e) $f(x,y) = \ln(x^2 |y|)$, $g(x,y) = 2 \ln |xy|$;
f) $f(x,y) = \ln(x^2 y)$, $g(x,y) = 2\ln(|x|\sqrt{y})$;
g) $f(x,y) = |xy|$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{\ln |xy|}$.

3. Määrake määramispiirkonnad D nii, et järgmistes paarides oleksid samad funktsioonid.

a) $f(x,y) = \ln x^2 + \ln y$, $\quad g(x,y) = 2\ln x + \ln y$;
b) $f(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$, $\quad g(x,y) = \sqrt{xy}$;
c) $f(x,y) = xy\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, $\quad g(x,y) = xye^{xy}$.

4. Arvutage järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides **A**, **B** ja **C**.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$, $\quad \mathbf{A} = (2,1)$;
b) $f(x,y) = \dfrac{\arctan(x-y)}{\arctan(y-x)}$, $\quad \mathbf{B} = (2,1)$;
c) $f(x,y) = \ln(\sin x \cos y)$, $\quad \mathbf{C} = \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

5. Joonistage järgmiste funktsioonide graafikud.

a) $f(x,y) = 1 - x - y$, kus $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$;
b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, kus $f(x,y) \leqslant 4$;
c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, kus $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$;
d) $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$, kus $f(x,y) \geqslant 0$.

6. Leidke $f(y,x)$, $f(-x,-y)$, $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$ ja $\frac{1}{f(x,y)}$, kui $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{2xy}$.

7. Leidke $f\left(1,\frac{1}{y}\right)$ ja $f\left(\frac{1}{y},\frac{1}{x}\right)$, kui $f(x,y)=x+\frac{1}{y}$.

8. Leidke järgmiste kolme muutuja funktsioonide määramispiirkonnad E.

a) $f(x,y,z)=1+\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}$;

b) $f(x,y,z)=\sqrt{x(z^2+1)}-\sqrt{ye^z}$;

c) $f(x,y,z)=\ln(xy)+\ln z$;

d) $f(x,y,z)=\arcsin x-\arccos(yz)$;

e) $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$;

f) $f(x,y,z)=\frac{1}{3+\cos\pi x+\cos\pi y+\cos\pi z}$.

9. Arvutage järgmiste funktsioonide väärtused antud punktides A, B ja C.

a) $f(x,y,z)=\frac{\arctan(x+y+z)}{\arctan(x-y-z)}$, $\quad A=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},0,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) $f(x,y)=u^w+w^{u+v}$, $u(x,y)=x+y$, $v(x,y)=x-y$, $w(x,y)=xy$, $\quad B=(-1,2)$;

c) $f(x,y,z)=\sin(uv)+\cos(vw)$, $u(x)=\arcsin x$, $v(y)=\ln y$, $w(z)=\arccos z$, $\quad C=(1,\mathrm{e},-1)$.

10. Veenduge, et järgmised funktsioonid on elementaarfunktsioonid ja leidke nende graafikud.

a) $w=z+\sqrt{xy}$;

b) $w=\frac{\sqrt{x}}{y^2}+\ln(z+1)$;

c) $w=\frac{2+z}{x^2+y^2}$;

d) $w=\frac{x^2+y^2}{z\ln(x^2+y^2+1)}$.

11. Leidke funktsioon $f(x,y,z)$, kui

a) $f(x,yz,z)=\ln x+y-z$;

b) $f(x+y,x-y,z)=xy+y^2+z^2$.

12. Leidke funktsioonid f ja g, kui

a) $g(x,y,z)=f(1+\sqrt{x},y)+\sqrt{2z}$ ja $g(x,y,1)=x-y$;

b) $g(x,y,z)=f(\sqrt{x},\mathrm{e}^y)+\sqrt{yz}$ ja $g(x,y,0)=2x+y$.

13*. Olgu antud hulgad $D_1,D_2\subset\mathbb{R}^m$. Tõestage, et

$$\partial(D_1\cap D_2)\subset(\partial D_1)\cup(\partial D_2).$$

2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus.

Olgu $D\subset\mathbb{R}^m$.

$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^m$ on hulga D kuhjumispunkt $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\delta>0\ \ (U_\delta(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\})\cap D\neq\varnothing$.

Olgu $f\colon D\to\mathbb{R}$. Olgu $\mathbf{A}$ hulga D kuhjumispunkt ning $L\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})=L \quad\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall x\in D\ \ 0<\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|<\delta\Rightarrow|f(\mathbf{X})-L|<\varepsilon.$$

Analoogiliselt ühe muutuja piirväärtusega defineeritakse ka lõpmatud piirväärtused ning piirväärtus protsessis $\|\mathbf{X}\|\to\infty$.

Lisaks sellele defineeritakse veel mõningad lõpmatud piirväärtused, näiteks juhul $D\subset\mathbb{R}^2$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to-\infty}} f(x,y)=L \quad\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\exists M>0:(0<|x-a|<\delta\ \wedge\ y<-M)\Rightarrow|f(x,y)-L|<\varepsilon.$$

Sellise võttega saab defineerida ka ühepoolseid piirväärtusi, nõudes, et mingi muutuja erinevus oma lõppväärtusest oleks mingi kindla märgiga. Kuna iga lahtise kera sees on lahtine risttahukas ja vastupidi, siis võib nõude $\sqrt{(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_m-a_m)^2}<\delta$ asendada nõudega $\min\{|x_1-a_1|,\ldots,|x_m-a_m|\}<\delta$.

Olgu $D_1 \subset D$.

f alt tõkestatud hulgas $D_1 \overset{\text{def}}{\iff} \{f(\mathbf{X})\colon \mathbf{X}\in D_1\}$ on alt tõkestatud,

f ülalt tõkestatud hulgas $D_1 \overset{\text{def}}{\iff} \{f(\mathbf{X})\colon \mathbf{X}\in D_1\}$ on ülalt tõkestatud,

f tõkestatud hulgas $D_1 \overset{\text{def}}{\iff} f$ on alt ja ülalt tõkestatud hulgas D_1.

Lause. f tõkestatud hulgas $D_1 \iff \exists K>0 : \forall \mathbf{X}\in D_1 \ |f(\mathbf{X})|\leqslant K$.

Kõik ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse omadused – piirväärtuse monotoonsus, ühesus, aritmeetika, lause tõkestatud ja hääbuva suuruse korrutisest ning keskmise muutuja omadus – on põhimõtteliste muutusteta ümber kirjutatavad mitme muutuja juhule.

Teoreem (Heine kriteerium)**.** Olgu $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, olgu $\mathbf{A}$ hulga $D\subset\mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt, olgu $f\colon D\to\mathbb{R}$.

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})=L \iff \forall(\mathbf{X}^{(n)})\subset D\backslash\{\mathbf{A}\}\ \left(\lim_n \mathbf{X}^{(n)}=\mathbf{A}\Rightarrow \lim_n f(\mathbf{X}^{(n)})=L\right).$$

Teoreem. Olgu $L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, olgu $\mathbf{A}$ hulga $D\subset\mathbb{R}^m$ kuhjumispunkt, olgu $f\colon D\to\mathbb{R}$.

Tähistame punkti $\mathbf{A}$ läbivad pidevaid jooni määravad vektorfunktsioonid järgmiselt:

$$\mathfrak{L}=\left\{\gamma\colon \begin{cases}\gamma\colon(-1,1)\to\mathbb{R}^2,\text{ kus } \gamma(t)=(x(t),y(t)) \text{ ja } x,y\colon(-1,1)\to\mathbb{R} \text{ on pidevad,}\\ \gamma(0)=\mathbf{A}\end{cases}\right\}.$$

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})=L \iff \forall\gamma\in\mathfrak{L}\ \lim_{t\to 0} f(\gamma(t))=L.$$

Heine kriteerium ja piirväärtus pidevate joonte kaudu kehtivad ka lõpmatute protsesside jaoks.

14. Leidke järgmised piirväärtused.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} x^2y;$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} (2x+3y);$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x+\sin\pi x}{y};$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x};$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y};$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1};$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-\sqrt{16-x^2-y^2}}{x^2+y^2};$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{2+x^2+y^2};$

i) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0+\\ y\to0+}} \frac{x-\sqrt{y}}{x+\ln x};$

j) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0+\\ y\to0+}} \frac{\ln(xy)}{x\sin y};$

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2};$

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y};$

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4};$

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{3}{xy};$

o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy}{\tan xy};$

p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,10)} \frac{\sin 5x}{xy};$

q) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2+y^2};$

r) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)^{x^2y^2};$

s) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to3\\ y\to\infty}} \left(1+\frac{x}{y}\right)^{y};$

t) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}};$

u) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$

15. Näidake, et järgmised piirväärtused ei eksisteeri.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2+xy}$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x+y}{x+y^2}$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y-x^2}$.

16. Leidke korduvad piirväärtused $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) =: A$ ja $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} =: B$ järgmistest funktsioonidest märgitud punktis $\mathbf{P}_0 = (a,b)$.

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x+y}$, $\mathbf{P}_0 = (0,0)$;

b) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x+y)}{x+\sin y}$, $\mathbf{P}_0 = (0,0)$;

c) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{2x+y}$, $\mathbf{P}_0 = (\infty,\infty)$.

17. Näidake, et järgmistel funktsioonidel piirväärtus punktis (0,0) on olemas, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ja $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ ei eksisteeri.

a) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

b) $f(x,y) = (x-y)\cos\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\cos y}{2y}$.

18. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sin x + e^y}$;

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{\ln z}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

19. Millised järgmistest funktsioonidest on punktis $\mathbf{A} = (0,0)$ pidevad, pidevad muutuja x või muutuja y järgi.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = y = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 1, & \text{kui } |x|+|y| = 0; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \sqrt{2y-x^2-y^2}$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln|xy|}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases}$

20*. Tõestage, et funktsioon $f(x,y)$ on pidev lahtisel hulgal D, kui
1° $g(x) = f(x,y)$ on pidev muutuja x funktsioon iga y korral,
2° $h(y) = f(x,y)$ rahuldab Lipschitzi tingimust, s.o. leidub konstant $L > 0$, et

$$|h(y) - h(y')| \leqslant L|y-y'|$$

suvaliste punktide $(x,y)\in D$ ja $(x,y')\in D$ korral.

3. Katkevuspunktid. Osatuletiste arvutamine.

Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$, $\mathbf{A}=(a,b)\in D^\circ$, $f\colon D\to\mathbb{R}$.
$f_x(\mathbf{A})\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ (*osatuletis* muutuja x järgi punktis $\mathbf{A}$).
Osatuletise seos ühe muutuja funktsiooni tuletisega on järgmine.
Defineerime funktsiooni $f_1(x)=f(x,b)$, siis f_1 määramispiirkond on $\{x\in\mathbb{R}\colon (x,b)\in D\}$.
Nüüd $f_x(\mathbf{A})=f_1'(a)$.
Levinud tähis $f_x(\mathbf{A})$ asemel on ka $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})$.
Osatuletisfunktsiooniks ehk *osatuletiseks* (muutuja x järgi) nimetatakse funktsiooni, mis punktile $\mathbf{A}\in D^\circ$ seab vastavusse arvu $f_x(\mathbf{A})$. Tähis: f_x või $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
Osatuletis muutuja y järgi defineeritakse analoogiliselt. Ka ruumis $\mathbb{R}^m$ defineeritakse osatuletised analoogiliselt.

21. Leidke järgmiste funktsioonide katkevuspunktid.

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y|\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=y=0;\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}, & \text{kui } x+y\neq 0,\\ -1, & \text{kui } x+y=0;\end{cases}$

c) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$;

d) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{xy}$;

e) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{xyz}$;

f) $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln|1-x^2-y^2|}$.

22. Kõrvaldage järgmistel funktsioonidel katkevus märgitud hulgas D, s.t. lisage funktsioonile f katkevuspunktides sellised väärtused, et f oleks pidev kogu hulgas D.

a) $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$, $\quad D=\mathbb{R}^2$;

b) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\cos y}{\ln|x+y|}$, $\quad D=\{(x,y):|x+y|<1\}$;

c) $f(x,y)=\dfrac{e^{x-y}}{3+\cot^2(x-y)}$, $\quad D=\mathbb{R}^2$;

d) $f(x,y)=\dfrac{2-\sqrt{12-x-2y}}{(x+2y)^2-64}$, $\quad D=\{(x,y):-7\leqslant x+2y\leqslant 12\}$.

23. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

a) $f(x,y)=3x-y^2$;

b) $f(x,y)=x^2+y^2$;

c) $f(x,y)=e^{2x+3y}$;

d) $f(x,y)=x^3y+2x$;

e) $f(x,y,z)=x^3yz^2+7y$;

f) $f(x,y,z)=\ln(xz)+\ln(yz)$;

g) $f(x,y)=(x+2y)^5$

h) $f(x,y)=\dfrac{2x}{y}+4$;

i) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2y^4}$;

j) $f(x,y)=\cos(4x-y)$;

k) $f(x,y)=x\sin y$;

l) $f(x,y)=\tan\dfrac{x}{y}$;

m) $f(x,y) = \arctan\dfrac{1}{xy}$;

n) $f(x,y) = x^y$;

o) $f(x,y) = (x+y)^y$;

p) $f(x,y) = (1+xy)^{xy}$;

q) $f(x,y) = x^{\sin y}$;

r) $f(x,y,z) = x^2 + y^z$.

24. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

a) $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{y}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2), & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{kui } |x|+|y| \neq 0, \\ 0, & \text{kui } |x|+|y| = 0. \end{cases}$

25*. a) Näidake, et punkti $(0,0)$ ümbruses funktsioonil

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2\sin(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on olemas osatuletised f_x ja f_y, mis katkevad punktis $(0,0)$, kuid siiski funktsioon f on diferentseeruv selles punktis $(0,0)$.

b) Näidake, et puntki $(0,0)$ ümbruses funktsiooni

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

osatuletised f_x ja f_y eksisteerivad ja on tõkestamata (seega punkt $(0,0)$ on nende katkevuspunkt), kuid siiski funktsioon f on dierentseeruv selles punktis $(0,0)$.

4. Osatuletiste arvutamine. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus. Täisdiferentsiaal. Kõrgemat järku osatuletised.

$D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A} = (a,b) \in D^\circ$, $f\colon D \to \mathbb{R}$.
f on *diferentseeruv* punktis $\mathbf{A}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists M, N \in \mathbb{R}: \lim\limits_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \dfrac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)-M\cdot h_1 - N\cdot h_2}{\|(h_1,h_2)\|} =$
0.

Lause. f dif-v punktis $\mathbf{A}$ $\implies \begin{cases} \exists f_x(\mathbf{A}), f_y(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}, \\ f \text{ dif-vuse definitsioonis } M = f_x(\mathbf{A}),\ N = f_y(\mathbf{A}) \end{cases}$.

Olgu f diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$. Avaldist $\mathrm{d}_{\mathbf{A}}f(h_1,h_2) = f_x(\mathbf{A})\cdot h_1 + f_y(\mathbf{A})\cdot h_2$ nimetatakse funktsiooni f *täisdiferentsiaaliks* punktis $\mathbf{A}$ argumendi muudu (h_1,h_2) korral.
Sageli tähistatakse argumendi muutu (h_1,h_2) asemel $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Kui kontekst on selge, jäetakse punkt $\mathbf{A}$ või muut ära, või kui muut on teada, asetatakse punkt $\mathbf{A}$ sulgudesse. Nii siis $\mathrm{d}_{\mathbf{A}}f(h_1,h_2)$, $\mathrm{d}f$, $\mathrm{d}f(\mathbf{A})$ võivad sõltuvalt kontekstist tähistada üht ja sama avaldist.
Kõik diferentseeruvusega seotud definitsioonid ja tulemused on analoogiliselt kirja pandavad ka ruumis $\mathbb{R}^m$. Nii näiteks muuduks on sellisel juhul vektor $(h_1,\ldots,h_m)$, f-ni f täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$ selle muudu korral avaldis $f_{x_1}(\mathbf{A})\cdot h_1 + \ldots + f_{x_m}(\mathbf{A})\cdot h_m$ jne.

Olgu $\mathbf{A}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}_1=(u_1,v_1,w_1), \mathbf{r}_2=(u_2,v_2,w_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$, kusjuures vektorsüsteem $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$ olgu lineaarselt sõltumatu (see tähendab, et vektorid $\mathbf{r}_1$ ja $\mathbf{r}_2$ ei ole kollineaarsed).
Pinda $\pi := \{\mathbf{A}+t_1\mathbf{r}_1+t_2\mathbf{r}_2\colon\ t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$ nimetatakse *tasandiks*. Vektorsüsteemi $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2$ nimetatakse selle tasandi *rihiks*.
Tähistame $\mathbf{n}=\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2\end{vmatrix}\right)$.
Vektorit $\mathbf{n}=:(A,B,C)$ nimetatakse tasandi π *normaalvektoriks*.
Lause. $\{\mathbf{A}+t_1\mathbf{r}_1+t_2\mathbf{r}_2\colon\ t_1,t_2\in\mathbb{R}\}=\{(x,y,z)\colon\ A\cdot(x-a)+B\cdot(y-b)+C\cdot(z-c)=0\}$.
Võrrandit $Ax+By+Cz+(-Aa-Bb-Cc)=0$ nimetatakse selle tasandi *üldvõrrandiks*. (Sageli tähistatakse $D=-Aa-Bb-Cc$, siis omandab üldvõrrand kuju $Ax+By+Cz+D=0$.) Üldvõrrandist on mugav välja lugeda tasandi *normaalvektorit* (A,B,C). Sirget, mis läbib punkti $\mathbf{A}$ ja mille sihivektor on $\mathbf{n}$, nimetatakse tasandi π *normaaliks* punktis $\mathbf{A}$.
Normaalvektorit võib korrutada suvalise nullist erineva arvuga, tulemusena saadav vektor määrab ikka sama sirge.
Ruumi $\mathbb{R}^m$ vektorite $\mathbf{p}=(p_1,\dots,p_m)$ ja $\mathbf{q}=(q_1,\dots,q_m)$ korral tähistame $\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle=p_1q_1+\ldots+p_mq_m$ (*skalaarkorrutis*) ning $\|\mathbf{p}\|=\sqrt{\langle\mathbf{p},\mathbf{p}\rangle}$ (vektori $\mathbf{p}$ *pikkus*).
Teoreem (Cauchy võrratus)**.** $\forall\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^m\ \ |\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle|\leqslant\|\mathbf{p}\|\cdot\|\mathbf{q}\|$.
Olgu $\mathbf{p},\mathbf{q}\neq\mathbf{0}$. Tähistame $\angle(\mathbf{p},\mathbf{q})=\arccos\dfrac{\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle}{\|\mathbf{p}\|\cdot\|\mathbf{q}\|}$ (vektorite vaheline *nurk*). Cauchy võrratuse tõttu on vektorite vaheline nurk korrektselt defineeritud. Paneme tähele, et $\angle(\mathbf{p},\mathbf{q})\in[0,\pi]$.
Olgu ℓ sirge sihivektoriga $\mathbf{s}$ ja π tasand normaalvektoriga $\mathbf{n}$.
$\angle(\ell,\pi)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{\pi}{2}-\angle(\mathbf{s},\mathbf{n})$ (sirge ja tasandi vaheline *nurk*).
Tähistame punktide $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ korral neid punkte läbiva sirge tähisega $\mathbf{AB}$. Niisiis $\mathbf{AB}=\left\{\mathbf{A}+t\overrightarrow{\mathbf{AB}}\colon\ t\in\mathbb{R}\right\}$.
Olgu $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ ning olgu antud tasand $\pi\subset\mathbb{R}^3$. Olgu $\mathbf{A}\in\Omega\cap\pi$.
π on Ω *puutujatasand* punktis $\mathbf{A}$ $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall\mathbf{X}\in\Omega\ \ \|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|<\delta\Rightarrow\angle(\mathbf{AX},\pi)<\varepsilon$.
Tingimust, et π on Ω puutujatasand, võib lühemalt kirjutada nii: $\lim\limits_{\substack{\mathbf{X}\to\mathbf{A}\\ \mathbf{X}\in\Omega}}\angle(\mathbf{AX},\pi)=0$.

Analoogiliselt defineeritakse ka see, millal sirge ℓ on $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ *puutujasirge*: nõutakse, et $\mathbf{A}\in\ell\cap\Gamma$ ning $\lim\limits_{\substack{\mathbf{X}\to\mathbf{A}\\ \mathbf{X}\in\Omega}}\angle(\mathbf{AX},\ell)=0$.

Sealjuures $\angle(\ell_1,\ell_2)\overset{\text{def}}{=}\angle(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2)$, kus $\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\in\mathbb{R}^2$ on vastavalt sirgete ℓ_1 ja ℓ_2 sihivektorid.
Ruumi $\mathbb{R}^3$ punktihulkade kirjapanekul märgitakse sageli üles ainult punktihulka määrav(ad) tingimus(ed). Nii näiteks kirjutatakse $\{(x,y,f(x,y))\colon\ x\in D\}$ asemel $z=f(x,y)$. Hiljem näeme, et ka parameetriliselt antud pinna $\{(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\colon\ (u,v)\in\Delta\}$ asemel kirjutatakse $\begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v).\end{cases}$

Lause. Olgu f pidev punktis $\mathbf{A}$.

f dif-v punktis $\mathbf{A}=(a,b)$ $\iff$ punktihulgal $z=f(x,y)$ leidub z-teljega mitteparalleelne puutujatasand punktis $(a,b,f(a,b))$.

(z-teljega mitteparalleelsus tähendab, et puutujatasandi normaalvektor (A,B,C) ei ole kollineaarne vektoriga $(0,0,1)$ ehk et $(A,B)\neq(0,0)$.)
Juhul, kui f on dif-v punktis $\mathbf{A}$, siis puutujatasandi võrrand on $z-f(a,b)=f_x(\mathbf{A})\cdot(x-a)+f_y(\mathbf{A})\cdot(y-b)$.

Niisiis täisdiferentsiaali avaldis $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(x-a, y-b)$ märgib z koordinaadi muutu pinna $z = f(x,y)$ puutujatasandil punktis $(a, b, f(a,b))$, kui xy-tasandil liigutakse punktist (a,b) punkti (x,y).
Lause. f_x, f_y pidevad p-s $\mathbf{A} \implies f$ on dif-v punktis $\mathbf{A}$.
Lause (Schwarz)**.** f_{xy}, f_{yx} pidevad p-s $\mathbf{A} \implies f_{xy}(\mathbf{A}) = f_{yx}(\mathbf{A})$.
Lause. f_x, f_y dif-vad p-s $\mathbf{A} \implies f_{xy}(\mathbf{A}) = f_{yx}(\mathbf{A})$.
Olgu $n \in \mathbb{N}$.
f on $n+1$ korda diferentseeruv p-s $\mathbf{A} \overset{\text{def}}{\iff} f$ kõik n-järku osatuletised on diferentseeruvad p-s $\mathbf{A}$.
Nii näiteks
f on kaks korda diferentseeruv p-s $\mathbf{A} \overset{\text{def}}{\iff} f_x$ ja f_y on dif-vad punktis $\mathbf{A}$.
Olgu f n korda dif-v p-s $\mathbf{A}$.
f *n-ndat järku täisdiferentsiaaliks* punktis $\mathbf{A}$ argumendi muudu (h_1, h_2) korral nimetatakse avaldist $\displaystyle\sum_{k_1+k_2=n} \frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}(\mathbf{A}) \cdot h_1^{k_1} \cdot h_2^{k_2}$. Tähis: $\mathrm{d}_{\mathbf{A}}^n(h_1, h_2)$.

26. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0; \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^3 y^3 \sin \dfrac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0; \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 y^2 \sin \dfrac{1}{xy}, & \text{kui } xy \neq 0, \\ 0, & \text{kui } xy = 0. \end{cases}$

27. Leidke järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised.

a) $f(x,y) = x^2 + y$;
b) $f(x,y) = x^3 y - y^3 x$;
c) $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{y}$;
d) $f(x,y) = x \sin(x+y)$;
e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$;
f) $f(x,y) = x^y$;
g) $f(x,y) = \ln(x + y^2)$;
h) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$;
i) $f(x,y,z) = xyz + \ln(x+y+z)$;
j) $f(x,y,z) = \sin(1 + xyz)$.

28. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \vee y = 0, \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$ punktis $(0,0)$ osatuletised on olemas, kuid ta on katkev selles punktis.

29. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0,0)$ osatuletised $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$ eksisteerivad, kuid ta on katkev selles punktis.

30. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ punktis $(0,0)$ segatuletised f_{xy} ja f_{yx} eksisteerivad, kuid $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

31. Leidke järgmiste funktsioonide segaosatuletised f_{xy}.

a) $f(x,y)=x^x+y\sin x$;
b) $f(x,y)=x^{10}\cos x+y^2\ln x$;
c) $f(x,y)=y\cos y+\mathrm{e}^{x+y}$.

32. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised.

a) $f(x,y)=x+x\ln(xy),\quad f_{xxy}=?$;
b) $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{xyz},\quad f_{xyz}=?$;
c) $f(x,y)=y^2+x^3\sin y+y^3\sin x,\ f_{xxxyyy}=?$.

33. Leidke järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid.

a) $f(x,y)=x+3y$;
b) $f(x,y)=2x^2-4xy$;
c) $f(x,y)=xy$;
d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$;
e) $f(x,y)=\mathrm{e}^{1+xy}$;
f) $f(x,y)=-\cos(xy)$;
g) $f(x,y)=y^x$;
h) $f(x,y,z)=\tan(x-2y+3z)$;
i) $f(x,y,z)=\cos(x^2yz)$;
j) $f(x,y,z)=\exp(2x^2yz^2)$.

34*. Olgu n positiivne täisarv. Öeldakse, et funktsioon f on $n+1$ *korda diferentseeruv* punktis **A**, kui tema kõik n-järku osatuletised on diferentseeruvad punktis **A**. Tõestage, kasutades ainult alapeatükis 19.2 (Loone-Soomer) sõnastatud tulemusi, et kui f on kolm korda diferentseeruv punktis **A**, siis f on kaks korda diferentseeruv ja diferentseeruv punktis **A**.

5. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus. Kõrgemat järku osatuletised ja täisdiferentsiaalid. Liitfunktsiooni osatuletised.

Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$, $Q\subset\mathbb{R}^2$, $f\colon Q\to\mathbb{R}$, $\varphi,\psi\colon D\to\mathbb{R}$, kusjuures $\varphi(D),\psi(D)\subset Q$. Tähistame iga $(x,y)\in D$ korral $F(x,y)=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$.
Lause. Olgu $\mathbf{A}\in D^\circ$, $\mathbf{B}:=(\varphi(\mathbf{A}),\psi(\mathbf{A}))$.

$$\left.\begin{array}{c}\exists\varphi_x(\mathbf{A}),\psi_x(\mathbf{A})\in\mathbb{R},\\ f \text{ on dif-v punktis } \mathbf{B}\end{array}\right\}\implies F_x(\mathbf{A})=f_u(\mathbf{B})\cdot\varphi_x(\mathbf{A})+f_v(\mathbf{B})\cdot\psi_x(\mathbf{A}).$$

Analoogiline lause kehtib osatuletise jaoks muutuja y järgi. Analoogiline lause kehtib ka juhul, kui $Q\subset R^n$ ja $D\subset\mathbb{R}^m$, kus n ja m on suvalised naturaalarvud.

35. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud täisdiferentsiaalid.

a) $f(x,y)=x^3y^2,\quad d^2f=?$;
b) $f(x,y)=x+xy,\quad d^2f=?$;
c) $f(x,y)=x^2+y^2,\quad d^2f=?$;
d) $f(x,y)=x\sin^2 y,\quad d^2f=?$;
e) $f(x,y)=1+x^3+y^3,\quad d^3f=?$;
f) $f(x,y)=x^4+xy^2,\quad d^3f=?$;
g) $f(x,y,z)=xy+yz^2,\quad d^2f=?$;
h) $f(x,y,z)=xy\sin z,\quad d^2f=?$;
i) $f(x,y,z)=xyz,\quad d^3f=?$;
j) $f(x,y,z)=x^3yz^2,\quad d^3f=?$.

36. Näidake, et punktis $(0,0)$ funktsioon

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

on pidev ja omab osatuletisi $f_x(0,0)$ ja $f_y(0,0)$, kuid ei ole diferentseeruv selles punktis $(0,0)$.

37. Näidake, et funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev ja ta osatuletised f_x ja f_y on lõplikud, kuid punktis $(0,0)$ funktsioon ei ole diferentseeruv.

38. Leidke järgmiste liitfunktsioonide tuletised.

a) $z = \mathrm{e}^{x-3y}$, $x = \sin t$, $y = \dfrac{1}{3}\cos t$;
b) $z = \ln(1-xy)$, $x = t^2$, $y = t^3$;
c) $u = xyz$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 2t$;
d) $z = t^2 + x^2 + y^2$, $x = t^2$, $y = \sqrt{t}$;
e) $z = \tan(t + x^2 - y)$, $x = t^2$, $y = t^5$;
f) $z = \arctan(xy)$, $y = \mathrm{e}^x$;
g) $u = \mathrm{e}^x(y-z)$, $y = \sin x$, $z = \cos x$;
h) $u = u(x,y,z)$, $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t+1$;
i) $z = f(x,y)x^2 \ln y$, $x = 1-t^2$, $y = \mathrm{e}^{\sin t}$.

39. Leidke järgmiste liitfunktsioonide osatuletised.

a) $z = u^2 v$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$;
b) $z = u\ln v$, $u = \dfrac{1}{x+y}$, $v = \mathrm{e}^{x+y}$;
c) $z = u\mathrm{e}^v$, $u = x^2$, $v = x\ln y$;
d) $z = \operatorname{arccot}\dfrac{u}{v}$, $u = x\sin y$, $v = x\cos y$;
e) $w = u^v$, $u = x^2 + z^2$, $v = yz$;
f) $w = xy\mathrm{e}^{uv}$, $u = \dfrac{1}{xyz}$, $v = \ln(xy)$.

40*. Olgu funktsioonil $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ pidevad osatuletised, kusjuures leidugu $K > 0$ nii, et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{X})\right| \leqslant K$ kõigi punktide $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ ja indeksite $j = 1, \ldots, m$ korral. Tõestage, et f on Lipschitzi funktisoon, st. leidub konstant $L > 0$ selliselt, et mistahes punktide $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ jaoks kehtib võrratus $|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})| \leqslant L||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||$.

6. Tuletis antud suunas, gradient.

Olgu $\boldsymbol{\ell} = (l_1, l_2) \neq \mathbf{0}$. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ ning $\mathbf{A} \in D^\circ$.

$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{A} + t\cdot\boldsymbol{\ell}) - f(\mathbf{A})}{t\|\boldsymbol{\ell}\|}$ (*tuletis vektori* $\boldsymbol{\ell}$ *suunas*).

Eksisteerigu $f_x(\mathbf{A}), f_y(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$.

$\operatorname{grad} f(\mathbf{A}) = \nabla f(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} (f_x(\mathbf{A}), f_y(\mathbf{A}))$ (f-ni f *gradient* p-s $\mathbf{A}$).

Lause. f dif-v p-s $\mathbf{A}$ $\implies$ $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = \left\langle \nabla f(\mathbf{A}), \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\ell}\|}\cdot\boldsymbol{\ell} \right\rangle$.

Paneme tähele, et vektori $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\ell}\|}\cdot\boldsymbol{\ell}$ pikkus on 1. Taolist vektori läbijagamist oma pikkusega (et saada ühikvektor) nimetatakse vektori *normeerimiseks.*

Lause. f dif-v p-s $\mathbf{A} \implies \left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A})\right| \leqslant \|\nabla f(\mathbf{A})\|$.

Sealjuures $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = \|\nabla f(\mathbf{A})\| \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\ell} \upuparrows \nabla f(\mathbf{A})$,

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = -\|\nabla f(\mathbf{A})\| \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\ell} \uparrow\downarrow \nabla f(\mathbf{A})$.

41. Leidke järgmiste funktsioonide u gradient punktis $\mathbf{P}_0$.

a) $u = x + y, \quad \mathbf{P}_0 = (1,0)$;
b) $u = x + y, \quad \mathbf{P}_0 = (1,-1)$;
c) $u = x^2 + y^2, \quad \mathbf{P}_0 = (1,2)$;
d) $u = x^2 + y^2, \quad \mathbf{P}_0 = (0,-1)$;
e) $u = \frac{2y}{x^2}, \quad \mathbf{P}_0 = (-2,2)$;
f) $u = \frac{2y}{x^2}, \quad \mathbf{P}_0 = (-1,0)$;
g) $u = x^2 + y^2 - z^2, \quad \mathbf{P}_0 = (1,1,1)$;
h) $u = 4z \arctan \frac{y}{x}, \quad \mathbf{P}_0 = (1,1,1)$;
i) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)}, \quad \mathbf{P}_0 = (9,12,28)$.

42. Leidke $\operatorname{grad} u$ ja tema pikkus, kui $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

43. Millistes punktides $|\operatorname{grad} u| = 1$, kui $u = \ln \frac{1}{r}$, kus $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$?

44. Näidake, et funktsioon $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ rahuldab seost $u + 2\ln|\nabla u| = \ln 4$.

45. Olgu $u = z^2 + \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$. Leidke punktid, kus $\operatorname{grad} u = \left(1, -\frac{16}{9}, 0\right)$.

46. Olgu $u = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{5}z$. Leidke punktid, milles u gradiendi pikkus on 3.

47. Tõestage järgmised valemid, kus $C = const$ ning f, u ja v on diferentseeruvad funktsioonid.

a) $\operatorname{grad}(u + C) = \operatorname{grad} u$;
b) $\operatorname{grad} Cu = C \operatorname{grad} u$;
c) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
d) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
e) $\operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$, kus $v \neq 0$;
f) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

48. Leidke järgmiste funktsioonide u tuletised antud ühikvektori $\vec{m}$ suunas punktis $\mathbf{P}_0$.

a) $u = xy + yz + 2, \quad \vec{m} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{P}_0 = (2,0,2)$;
b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \vec{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{P}_0 = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

49. Leidke järgmiste funktsioonide u tuletised antud vektori $\vec{k}$ suunas punktis $\mathbf{P}_0$.

a) $u = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{k} = (4,-3), \quad \mathbf{P}_0 = (3,4)$;
b) $u = xy + yz + 1, \quad \vec{k} = (12,-3,-4), \quad \mathbf{P}_0 = (0,-2,-1)$.

50. Leidke funktsiooni $u=\sqrt{x^2+y^2}$ tuletised punktis $\mathbf{P}_0=(3,4)$ koordinaattasandi esimese veerandi nurgapoolitaja suunas ja punkti $\mathbf{P}_0$ raadiusvektori suunas.

51. Leidke funktsiooni $u=xyz$ tuletis punktis $\mathbf{P}_0=(1,-2,2)$ selle punkti raadiusvektori suunas.

52. Leidke punktid, milles funktsiooni $u=e^x(x-y^3+3y)$ tuletis igas suunas on null.

53. Millises suunas funktsioon $u=x\sin z-y\cos z$ punktis $(0,0,0)$ muutub kõige kiiremini?

54. Millises suunas peab liikuma punkt $\mathbf{P}=(x,y,z)$, läbides punkti $\mathbf{P}_0=(-1,1,-1)$, et funktsioon $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$ kasvaks maksimaalse kiirusega?

55*. Tuntud on järgmine tulemus: tähistame $F(\mathbf{X})=f(\varphi_1(\mathbf{X}),\varphi_2(\mathbf{X}))$, siis

$$\left.\begin{array}{r}\exists\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A}),\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})\in\mathbb{R},\\ f\,\text{dif-v punktis }\mathbf{B}:=(\varphi_1(\mathbf{A}),\varphi_2(\mathbf{A}))\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\exists\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})=\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A})+\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A}).$$

Tooge näide, et f diferentseeruvuse eeldust ei saa nõrgendada, see tähendab, tooge näide funktisoonidest φ_1, φ_2 ja f ning punktist $\mathbf{A}$, mis **vääraks** implikatsiooni

$$\left.\begin{array}{r}\exists\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A}),\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})\in\mathbb{R},\\ \exists\dfrac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B}),\dfrac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\exists\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})=\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A})+\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A}).$$

7. Võrranditega $F(x,y)=0$ ning $F(x,y,z)=0$ määratud ilmutamata funktsioonide diferentseerimine. Joone $F(x,y)=0$ puutuja ja normaal, pinna $F(x,y,z)=0$ puutujatasand ja normaal (erijuhuna pinna $z=f(x,y)$ puutujatasand ja normaal).

Tähistame $R_{\delta_1,\delta_2}(a,b)=U_{\delta_1}(a)\times U_{\delta_2}(b)$ (lahtine ristkülik). Analoogiliselt defineerime ka lahtise risttahuka.

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)**.** Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$, $F\colon D\to\mathbb{R}$, $\mathbf{A}=(a,b)\in D^\circ$.

$$\left.\begin{array}{r}\exists\theta>0: F\text{ ja }F_y\text{ pidevad }U_\theta(\mathbf{A})\text{-s},\\ F(\mathbf{A})=0,\\ F_y(\mathbf{A})\neq0\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\begin{array}{l}\exists\delta,\sigma>0,\ \exists f\colon U_\delta(a)\to U_\sigma(b)\quad:\\ \quad:\quad\forall(x,y)\in R_{\delta,\sigma}(a,b)\ \ F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x).\end{array}$$

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)**.** Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$, $F\colon D\to\mathbb{R}$, $\mathbf{A}=(a,b)\in D^\circ$.

$$\left.\begin{array}{r}\exists\theta>0: F,\ F_x\text{ ja }F_y\text{ pidevad }U_\theta(\mathbf{A})\text{-s},\\ F(\mathbf{A})=0,\\ F_y(\mathbf{A})\neq0\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\begin{array}{l}\exists\delta,\sigma>0,\ \exists f\colon U_\delta(a)\to U_\sigma(b)\quad:\\ \quad:\quad\left\{\begin{array}{l}\forall(x,y)\in R_{\delta,\sigma}(a,b)\ \ F(x,y)=0\Leftrightarrow y=f(x),\\ \forall x\in U_\delta(a)\ \ f'(x)=-\dfrac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}.\end{array}\right.\end{array}$$

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)**.** Olgu $D\subset\mathbb{R}^3$, $F\colon D\to\mathbb{R}$, $\mathbf{A}=(a,b,c)\in D^\circ$.

$$\left.\begin{array}{r}\exists\theta>0: F\text{ ja }F_z\text{ pidevad }U_\theta(\mathbf{A})\text{-s},\\ F(\mathbf{A})=0,\\ F_z(\mathbf{A})\neq0\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{array}{l}\exists\delta_1,\delta_2,\sigma>0,\ \exists f\colon R_{\delta_1,\delta_2}(a,b)\to U_\sigma(c)\quad:\\ \quad:\quad\forall(x,y,z)\in R_{\delta_1,\delta_2,\sigma}(a,b,c)\ \ F(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=f(x,y).\end{array}$$

Teoreem (Ilmutamata funktsioonide põhiteoreem)**.** Olgu $D\subset\mathbb{R}^3$, $F\colon D\to\mathbb{R}$, $\mathbf{A}=(a,b,c)\in D^\circ$.

$$\left.\begin{array}{r}\exists\theta>0: F,\ F_x,\ F_y \text{ ja } F_z\\ \text{pidevad } U_\theta(\mathbf{A})\text{-s},\\ F(\mathbf{A})=0,\\ F_z(\mathbf{A})\neq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow\ \begin{array}{l}\exists\delta_1,\delta_2,\sigma>0,\ \exists f\colon R_{\delta_1,\delta_2}(a,b)\to U_\sigma(c)\quad :\\ :\ \left\{\begin{array}{ll}\forall(x,y,z)\in R_{\delta_1,\delta_2,\sigma}(a,b,c) & F(x,y,z)=0\Leftrightarrow z=f(x,y),\\ \forall(x,y)\in R_{\delta_1,\delta_2}(a,b) & \begin{array}{l} f_x(x,y)=-\dfrac{F_x(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))},\\ f_y(x,y)=-\dfrac{F_y(x,y,f(x,y))}{F_z(x,y,f(x,y))}.\end{array}\end{array}\right.\end{array}$$

Olgu $D\subset\mathbb{R}^3$, $F\colon D\to\mathbb{R}$, $\mathbf{A}=(a,b,c)\in D^\circ$. Olgu $\Omega=\{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^3\colon F(\mathbf{X})=0\}$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A}\in\Omega,\\ F,\ F_x,\ F_y,\ F_z \text{ pidevad p-s } \mathbf{A},\\ \nabla F(\mathbf{A})\neq\mathbf{0}\end{array}\right\}\Longrightarrow\quad\begin{array}{l}F_x(\mathbf{A})\cdot(x-a)+F_y(\mathbf{A})\cdot(y-b)+F_z(\mathbf{A})\cdot(z-c)=0\\ \text{on } \Omega \text{ puutujatasand punktis } \mathbf{A}.\end{array}$$

Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$, $F\colon D\to\mathbb{R}$, $\mathbf{A}=(a,b)\in D^\circ$. Olgu $\Gamma=\{\mathbf{X}\in\mathbb{R}^2\colon F(\mathbf{X})=0\}$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A}\in\Gamma,\\ F,\ F_x,\ F_y \text{ pidevad p-s } \mathbf{A},\\ \nabla F(\mathbf{A})\neq\mathbf{0}\end{array}\right\}\Longrightarrow\quad F_x(\mathbf{A})\cdot(x-a)+F_y(\mathbf{A})\cdot(y-b)=0 \text{ on } \Gamma \text{ puutujasirge punktis } \mathbf{A}.$$

Funktsiooni $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *tasemejooneks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x,y)\colon f(x,y)=k\}$.
Funktsiooni $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *tasemepinnaks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x,y,z)\colon f(x,y,z)=k\}$.

56. Skitseerige järgmiste funktsioonide tasemejooned/tasemepinnad.

a) $f(x,y)=x+y$;
b) $f(x,y)=x^2+y^2$;
c) $f(x,y)=x^2-y^2$;
d) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;
e) $f(x,y)=1-|x|-|y|$;
f) $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$;
g) $f(x,y,z)=x+y+z$;
h) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$;
i) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

57. Kas järgmised võrrandid määravad antud punkti $\mathbf{P}_0$ ümbruses pideva ühese fuktsiooni $y=y(x)$? Kas sel funktsioonil y on olemas pidev tuletis selle punkti $\mathbf{P}_0$ ümbruses? Tuletise olemasolu korral leidke see tuletis.

a) $x^3+y^3-3xy=0,\quad \mathbf{P}_0=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$;
b) $xe^y+\ln(x+y+1),\quad \mathbf{P}_0=(0,0)$;
c) $x^4-x^2-y^2+2y-1=0,\quad \mathbf{P}_0=(0,1)$;
d) $y^2x^{\frac{1}{3}}+\sin y=0,\quad \mathbf{P}_0=(0,0)$.

58. Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $y=y(x)$ tuletised y'.

a) $y+\sin y+e^x=0$;
b) $x+y=e^{x-y}$;
c) $y^2+2xy-2=0$;
d) $1+\ln(x^2+y^2)=2\arctan\dfrac{y}{x}$.

59. Kas järgmised võrrandid määravad antud punkti $\mathbf{P}_0$ ümbruses pideva ühese fuktsiooni $z=z(x,y)$? Kas sel funktsioonil on olemas pidevad osatuletised z_x ja z_y selle punkti $\mathbf{P}_0$ ümbruses? Osatuletiste olemasolu korral leidke need osatuletised.

a) $x^2+y^2+z^2+2xz=1,\quad \mathbf{P}_0=(1,1,-1)$;
b) $xz+y\sin z=0,\quad \mathbf{P}_0=(1,0,1)$;
c) $z^2(x+y^2)^{\frac{1}{3}}+\arctan z=0,\quad \mathbf{P}_0=(-1,-1,0)$.

60. Leidke järgmiste ilmutamata funktsioonide $z=z(x,y)$ osatuletised z_x ja z_y.

a) $x+y+2z+\sin z=0$;
b) $1+xyz=\mathrm{e}^{xyz}$;
c) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$;
d) $z^2(x+z)=xy$.

61. Leidke järgmiste kõverate puutujad ja normaalid antud punktides.

a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1, \mathbf{M}=(6,6.4)$;
b) $xy+\ln y=1, \mathbf{M}=(1,1)$.

62. Leidke kõvera $x^3+y^2+2x-6=0$ puutuja ja normaali võrrandid punktis, mille ordinaat $y=3$.

63. Leidke puutuja võrrand kõverale $x^5+y^5-2xy=0$ punktis $(1,1)$.

64. Leidke puutuja ja normaali võrrandid kõverale $y^4=4x^4+6xy$ punktis $(1,2)$.

65. Leidke puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele märgitud punktis $\mathbf{Q}_0$.

a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}-y^2, \quad \mathbf{Q}_0=(2,-1,1)$;
b) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad \mathbf{Q}_0=(1,2,5)$;
c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \mathbf{Q}_0=(0,0,0)$;
d) $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}, \mathbf{Q}_0=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$;
e) $f(x,y)=|xy|, \quad \mathbf{Q}_0=(0,0,0)$;
f) $f(x,y)=1-|x+y|, \quad \mathbf{Q}_0=(0,0,0)$.

66. Leidke järgmiste pindade puutujatasandid ja normaalid antud punktis $\mathbf{P}_0$.

a) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{27}=1, \quad \mathbf{P}_0=(1,2,3)$;
b) $x^2+y^2+z^2=3, \quad \mathbf{P}_0=(1,1,1)$;
c) $xy-z+\mathrm{e}^z=3, \quad \mathbf{P}_0=(2,1,0)$;
d) $x^3+y^3+z^3+xyz=6, \quad \mathbf{P}_0=(-1,1,2)$.

67*. On antud funktsioon $F(x,y)=5x^2+14xy-3y^2-34x-22y+45$. Kas võrrand $F(x,y)=0$ määrab punkti $\mathbf{A}=(2,1)$ ümbruses pideva ilmutamata funktsiooni $y=f(x)$?

68*. Tõestage, et astroidi $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ *puutujalõik* (puutuja osa, mis jääb koordinaattelgede vahele) on alati konstantse pikkusega.

69*. Tõestage, et kaks hüperboolide peret $x^2-y^2=a$ ja $xy=b$ moodustavad *ortogonaalse võrestiku*, st. nende perede mistahes kaks esindajat lõikuvad täisnurkade all.

70*. Tõestage, et paraboolide pered $y^2=4a(a-x)$ ja $y^2=4b(b+x)$ $(a,b>0)$ moodustavad ortogonaalse võrestiku.

71*. Tõestage, et hüperbooli $xy=a^2$ puutepunkt poolitab puutujalõigu.

8. Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid.

Olgu $D\subset\mathbb{R}^m$, $f\colon D\to\mathbb{R}$ ja $\mathbf{A}\in D^\circ$.

F-nil f on punktis $\mathbf{A}$ *range lokaalne maksimum* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\delta>0:\forall\mathbf{X}\in U_\delta(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}\ f(\mathbf{X})<f(\mathbf{A})$.
F-nil f on punktis $\mathbf{A}$ *range lokaalne miinimum* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\delta>0:\forall\mathbf{X}\in U_\delta(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}\ f(\mathbf{X})>f(\mathbf{A})$.
Mitterangete variantide korral jäetakse sõna „rangelt“ ära ning nõutakse mitterangeid võrratusi.
Üldnimetus lokaalse maksimumi ja miinimumi jaoks: *lokaalne ekstreemum*.

$\mathbf{A}$ on f *statsionaarne* punkt $\overset{\text{def}}{\iff}$ $f_{x_1}(\mathbf{A})=\ldots=f_{x_m}(\mathbf{A})=0$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r}\exists f_{x_1}(\mathbf{A}),\ldots,f_{x_m}(\mathbf{A})\in\mathbb{R},\\ \text{f-nil } f \text{ on punktis } \mathbf{A} \text{ lokaalne ekstreemum}\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{A} \text{ on f-ni } f \text{ statsionaarne punkt.}$$

Olgu nüüd $A \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{R})$, kusjuures $A^T = A$ (sümmeetriline maatriks). Ruutfunktsiooni $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, mis on antud seosega $\Phi(h_1,\dots,h_m) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}h_ih_j$ nimetatakse maatriksile A vastavaks *ruutvormiks.*

Olgu Φ ruutvorm.

Φ on *positiivselt määratud* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}\ \Phi(\mathbf{h}) > 0$.

Φ on *negatiivselt määratud* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}\ \Phi(\mathbf{h}) < 0$.

Φ on *määramata* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathbb{R}^m : \Phi(\mathbf{h}) > 0, \Phi(\mathbf{h}') < 0$.

Teoreem (Sylvester)**.** Olgu Φ ruutvorm, mis vastab sümmeetrilisele maatriksile A.

Φ on posit. määratud $\iff$ $a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det A > 0$.

Φ on negat. määratud $\iff$ $a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \det A > 0$.

NB! Sylvesteri teoreem **ei kehti** samal kujul poolmääratuse juhtude korral (st. $\forall \mathbf{h}\ \ \Phi(\mathbf{h}) \geqslant 0$ ja $\leqslant 0$ jaoks).

Leidugu funktsioonil f kõik teist järku osatuletised.

$$H_f(\mathbf{A}) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(\mathbf{A}) & f_{x_1,x_2}(\mathbf{A}) & \dots & f_{x_1,x_m}(\mathbf{A}) \\ f_{x_2,x_1}(\mathbf{A}) & f_{x_2,x_2}(\mathbf{A}) & \dots & f_{x_2,x_m}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_m,x_1}(\mathbf{A}) & f_{x_m,x_2}(\mathbf{A}) & \dots & f_{x_m,x_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \text{(f-ni } f \text{ \textit{hessiaan} p-s } \mathbf{A})$$

Teoreem.

$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v punktis } \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \text{ on f-ni } f \text{ statsionaarne punkt,} \\ f \text{ hessiaanile } H_f(\mathbf{A}) \text{ vastav ruutvorm} \\ \text{on positiivselt määratud} \end{array}\right\} \implies$ f-nil f on punktis $\mathbf{A}$ range lokaalne miinimum,

$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v punktis } \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \text{ on f-ni } f \text{ statsionaarne punkt,} \\ f \text{ hessiaanile } H_f(\mathbf{A}) \text{ vastav ruutvorm} \\ \text{on negatiivselt määratud} \end{array}\right\} \implies$ f-nil f on punktis $\mathbf{A}$ range lokaalne maksimum,

$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v punktis } \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \text{ on f-ni } f \text{ statsionaarne punkt,} \\ f \text{ hessiaanile } H_f(\mathbf{A}) \text{ vastav ruutvorm} \\ \text{on määramata} \end{array}\right\} \implies$ f-nil f punktis $\mathbf{A}$ ranget lokaalset ekstreemumit ei ole.

NB! Kui asendada määratus positiivselt/negatiivselt poolmääratusega ($\forall \mathbf{h}\ \ \mathbf{h}^T H_f(\mathbf{A})\mathbf{h} \geqslant 0$), siis teoreemi väide **ei tarvitse kehtida**.

Lause. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Maatriksile A vastav ruutvorm on määramata $\iff$ $\det A < 0$.

72. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

a) $f(x,y) = 1-(x+1)^2 - y^2$;

b) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x$;

c) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$;

d) $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}$;

h) $f(x,y) = x^2 + y - 2\ln(xy)$.

73. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

a) $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$,
$(x,y) \in \{(x,y) : 0 \leqslant x,\ y \leqslant \pi\}$;

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

d) $f(x,y,z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$;

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

74*. Funktsioon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Leidke funktsiooni f kõik lokaalsed ekstreemumid. Leidke (koos põhjendusega!) funktsiooni f suurim ja vähim väärtus.

9. Mitme muutuja funktsiooni suurimad ning vähimad väärtused antud piirkonnas.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in D$.

F-nil f on punktis $\mathbf{A}$ *globaalne maksimum* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \mathbf{X} \in D\ \ f(\mathbf{X}) \leqslant f(\mathbf{A})$.

F-nil f on punktis $\mathbf{A}$ *globaalne miinimum* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \mathbf{X} \in D\ \ f(\mathbf{X}) \geqslant f(\mathbf{A})$.

Rangete variantide korral nõutakse, et $\mathbf{X} \in D \setminus \{\mathbf{A}\}$ ning nõutakse rangeid võrratusi.

D on *tõkestatud* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists K > 0 : \forall \mathbf{X} \in D\ \ \|\mathbf{X}\| \leqslant K$.

Teoreem (Weierstrass)**.** Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} D \text{ kinnine,} \\ D \text{ tõkestatud,} \\ f \text{ pidev} \end{array}\right\} \implies \exists \mathbf{A},\mathbf{B} \in D : \left\{\begin{array}{l} \text{f-nil } f \text{ on punktis } \mathbf{A} \text{ globaalne maksimum,} \\ \text{f-nil } f \text{ on punktis } \mathbf{A} \text{ globaalne miinimum.} \end{array}\right.$$

D on *kumer* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \mathbf{X},\mathbf{Y} \in D\ \ \forall \lambda \in (0,1)\ \ \lambda\mathbf{X} + (1-\lambda)\mathbf{Y} \in D$.

Lause. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$ kumer hulk, $f\colon D \to \mathbb{R}$ ning $\mathbf{A} \in D^\circ$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v } D\text{-s,} \\ \forall \mathbf{X} \in D \text{ hessiaan } H_f(\mathbf{X}) \text{ on} \\ \text{positiivselt määratud,} \\ \mathbf{A} \text{ on } f \text{ stats. punkt} \end{array}\right\} \Rightarrow\ f\text{-l on punktis } \mathbf{A} \text{ range globaalne miinimum,}$$

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ on kaks korda dif-v } D\text{-s,} \\ \forall \mathbf{X} \in D \text{ hessiaan } H_f(\mathbf{X}) \text{ on} \\ \text{negatiivselt määratud,} \\ \mathbf{A} \text{ on } f \text{ stats. punkt} \end{array}\right\} \Rightarrow\ f\text{-l on punktis } \mathbf{A} \text{ range globaalne maksimum.}$$

75. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid $\max f$ ja $\min f$.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$, $(x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2$, $(x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$;
c) $f(x,y) = x - 2y - 1$, $(x,y) \in \{(x,y) : 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x + y \leqslant 1\}$;
d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $(x,y) \in \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$;
e) $f(x,y) = (2x^3 + 3y^2)\exp(-x^2 - y^2)$, $(x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

76. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, $(x,y) \in \{(x,y) : -5 \leqslant x \leqslant 5,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

77. Näidake, et funktsioonil $f(x,y) = (1 + \mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$ on lõpmata palju lokaalseid maksimume ja mitte ühtegi lokaalset miinimumi.

78. Jaotage arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

79. Esitage arv 81 nelja positiivse arvu korrutisena nii, et nende summa oleks minimaalne.

80. Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leidke see, mille täispindala on minimaalne.

81. Missuguste mõõtmete korral on antud ruumalaga V risttahuka kujulisel vannil vähim pindala?

82. Antud kerasse raadiusega R joonestage suurima ruumalaga risttahukas.

83. Kõikidest ühe ja sama alusega ning tipunurgaga kolmnurkadest leidke see, mille pindala on suurim.

84. Kõikidest antud perimeetriga kolmnurkadest leidke see, millel on maksimaalne pindala.

85. Leidke antud perimeetriga $2p$ ristkülik, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

86. Leidke antud perimeetriga $2p$ kolmnurk, mis pöörlemisel ümber oma ühe külje moodustab maksimaalse ruumalaga keha.

87. Joonestage ellipsoidi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ sisse maksimaalse ruumalaga risttahukas.

88. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste korrutis oleks maksimaalne?

89. Missugune peab olema kolmnurga kuju, et kolmnurga sisenurkade siinuste summa oleks maksimaalne?

90. Näidake, et mittenegatiivsete arvude $x_1, ..., x_n$ geomeetriline keskmine ei ületa aritmeetilist keskmist.

91*. Olgu antud kaks korda diferentseeruv funktsioon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Tähistame iga punkti $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^2$ korral $\Phi_{\mathbf{X}}(l_1, l_2) = f_{xx}(\mathbf{X}) \cdot l_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{X}) \cdot l_1 \cdot l_2 + f_{yy}(\mathbf{X}) \cdot l_2^2$. Olgu iga $\mathbf{X}$ korral $\Phi_{\mathbf{X}}$ *positiivselt määratud,* see tähendab, iga $\mathbf{X}$ ja iga $(l_1, l_2) \neq 0$ korral $\Phi_{\mathbf{X}}(l_1, l_2) > 0$, ehk iga $\mathbf{X}$ korral $f_{xx}(\mathbf{X}) > 0$ ja $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathbf{X}) & f_{xy}(\mathbf{X}) \\ f_{xy}(\mathbf{X}) & f_{yy}(\mathbf{X}) \end{vmatrix} > 0$. Tõestage, et funktsioonil f on **ülimalt üks** statsionaarne punkt (see tähendab, punkt $\mathbf{X}$, kus $f_x(\mathbf{X}) = f_y(\mathbf{X}) = 0$).

10. Kahekordse integraali arvutamine.

Olgu $R = [a, b] \times [c, d]$.
Vaatleme lõikude $[a, b]$ ja $[c, d]$ alajaotusi $(x_1, \ldots, x_n)$ ja $(y_1, \ldots, y_r)$.
Tähistame iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ ja $l \in \{1, \ldots, r\}$ korral $R_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ ja $S_{R_{kl}} = (x_{k-1} - x_k) \cdot (y_{l-1}, y_l)$. Tähistame $T = T[R_{kl}] = (R_{11}, \ldots, R_{nr})$ ristküliku R alajaotuse.
Tähistame $\lambda(T) = \max\limits_{\substack{k=1,\ldots,n \\ l=1,\ldots,r}} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_l - y_{l-1})^2}$. Tähistagu $\Xi = (\mathbf{X}_{11}, \ldots, \mathbf{X}_{nr})$ suvalist vektorit, kus $\mathbf{X}_{kl} \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ ja $l \in \{1, \ldots, r\}$ korral.
Olgu $\mathfrak{T} = \{T\colon\ T \text{ on ristküliku } R \text{ alajaotus}\}$.
Olgu $f\colon R \to \mathbb{R}$.
f on *integreeruv* ristkülikus R $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \in \mathfrak{T}, \forall \Xi\ \ \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{X}_k l) S_{R_{kl}} - I \right| < \varepsilon.$$

Arvu I nimetatakse funktsiooni f *määratud integraaliks* ristkülikus R ja tähistatakse $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk. Olgu $f\colon D\to\mathbb{R}$. Olgu $R\subset\mathbb{R}^2$ selline ristkülik, et $R\supset D$.
Defineerime funktsiooni $F\colon R\to\mathbb{R}$ võrdusega $F(\mathbf{X})=\begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X}\in D,\\ 0, & \text{kui } \mathbf{X}\in R\setminus D.\end{cases}$

f on integreeruv hulgas D $\overset{\text{def}}{\iff}$ F on integreeruv ristkülikus R,
$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{def}}{=} \iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
$S_D \overset{\text{def}}{=} \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
NB! Saab kontrollida, et eelnevad definitsioonid ei sõltu ristküliku $R\supset D$ valikust.
Olgu $D\subset X\subset\mathbb{R}$, $f,g\colon X\to\mathbb{R}$.

Lause.
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ ja } g \text{ int-vad hulgas } D,\\ \forall\mathbf{X}\in D\ \ f(\mathbf{X})\leqslant g(\mathbf{X})\end{array}\right\}\implies \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Lause.
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v hulkades } D_1 \text{ ja } D_2,\\ D_1\cap D_2=\varnothing\end{array}\right\}\implies \iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Lause.
$$\left.\begin{array}{r} f \text{ int-v hulgas } D,\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\implies \iint_D \lambda f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lambda\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Lause. f,g int-vad hulgas D $\implies$ $\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Lause. ∂D on tükiti sile joon $\implies$ $\exists S_D$.
Teoreem (Lebesgue'i kriteerium)**.** Olgu $E=\{\mathbf{X}\in D\colon f \text{ on katkev punktis } \mathbf{X}\}$. Olgu f tõkestatud hulgas D. Leidugu pindala S_D.
$S_E=0 \iff f$ on integreeruv hulgas D.
Lebesgue'i kriteeriumil on laialdased rakendused. Näiteks:

- kui hulgal D on pindala ning f on tõkestatud ja pidev hulgas D, siis f on integreeruv hulgas D;
- kui hulgal D on pindala ning f on tõkestatud hulgas D ja tal on hulgas D lõplik arv katkevuspunkte, siis f on integreeruv hulgas D.

Olgu $\psi,\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $\forall x\in[a,b]\ \ \psi(x)\leqslant\varphi(x)$.
Olgu $D=\{(x,y)\colon x\in[a,b],\ y\in[\psi(x),\varphi(x)]\}$ (*kõvertrapets*).
Lause. ψ, φ pidevad lõigus $[a,b]$ $\implies$ $\exists S_D$.
Lause.
$$\left.\begin{array}{r} \exists S_D,\\ f \text{ integreeruv kõvertrapetsis } D,\\ \forall x\in[a,b]\ \exists\displaystyle\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\end{array}\right\}\implies \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

92. Joonistage järgmised integreerimispiirkonnad D ning asetage integreerimisrajad integraalis
$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ valemite $\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ja $\int\limits_c^d \mathrm{d}y\int\limits_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ järgi.

a) D on kolmnurk tippudega $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$;
b) D on kolmnurk tippudega $(0,0)$, $(2,1)$, $(-2,1)$;

c) D on ristkülik tippudega $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$;

d) D on ring $x^2+y^2 \leqslant 1$;

e) D on on piiratud joontega $y=x^2$, $y=1$;

f) D on on piiratud joontega $y=x^2$, $y=x^3$.

93. Muutke integreerimisjärjekord järgmistes integraalides.

a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

d) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

e) $\displaystyle\int_{-2}^1 \mathrm{d}x \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\cos x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

94. Leidke järgmised integraalid.

a) $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on kolmnurk tippudega $(0,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$;

b) $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $x=1$ ja $y=x^2$;

c) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on piiratud joontega $y=-x$, $y=0$ ja $x=\pi$;

d) $\displaystyle\iint_D \cos(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $y=x$ ja $x=\pi$;

e) $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=[0,\ln 4]\times[0,\ln 2]$;

f) $\displaystyle\iint_D \frac{\ln x}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on piiratud joontega $y=1$, $y=x$ ja $x=\mathrm{e}$;

g) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on piiratud joontega $y=0$, $y=\ln x$ ja $x=\mathrm{e}$.

95*. Leidke integraal

$$\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kus D on piiratud x-teljega ja tsükloidi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ kaarega, kui $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ ja $a>0$.

11. Kahekordse integraali arvutamine. Üleminek polaarkoordinaatidele.

Olgu $T\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, kus $T(u,v)=(\xi(u,v),\eta(u,v))$.

$$T \text{ on } \textit{regulaarne} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} T \text{ on injektiivne,} \\ \xi_u,\xi_v,\eta_u,\eta_v \text{ on pidevad } \mathbb{R}^2\text{-s,} \\ \forall (u,v)\in\mathbb{R}^2 \ \ J(u,v):=\begin{vmatrix} \xi_u(u,v) & \xi_v(u,v) \\ \eta_u(u,v) & \eta_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}.$$

Teoreem. Olgu $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$ lihtne kinnine tükiti sile joon. Olgu $\partial\Delta=\Lambda$. Olgu $D=T(\Delta)$.

$$\left.\begin{array}{r} T \text{ on regulaarne,} \\ f \text{ on integreeruv } D\text{-s,} \\ \xi_{vu} \text{ ja } \eta_{vu} \text{ pidevad } \mathbb{R}^2\text{-s} \end{array}\right\} \implies \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta f(\xi(u,v),\eta(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Olgu $E=\{\mathbf{X}\in D\colon \text{punktis } \mathbf{X} \text{ on rikutud } T \text{ mõni regulaarsuse tingimus}\}$. Muutujate vahetuse teoreem kehtib ka olukorras, kus $S_E=0$ ja $S_{T^{-1}(E)}=0$.

Levinud „peaaegu“ regulaarsed muutujavahetused:

- $T(u,v)=(u\cos v, u\sin v)$ (*polaarkoordinaadid*),
- $T(u,v)=(au\cos v, bu\sin v)$ (*elliptilised polaarkoordinaadid*),
- $T(u,v)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(u-v,u+v)$ (pööre nurga $\dfrac{\pi}{4}$ võrra).

Olgu $D\subset\mathbb{R}^2$ selline, et $\exists S_D$. Olgu $f,g\colon D\to\mathbb{R}$ sellised, et $\forall\mathbf{X}\in D\ \ f(x)\leqslant g(x)$. Olgu $K=\{(x,y,z)\colon (x,y)\in D\, z\in[f(x,y),g(x,y)]\}$.

$V_K\overset{\text{def}}{=}\iint_D (g(x,y)-f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Olgu nüüd $K\subset[a,b]\times\mathbb{R}^2$. Iga $x\in[a,b]$ korral tähistame $D_x=\{(y,z)\colon (x,y,z)\in K\}$. Nõuame, et keha K rahuldaks järgmisi tingimusi:

1) $\forall x\in[a,b]\ \ \exists S_{D_x}=\iint_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

2) $\forall x_1,x_2\in[a,b]\ \ (D_{x_1}\subset D_{x_2})\vee(D_{x_2}\subset D_{x_1})$;

3) tähistame $S\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, kus $S(x)=S_{D_x}$, olgu S pidev.

Siis $V_K=\displaystyle\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

96. Leidke järgmised integraalid.

a) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\arctan x \operatorname{arccot} y}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=[0,1]\times[-1,0]$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus D on piiratud joontega $y=x^2$ ja $y^2=x$.

97. Leidke järgmised integraalid, minnes üle polaarkoorinaatidele.

a) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$;

c) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1\}$;

d) $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon \pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2\}$;

e) $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

98*. Tähistagu U kolmnurka tippudega $(0,0)$, $(1,0)$ ja $(0,1)$. Tõestage, et

$$\iint\limits_U \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\operatorname{sh}1}{2},$$

kus $\operatorname{sh}t=\dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$ (hüperboolne siinus).

12. Kahekordse integraali arvutamine. Üleminek polaarkoordinaatidele. Kahekordse integraali rakendusi (tasandilise kujundi pindala, keha ruumala, ruumilise pinnatüki pindala).

99. Leidke järgmised integraalid, minnes üle polaarkoorinaatidele.

a) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon (x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$;

b) $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+(y-1)^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\}$;

c) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$;

d) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon x^2+(y+2)^2\leqslant 4\}$;

e) $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kus $D=\{(x,y)\colon 4x\leqslant x^2+y^2\leqslant 8x,\ x\leqslant y\leqslant 2x\}$.

100. Leidke xy-tasandil asetsevate kujundite pindalad, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega. Arvud a ja b on positiivsed.

a) $y=x^3,\ y=1,\ x=0$;
b) $y=\mathrm{e}^x,\ y=\mathrm{e}^{-x},\ y=\mathrm{e}$;
c) $y=2^x,\ y=2^{-x},\ y=4$;
d) $xy=4,\ x+y=5$;
e) $3x^2=25y,\ 5y^2=9x$;
f) $x^2+y^2=a^2$;
g) $r=a\cos\varphi,\ r=b\cos\varphi,\ (b>a)$;
h) $r=a(1+\cos\varphi)$ (kardioid);
i) $r=2a\cos 4\varphi$ (neljaleheline roos);
j) $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$;
k) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ (Bernoulli lemniskaat);
l) $(x^2+y^2)^2=2ax^3$.

101. Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E, kasutades valemit $V_E=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

a) Tasandid $x=0,\ y=0,\ z=0$ ja $x+y+z=1$.
b) Tasandid $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=4$ ja $y=4$ ning pöördparaboloid $z=x^2+y^2+1$.
c) Tasandid $x=0,\ y=0,\ z=0$ ja $x+y=1$ ning elliptiline paraboloid $z=2x^2+y^2+1$.
d) Tasandid $z=0$ ja $x+z=6$ ning silindrid $y=\sqrt{x}$ ja $y=2\sqrt{x}$.
e) Tasand $z=0$, pöördparaboloid $z=x^2+y^2$ ja silinder $x^2+y^2=1$.

102*. Leidke kahekordne integraal

$$\iint\limits_R (x^3-3xy^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kus $R=\{(x,y)\colon (x+1)^2+y^2\leqslant 9,\ (x-1)^2+y^2\geqslant 1\}$.
Koostage arvuti abil joonis, millel kujutatakse integrandi graafikut $\{(x,y,x^3-3xy^2)\colon (x,y)\in R\}$.
NB! Muid punkte peale nende, mis vastavad argumendile (x,y) hulgast R, **mitte** graafikule kanda! (Nõutav graafik näeb välja nagu auguga kartulikrõps.)

13. Kahekordse integraali rakendusi (tasandilise kujundi pindala, keha ruumala, ruumilise pinnatüki pindala).

103. Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E, kasutades valemit $V_E=\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

a) Koordinaattasandid, silinder $x^2+y^2=1$ ja pind $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, kus $x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0$ ja $y\geqslant 0$.
b) Tasandid $x=1,\ y=0$ ja $z=0$ ning hüperboolne paraboloid $z=x^2-y^2$.
c) Tasandid $x=0,\ y=0,\ z=0$ ja $2x+3y=12$ ning silinder $y^2=2z$.
d) Tasandid $z=1$ ja $z=12-3x-4y$ ning elliptiline silinder $x^2+4y^2=4$.
e) Sfäär $x^2+y^2+z^2=3$ ja pöörparaboloid $2z=x^2+y^2$.
f) Silindrid $x^2+y^2=1$ ja $x^2+z^2=1$.
g) Pöördparaboloidid $z=4-x^2-y^2$ ja $2z=2+x^2+y^2$.
h) Silinder $x^2+y^2=3$ ja kahekatteline hüperboloid $z^2=x^2+y^2+3$.
i) $z=\cos x\cos y,\ z=0,\ |x+y|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ ja $|x-y|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

104. Leidke järgmiste ruumiliste pindade märgitud osade pindalad.

a) Tasandi $6x+3y+2z=12$ osa, kus $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$ ja $z\geqslant 0$.
b) Pinna $z=xy$ osa, mis asub silindri $x^2+y^2=1$ sees.
c) Sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ osa, mis on silindri $x^2+y^2=b^2$ $(b<a)$ sees.
d) Koonuse $z^2=x^2+y^2$ osa, mille eraldab temast silidriline pind $z^2=2y$.
e) Silindri $z^2=4x$ osa, mille eraldavad temast silinder $y^2=4x$ ja tasand $x=1$.
f) Sfääri $x^2+y^2+z^2=a^2$ osa, mille lõikab temast välja silinder $x^2+y^2=ax$.
g) Koonuse $x^2=y^2+z^2$ osa, mis asub silindri $x^2+y^2=2$ sees.

14. Kolmekordse integraali arvutamine.

Kolmekordse integraali mõiste defineeritakse ja omadused sõnastatakse ning tõestatakse põhimõtteliselt samasugusel viisil nagu kahekordse integraali mõiste ja vastavad omadused. Kõigepealt defineeritakse see integraal risttahukate $[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ jaoks, kasutades risttahuksummasid. Seejärel suvalise tõkestatud hulga K korral valitakse risttahukas $R\supset K$ (jätkates hulgas K määratud funktsiooni

risttahukal R määratud funktsiooniks F nullfunktsiooni abil) ning defineeritakse, et
$\iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \iiint_R F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$
Olgu $K \subset \mathbb{R}^3$ tõkestatud hulk.
$V_K \overset{\text{def}}{=} \iiint_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ (keha K *ruumala*).
Lebesgue'i kriteerium väidab analoogiliselt kahe muutuja juhuga: olgu $f\colon K \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, olgu $E = \{\mathbf{X} \in K\colon f \text{ on katkev punktis } \mathbf{X}\}$ ja leidugu ruumala V_K, siis
$V_E = 0 \iff f$ on integreeruv hulgas K.
Nii näiteks, kui hulgal K leidub ruumala V_K ja f on pidev hulgas K, siis f on integreeruv hulgas K.
Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ selline, et $\exists S_D$.
Olgu $\psi, \varphi\colon D \to \mathbb{R}$ sellised funktsioonid, et $\forall (x,y) \in D\ \ \psi(x,y) \leqslant \varphi(x,y)$.
Olgu $K = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ z \in [\psi(x,y), \varphi(x,y)]\}$ (*kõversilinder*).
Lause. ψ, φ pidevad hulgas $D \implies \exists V_K$.
Lause.

$$\left.\begin{array}{r} \exists V_K, \\ f \text{ integreeruv kõversilindris } K, \\ \forall (x,y) \in D\ \exists \displaystyle\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \end{array}\right\} \implies \iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Olgu nüüd $K \subset [a,b] \times \mathbb{R}^2$. Iga $x \in [a,b]$ korral tähistame $D_x = \{(y,z)\colon (x,y,z) \in K\}$. Nõuame, et keha K rahuldaks järgmisi tingimusi:
1) $\forall x \in [a,b]\ \ \exists S_{D_x} = \iint_{D_x} \mathrm{d}y\mathrm{d}z$;
2) $\forall x_1, x_2 \in [a,b]\ \ (D_{x_1} \subset D_{x_2}) \vee (D_{x_2} \subset D_{x_1})$;
3) tähistame $S\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kus $S(x) = S_{D_x}$, olgu S pidev.

Lause.
$$\left.\begin{array}{r} \exists V_K, \\ f \text{ integreeruv kehas } K, \\ \forall x \in [a,b] \exists \displaystyle\iint_{D_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{array}\right\} \implies \iiint_K f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x.$$

Regulaarse kujutuse $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definitsioon on samuti analoogiline, kusjuures $T(u,v,w) =$
$= (\xi(u,v,w), \eta(u,v,w), \zeta(u,v,w))$ korral jakobiaan on kujul

$$J(\mathbf{U}) = \begin{vmatrix} \xi_u(\mathbf{U}) & \xi_v(\mathbf{U}) & \xi_w(\mathbf{U}) \\ \eta_u(\mathbf{U}) & \eta_v(\mathbf{U}) & \eta_w(\mathbf{U}) \\ \zeta_u(\mathbf{U}) & \zeta_v(\mathbf{U}) & \zeta_w(\mathbf{U}) \end{vmatrix}.$$

Levinud „peaaegu“ regulaarsed muutujavahetused:

- $T(u,v,w) = (u\cos v, u\sin v, w)$ (*silindrilised koordinaadid*),
- $T(u,v,w) = (u\cos v\sin w, u\sin v\sin w, u\cos w)$ (*sfäärilised koordinaadid*).

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$, olgu D sidus.

D on ühelisidus $\overset{\text{def}}{\iff}$ iga pideva lihtsa kinnise joone $\gamma(I)$ korral $\gamma(I)$ poolt piiratud hulk E sisaldub hulgas D.

Olgu $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ selline ühelisidus hulk, et leidub S_Δ. Olgu $x, y, z\colon \Delta \to \mathbb{R}$.
Olgu $\Omega\colon \Delta \to \mathbb{R}^3$, kus $\Omega(t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ iga $(u,v) \in \Delta$ korral.
Vektorfunktsiooni Ω väärtuste hulka $\Omega(\Delta) = \{\Omega(u,v)\colon (u,v) \in \Delta\}$ nimetatakse *pinnaks* ruumis $\mathbb{R}^3$. Kui on antud funktsioonid x, y ja z, öeldakse mõnikord, et pind on antud *parameetriliselt*.

Olgu $\mathbf{U}=(u,v)\in\Delta$. Tähistame
$\mathbf{n}(\mathbf{U})=(A(\mathbf{U}),B(\mathbf{U}),C(\mathbf{U}))=\left(\begin{vmatrix} y_u(\mathbf{U}) & z_u(\mathbf{U}) \\ y_v(\mathbf{U}) & z_v(\mathbf{U})\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z_u(\mathbf{U}) & x_u(\mathbf{U}) \\ z_v(\mathbf{U}) & x_v(\mathbf{U})\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x_u(\mathbf{U}) & y_u(\mathbf{U}) \\ x_v(\mathbf{U}) & y_v(\mathbf{U})\end{vmatrix}\right)=$
$=(x_u(\mathbf{U}),y_u(\mathbf{U}),z_u(\mathbf{U}))\times(x_v(\mathbf{U}),y_v(\mathbf{U}),z_v(\mathbf{U}))$.

$\Omega(\Delta)$ on *sile* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} x_u,\,x_v,\,y_u,\,y_v,\,z_u,\,z_v \text{ pidevad hulgas } \Delta, \\ \forall\mathbf{U}\in\Delta\ \ (A(\mathbf{U}),B(\mathbf{U}),C(\mathbf{U}))\neq\mathbf{0}.\end{cases}$

Lause. Olgu $\Omega(\Delta)$ sile pind. Olgu $\mathbf{U}_0\in\Delta$. Tähistame $\pi=\{\mathbf{X}\colon\langle\mathbf{n}(\mathbf{U}_0),\mathbf{X}-\Omega(\mathbf{U}_0)\rangle=0\}$. Kehtib koondumine $\lim\limits_{\mathbf{U}\to\mathbf{U}_0}\dfrac{d(\Omega(\mathbf{U}),\pi)}{\|\mathbf{U}-\mathbf{U}_0\|}=0$.

Lause näitab, et siledal pinnal on igas tema punktis $\Omega(\mathbf{U})$ puutujatasand $\pi_{\mathbf{U}}$, mille normaalvektor on $\mathbf{n}(\mathbf{U})$.

Olgu Δ kinnine ühelisidus hulk, kusjuures leidugu S_Δ. Olgu $\Omega(\Delta)$ sile pind.

$T=(\Delta_1,\dots,\Delta_n)$ on hulga Δ *alajaotus* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases}\Delta=\Delta_1\cup\ldots\cup\Delta_n, \\ \forall k=1,\dots,n\ \ \Delta_k \text{ on kinnine ja } \exists S_{\Delta_k}, \\ \forall k,l=1,\dots,n\ \ k\neq l\Rightarrow\Delta_k^\circ\cap\Delta_l^\circ=\varnothing.\end{cases}$

Tähistame $\lambda(T)=\max\limits_{k=1,\dots,n}\operatorname{diam}(\Delta_k)$.

Iga tasandi $\pi=\{(x,y,z)\colon\ Ax+By+Cz+D=0\}$ korral tähistame tähisega $p_\pi(\mathbf{U})$ punkti $\Omega(\mathbf{U})$ projektsiooni tasandile π. Arvutuslikult: $p_\pi(\mathbf{U})=\Omega(\mathbf{U})-\dfrac{\pi(\Omega(\mathbf{U}))}{\|\mathbf{n}_\pi\|}\cdot\mathbf{n}_\pi$, kus $\mathbf{n}_\pi=(A,B,C)$ ja $\pi(x,y,z)=Ax+By+Cz+D$.

Hulga Δ iga alajaotuse T korral valime iga $k=1,\dots,n$ jaoks $\mathbf{U}_k\in\Delta_k$ ning tähistame $\Omega_k=p_{\pi_{\mathbf{U}_k}}(\Delta_k)$. Saab näidata, et hulkadel Ω_k leidub pindala.

$S_{\Omega(\Delta)}\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}S_{\Omega_k}$ (pinnatüki $\Omega(\Delta)$ *pindala*).

Lause. $S_{\Omega(\Delta)}=\iint_\Delta\|\mathbf{n}(u,v)\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

105. Asetage integraalis $\iiint\limits_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ rajad valemite $\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ ja $\int\limits_a^b\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ järgi, kui E on piiratud järgmiste pindadega.

a) Silinder $x^2+y^2=1$ $(x\geqslant0)$ ning tasandid $z=1,\ x+z=3$ ja $x=0$.
b) Silinder $x^2+y^2=1$ ning tasandid $z=2$ ja $z=4$.
c) Tasandid $x=0,\ y=0,\ z=0$ ja $x+y+z=1$.
d) Pind $z=1-x^2-y^2$ ja tasand $z=0$.
e) Ellipsoid $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

106. Leidke järgmised integraalid.

a) $\iiint\limits_E x^2yz^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon 0\leqslant x\leqslant3,\ 0\leqslant y\leqslant2,\ 0\leqslant z\leqslant1\}$;

b) $\iiint\limits_E y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon 0\leqslant x\leqslant 3,\ 0\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant 2-y\}$;

c) $\iiint\limits_E (z+4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$;

d) $\iiint\limits_E \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-x-y}$, kus $E=\{(x,y,z)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 2\leqslant y\leqslant 5,\ 2\leqslant z\leqslant 4\}$.

107. Leidke järgmised integraalid.

a) $\iiint\limits_E (1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$;

b) $\iiint\limits_E xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z=xy$ ja tasanditega $x=1$, $y=x$ ja $z=0$;

c) $\iiint\limits_E (2x+3y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud tasanditega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$ ja $x+y=2$.

108. Olgu $B=\{(x,y,z)\colon 1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^z,\ y\geqslant z,\ y^2+z^2\leqslant 4\}$. Koostage hulga B kohta arvuti abiga kolmemõõtmeline kontuurjoonis. Tõestage, et

$$\iiint\limits_B \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x}=\frac{8-4\sqrt{2}}{3}.$$

109*. Tõestage, et iga lõigus $[0,a]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$\int\limits_0^a \mathrm{d}x\int\limits_0^x \mathrm{d}y\int\limits_0^y f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int\limits_0^a (a-z)^2 f(z)\,\mathrm{d}z.$$

110*. Kahekordset integraali kasutades leidke piirväärtus $(m,n\in\mathbb{N})$

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^n \frac{1}{mn}\cdot\frac{l^2}{n^2}\cdot\sin\frac{kl}{mn}.$$

111*. Tõestage, et iga lõigus $[0,2]$ integreeruva funktsiooni f korral kehtib valem

$$2\int\limits_0^1 \mathrm{d}x\int\limits_0^1 \mathrm{d}y\int\limits_0^{x+y} f(z)\,\mathrm{d}z=\int\limits_0^1 (2-z^2)f(z)\,\mathrm{d}z+\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\,\mathrm{d}z.$$

15. Kolmekordse integraali arvutamine. Silindrilised koordinaadid, sfäärilised koordinaadid. Keha ruumala leidmine kolmekordse integraali abil.

112. Üleminekuga silinderkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

a) $\iiint\limits_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ ja tasanditega $x=0$, $y=0,\ z=0$ ja $z=2$;

b) $\iiint\limits_E \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+(z-1)^2}$, kus $E=\{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$;

c) $\iiint\limits_E xz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=a^2$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$ ja tasanditega $z=0$, $z=1,\ y=x$ ja $y=x\sqrt{3}$;

d) $\iiint\limits_E y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=2x$, tasandiga $z=0$ ja paraboloidiga $z=x^2+y^2$;

e) $\iiint\limits_E z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud silindriga $x^2+y^2=2x$ $(y\geqslant 0)$ ja tasanditega $z=0$, $z=c$ ja $y=0$;

f) $\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon\ a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2,\ z\geqslant 0\}$.

113. Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

a) $\iiint\limits_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on piiratud sfääri osaga $x^2+y^2+z^2=1$ $(y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$ ja tasanditega $y=0$ ja $z=0$;

b) $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$;

c) $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2\leqslant z$;

d) $\iiint\limits_E \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, kus E on kera $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;

e) $\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2\leqslant a^2,\ z\geqslant 0\}$;

f) $\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $E=\{(x,y,z)\colon\ a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2\}$.

114. Leidke kehade ruumalad, kui nad on piiratud järgmiste pindadega. Arv a on positiivne.

a) Silindrid $z=9-y^2$ ja $z=1+y^2$ ning tasandid $x=-1$ ja $x=5$.
b) Paraboloidid $z=x^2+y^2$ ja $z=2x^2+2y^2$ ning silinder $x^2+y^2=1$.
c) Paraboloidid $z=x^2+y^2$ ja $z=x^2+2y^2$ ning tasandid $x=1,\ y=x$ ja $y=2x$.
d) Silindrid $y=x^2$ ja $3y=4-x^2$ ning tasandid $z=0$ ja $z=9$.
e) Hüperboolne paraboloid $z=xy$ ning tasandid $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ ja $x+y=z$.
f) Paraboloidid $z=x^2+y^2$ ja $z=2x^2+2y^2$, silinder $y=x^2$ ning tasand $y=x$.
g) Pind $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

115*. Olgu $a > b > 0$. Tõestage, et ellipsi $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ pikkus on võrdne sinusoidi $y = c\sin\frac{x}{b}$ ühe täisvõnke kaarepikkusega, kui $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

116*. Leidke näide sirgestuvast joonest $L \subset \mathbb{R}^2$ ning funktsioonidest $f,\ g,\ h\colon L \to \mathbb{R}$ nii, et $f(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant h(x,y)$ iga $(x,y) \in L$ korral, aga

$$\int\limits_L f(x,y)\,\mathrm{d}x > \int\limits_L g(x,y)\,\mathrm{d}x \text{ ja } \int\limits_L g(x,y)\,\mathrm{d}x < \int\limits_L h(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Märkus. Ülesanne näitab, et teist liiki joonintegraal üldiselt ei ole monotoonne.

16. Esimest liiki joonintegraali arvutamine üle tasandilise joone. Esimest liiki joonintegraali arvutamine üle ruumilise joone (parameetriliselt antud joonte korral).

Olgu $\varphi_1, \varphi_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Olgu $\gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.
Olgu $L = \gamma([a,b])$ lihtne pidev sirgestuv kaar.
Tähistame $\mathfrak{T} = \{T\colon T \text{ on lõigu } [a,b] \text{ alajaotus}\}$.
Olgu $T[t_0,\dots,t_n]$ lõigu $[a,b]$ mingi alajaotus. Tähistame $s_k = \ell_{\gamma([t_{k-1},t_k])}$ iga $k = 1,\dots,n$ korral (osakaarte $\gamma([t_{k-1},t_k])$ pikkused). Tähistame $\lambda(T) = \max\limits_{k=1,\dots,n}(t_k - t_{k-1})$. Tähistagu $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ suvalist vektorit, kus $\mathbf{Q}_k = \gamma(\xi_k) \in \gamma([t_{k-1},t_k])$ iga $k = 1,\dots,n$ korral. Tähistame iga $k = 1,\dots,n$ korral $\Delta x_k = \varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})$ ja $\Delta y_k = \varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})$.
Olgu $f\colon L \to \mathbb{R}$ ja $I \in \mathbb{R}$.

Funktsiooni f *esimest liiki joonintegraal* üle joone L on $I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \in \mathfrak{T}, \forall \boldsymbol{\xi}\ \ \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{Q}_k) s_k - I \right| < \varepsilon.$$

Tähis: $\displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$.

Funktsiooni f *teist liiki joonintegraal* koordinaadi x järgi üle joone L on $I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \in \mathfrak{T}, \forall \boldsymbol{\xi}\ \ \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{Q}_k) \Delta x_k - I \right| < \varepsilon.$$

Tähis: $\displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

Funktsiooni f *teist liiki joonintegraal* koordinaadi y järgi üle joone L on $I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \in \mathfrak{T}, \forall \boldsymbol{\xi}\ \ \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{Q}_k) \Delta y_k - I \right| < \varepsilon.$$

Tähis: $\displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} L \text{ sile,} \\ f \text{ pidev} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\,\mathrm{d}t, \\ \displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\gamma(t))\varphi_1'(t)\,\mathrm{d}t, \\ \displaystyle\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(\gamma(t))\varphi_2'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

NB! Nii esimest kui teist liiki joonintegraalidel on kõik harilikud määratud (ja kahekordse) integraali aritmeetikaomadused: aditiivsus, homogeensus ja aditiivsus piirkonna järgi.

NB! Esimest liiki joonintegraalil on ka järjestusega seotud integraali omadused: monotoonsus ja keskmise muutuja omadus. Teist liiki joonintegraalil üldiselt **ei ole** järjestusega seotud omadusi. (Nende olemasolu sõltub joont määravate koordinaatfunktsioonide φ_1 ja φ_2 monotoonsusest.)

NB! Teist liiki joonintegraal vahetab märki, kui vahetada joone läbimise suunda.

NB! Ülaltoodud mõisted saab defineerida ja tulemused kehtivad ka juhul, kui mõiste „lihtne" asendada mõistega „lihtne kinnine". Teist liiki joonintegraali korral märgib tähis $L+$ või lihtsalt L kinnise joone läbimist nii, et joone L poolt piiratud hulk jääb vasakule, ja $L-$ vastupidises suunas.

117. Leidke järgmised tasandilised joonintegraalid mööda antud joont AB või L.

a) $\displaystyle\int\limits_{AB} \frac{\mathrm{d}s}{x-y}$, $AB\colon\ y=\frac{1}{2}x-2$, $\mathbf{A}=(0,-2)$, $\mathbf{B}=(4,0)$;

b) $\displaystyle\int\limits_{AB} \frac{2x+y}{y}\,\mathrm{d}s$, $AB\colon\ y=-2x-1$, $\mathbf{A}=(0,-1)$, $\mathbf{B}=(1,-3)$;

c) $\displaystyle\int\limits_{AB} \frac{\mathrm{d}s}{x}$, $AB\colon\ x=2y+3$, $\mathbf{A}=(3,5)$, $\mathbf{B}=(5,1)$;

d) $\displaystyle\int\limits_{AB} xy\,\mathrm{d}s$, $AB\colon\ x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathbf{A}=(1,0)$, $\mathbf{B}=(0,1)$;

e) $\displaystyle\int\limits_{L} \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, $L\colon\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0,2\pi]$;

f) $\displaystyle\int\limits_{L} y\,\mathrm{d}s$, $L\colon\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0,\pi]$;

g) $\displaystyle\int\limits_{AB} y\,\mathrm{d}s$, $AB\colon\ r=\cos\varphi,\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;

h) $\displaystyle\int\limits_{AB} (x-y)\,\mathrm{d}s$, $AB\colon\ r=\cos\varphi,\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

i) $\displaystyle\int\limits_{L} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$, $L\colon\ r=a\sin\varphi,\ \varphi\in[0,\pi]$;

j) $\displaystyle\int\limits_{L} \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}s$, kui L on Archimedese spiraali $r=2\varphi$ osa, kus $0\leqslant r\leqslant\pi$;

k) $\displaystyle\int\limits_{AB} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, $AB\colon\ x^2+y^2=a^2,\ (x>0)$, $\mathbf{A}=(a,0)$, $\mathbf{B}=(0,a)$;

l) $\int\limits_L (x-y)\,\mathrm{d}s, \quad L\colon x^2+y^2=2x;$

m) $\int\limits_L x\,\mathrm{d}s, \quad L\colon x^2+y^2=ay;$

n) $\int\limits_L (x+y)\,\mathrm{d}s$, kui L on kolmnurga ABC kontuur, kus $\mathbf{A}=(0,0)$, $\mathbf{B}=(1,0)$ ja $\mathbf{C}=(0,1)$;

o) $\int\limits_L xy\,\mathrm{d}s$, kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $\mathbf{A}=(0,0)$, $\mathbf{B}=(4,0)$, $\mathbf{C}=(4,2)$ ja $\mathbf{D}=(0,2)$;

p) $\int\limits_L |y|\,\mathrm{d}s$, kui L on lemniskaat $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$.

118. Leidke järgmised joonintegraalid mööda antud ruumilist joont L.

a) $\int\limits_L \frac{3z^2\,\mathrm{d}s}{x^2+y^2}$, kus L on kruvijoone $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=at$ esimene keerd $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

b) $\int\limits_L (x+3z)\,\mathrm{d}s$, kui L on joone $x=3t,\ y=\frac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z=t^3$ osa, kus $0\leqslant t\leqslant 1$;

c) $\int\limits_L z\,\mathrm{d}s$, kui L on koonilise kruvijoone $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t$ osa, kus $0\leqslant t\leqslant \sqrt{2}$.

17. Joone kaare pikkus. Silinderpinna pindala.

119. Leidke järgmiste xy-tasandil asetsevate joonte pikkused.

a) $y=2x\sqrt{x}, \quad x\in[0,7];$

b) $y=\operatorname{ch}x, \quad x\in[0,1];$

c) $x=\ln(t-1),\ y=\ln(t+\sqrt{t^2-1})+\sqrt{t^2-1}, \quad t\in[2,\mathrm{e}+1];$

d) $r=\mathrm{e}^{\varphi}, \quad \varphi\in[0,2\pi];$

e) $r=2\sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right);$

f) $y=1-\ln\cos x, \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right].$

120. Leidke järgmiste ruumiliste joonte märgitud kaarte pikkused.

a) $x=3t,\ y=3t^2,\ z=2t^3, \quad \mathbf{A}=(0,0,0),\ \mathbf{B}=(3,3,2);$

b) $x=\mathrm{e}^{-t}\cos t,\ y=\mathrm{e}^{-t}\sin t,\ z=\mathrm{e}^{-t}, \quad t\in[0,\infty).$

121. Leidke vertikaalsete silinderpindade pindalad, kui pindade alumised servad on xy-tasandil ja ülemised servad on määratud järgmiste joontega.

a) $x^2+y^2=1, \quad z=2xy,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0);$

b) $x^2+y^2=4, \quad 2z=x^2+4;$

c) $y^2=x, \quad z=\sqrt{x(1-4x)}.$

122. Leidke silinderpinna $y^2 = 2x$ pindala, mis asub silindri $z^2 = 2x - 4x^2$ sees.

123. Leidke silinderpinna $x^2 + y^2 = 2x$ selle osa pindala, mis asub kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sees.

124. Leidke xy-tasandil oleva kõvera $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ mass, kui tema joontihedus on $p(x, y) = |y|$.

18. Teist liiki joonintegraali arvutamine üle tasandilise joone. Teist liiki joonintegraali arvutamine üle ruumilise joone (parameetriliselt antud joonte korral). Üldise teist liiki joonintegraali leidmine.

125. Leidke järgmised joonintegraalid mööda xy-tasandil asetsevat joont AB.

a) $\displaystyle\int_{AB} xy\,\mathrm{d}x,\quad AB\colon\ y = \sin x,\ \mathbf{A} = (0,0),\ \mathbf{B} = (\pi, 0);$

b) $\displaystyle\int_{AB} y\,\mathrm{d}x,\quad AB\colon\ y = 2 - \frac{x}{2},\ \mathbf{A} = (4,0),\ \mathbf{B} = (0,2);$

c) $\displaystyle\int_{AB} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y,\quad AB\colon\ x = \sqrt{y},\ \mathbf{A} = (0,0),\ \mathbf{B} = (2,4);$

d) $\displaystyle\int_{AB} x\,\mathrm{d}y,\quad AB\colon 3x + 2y - 6 = 0,\ \mathbf{A} = (2,0),\ \mathbf{B} = (0,3);$

e) $\displaystyle\int_{AB} y\,\mathrm{d}x,\quad AB\colon\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

f) $\displaystyle\int_{AB} x\,\mathrm{d}y,\quad AB\colon\ x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi];$

g) $\displaystyle\int_{AB} \cos y\,\mathrm{d}y,\quad AB\colon\ x\text{-telg},\ \mathbf{A} = (0,0),\ \mathbf{B} = (4,0);$

h) $\displaystyle\int_{AB} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x,\quad AB\colon$ sirglõik, mis ühendab punkte $\mathbf{A} = (2,0)$ ja $\mathbf{B} = (2,6)$;

i) $\displaystyle\int_{L} x\,\mathrm{d}y$, kui L on kolmnurga ABC kontuur, kus $\mathbf{A} = (0,0),\ \mathbf{B} = (3,0)$ ja $\mathbf{C} = (0,2)$;

j) $\displaystyle\int_{L} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x$, kui L on kontuur, mille moodustavad sirged $x = 1,\ x = 5,\ y = 1$ ja $y = 3$.

126. Leidke järgmised üldised teist liiki joonintegraalid.

a) $\displaystyle\int_{AB} \cos y\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y,\quad AB\colon\ y = x,\ \mathbf{A} = (0,0),\ \mathbf{B} = (\pi,\pi);$

b) $\displaystyle\int_{L} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,\quad L\colon\ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

c) $\displaystyle\int_{AB} (2 - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,\quad AB\colon\ x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ \mathbf{A} = (0,0),\ \mathbf{B} = (2\pi, 0).$

127. Leidke xy-tasandil olevate tasandiliste kujundite pindalad, kui nad on piiratud järgmiste joontega.

a) Ellips $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$;

b) astroid $x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$;

c) kardioid $x = a(2\cos t - \cos 2t),\ y = a(2\sin t - \sin 2t)$;

d) $y = x^2,\ x = y^2$;

e) joone $(x + y)^3 = 2xy$ silmus;

f) Bernoulli lemniskaat $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

19. Greeni valemi abil pindala leidmine. Integreerimisteest sõltumatud tasandilised joonintegraalid.

Teoreem (Greeni valem)**.** Olgu $\mathscr{G} \subset \mathbb{R}^2$ lahtine ja ühelisidus. Olgu $F, G\colon \mathscr{G} \to \mathbb{R}$. Olgu $D \subset \mathscr{G}$.

$$\left.\begin{array}{r} D \text{ on kinnine,} \\ \partial D \text{ on tükiti sile,} \\ F \text{ ja } G \text{ on pidevad,} \\ F_y \text{ ja } G_x \text{ on pidevad} \end{array}\right\} \implies \iint_D \big(G_x(x,y) - F_y(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D+} F(x,y)\,\mathrm{d}x + G(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Lause.

$$\left.\begin{array}{r} D \text{ on kinnine,} \\ \partial D \text{ on tükiti sile} \end{array}\right\} \implies S_D = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} (-y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} (-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y).$$

Olgu $\mathscr{G} \subset \mathbb{R}^2$ lahtine ja sidus. Olgu $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{G}$. Olgu $F, G\colon \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ pidevad.

$$\text{Tähistame } \mathfrak{L} = \left\{ \gamma\colon \left\{ \begin{array}{l} \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \text{ kus } \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ ja } x, y\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \\ \gamma([0,1]) \text{ on tükiti sile joon,} \\ \gamma(0) = \mathbf{A}, \\ \gamma(1) = \mathbf{B} \end{array} \right. \right\}.$$

Joonintegraal $\int_{\mathbf{AB}} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$ on *sõltumatu punkte* **A** *ja* **B** *ühendavast integreerimisteest* hulgas $\mathscr{G}$ $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{L}\ \int_{\gamma_1([0,1])} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y = \int_{\gamma_2([0,1])} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$.

Lause. Olgu $\mathscr{G}$ lahtine ja ühelisidus, $F, G\colon \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ pidevad, G_x, F_y pidevad.

$\forall \mathbf{X} \in \mathscr{G}\ \ G_x(\mathbf{X}) = F_y(\mathbf{X}) \iff$

$\iff$ iga tükiti sileda kinnise joone $L \subset \mathscr{G}$ korral $\int_L F(x,y)\,\mathrm{d}x + G(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \iff$

$\iff$ iga kahe punkti $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{G}$ korral $\int_{\mathbf{AB}} F(x,y)\,\mathrm{d}x + G(x,y)\,\mathrm{d}y$ on sõltumatu integreerimisteest hulgas $\mathscr{G}$ $\iff$

$\iff$ $\exists U\colon \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ nii, et U on dif-v ja $U_x = F,\ U_y = G$.

128. Leidke Greeni valemi abil järgmised joonintegraalid.

a) $\int\limits_L (1 - x^2)y\,\mathrm{d}x + x(1 + y^2)\,\mathrm{d}y, \quad L\colon x^2 + y^2 = a^2$;

b) $\int\limits_L (xy + x + y)\,\mathrm{d}x + (xy + x - y)\,\mathrm{d}y, \quad L\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

c) $\displaystyle\int_L (xy+x+y)\,\mathrm{d}x+(xy+x-y)\,\mathrm{d}y, \quad L\colon x^2+y^2=ax.$

129. Millised järgmistest joonintegraalidest on integreerimisteedest sõltumatud ja millised sõltuvad?

a) $\displaystyle\int_L (4x+2y)\,\mathrm{d}x+(2x-6y)\,\mathrm{d}y;$

b) $\displaystyle\int_L y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y;$

c) $\displaystyle\int_L (3x^2-2xy+y^2)\,\mathrm{d}x-(x^2-2xy+3y^2)\,\mathrm{d}y.$

130. Leidke funktsioonid U nende täisdiferentsiaalide $\mathrm{d}U$ järgi.

a) $\mathrm{d}U=(3x^2-2xy^2)\,\mathrm{d}x+(3y^2-2x^2y)\,\mathrm{d}y;$

b) $\mathrm{d}U=(\mathrm{e}^{2y}-5y^3\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x+(2x\mathrm{e}^{2y}-15y^2\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y;$

c) $\mathrm{d}U=\dfrac{(x+2y)\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2};$

d) $\mathrm{d}U=\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}};$

e) $\mathrm{d}U=(2x\cos y-y^2\sin x)\,\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\,\mathrm{d}y;$

f) $\mathrm{d}U=[2x+\sin(x+y)]\,\mathrm{d}x+[2y+\sin(x+y)]\,\mathrm{d}y;$

g) $\mathrm{d}U=\sin(x+y)(\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y).$

131. Leidke järgmised joonintegraalid.

a) $\displaystyle\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y;$

b) $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(1,2)} 2xy^{-3}\,\mathrm{d}x-(3x^2-y^2)y^{-4}\,\mathrm{d}y;$

c) $\displaystyle\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y;$

d) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y.$

132. Näidake, et iga diferentseeruva funktsiooni f korral võrduvad järgmised joonintegraalid nulliga, kui L on kontuur.

a) $\displaystyle\int_L f(x)\,\mathrm{d}x+\operatorname{th}y\,\mathrm{d}y;$

b) $\displaystyle\int_L f(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y);$

c) $\displaystyle\int_L x^{-2}f\left(\frac{y}{x}\right)(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x).$

133. Leidke lihtne kinnine joon L, mille korral joonintegraal $\displaystyle\int_L (y^3-y)\,\mathrm{d}x-2x^3\,\mathrm{d}y$ saavutab maksimaalse väärtuse.

Näpunäide: Greeni valem.

20. Astmerea koonduvuspiirkond, omadused (astmerea summa pidevus, astmerea liikmeti integreerimine ja diferentseerimine). Tähtsamate elementaarfunktsioonide astmeread, nende rakendusi.

Olgu (a_n) arvjada.

Kirjutist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ehk $\sum\limits_{n} a_n$ ehk $\sum a_n$ nimetatakse *arvreaks* ehk *reaks.*

Arvusid $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ nimetatakse rea $\sum\limits_{n} a_n$ *osasummadeks.*

Rea $\sum\limits_{n} a_n$ *summaks* nimetatakse piirväärtust $\lim\limits_{n} S_n$.

Rida $\sum\limits_{n} a_n$ on *koonduv* $\overset{\text{def}}{\iff}$ jada (S_n) on koonduv.

Kui rida ei ole koonduv, siis nimetatakse teda *hajuvaks.*

Olgu (a_n) arvjada ning $a \in \mathbb{R}$. Kirjutist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ nimetatakse *astmereaks.* Arvusid a_n nimetatakse selle astmerea *kordajateks.*

Astmerida on funktsioonide $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $f_n(x) = a_n \cdot (x-a)^n$, rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$. Iga konkreetse $x \in \mathbb{R}$ fikseerimisel muutub astmerida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ arvreaks.

Astmerea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ *koonduvuspiirkond* $X \overset{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}\colon \text{arvrida } \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n \text{ on koonduv} \right\}$.

Astmerea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ *koonduvusraadius* $R \overset{\text{def}}{=} 1 : \lim\limits_{n} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 : \lim\limits_{n} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Teoreem (Cauchy–Hadamard)**.** $(a-R, a+R) \subset A \subset X \subset [a-R, a+R]$.

Teoreem (astmerea liikmeti diferentseerimine)**.** Olgu astmerea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ koonduvusraadius $R > 0$.

$$\forall x \in (a-R, a+R)\ \ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in (a-R, a+R)\ \ S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cdot (x-a)^{n-1}.$$

Teoreem (astmerea liikmeti integreerimine)**.** Olgu astmerea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ koonduvusraadius $R > 0$.

$$\forall x \in (a-R, a+R)\ \ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in (a-R, a+R)\ \ \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Teoreem (Abeli lemma)**.** Olgu astmerea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ koonduvusraadius $R > 0$.

Olgu $\forall x \in (a-R, a+R)\ \ S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$.

Rida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ on koonduv $\quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n = \lim\limits_{x \to (a-R)+} S(x)$.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X^\circ$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Astmerida $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ on f Taylori rida punktis $a \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \ a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Lause. Olgu $R > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in (a-R, a+R)\ \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ on f Taylori rida punktis a.

Maclaurini rida $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Taylori rida punktis 0.

Mõned Maclaurini read:

- $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$,
- $\forall x \in (-1,1)\ \ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$,
- $\forall x \in (-1,1]\ \ \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$,
- $\forall x \in (-1,1)\ \ (1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n$,
- $\forall x \in [-1,1]\ \ \arctan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Lause. Olgu $a \in (c,d)$. Olgu f-nil f kuitahes kõrget järku tuletised vahemikus (a,b).

$\exists C, q > 0 : \forall x \in (c,d)\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant Cq^n \quad\Longrightarrow\quad \forall x \in (c,d)\ \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Teoreem (Leibnizi tunnus koos jääkliikme hinnanguga)**.** Olgu (a_n) arvjada.

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0, \\ \lim\limits_n a_n = 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} \text{rida } \sum\limits_n (-1)^n a_n \text{ on koonduv}, \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leqslant a_n. \end{array}\right.$$

134. Leidke järgmiste astmeridade koonduvusraadius R ja koonduvuspiirkond X.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(x-3)^n$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-2)^n$.

135. Leidke järgmiste astmeridade summad $S(x)$.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$; d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$; g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)x^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$; e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$; h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)x^n$; f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$;

136. Leidke järgmiste funktsioonide Maclaurini rida kuni astmeni x^4 kaasa arvatud.

a) $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$; c) $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$; e) $f(x) = \arctan^2 x$;

b) $f(x) = \tan x$; d) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$; f) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

137. Arendage järgmised funktsioonid Maclaurini reaks ja määrake nende ridade koonduvusraadiused R.

a) $f(x) = \ln(1+x)$; c) $f(x) = \arctan x$; e) $f(x) = \sin x$;
b) $f(x) = \arcsin x$; d) $f(x) = \mathrm{e}^x$; f) $f(x) = \cos x$.

138. Arendage järgmised funktsioonid Taylori reaks antud punkti a ümbruses.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$; c) $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$, $a = 0$;

b) $f(x) = \ln x$, $a = 1$; d) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, $a = 2$.

139. Arendage järgmised funktsioonid Taylori reaks antud punktis a ja määrake nende ridade koonduvusraadiused R.

a) $f(x) = \cos(x-3)$, $a = 3$; c) $f(x) = \ln(2-x)$, $a = 1$;
b) $f(x) = \sin x$, $a = 1$; d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x+2}$, $a = 1$.

21. Astmerea koonduvuspiirkond, omadused (astmerea summa pidevus, astmerea liikmeti integreerimine ja diferentseerimine). Tähtsamate elementaarfunktsioonide astmeread, nende rakendusi.

140. Arendage järgmised funktsioonid Maclaurini reaks ja määrake nende ridade koonduvusraadiused R.

a) $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$;
b) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$;
c) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$;
d) $f(x)=\cos 2x$;
e) $f(x)=\sin^2 x$;
f) $f(x)=\cos^2 x$;
g) $f(x)=a^x$;
h) $f(x)=(x-\tan x)\cos x$;
i) $f(x)=\operatorname{sh} x$;
j) $f(x)=\operatorname{ch} x$;
k) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$;
l) $f(x)=\dfrac{x^9}{1-x}$;
m) $f(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$;
n) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$;
o) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$;
p) $f(x)=\dfrac{5-2x}{6-5x+x^2}$;
q) $f(x)=x\ln(1+x)$;
r) $f(x)=\ln(8+x)$;
s) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$;
t) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$;
u) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & \text{kui } x\neq 0,\\ 1, & \text{kui } x=0;\end{cases}$
v) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, & \text{kui } x\neq 0,\\ 1, & \text{kui } x=0;\end{cases}$
w) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+2\arctan x$;
x) $f(x)=\sin(1-x^3)$;
y) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$;
z) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

141. Leidke järgmiste astmeridade summad $S(x)$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$;
b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$;
c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)x^n$;
d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$;
e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$;
f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$.

142. Arvutage ligikaudu järgmised integraalid märgitud täpsusega a.

a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad a=10^{-3}$;
b) $\displaystyle\int_0^{\frac14} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\quad a=10^{-5}$;
c) $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{e}^{\frac1x}\,\mathrm{d}x,\quad a=10^{-3}$;
d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\quad a=10^{-3}$;
e) $\displaystyle\int_0^{\frac14} \ln(1+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x,\quad a=10^{-3}$.

143*. Arendage funktsioon

$$f(x)=\ln|x|-\int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Maclaurini reaks ja määrake rea koonduvusraadius R.

144*. Leidke funktsiooni

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$$

Maclaurini rida.

145*. Arvutage ligikaudu järgmine integraal

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\sin x}\, \mathrm{d}x$$

täpsusega 10^{-4}.

22. Fourier' read.

Olgu $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ arvjadad.

Funktsionaalrida $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ nimetatakse *trigonomeetriliseks reaks.*

Olgu $[-\pi,\pi] \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Olgu f lõigus $[-\pi,\pi]$ integreeruv.

Trigonomeetriline rida $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ on f-ni f *Fourier' rida* $\overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, \mathrm{d}x, \\ \forall n \in \mathbb{N} \;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, \mathrm{d}x. \end{cases}$

Lause.
$\forall x \in (0,\pi) \;\; f(-x) = f(x) \implies$ f-ni f Fourier' rea kordajad $b_n = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$,
$\forall x \in (0,\pi) \;\; f(-x) = -f(x) \implies$ f-ni f Fourier' rea kordajad $a_n = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

f on lõigus $[a,b]$ *tükiti pidev* $\overset{\text{def}}{\iff}$ leidub lõigu $[a,b]$ alajaotus $(x_0,\dots,x_n)$ nii, et $\forall k \in \{1,\dots,n\} \begin{cases} f \text{ on pidev vahemikus } (x_{k-1},x_k), \\ \lim\limits_{x\to x_{k-1}+} f(x) \in \mathbb{R}, \\ \lim\limits_{x \to x_k-} f(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Olgu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Olgu $p > 0$.

f on p-perioodiline $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x+p) = f(x)$.

Teoreem (Dirichlet)**.** Olgu $x \in \mathbb{R}$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ on } 2\pi\text{-perioodiline,} \\ f \text{ on lõigus } [-\pi,\pi] \text{ tükiti pidev,} \\ f'_+(x) := \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(x+h)-f_+(x)}{h} \in \mathbb{R}, \\ f'_-(x) := \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(x+h)-f_-(x)}{h} \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \text{ on } f \text{ Fourier' rida} \end{array}\right\} \implies \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{f_+(x)+f_-(x)}{2}$$

146. Arendage järgmised funktsioonid Fourier' reaks lõigus $[-\pi,\pi]$ ja uurige rea koonduvust.

a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -\pi \leqslant x < 0, \\ 3, & \text{kui } 0 < x < \pi; \end{cases}$

c) $f(x) = x$, kui $-\pi < x \leqslant \pi$;

d) $f(x) = |x|$, kui $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;

e) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, kui $-\pi < x < \pi$;

f) $f(x) = \mathrm{e}^x$, kui $-\pi < x < \pi$;

g) $f(x) = \sin \pi x$, kui $-\pi < x < \pi$;

h) $f(x) = x^2$, kui $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

147. Arendage järgmised funktsioonid Fourier' reaks märgitud piirkonnas.

a) $f(x) = x,\quad$ kui $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$;

b) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2},\quad$ kui $0 < x < 2\pi$;

c) $f(x) = |x|,\quad$ kui $-T < x < T$;

d) $f(x) = x^2,\quad$ kui $0 \leqslant x < 2\pi$.

148. Arendage järgmised funktsioonid koosinusreaks lõigus $[0,\pi]$ ja uurige nende koonduvust.

a) $f(x) = 1$;

b) $f(x) = \sin x$;

c) $f(x) = x$;

d) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

149. Arendage järgmised funktsioonid siinusreaks lõigus $[0,\pi]$ ja uurige nende koonduvust.

a) $f(x) = 1$;

b) $f(x) = \cos x$;

c) $f(x) = x(\pi - x)$;

d) $f(x) = -x\cos x$.

150*. Olgu funktsiooni $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ $(m-1)$-järku tuletis pidev ning m-järku tuletis tükiti sile. Olgu $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ funktsiooni f Fourier' rida. Tõestage, et leidub konstant $C > 0$ nii, et iga n korral $|a_n| \leqslant \dfrac{C}{n^{m+1}}$ ja $|b_n| \leqslant \dfrac{C}{n^{m+1}}$. (Landau sümbolite keeles: tõestage, et $a_n,\ b_n \in O\left(\dfrac{1}{n^{m+1}}\right)$ protsessis $n \to \infty$.)

23. Fourier' read. Euleri integraalid.

Lause. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$.

Päratu integraal $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ koondub $\iff$ $a, b > 0$.

Päratu integraal $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ koondub $\iff$ $a > 0$.

Olgu $a, b > 0$.

$\mathbf{B}(a,b) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ (*beetafunktsioon*),

$\Gamma(a) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ (*gammafunktsioon*).

Lause. $\mathbf{B}(a,b) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}\,\mathrm{d}u$, $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^1 (-\ln u)^{a-1}\,\mathrm{d}u$.

Lause. $\mathbf{B}(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Lause. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Lause. Olgu $a \in (0,1)$. Siis $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}$.

151. Leidke järgmiste ridade summad.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

152. Lähtudes funktsiooni $f(x)=x$, $x\in(-\pi,\pi)$ Fourier' reaks arendusest, s.o. võrdusest

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad (-\pi<x<\pi)$$

leidke selle liikmeti integreerimise teel valemi $\int\limits_0^x f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a_0}{2}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx-\frac{b_n}{n}\cos nx\right)$ järgi funktsioonide $f(x)=x^2$ ja $f(x)=x^3$ Fourier' reaks arendused vahemikus $(-\pi,\pi)$.

153. Arvutage järgmised integraalid, kasutades Euleri intergraale.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$;

b) $\int\limits_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^9 x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$;

f) $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$;

h) $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}}$.

154. Avaldage järgmised integraalid Euleri intergraalide kaudu.

a) $\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x, \quad (p>-1)$;

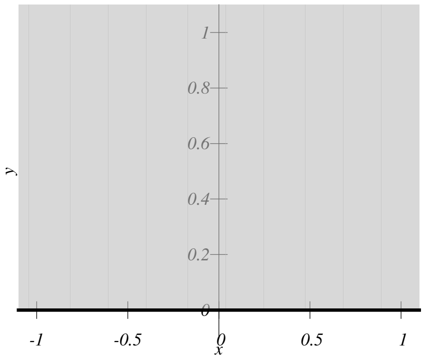
b) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(1+x)^{n+1}}, \quad (n>m>1)$;

c) $\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^m)^{\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x, \quad (m>0)$;

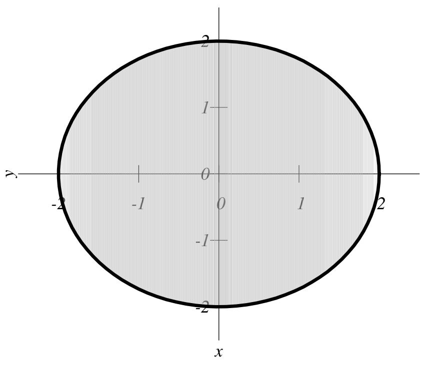
d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x, \quad (m,n>-1)$.

Vastused ja lahendused

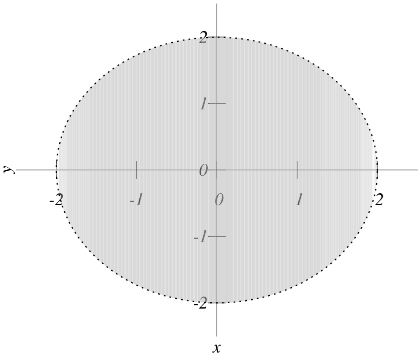
1. a) $D=\{(x,y)\colon y \geqslant 0\}$, $\partial D=\{(x,y)\colon y=0\}$, D ei ole lahtine ($(0,0)\in D\backslash D^{\circ}$), D on kinnine;



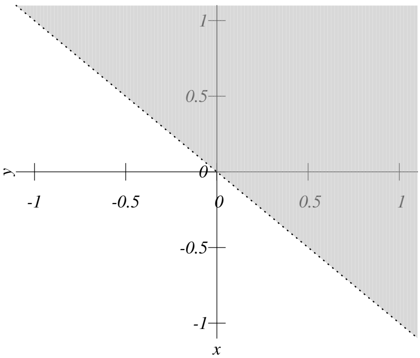
b) $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 4\}$, $\partial D=\{(x,y)\colon x^2+y^2=4\}$, D ei ole lahtine ($(2,0)\in D\backslash D^{\circ}$), D on kinnine;



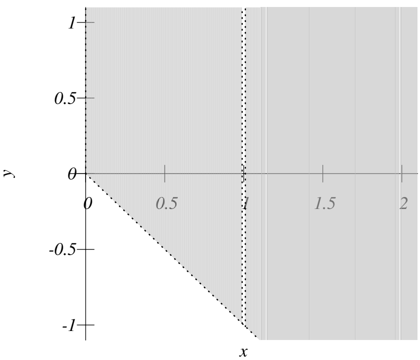
c) $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2<4\}$, $\partial D=\{(x,y)\colon x^2+y^2=4\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(2,0)\in \partial D\backslash D$);



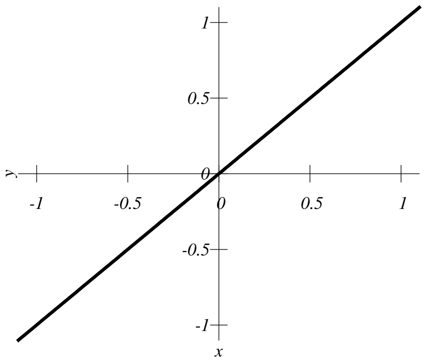
d) $D=\{(x,y)\colon x>-y\}$, $\partial D=\{(x,-x)\colon x\in\mathbb{R}\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0)\in\partial D\setminus D$);



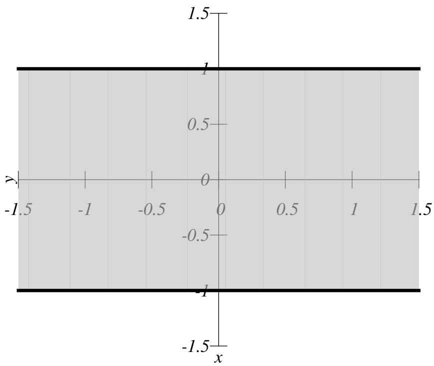
e) $D=\{(x,y)\colon x>-y,\, x>0,\, x\neq 1\}$, $\partial D=\{(0,y)\colon y\geqslant 0\}\cup\{(1,y)\colon y\geqslant -1\}\cup\{(x,-x)\colon x\geqslant 0\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0)\in D\setminus D^{\circ}$);



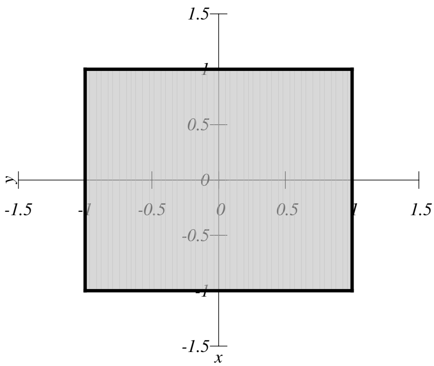
f) $D=\partial D=\{(x,x)\colon x\in\mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(0,0)\in D\setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



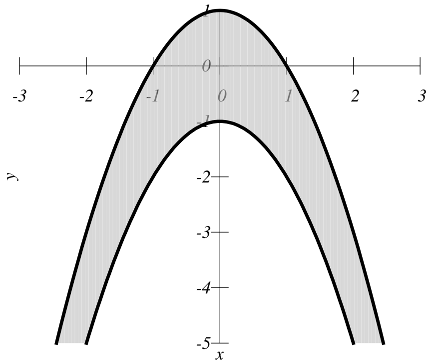
g) $D=\mathbb{R}\times[-1,1]$, $\partial D=\{(x,-1)\colon\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,1)\colon\ x\in\mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(0,1)\in D\setminus D^\circ$), D on kinnine;



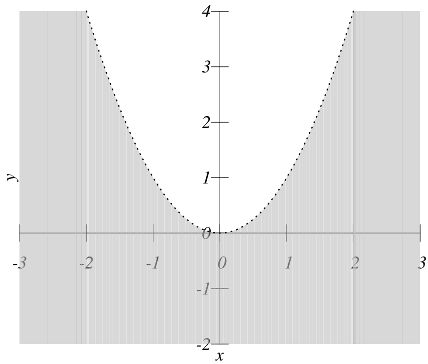
h) $D=[-1,1]^2$, $\partial D=\{(x,-1)\colon\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,1)\colon\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{(-1,y)\colon\ y\in\mathbb{R}\}\cup\{(1,y)\colon\ y\in\mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(1,0)\in D\setminus D^\circ$), D on kinnine;



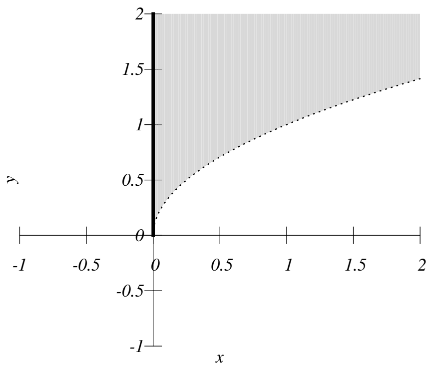
i) $D=\{(x,y)\colon\ -x^2-1\leqslant y\leqslant -x^2+1\}$, $\partial D=\{(x,-x^2-1)\colon\ x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,-x^2+1)\colon\ x\in\mathbb{R}\}$, D ei ole lahtine ($(0,1)\in D\setminus D^\circ$), D on kinnine;



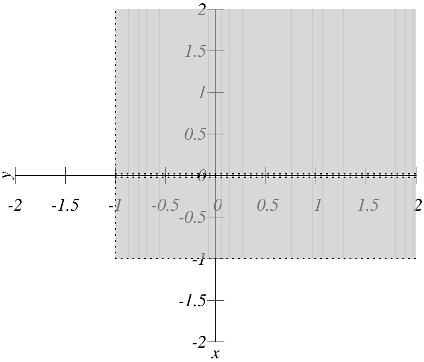
j) $D=\{(x,y)\colon x^2>y\}$, $\partial D=\{(x,x^2)\colon x\in\mathbb{R}\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0)\in\partial D\backslash D$);



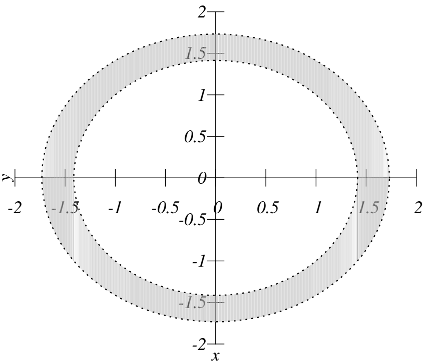
k) $D=\{(x,y)\colon y^2>x\geqslant 0\}$, $\partial D=\{(y^2,y)\colon y\geqslant 0\}\cup\{(0,y)\colon y\geqslant 0\}$, D ei ole lahtine ($(0,1)\in D\backslash D^{\circ}$), D ei ole kinnine ($(0,0)\in\partial D\backslash D$);



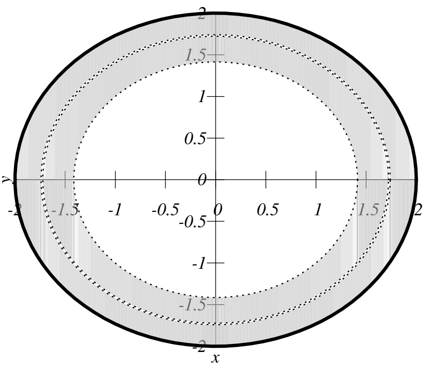
l) $D=(-1,\infty)\times((-1,\infty)\backslash\{0\})$, $\partial D=\{(-1,y)\colon y\geqslant -1\}\cup\{(x,-1)\colon x\geqslant -1\}\cup\{(x,0)\colon x\geqslant -1\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(0,0)\in\partial D\backslash D$);



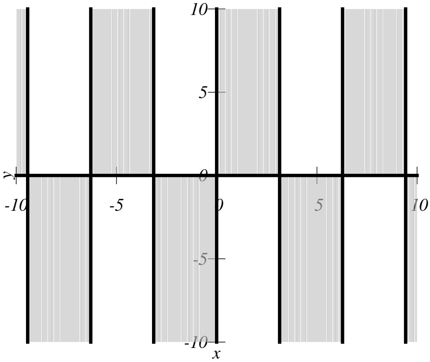
m) $D=\{(x,y)\colon 2<x^2+y^2<3\}$, $\partial D=\{(x,y)\colon x^2+y^2=2\}\cup\{(x,y)\colon x^2+y^2=3\}$, D on lahtine, D ei ole kinnine ($(1,1)\in\partial D\backslash D$);



n) $D=\{(x,y)\colon 2<x^2+y^2\leqslant 4, x^2+y^2\neq 3\}$, $D=\{(x,y)\colon x^2+y^2=2\}\cup\{(x,y)\colon x^2+y^2=3\}\cup\{(x,y)\colon x^2+y^2=4\}$, D ei ole lahtine ($(2,0)\in D\backslash D^\circ$), D ei ole kinnine ($(1,1)\in\partial D\backslash D$);

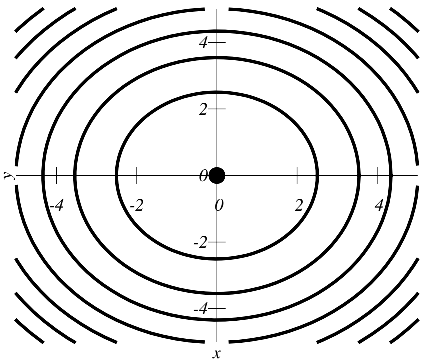


o) $D=(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[2n\pi,(2n+1)\pi]\times[0,\infty))\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[(2n+1)\pi,(2n+2)\pi]\times(-\infty,0])$, $\partial D=(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\{n\pi\}\times\mathbb{R})\cup\mathbb{R}\times\{0\}$, D ei ole lahtine ($(0,0)\in D\backslash D^\circ$), D on kinnine;

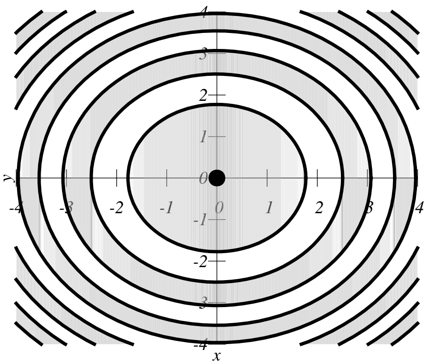


p) $D=\mathbb{R}^2$, $\partial D=\varnothing$, D on lahtine, D on kinnine;

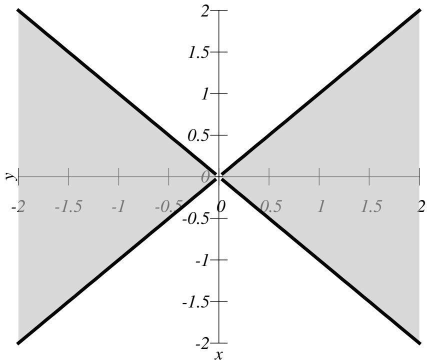
q) $D=\partial D=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x,y)\colon x^2+y^2=2n\pi\}$, D ei ole lahtine ($(0,0)\in D\setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



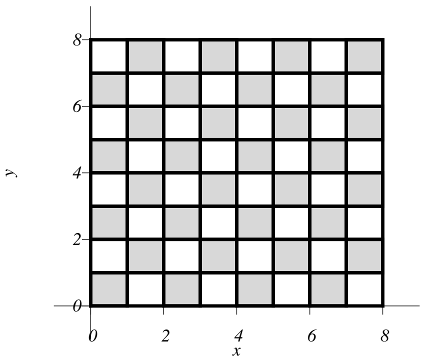
r) $D=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x,y)\colon 2n\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2n+1)\pi\}$, $\partial D=\bigcup_{n=0}^{\infty}\{(x,y)\colon x^2+y^2=n\pi\}$, D ei ole lahtine ($(0,0)\in D\setminus D^{\circ}$), D on kinnine;



s) $D=\{(x,y)\colon |y|\leqslant|x|,\ x\neq 0\}$, $\partial D=\{(x,y)\colon |y|=|x|\}$, D ei ole lahtine ($(1,1)\in D\setminus D^{\circ}$), D ei ole kinnine ($(0,0)\in\partial D\setminus D$);



t) $D = [0,8]^2 \cap \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}}([2m,2m+1]\times[2n,2n+1]\cup[2m+1,2m+2]\times[2n+1,2n+2])$, $\partial D = [0,8]^2 \cap (\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\cup\mathbb{R}\times\mathbb{Z})$, D ei ole lahtine ($(0,0)\in D\setminus D^\circ$), D on kinnine.



2. a) Samad; b) erinevad; c) erinevad; d) samad; e) erinevad; f) samad; g) erinevad, sest g ei ole punktis $(0,0)$ määratud.

3. a) $D = \{(x,y)\colon x>0, y>0\}$; b) $D = \{(x,y)\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$; c) $D = \{(x,y)\colon xy = x+y\}$.

4. a) $\frac{5}{4}$; b) -1; c) 0.

6. $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{x^2-y^2}{2xy}$, $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{2xy}{x^2-y^2}$.

7. $1+y$, $x+\frac{1}{y}$.

8. a) $E = \{(x,y,z)\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$; b) $E = \{(x,y,z)\colon x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$; c) $E = \{(x,y,z)\colon xy>0, z>0\}$; d) $E = \{(x,y,z)\colon x, yz\in[-1,1]\}$; e) $E = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2\leqslant 4\}$; f) E on kogu xyz-ruum, välja arvatud punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud.

9. a) $\frac{3}{4}$; b) 1,25; c) 0.

10. a) $\{(x,y,z,w)\colon xy\geqslant 0, z\in\mathbb{R}, w = z+\sqrt{xy}\}$; b) $\{(x,y,z,w)\colon x\geqslant 0, y\neq 0, z>-1, w=\sqrt{x}y^{-2}+\ln(z+1)\}$; c) $\{(x,y,z,w)\colon x^2+y^2\neq 0, z\in\mathbb{R}, w=\frac{2+z}{x^2+y^2}\}$; d) $\{(x,y,z,w)\colon x^2+y^2\neq 0, z\neq 0, w=\frac{x^2+y^2}{z\ln(x^2+y^2+1)}\}$.

11. a) $\ln x+\frac{y}{z}-z$; b) $\frac{x(x-y)}{2}+z^2$.

12. a) $f(x,y)=(1-x)^2-y-\sqrt{2}$, $g(x,y,z)=x-y+\sqrt{2z}-\sqrt{2}$; b) $f(x,y)=2x^2+\ln y$, $g(x,y,z)=2x+y+\sqrt{yz}$.
14. a) 4; b) 16; c) 1; d) 0; e) 0; f) 2; g) $\frac{1}{8}$; h) 0; i) 0; j) $-\infty$; k) 0, minna üle polaarkoordinaatidele; l) 0, minna üle polaarkoordinaatidele; m) 0, minna üle polaarkoordinaatidele või muutujate vahetusega $x^2=u$, $y^2=v$ taandada ülesandele k); n) 0; o) 1, võtta $u=xy$ ja arvestada, et $u\to 0$ korral $\tan u\sim u$; p) $\frac{1}{2}$; q) 0, minnes üle polaarkoordinaatidele, näeme, et $\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}$; r) e, võtta $u=x^2y^2$; s) e^3; t) 1; u) 1, arvestada, et $\lim u=\lim \mathrm{e}^{\ln u}=\mathrm{e}^{\lim\ln u}$.
16. a) $A=0,\ B=1$; b) $A=1,\ B=1$; c) $A=1,\ B=0$.
17. a) 0; b) 0.
18. a) Pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas; b) pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.
19. a) Pidev, pidev x ja y järgi; b) ei ole pidev, pidev x ja y järgi; c) ei ole pidev, pidev x järgi, ei ole pidev y järgi; d) pidev, ei ole pidev x järgi, pidev y järgi; e) pidev, ei ole pidev x ega y järgi.
21. a) $(0,0)$; b) katkeb sirgel $x+y=0$; c) katkeb sirgel $y+x=0$; d) katkeb koordinaattelgedel; e) katkeb koordinaattelgedel; f) katkeb punktis $(0,0)$ ning ringjoontel $x^2+y^2=1$ ja $x^2+y^2=2$.
22. a) Lisada $f(0,y)=y$; b) lisada $f(x,y)=0$, kui $x+y=0$; c) lisada $f(x,y)=0$, kui $x+y=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; d) lisada $f(x,y)=\frac{1}{64}$, kui $x+2y=8$.
23. a) $f_x=3,\ f_y=-2y$; b) $f_x=2x,\ f_y=2y$; c) $f_x=2\mathrm{e}^{2x+3y},\ f_y=3\mathrm{e}^{2x+3y}$; d) $f_x=3x^2y+2,\ f_y=x^3$; e) $f_x=3x^2yz^2,\ f_y=x^3z^2+7,\ f_z=2x^3yz$; f) $f_x=\frac{1}{x},\ f_y=\frac{1}{y},\ f_z=\frac{2}{z}$; g) $f_x=5(x+2y)^4,\ f_y=10(x+2y)^4$; h) $f_x=\frac{2}{y},\ f_y=-\frac{2x}{y^2}$; i) $f_x=\frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}},\ f_y=\frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}$; j) $f_x=-4\sin(4x-y),\ f_y=\sin(4x-y)$; k) $f_x=\sin y,\ f_y=x\cos y$; l) $f_x=\frac{1}{y\cos^2\frac{x}{y}},\ f_y=-\frac{x}{y^2\cos^2\frac{x}{y}}$; m) $f_x=-\frac{y}{1+x^2y^2},\ f_y=-\frac{x}{1+x^2y^2}$; n) $f_x=yx^{y-1},\ f_y=x^y\ln x$; o) $f_x=y(x+y)^{y-1},\ f_y=f[\ln(x+y)+\frac{y}{x+y}]$; p) $f_x=a^{xy}[y\ln a+\frac{xy^2}{a}],\ f_y=a^{xy}[x\ln a+\frac{yx^2}{a}]$, kus $a=1+xy$. Osatuletise f_y saame osatuletisest f_x vahetades x ja y kohtadega. q) $f_x=\sin y x^{\sin y-1},\ f_y=f\ln x\cos y$; r) $f_x=2x,\ f_y=zy^{z-1},\ f_z=y^z\ln y$.
24. a) Kui $x\neq 0$, siis $f_x=\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x},\ f_y=\cos\frac{y}{x}$; kui $x=0$, siis $f_y(0,y)=0,\ f_x(0,0)=0$. Kui $y\neq 0$, siis osatuletis $f_x(0,y)$ ei eksisteeri. b) Kui $x\neq 0$, siis $f_x=2x\arctan\frac{y}{x}-\frac{yx^2}{a},\ f_y=\frac{x^3}{a}$, kus $a=x^2+y^2$; kui $x=0$, siis $f_x(0,y)=0,\ f_y(0,y)=0$. c) Kui $a=x^2+y^2\neq 0$, siis $f_x=2xy^2\ln a+\frac{2x^3y^2}{a}$. Et funktsioonis x ja y paiknevad sümmeetriliselt, siis vahetades x ja y kohtadega, saame arvutamata $f_y=2yx^2\ln a+\frac{2y^3x^2}{a}$. Kui $a=0$, s.o. punktis $(0,0)$, on $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$. d) Kui $|x|+|y|\neq 0$, siis $f_x=\frac{2xy^3}{a^2},\ f_y=\frac{x^2(x^2-y^2)}{a^2}$, kus $a=x^2+y^2$; $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$.
26. a) Kui $x\neq 0$ ja $y\neq 0$, siis $f_x=2x\arctan\frac{y}{x}-y,\ f_y=x-2y\arctan\frac{x}{y}$; kui $x=0$ ja $y\neq 0$, siis $f_x(0,y)=-y,\ f_y(0,y)=0$; kui $x\neq 0$ ja $y=0$, siis $f_y(x,0)=x,\ f_x(x,0)=0$; kui $x=y=0$, siis $f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=0$. b) Kui $b=xy\neq 0$, siis $f_x=xy^2[3x\sin\frac{1}{b}-\cos\frac{1}{b}],\ f_y=yx^2[3y\sin\frac{1}{b}-\cos\frac{1}{b}]$; kui $x=0$, siis $f_x(0,y)=0,\ f_y(0,y)=0$; kui $y=0$, siis $f_x(x,0)=0,\ f_y(x,0)=0$. c) Kui $b=xy\neq 0$, siis $f_x=2xy^2\sin\frac{1}{b}-y\cos\frac{1}{b},\ f_y=2yx^2\sin\frac{1}{b}-x\cos\frac{1}{b}$; kui $x=0$, siis $f_x(0,y)=0,\ f_y(0,y)=0$; kui $y=0$, siis $f_x(x,0)=0,\ f_y(x,0)=0$.
27. a) $f_{xx}=2,\ f_{yy}=f_{xy}=0$; b) $f_{xx}=-f_{yy}=6xy,\ f_{xy}=3(x^2-y^2)$; c) $f_{xx}=0,\ f_{yy}=\frac{2x}{y^3},\ f_{xy}=1-\frac{1}{y^2}$; d) $f_{xx}=2\cos(x+y)-x\sin(x+y),\ f_{yy}=-x\sin(x+y),\ f_{xy}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$; e) $f_{xx}=-4y(x+y)^{-3},\ f_{yy}=4x(x+y)^{-3},\ f_{xy}=2(x-y)(x+y)^{-3}$; f) $f_{xx}=y(y-1)x^{y-2},\ f_{yy}=$

$x^y\ln^2 x$, $f_{xy}=x^{y-1}(1+y\ln x)\quad (x>0)$; g) $f_{xx}=-\frac{1}{(x+y^2)^2}$, $f_{yy}=\frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$, $f_{xy}=-\frac{2y}{(x+y^2)^2}$; h) $f_{xx}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f_{yy}=-\frac{2y}{(1+y^2)^2}$, $f_{xy}=0\quad (xy\neq 1)$; i) $f_{xx}=f_{yy}=f_{zz}=-s$, $f_{xy}=z-s$, $f_{xz}=y-s$, $f_{yz}=x-s$, kus $s=(x+y+z)^{-2}$; j) $f_{xx}=-y^2z^2\sin v$, $f_{yy}=-x^2z^2\sin v$, $f_{zz}=-x^2y^2\sin v$, $f_{xy}=z\cos v-xyz^2\sin v$, $f_{xz}=y\cos v-xy^2z\sin v$, $f_{yz}=x\cos v-x^2yz\sin v$, kus $v=1+xyz$.
31. a) $f_{xy}=f_{yx}=\cos x$; b) $f_{xy}=f_{yx}=\frac{2y}{x}$; c) $f_{xy}=\mathrm{e}^{x+y}$.
32. a) $f_{xxy}=0$; b) $f_{xyz}=f_{zxy}=\mathrm{e}^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$; c) $f_{xxxyyy}=-6(\cos x+\cos y)$.
33. a) $\mathrm{d}f=\mathrm{d}x+3\,\mathrm{d}y$; b) $\mathrm{d}f=4(x-y)\,\mathrm{d}x-4x\,\mathrm{d}y$; c) $\mathrm{d}f=y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$; d) $\mathrm{d}f=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{y^2}$; e) $\mathrm{d}f=\mathrm{e}^{1+xy}(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$; f) $\mathrm{d}f=\sin(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$; g) $\mathrm{d}f=y^x\ln y\,\mathrm{d}x+xy^{x-1}\,\mathrm{d}y$; h) $\mathrm{d}f=\frac{\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y+3\,\mathrm{d}z}{\cos^2(x-2y+3z)}$; i) $\mathrm{d}f=-\sin(x^2yz)(2xyz\,\mathrm{d}x+x^2z\,\mathrm{d}y+x^2y\,\mathrm{d}z)$; j) $\mathrm{d}f=2xz(2yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+2xy\,\mathrm{d}z)f$.
35. a) $\mathrm{d}^2f=6xy^2\,\mathrm{d}x^2+12x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2x^3\,\mathrm{d}y^2$; b) $\mathrm{d}^2f=2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$; c) $\mathrm{d}^2f=2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$; d) $\mathrm{d}^2f=2\sin 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2x\cos 2y\,\mathrm{d}y^2$; e) $\mathrm{d}^3f=6(\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}y^3)$; f) $\mathrm{d}^3f=24x\,\mathrm{d}x^3+6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2$; g) $\mathrm{d}^2f=2y\,\mathrm{d}z^2+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; h) $\mathrm{d}^2f=-xy\sin z\,\mathrm{d}x^2+2\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2y\cos z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+2x\cos z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; i) $\mathrm{d}^3f=6\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; j) $\mathrm{d}^3f=6yz^2\,\mathrm{d}x^3+18xz^2\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y+36xyz\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}z+18x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z^2+6x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z^2+36x^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
38. a) $z'_t=\mathrm{e}^{\sin t-\cos t}(\cos t+\sin t)$; b) $z'_t=\frac{5t^4}{t^5-1}$; c) $u'_t=2t\cos 2t+\sin 2t$; d) $z'_t=2t+4t^3+1$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z=t^2+x^2+y^2$, $t=t$, $x=t^2$, $y=\sqrt{t}$ ja kasutada valemit $z'_t=z_tt'_t+z_xx'_t+z_yy'_t$; e) $z'_t=\cos^{-2}(t+t^4-t^5)(1+4t^3-5t^4)$; f) $z'_x=\frac{\mathrm{e}^x(x+1)}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}$, kirjutada liitfunktsioon kujul $z=\arctan(xy)$, $x=x$, $y=\mathrm{e}^x$ ja kasutada valemit $z'_x=z_xx'_x+z_yy'_x$; g) $u'_x=2\mathrm{e}^x\sin x$; h) $u'_t=u_xx'_t+u_yy'_t+u_zz'_t=2u_x+\frac{u_y}{t}+u_z$; i) $z'_t=(f_xx^2\ln y+f2x\ln y)(-2t)+(f_yx^2\ln y+\frac{fx^2}{y})\mathrm{e}^{\sin t}\cos t$, kus $x=1-t^2$, $y=\mathrm{e}^{\sin t}$.
39. a) $z_x=z_uu_x+z_vv_x=3x^2\cos^2 y\sin y$, $z_y=z_uu_y+z_vv_y=x^3\cos y(1-3\sin^2 y)$; b) $z_x=0$, $z_y=0$; c) $z_x=y^x(2x+x^2\ln y)$, $z_y=x^3y^{x-1}$; d) $z_x=0$, $z_y=-1$; e) $w_x=2xvu^{v-1}$, $w_y=zu^v\ln u$, $w_z=2zvu^{v-1}+yu^v\ln u$, kus $u=x\sin y$, $v=x\cos y$; f) $w_x=\mathrm{e}^{uv}(y-\frac{v}{xz}+uy)$, $w_y=\mathrm{e}^{uv}(x-\frac{v}{yz}+ux)$, $w_z=-\frac{e^{uv}v}{z^2}$, kus $u=\frac{1}{xyz}$, $v=\ln(xy)$.
41. a) $x+y=1$, $(1,1)$; b) $x+y=0$, $(1,1)$; c) $x^2+y^2=5$, $(2,4)$; d) $x^2+y^2=1$, $(0,-2)$; e) $2y=x^2$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$; f) $y=0$, $(0,2)$; g) $x^2+y^2-z^2=1$, $(2,2,-2)$; h) $4z\arctan\frac{y}{x}=\pi$, $(-2,2,\pi)$; i) $\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}=64$, $\operatorname{grad}u=(9,12,28)\frac{64}{975}$.
42. $\operatorname{grad}u=(x,y,z)$, $|\operatorname{grad}u|=2\sqrt{2}z$.
43. Punktides, kus $r=1$.
45. $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4},0\right)$, $\left(\frac{7}{3},-\frac{3}{4},0\right)$.
46. Punktid, mis asuvad silindril $x^2+y^2=\frac{2}{3}$.
48. a) -2; b) $-\frac{1}{9}$.
49. a) 0; b) -1.
50. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$, 1.
51. $-\frac{4}{3}$.
52. $(-3,1)$, $(1,-1)$.
53. z-telje negatiivses suunas.
54. Vektori $(2,0,-2)$ suunas.
57. a) Jah, jah. $y'=-\frac{x^2-y}{y^2-x}$. b) Jah, jah. $y'=-\frac{(x+y+1)\mathrm{e}^y+1}{x(x+y+1)\mathrm{e}^y+1}$. c) Ei, ei. d) Jah, ei.
58. a) $y'=-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos y}$; b) $y'=\frac{x+y-1}{x+y+1}$; c) $y'=-\frac{y}{y+x}$; d) $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

59. a) Jah, jah. $z_x = -1$, $z_y = -\frac{y}{x+z}$. b) Ei, sest $F(\mathbf{P}_0) \neq 0$. c) Jah, ei.
60. a) $z_x = -\frac{1}{2+\cos z}$, $z_y = -\frac{1}{2+\cos z}$; b) $z_x = -\frac{z}{x}$, $z_y = -\frac{z}{y}$; c) $z_x = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $z_y = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$; d) $z_x = \frac{y-z^2}{2xz+3z^2}$, $z_y = \frac{x}{2xz+3z^2}$. Osatuletiste leidmiseks kirjutada võrrand kujul $xz^2 + z^3 = xy$.
65. a) $2x+2y-z-1=0$, $\vec{n}=(2,2,-1)$; b) $2x+4y-z-5=0$, $\vec{n}=(2,4,-1)$; c) puutujatasandit märgitud punktis $\mathbf{Q}_0$ ei ole olemas, sest funktsioon ei ole diferentseeruv selles punktis; d) $2x-2y+4z-\pi=0$, $\vec{n}=(1,-1,2)$; e) $z=0$, $\vec{n}=(0,0,1)$; f) ei eksisteeri.
66. a) $6x+3y+2z-18=0$, $\vec{n}=(6,3,2)$; b) $x+y+z-3=0$, $\vec{n}=(1,1,1)$; c) $x+2y-4=0$, $\vec{n}=(1,2,0)$; d) $5x+y+11z-18=0$, $\vec{n}=(5,1,11)$.
72. a) $\operatorname{locmax} f = f(-1,0) = 1$; b) $\operatorname{locmin} f = f(1,0) = -2$, kriitilises punktis $(-1,0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; c) kriitilises punktis $(0,1)$ ekstreemumit ei ole; d) $\operatorname{locmax} f = f(0,0) = 1$; e) $\operatorname{locmin} f = f(1,0) = -1$ f) $\operatorname{locmin} f = f(1,1) = -1$, kriitilises punktis $(0,0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; g) $\operatorname{locmin} f = f(0,0) = 2$; h) $\operatorname{locmin} f = f(1,2) = 3 - \ln 4$, punkt $(-1,2)$ (kus osatuletised on nullid) ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.
73. a) $\operatorname{locmax} f = f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\operatorname{locmin} f = f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$; b) Punktides $(1,1)$ ja $(-1,-1)$ $\operatorname{locmin} f = -2$. Punktis $(0,0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole, mida näitab funktsiooni väärtuste võrdlus sirgetel $y=x$ ja $y=-x$ punkti $(0,0)$ läheduses. c) $\operatorname{locmin} f = f(-1,-2,3) = -14$; d) $\operatorname{locmax} f = f(1,1,1) = 1$. Mitterange lokaalne ekstreemum on, kui $y=0$, $x \neq 0$, $x+2y+3z \neq 7$. e) Statsionaarses punktis $(1,-1)$ on $z = 2 \pm 4$, seega lokaalne maksimum on 6 ja lokaalne miinimum on -2.
75. a) $\max f = f(0,-1) = 2$, $\min f = f(0,\frac{1}{2}) = -0{,}25$; b) $\max f = f(-1,0) = f(1,0) = 3$, $\min f = f(0,1) = f(0,-1) = 1$; c) $\max f = f(1,0) = 0$, $\min f = f(0,1) = -3$; d) $\max f = f(-1,0) = f(0,-1) = 1$, $\min f = f(0,0) = 0$; e) $\max f = f(0,1) = f(0,-1) = \frac{3}{e}$, $\min f = f(0,0) = 0$.
76. Punktis $(0,0)$ on ainuke lokaalne maksimum $f(0,0)=0$, kuid näiteks punktis $(5,0)$ on $f(5,0)=25$. Seega punkt $(0,0)$ ei ole globaalse ekstreemumi punkt. Osatuletised on nullid ka punktis $(2,2)$, kuid see punkt ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda.
78. $10+10+10$.
79. $3\cdot3\cdot3\cdot3$.
80. Kuup.
81. $x = y = (2V)^{\frac{1}{3}}$, $z = \frac{(2V)^{\frac{1}{3}}}{2}$, kus x ja y on vanni põhja mõõtmed ja z on vanni kõrgus.
82. Kuup küljega $\frac{2R}{\sqrt{2}}$.
83. Võrdhaarne.
84. Võrdkülgne kolmnurk.
85. Ristküliku küljed on $\frac{2p}{3}$ ja $\frac{p}{3}$.
86. Kolmnurga küljed on $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ ja $\frac{p}{2}$.
87. Risttahuka külgservad on $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ ja $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.
88. Võrdkülgne kolmnurk.
89. Võrdkülgne kolmnurk.
92. a) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y}^2 f(x,y)\,dx$; b) $\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_{-\frac{x}{2}}^1 f(x,y)\,dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^1 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx$; c) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 f(x,y)\,dx$; d) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-a}^a f(x,y)\,dy = \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_{-b}^b f(x,y)\,dx$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ ja

$b=\sqrt{1-y^2}$; e) $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int\limits_{x^2}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{-c}^{c}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, kus $c=\sqrt{y}$; f) $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}x\int\limits_{x^3}^{x^2}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{y^{\frac{1}{2}}}^{y^{\frac{1}{3}}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

93. a) $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{y}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}x\int\limits_{1-x}^{a}f(x,y)\,\mathrm{d}y$, kus $a=\sqrt{1-x^2}$; d) $\int\limits_{0}^{2}\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{y}{2}}^{y}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{4}\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{y}{2}}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x$; e) $\int\limits_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int\limits_{-a}^{a}f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{3}\mathrm{d}y\int\limits_{-a}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, kus $a=\sqrt{y+1}$; f) $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int\limits_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$; g) $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{-a}^{a}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, kus $a=\arccos y$; h) $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}y\int\limits_{b}^{\pi-b}f(x,y)\,\mathrm{d}x$, kus $b=\arcsin y$.

94. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{10}$; c) π; d) 2; e) $\frac{3}{2}$, arvestada, et $\mathrm{e}^{x-y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-y}$; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{2}$.

96. a) $\frac{\pi^2}{32^2}$; b) $\frac{33}{140}$.

97. a) $\frac{4\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{2\pi}{3}$; d) $\pi(\cos\pi^2-\cos 4\pi^2)$; e) $\frac{\pi^2}{16}$.

99. a) $\frac{32}{9}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{32}{9}$; d) 24π; e) 7.

100. a) $\frac{3}{4}$; b) 2; c) $16-\frac{6}{\ln 2}$; d) $7{,}5-8\ln 2$; e) 5; f) πa^2; g) $\frac{\pi(b^2-a^2)}{4}$; h) $\frac{3\pi a^2}{2}$; i) πa^2; j) a^2, minna üle polaarkoordinaatidele; k) $2a^2$, minna üle polaarkoordinaatidele; l) $\frac{5\pi a^2}{8}$.

101. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{560}{3}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; e) $\frac{\pi}{2}$.

103. a) $\frac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 16; d) 22π; e) $\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}$; f) $\frac{16}{3}$; g) 3π; h) $4\pi(2\sqrt{6}-3)$; i) π.

104. a) 14; b) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$; c) $14\pi a[a-\sqrt{a^2-b^2}]$; d) $2\pi\sqrt{2}$; e) $\frac{16(\sqrt{8}-1)}{3}$; f) $2a^2(\pi-2)$; g) 4π, võtta integreerimise piirkond yz-tasandil.

105. a) $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int\limits_{1}^{3-x}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, kus $D=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\}$; $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $D(x)=\{(y,z)\colon -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 1\leqslant z\leqslant 3-x\}$; b) $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int\limits_{2}^{4}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, kus $D=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2\leqslant 1\}$; $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $D(x)=\{(y,z)\colon -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 2\leqslant z\leqslant 4\}$; c) $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int\limits_{0}^{1-x-y}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, kus $D=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$; $\int\limits_{0}^{1}\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $D(x)=\{(y,z)\colon 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-y\}$; d) $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int\limits_{0}^{1-x^2-y^2}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, kus $D=\{(x,y)\colon\ x^2+y^2\leqslant 1\}$; $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $D(x)=\{(y,z)\colon -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\ 0\leqslant z\leqslant 1-x^2-y^2\}$; e) $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int\limits_{-w}^{w}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$, kus $w=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ ja $D=\{(x,y)\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$; $\int\limits_{-a}^{a}\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kus $D(x)=\{(y,z)\colon \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}\}$.

106. a) 6; b) 4; c) $\frac{40}{3}$; d) $10\ln\frac{4}{5}$.

107. a) $\frac{8\pi}{3}$; b) $\frac{1}{364}$; c) 11.

112. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) $3a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; d) 0; e) $\frac{8c^2}{9}$; f) $\frac{4\pi(b^5-a^5)}{15}$.
113. a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{10}$; d) $\frac{2\pi}{3}$, osa lahendusest: minnes üle sfäärkoordinaatidele, saame $-\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}} = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 r\,\mathrm{d}r \int\limits_0^{\pi} \frac{d(r^2-4r\cos\theta+4)}{\sqrt{r^2-4r\cos\theta+4}} = \pi\int\limits_0^1 r\,\mathrm{d}r(\sqrt{(r+2)^2}-\sqrt{(r-2)^2}) =$ $\pi\int\limits_0^1 r\,\mathrm{d}r(r+2-|r-2|)$. Et $r-2<0$, siis edasi arvestame, et $|r-2| = -(r-2)$. e) $\frac{4\pi a^5}{15}$; f) $\frac{8\pi(b^5-c^5)}{15}$.
114. a) 128; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{7}{12}$. d) 16; e) $\frac{7}{24}$; f) $\frac{3}{35}$; g) $\frac{\pi a^3}{3}$, minna üle sfäärkoordinaatidele, arvestades kujundi sümmeetriat.
117. a) $\sqrt{5}\ln 2$; b) $\sqrt{5}\ln\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{5}\ln\frac{5}{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $2\pi a\sqrt{2a}$; f) $\frac{16a^2}{3}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{\pi}{2}$; i) $\frac{\pi a^3}{2}$; j) $\frac{(\pi^2+4)^{\frac{3}{2}}-8}{12}$; k) $\frac{\pi a^2}{2}$; l) 2π; m) 0; n) $1+\sqrt{2}$, kasutada aditiivsuse omadust ja jaotada kontuur osadeks AB, BC ja CA; o) 24; p) $2a^2(2-\sqrt{2})$.
118. a) $8a\pi^3\sqrt{2}$; b) $\frac{21}{2}$; c) $\frac{8-2\sqrt{2}}{3}$.
119. a) $\frac{2(8^3-1)}{27}$; b) sh 1; c) e; d) $\sqrt{2}(\mathrm{e}^{2\pi}-1)$; e) 3π; f) $\ln(1+\sqrt{2})$.
120. a) 5; b) $\sqrt{3}$.
121. a) 1, minna üle polaarkoordinaatidele; b) 12π, minna üle polaarkoordinaatidele ja sümmeetria tõttu leida neljakordne pindala osast, kus $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$; c) π.
122. $\frac{\pi}{2}$.
123. 16.
124. $2+\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}$.
125. a) π; b) -4; c) $-\frac{40}{3}$; d) 3; e) $-\frac{\pi}{4}$; f) 2π; g) 0; h) 0; i) 3; j) -32.
126. a) 2; b) 0, mõlemad integraalid arvutada korraga, arvestades, et $\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$; c) -2π.
127. a) πab; b) $\frac{3\pi ab}{8}$, sümmeetria tõttu võtta neljakordselt osa, kus $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$; c) $6\pi a^2$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{15}$; f) $2a^2$.
128. a) $\frac{\pi a^4}{2}$, kahekordne integraal arvutada üleminekuga polaarkoordinaatidele; b) 0, kahekordne integraal leida üleminekuga elliptilistele polaarkoordinaatidele $x=ar\cos\varphi,\ y=br\sin\varphi$, kus $0\leqslant r\leqslant 1$ ja $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$; c) $-\frac{\pi a^3}{8}$.
129. a) Sõltumatu; b) sõltuv; c) sõltumatu.
130. a) $U(x,y)=x^3-x^2y^2+y^3+C$; b) $U(x,y)=x\mathrm{e}^{2y}-5y^3\mathrm{e}^x+C$; c) $U(x,y)=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+C$ või $U(x,y)=\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}+C$; d) $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+C$; e) $U(x,y)=y^2\cos x+x^2\cos y+C$, võtta $a=b=0$; f) $U(x,y)=x^2-\cos(x+y)+y^2+C$; g) $U(x,y)=C-\cos(x+y)$.
131. a) 8; b) $\frac{5}{8}$; c) 64; d) 4.
134. a) $R=\mathrm{e},\ X=(-\mathrm{e},\mathrm{e})$; b) $R=0,\ X=\{3\}$; c) $R=\frac{1}{\mathrm{e}},\ X=(2-\frac{1}{\mathrm{e}},2+\frac{1}{\mathrm{e}})$.
135. a) $-\ln(1-x),\ x\in[-1,1)$; b) $(1-x)^{-2},\ x\in(-1,1)$; c) $(1+x)^{-2},\ x\in(-1-1)$; d) $(2-x)^{-1}\ln(3-x),\ x\in[1,3),\ f(2)=1$; e) $x^{-1}\ln(1+x),\ x\in(-1,1],\ f(0)=1$; f) $2(1-x)^{-3},\ x\in(-1-1)$; g) $2x^2(1+x)^{-3},\ x\in(-1,1)$; h) $\arctan x,\ x\in[-1,1]$.
136. a) $\ln 2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}$; b) $x+\frac{x^3}{3}$; c) $1+x+2x^2+3x^3+5x^4$; d) $1-x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}$; e) $x^2-\frac{2x^4}{3}$; f) $x-(1+\frac{1}{2})x^2+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})x^4$.
138. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$; c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{\pi n}{4}}{n!}x^n$; d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{\pi}{4})^{2n}(x-2)^{2n}$.
140. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$, $R=\infty$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $R=\infty$; c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$, $R=\infty$; d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$,

$R=\infty$; e) $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$, kasutada valemit $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; f) $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$, kasutada valemit $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!}$, $R=\infty$; h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$; j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R=\infty$; k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $R=1$; l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n-1}$, $R=1$; m) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, $R=1$; n) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$, $R=2$; o) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$, $R=3$; p) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}})x^n$, $R=2$; q) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$, $R=1$; r) $\ln 8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n8^n}$, $R=8$; s) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^nx^{n+1}$, $R=\frac{1}{3}$; t) $1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}$, $R=1$; u) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$, $R=\infty$; v) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$.

141. a) $x(1-x)^{-2},\ x\in(-1,1)$; b) $2x^2(1-x)^{-3},\ x\in(-1,1)$; c) $-x^2(1+x)^{-2},\ x\in(-1,1)$; d) $\frac{e^x-1}{x}$, kui $x\neq 0,\ f(0)=1$; e) $x^{-1}\arctan x$, kui $x\neq 0,\ f(0)=1,\ x\in[-1,1]$; f) $\frac{1-\cos x}{x}$, kui $x\neq 0,\ f(0)=0$.

142. a) $0{,}747$; b) $0{,}24488$; c) $2{,}835$; d) $0{,}946$; e) $0{,}072$.

146. a) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, koondub funktsiooniks $f(x)$; b) $2+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, koondub; c) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, koondub; d) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt; e) $\frac{\pi}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, koondub; f) $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx-n\sin nx)\right]$, koondub; g) $\frac{2\sin\pi^2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{\pi^2-n^2}$, koondub; h) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.

147. a) $\pi-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, koondub; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, koondub; c) $\frac{T}{2}-\frac{4T}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{T}}{(2n+1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt; d) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, koondub.

148. a) 1; b) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt; c) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt; d) $\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt.

149. a) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, koondub; b) $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$, koondub; c) $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$, koondub absoluutselt ja ühtlaselt; d) $\frac{\sin x}{2}+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2-1}$, koondub.

151. a) $\frac{\pi^2}{12}$; b) $\frac{\pi^2}{8}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\pi^3}{32}$.

152. $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3=2\pi^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$.

153. a) $\frac{3\pi}{512}$, teha muutuja vahetus $\sin^2 x=t$; b) $\frac{\pi}{8}$, kirjutada integraalialune funktsioon kujul $x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$; c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; d) $\frac{1}{560}$, teha muutuja vahetus $\sin^2 x=t$; e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$, teha muutuja vahetus $x^4=t$; f) π, teha muutuja vahetus $x^2=4t$; g) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; h) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

154. a) $\Gamma(p+1)$; b) $B(m+1, n-m)$; c) $B(\frac{1}{m}, 1-\frac{1}{n})$, kus $n<0$ või $n>1$; d) $B[\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}]$.