

Matemaatiline analüüs III
praktikumiülesannete kogu
2017. a. sügissemester

1. Piirväärtus ja pidevus

1. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε - δ -definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

a1) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5;$

a7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x} = 1;$

a12) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^3 = 1;$

a2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0;$

a8) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 1}{x + 5} = 1;$

a13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = 2;$

a3) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 1) = -4;$

a9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x - 3} = -9;$

a14) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2;$

a4) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9;$

a10) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x + 2} = -1;$

a15) $\lim_{x \rightarrow -4+} \sqrt{x + 4} = 0;$

a6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\frac{x - 1}{x + 1}} = 3;$

a11) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{8}{x - 3} = 2;$

a16) $\lim_{x \rightarrow 1-} \sqrt{1 - x} = 0;$

b1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x + 1}{2x + 1}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$

b3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{3x + 2} = \frac{1}{3};$

b5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{3x + 7} = \frac{5}{3};$

b2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{3x + 2} = \frac{1}{3};$

b4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{x + 1} = 3;$

b6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 5}{3x + 1} = \frac{2}{3};$

c1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x + 1} = \infty;$

c2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x + 1} = -\infty.$

c3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1 - x} = -\infty.$

2. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, tõestage järgmised koondumised.

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \sqrt{2n}} = 0;$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n}{2 + n} = 7;$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 5}{8n - 3} = \frac{1}{2};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + 5n} = 0;$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}} = 0;$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 3}{10n - 3} = \frac{1}{2}.$

3. Tõestage (ε - δ -definitsioonist lähtudes), et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

- 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sqrt{x-2}$; 3) $f(x) = \sin x$; 4) $f(x) = \ln x$.

4*. Leidke järgmised piirväärtused ($a, b > 0$, tähis $[a]$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu a):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}.$$

2. Kordamine: funktsiooni piirväärtuse arvutamine

5. Arvutage järgmised piirväärtused.

a1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 15},$

a3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8},$

a2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1},$

a4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2};$

b1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x},$

b4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+2x}}{1 - \sqrt{1+2x}},$

b7) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3},$

b2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 2}{x-9},$

b5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1},$

b8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2};$

b3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x^2+1}}{1 - \sqrt{x^2+1}},$

b6) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1 - \sqrt{x+3}},$

c1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 5x^4 + 1}{3x^5 + 2x^3 - 6},$

c5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x+5},$

d4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x},$

c2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{5x^4 + x - 6},$

c6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^2+1}};$

d5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\arcsin 5x},$

c3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x + 2}{3x^2 + x - 6},$

d1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x},$

d6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin 2x},$

c4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{x+5},$

d2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 5x},$

d7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2},$

d3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3},$

d8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x};$

e1) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|\sin x|},$

e4) $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{|x-2|},$

e7) $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{x-1},$

e10) $\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-4}{|x+2|},$

e2) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|\sin x|},$

e5) $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{|3-x|}{3-x},$

e8) $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x}{x-1},$

e11) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+e^{1/x}},$

e3) $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{|x-2|},$

e6) $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{|3-x|}{3-x},$

e9) $\lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2-4}{|x+2|},$

e12) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1+e^{1/x}};$

$$\text{f1)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x},$$

$$\text{f2)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{x^2},$$

$$\text{g1)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[3]{x + 1})}{(x^2 + x) \ln \left(1 + \frac{1}{|x|} \right)},$$

$$\text{g2)} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{10^{\frac{\cos x}{x+1}}}{5^{\frac{\sin x}{x+1}}},$$

$$\text{f3)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^x,$$

$$\text{f4)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)^{3x^2};$$

$$\text{g3)} \lim_{x \rightarrow 2+} \left(\frac{x - 2}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\ln \frac{x-2}{x+1}},$$

$$\text{g4)} \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + \sin x} \right),$$

$$\text{g5)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \sin x} - \sqrt[4]{1 + \sin x}}{x}.$$

6. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \leq 1, \\ x^3, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 3 - ax^2, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } x = 0, \\ x^2 + 1, & \text{kui } 1 < x < 2, \\ 5, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \frac{|3x-2|}{3x-2}.$$

7. Määrake katkevuse liik ja kõrvaldage (kui võimalik) funktsiooni katkevus punktis $x = 0$.

$$1) f(x) = \arctan \frac{1}{x};$$

$$3) f(x) = x \sin \frac{1}{x};$$

$$5) f(x) = (1 + x)^{1/x};$$

$$2) f(x) = \arctan \frac{1}{x^2};$$

$$4) f(x) = \frac{\arcsin x}{2 \tan 5x};$$

$$6) f(x) = \ln |\sin x|.$$

8*. Olgu

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Leidke piirväärtus $\lim_n x_n$.

3. Kordamine: diferentseerimine

9. Tuletise definitsioonist lähtudes leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$1) f(x) = x^2;$$

$$3) f(x) = x^n;$$

$$5) f(x) = \frac{1}{x};$$

$$7) f(x) = \sqrt{x};$$

$$2) f(x) = x^3;$$

$$4) f(x) = \cos x;$$

$$6) f(x) = e^x;$$

$$8) f(x) = b^x.$$

10. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$a1) f(x) = \sin^3 x;$$

$$a4) f(x) = \frac{ax+b}{cx+d};$$

$$a7) f(x) = \frac{e^x}{x} + \sqrt{2x};$$

$$a2) f(x) = \ln \tan x;$$

$$a5) f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$a8) f(x) = (\cos x) \cdot \tan \alpha;$$

$$a3) f(x) = 2^{\cos x};$$

$$a6) f(x) = e^x \sin x;$$

$$a9) f(x) = x^a a^x \quad (a > 0);$$

$$a10) f(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2};$$

$$a14) f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2};$$

$$a11) f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$a15) f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2};$$

$$a12) f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$$

$$a16) f(x) = \ln(1+4x^2) + \arctan 2x;$$

$$a13) f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1};$$

$$a17) f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$$

$$b1) f(x) = x^x;$$

$$b3) f(x) = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{(x^2+4)^5 (3x-1)^8}{(6x^3+1)^2 e^{\sin 5x}}};$$

$$b2) f(x) = (\cos x)^{\sin x};$$

$$c1) f(x) = |x|;$$

$$c7) f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{kui } x < 0, \\ \tan x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$c2) f(x) = x|x|;$$

$$c3) f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2, & \text{kui } x < 1, \\ x^2 + 1, & \text{kui } x \geq 1; \end{cases}$$

$$c8) f(x) = \begin{cases} (5-x)^2, & \text{kui } x > 1, \\ e^{1-x^2} + 15, & \text{kui } x \leq 1; \end{cases}$$

$$c4) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 2, \\ x^3 - 4, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$$

$$c9) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right), & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

$$c5) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ \sin x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$c6) f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{kui } x < 0, \\ x^4, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$c10) f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{kui } x \geq 0, \\ \frac{2^x}{\sqrt{1+3x^2}}, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

11. Leidke f'' , kui

$$1) f(x) = e^{-x^2};$$

$$4) f(x) = \sqrt{1+x^2};$$

$$7) f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ 2x^3, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$2) f(x) = x^2 \ln x;$$

$$5) f(x) = x|x|;$$

$$3) f(x) = e^x \cos x;$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x < 0, \\ x^3, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ x^3 + 1, & \text{kui } x \geq 0. \end{cases}$$

12*. On antud funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Millistes punktides on f diferentseeruv?

13*. Funktsioon $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv paarisfunktsioon lõigul $[-1, 1]$. Leidke $f'(0)$.

4. Kordamine: integreerimine

14. Leidke järgmised integraalid.

a1) $\int_1^2 5x\sqrt{x} dx$;

a2) $\int_{-1}^1 10^x dx$;

a3) $\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x - 3 \sin x) dx$;

a4) $\int_0^1 (2^x e^x + \ln 2) dx$;

a5) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

b1) $\int_{\pi/24}^{\pi/16} \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

b2) $\int_1^2 e^{5x} dx$;

b3) $\int_0^{\pi/4} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$;

b4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\tan x - \cot x) dx$;

b5) $\int_0^{1/2} \frac{8 dx}{1 + 4x^2}$;

b6) $\int_3^4 (x-3)^5 dx$;

b7) $\int_{-2}^{-1} (3x+5)^4 dx$;

b8) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$;

b9) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$;

a6) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$;

a7) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$;

a8) $\int_0^1 \frac{2 dx}{\sqrt{4-4x^2}}$;

a9) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;

b10) $\int_3^4 \sqrt[3]{7-2x} dx$;

b11) $\int_0^1 \cos(1-2x) dx$;

b12) $\int_0^1 e^{-2x+3} dx$;

b13) $\int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$;

b14) $\int_0^{2/3} \frac{dx}{9x^2+4}$;

b15) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

b16) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{x^3+1}$;

b17) $\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2} dx$;

a10) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1}$;

a11) $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$;

a12) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

a13) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

b18) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$;

b19) $\int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

b20) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x}$;

b21) $\int_0^{\ln \pi - \ln 2} e^x \cos e^x dx$;

b22) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x+1}$;

b23) $\int_0^1 \frac{\arctan^3 x dx}{1+x^2}$;

b24) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$;

b25) $\int_0^{\pi} \sin^2 x dx$;

$$\text{b26)} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos x};$$

$$\text{b28)} \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$\text{b30)} \int_0^{\pi/2} \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx;$$

$$\text{b27)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x};$$

$$\text{b29)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x};$$

$$\text{c1)} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx;$$

$$\text{c3)} \int_0^3 \ln(x+3) dx;$$

$$\text{c5)} \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx;$$

$$\text{c2)} \int_0^{\pi} x \cos x dx;$$

$$\text{c4)} \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$\text{c6)} \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx;$$

$$\text{d1)} \int_{-\pi}^{\pi} (x^{2017} (\sin x)^2 + |x+1|) dx;$$

$$\text{d2)} \int_{-\pi}^{\pi} (|2x-1| + (\sin x)^{2017}) dx.$$

15. Arvutage antud joontega piiratud tasandilise kujundi pindala.

$$1) y = x^2 \text{ ja } x + y = 2,$$

$$2) x = \frac{1}{e}, x = e, y = 0 \text{ ja } y = |\ln x|,$$

$$3) y = x^2 \text{ ja } y = x^3.$$

16. Leidke järgmiste joonte kaarte pikkused.

$$1) y = \sqrt{x^3}, \text{ kus } 0 \leq x \leq 4,$$

$$3) x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), \\ \text{ kus } 0 \leq t \leq 2\pi, a > 0.$$

$$2) y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, \text{ kus } 1 \leq x \leq e,$$

17*. Olgu f lõigul $[0, a]$ pidev funktsioon, kus $a > 0$, kusjuures $f(x) + f(a-x) \neq 0$ iga $x \in [0, a]$

korral. Arvutage määratud integraal $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$.

5. Reaalarvud

18. Aksioomidest (A1)–(A4) lähtudes tõestage, et

- 1) nullelement 0 on igas korpus F üheselt määratud;
- 2) iga $a \in F$ korral on vastandelement $-a$ üheselt määratud;
- 3) võrrandil $a + x = b$ on korpus F parajasti üks lahend $x := b - a$;
- 4) $-(a + b) = -a - b$.

19. Aksioomidest (M1)–(M4) lähtudes tõestage, et

- 1) ühikelement 1 on igas korpus F üheselt määratud;
- 2) iga $b \neq 0$ korral on pöördelement b^{-1} üheselt määratud;
- 3) kui $a \neq 0$, siis võrrandil $a \cdot x = b$ on korpus F parajasti üks lahend $x := b \cdot a^{-1}$;
- 4) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

20. Järjestatud korpuse aksioomidest lähtudes tõestage, et järjestatud korpus F kehtivad järgmised väited:

- 1) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$,
- 2) $[a < b, c < 0] \Rightarrow ac > bc$,
- 3) $a^2 > 0$ iga $a \in F \setminus \{0\}$ korral, muuhulgas $1 > 0$,
- 4) $[a < b, c < d] \Rightarrow a + c < b + d$,
- 5) $[0 < a < b, 0 < c < d] \Rightarrow ac < bd$,
- 6) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$,
- 7) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$,

8) kui $a < b$, siis $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$,

kus $2 := 1 + 1$.

21. Tõestage, et alamhulga ülemine raja järjestatud korpuses on üheselt määratud (eel-
dusel, et ta on olemas).

22. Tõestage, et kui järjestatud korpuse alamhulgas on suurim (vähim) element, siis see on
selle hulga ülemine (alumine) raja.

23. Tõestage, et kui $a = \sup X$, siis alamhulk $Y := \{\lambda x + 1 : x \in X\}$ on iga $\lambda > 0$ korral ülalt
tõkestatud ning $\sup Y = \lambda a + 1$.

24. Olgu $X \neq \emptyset$ ja $Y \neq \emptyset$ sellised reaalarvude hulgad, et $x \leq y$ kõikide $x \in X$ ja $y \in Y$ korral.
Tõestage, et X on ülalt ja Y on alt tõkestatud ning $\sup X \leq \inf Y$.

25. Leidke $\min X$, $\max X$, $\inf X$ ja $\sup X$, kui

$$\begin{array}{lll} 1) X := [0, 1), & 3) X := \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, & 4) X := \left\{ \frac{(-1)^n + 2}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}. \\ 2) X := \left\{ \frac{1}{2n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}, & & \end{array}$$

26. Tõestage järgmised väited:

$$\begin{array}{lll} 1) |a| \geq 0, & 4) |a| = \max\{a, -a\}, & 7) |a-b| \leq |a| + |b|, \\ 2) |-a| = |a|, & 5) |a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c, & \\ 3) a \leq |a|, -a \leq |a|, & 6) |a+b| \leq |a| + |b|, & 8) \left| |a| - |b| \right| \leq |a-b|. \end{array}$$

27*. Olgu antud tõkestatud funktsioon $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Tõestage võrdused

$$\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) = \sup_{x_1, x_2 \in X} (f(x_1) - f(x_2)) = \sup_{x_1, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

28*. Tõestage, lähtudes reaalarvude aksioomidest ja omadustest (märkige iga teisenduse
kohale, mida kasutate), et suvaliste positiivsete reaalarvude $a_1, \dots, a_n$ korral, mis rahuldavad
seost $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, kehtib võrratus $a_1 + \dots + a_n \geq n$.

6. Arvjadad

29. Koondugu jada (x_n) ja hajugu jada (y_n) . Mida võib öelda jadade $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$
koonduvuse kohta? Tooge sobivaid näiteid.

30. Hajugu mõlemad jaded (x_n) ja (y_n) . Kas jaded $(x_n + y_n)$ ja $(x_n y_n)$ samuti hajuvad? Tooge
sobivaid näiteid.

31. Kehtigu $\lim_n x_n = 0$ ning hajugu jada (y_n) . Kas kehtib ka $\lim_n x_n y_n = 0$? Tooge sobivaid
näiteid.

32. 1) Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) ja (x_{n_k}) on jada (x_n) osajada, siis $x_{n_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$).
2) Tooge näide hajuvast jadast, millel on koonduv osajada.

33. 1) Olgu $\lim_n x_n = a > 0$. Näidake, et leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $x_n > 0$ iga $n \geq N$ korral.

2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide juhul $a < 0$.

34. Tõestage, et arvjada (x_n) on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $K > 0$, et $|x_n| \leq K$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

35. 1) Olgu $N \in \mathbb{N}$ ja olgu (x_n) selline jada, et $x_n = a$ iga $n \geq N$ korral. Näidake, et $\lim_n x_n = a$.

2) Tooge näide hajuvast jadast (x_n) , kus $x_n = a$ lõpmata paljude indeksite n korral.

36. Veenduge, et kui $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow a$, siis ka $z_n \rightarrow a$, kus $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$, s.t.

$$z_n := \begin{cases} x_k, & \text{kui } n = 2k - 1, \\ y_k, & \text{kui } n = 2k. \end{cases}$$

37. 1) Tõestage, et kui $x_n \leq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ning $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow b$, siis $a \leq b$.

2) Olgu $x_n \leq c$ ($n \in \mathbb{N}$). Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$, siis $a \leq c$.

38. 1) Tõestage, et kui $x_n \leq z_n \leq y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ja $\lim_n x_n = \lim_n y_n = a$, siis $\lim_n z_n = a$.

2) Olgu $0 \leq x_n \leq y_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõestage, et kui $\lim_n y_n = 0$, siis $\lim_n x_n = 0$.

39. Olgu $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$. Veenduge, et $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ ning $\lim_n \min\{x_n, y_n\} = \min\{a, b\}$.

40. Tõestage, et kui $x_n \rightarrow 0$ ja (y_n) on tõkestatud jada, siis $x_n y_n \rightarrow 0$.

41. Tõestage, et kui $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow b$, siis

1) $x_n + y_n \rightarrow a + b$;

4) $\lambda x_n \rightarrow \lambda a$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ puhul;

6) $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

2) $x_n - y_n \rightarrow a - b$;

5) $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$;

3) $x_n y_n \rightarrow ab$;

42. 1) Tõestage, et kui $\lim_n x_n = a$, siis $\lim_n |x_n| = |a|$.

2) Veenduge, et vastupidine väide on üldjuhul väär.

3) Tõestage, et $\lim_n x_n = 0$ parajasti siis, kui $\lim_n |x_n| = 0$.

43. Tõestage, et iga $a \in \mathbb{R}$ korral leidub ratsionaalarvude jada (x_n) omadusega $x_n \rightarrow a$. (Kasutage asjaolu, et $\mathbb{Q}$ on tihe korpuses $\mathbb{R}$.)

44. Tõestage, et $\lim_n r^n = 0$ parajasti siis, kui $|r| < 1$.

45. Tõestage, et $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$ iga $a > 0$ korral.

46. Tõestage, et $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

47*. Olgu (a_n) jada, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$\text{iga } m = 2, 3, 4, \dots \text{ korral osajada } (a_{mk})_{k=1}^{\infty} \text{ koondub.} \quad (6.1)$$

Kas tingimusest (6.1) järeldub, et jada (a_n) koondub?

48*. Fibonacci jada (a_n) on defineeritud järgmiselt:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{ja} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kas jada $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ koondub? (Põhjendage!) Jaatava vastuse korral leidke piirväärtus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

7. Alumine ja ülemine piirväärtus

49. Olgu (x_n) tõkestatud jada. Tõestage, et

$$\liminf_n x_n = \sup \{ \inf \{ x_n : n \geq k \} : k \in \mathbb{N} \}, \quad \limsup_n x_n = \inf \{ \sup \{ x_n : n \geq k \} : k \in \mathbb{N} \}.$$

Pange tähele, et

$$\inf_n x_n \leq \liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n \leq \sup_n x_n.$$

50. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad, kusjuures iga n korral $x_n \leq y_n$. Tõestage, et $\liminf_n x_n \leq \liminf_n y_n$ ning $\limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n$.

51. Olgu (x_n) tõkestatud jada. Tõestage, et kui $c > 0$, siis

$$\liminf_n (cx_n) = c \cdot \liminf_n x_n, \quad \limsup_n (cx_n) = c \cdot \limsup_n x_n.$$

Tõestage, et kui $c < 0$, siis

$$\liminf_n (cx_n) = c \cdot \limsup_n x_n, \quad \limsup_n (cx_n) = c \cdot \liminf_n x_n.$$

52. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud jadad. Tõestage, et

$$\begin{aligned} \liminf_n x_n + \liminf_n y_n &\leq \liminf_n (x_n + y_n) \leq \liminf_n x_n + \limsup_n y_n \leq \\ &\leq \limsup_n (x_n + y_n) \leq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n. \end{aligned}$$

Tooge näiteid, millal võrratused kehtivad rangete võrratustena.

53. Koondugu jada (x_n) ning olgu (y_n) tõkestatud jada. Tõestage, et

$$\limsup_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \limsup_n y_n.$$

54. Tooge näide arvjadast (x_n) , mille osapiirväärtuste hulk oleks antud arvuhulk $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.

55. Tooge näide arvjadast (x_n) , mille osapiirväärtuste hulgas esineks kõik arvud arvjadast $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Milliseid osapiirväärtusi omab jada (x_n) kindlasti veel?

56. Tooge näited järgmistest arvjadadest (x_n) :

- 1) millel puuduksid lõplikud osapiirväärtused,
- 2) millel oleks üks lõplik osapiirväärtus, ent mis poleks koonduv jada,
- 3) mille osapiirväärtuste hulk oleks lõpmatu,
- 4) mille osapiirväärtuste hulk oleks $\mathbb{R}$.

57. Leidke järgmiste jadade (x_n) jaoks $\inf_n x_n$, $\sup_n x_n$, $\liminf_n x_n$ ja $\limsup_n x_n$.

$$1) x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$$2) x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n} \right),$$

$$3) x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2},$$

$$4) x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2},$$

$$5) x_n = (-1)^n n,$$

$$6) x_n = -n(2 + (-1)^n),$$

$$7) x_n = n^{-n},$$

$$8) x_n = \frac{1}{n - 10,2}.$$

58. Leidke järgmiste jadade osapiirväärtuste hulk.

$$1) x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4},$$

$$2) x_n = \left(\cos \frac{2n\pi}{3} \right)^n,$$

$$3) \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, \dots,$$

$$4) \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots,$$

$$5) \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \dots,$$

$$6) x_n = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2 \cdot (-1)^n.$$

59*. Olgu (a_n) positiivsete liikmetega jada nii, et

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = 0, \quad \limsup_n \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \in \mathbb{R}.$$

Leidke $\lim_n \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n^2}.$

60*. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pidev monotoonne funktsioon ning olgu jada (x_n) tõkestatud. Tõestage, et kui f on kasvav, siis $\liminf_n f(x_n) = f\left(\liminf_n x_n\right)$ ning kui f on kahanev, siis $\liminf_n f(x_n) = f\left(\limsup_n x_n\right).$

8. Pidevad funktsioonid

61. Veenduge, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eksisteerib, siis on ta üheselt määratud.

62. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui eksisteerivad $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =: B$, siis $A \leq B$.

63. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq B$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: A$, siis $A \leq B$.

64. Olgu $\delta > 0$ ja $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ iga $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ korral. Tõestage, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) =: A$, siis $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$.

65. Tõestage, et kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, siis

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda A \text{ (kus } \lambda \in \mathbb{R}),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = AB,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ (kus } g(x) \neq 0 \forall x, B \neq 0).$$

66. Tõestage, et kui funktsioonid $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidevad punktis $a \in D$, siis ka funktsioonid $f \pm g$, λf ja $f g$ on punktis a pidevad.

67. Tõestage, et iga polünoom on kogu arvteljel $\mathbb{R}$ pidev funktsioon.

68. Tõestage, et Dirichlet' funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ei ole pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

69. Tõestage, et seosega

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

määratud funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ainult punktis $a = 0$.

70. Tooge näited funktsioonidest $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis üheski punktis $a \in \mathbb{R}$ ei ole pidev, kuid

- 1) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(x)^2$, on pidev funktsioon;
- 2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, on pidev funktsioon;
- 3) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kus $g(x) = f(f(x))$, pole samuti pidev üheski punktis $a \in \mathbb{R}$.

71. Näidake, et kui $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis ka seosega $g(x) := |f(x)|$ määratud funktsioon $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev. Tooge näide selle kohta, et vastupidine väide on väär.

72. Olgu $f(x) := 2^k - 1$, kui $x \in [k-1, k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Uurige selle funktsiooni pidevust.

73. Uurige funktsiooni f pidevust, kui $f(x) := \frac{|x|}{x}$, kui $x \neq 0$, ja $f(0) := 0$.

74. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sellised pidevad funktsioonid, et $f(x) = g(x)$ iga $x \in \mathbb{Q}$ korral. Tõestage, et siis $f = g$, s.t. $f(x) = g(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

75. Tõestage, et 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ ja 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

76. 1) Olgu funktsioon f pidev punktis a ja olgu $f(a) > 0$. Näidake, et siis leidub punkti a selline ümbrus, milles funktsiooni f väärtused on kõik positiivsed.

2) Sõnastage ja tõestage analoogiline väide olukorra $f(a) < 0$ kohta.

77. Funktsioon f on pidev intervallis $[0, \infty)$ ning $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Tõestage, et f on tõkestatud intervallis $[0, \infty)$.

78. Lähtudes võrratustest $\sin x < x < \tan x$ ($0 < x < \pi/2$), tõestage, et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

79*. Olgu D mingi intervall. Öeldakse, et funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on *kumer*, kui mistahes arvude $x, y \in D$ ja mistahes arvu $\lambda \in [0, 1]$ korral kehtib võrratus

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

(Piltlikult öeldes tähendab funktsiooni f kumerus seda, et f graafik on nõgus.)

Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, kusjuures $a < b$. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Kas kehtib implikatsioon

$$f \text{ on kumer lõigus } [a, b] \Rightarrow f \text{ on pidev lõigus } [a, b]?$$

80*. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu f lõigus $[0, n]$ pidev funktsioon, kusjuures $f(0) = f(n)$. Tõestage, et leiduvad arvud $x_1, x_2 \in [0, n]$, mille korral

$$x_2 - x_1 = 1, \quad f(x_2) = f(x_1).$$

9. Diferentseeruvad funktsioonid

81. Tõestage, et kui funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on punktis $a \in D$ diferentseeruv, siis on ta selles punktis pidev.

82. Tõestage, et kui funktsioonid f ja g on punktis a diferentseeruvad, siis ka funktsioon $\lambda f + \mu g$, kus $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on konstandid, on selles punktis diferentseeruv ja $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

83. Leidke nurk, mille moodustab x -teljega funktsiooni $y = \sin x$ graafikule punktis $(0, 0)$ võetud puutuja.

84. Näidake, et funktsioon $y = |x|$ ei ole punktis $x = 0$ diferentseeruv.

85. Olgu $f(x) := \begin{cases} kx, & \text{kui } x \geq 0, \\ lx, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$ Milliste konstantide k ja l korral on f diferentseeruv?

86. Tooge näide mittediferentseeruvast funktsioonist f , mille korral funktsioon $g(x) = f(x)^2$ on diferentseeruv.

87. Veenduge, et funktsioon f rahuldab lõigus $[a, b]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi tingimusi, ja leidke arv c keskväärtusvalemis $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$:

1) $f(x) := 3x^2 - 5$ ja $[a, b] = [-2, 0]$;

2) $f(x) := \ln x$ ja $[a, b] = [1, e]$.

88. Leidke joonel $y = x^3$ sellised punktid, milles puutuja on paralleelne lõikajaga läbi punktide $(-1, -1)$ ja $(2, 8)$.

89. Olgu $f'(x) = 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Näidake, et $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ on konstantne funktsioon.

90. Olgu D mingi intervall ning $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kusjuures f olgu pidev intervallis D ja diferentseeruv vahemikus D° . Tõestage järgmised väited.

1) Kui $f'(x) = 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on konstantne intervallis D .

2) Kui $f'(x) \geq 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on kasvav intervallis D .

3) Kui $f'(x) > 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on rangelt kasvav intervallis D .

4) Kui $f'(x) \leq 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on kahanev intervallis D .

5) Kui $f'(x) < 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on rangelt kahanev intervallis D .

Kas ülesande implikatsioonid kehtivad ka teistpidi?

91. Tõestage, et kui funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $f'(x) = f(x)$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis $f(x) = Ce^x$, kus C on mingi konstant.

92. Olgu D mingi intervall, $a \in D^\circ$, ning olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Olgu f pidev punktis a ning leidugu selline $\delta > 0$, et f on diferentseeruv vahemikes $(a - \delta, a)$ ja $(a, a + \delta)$. Tõestage järgmised väited.

- 1) Kui iga $x \in (a - \delta, a)$ korral $f'(x) > 0$ ja iga $x \in (a, a + \delta)$ korral $f'(x) < 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne maksimum.
- 2) Kui iga $x \in (a - \delta, a)$ korral $f'(x) < 0$ ja iga $x \in (a, a + \delta)$ korral $f'(x) > 0$, siis on funktsioonil f punktis a range lokaalne miinimum.

93. Leidke järgmiste funktsioonide monotoonsusepiirkonnad ja ekstreemumkohad:

- 1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$,
- 2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 7$,
- 3) $f(x) = x^2 e^{-x}$,
- 4) $f(x) = \ln|x|$,
- 5) $f(x) = e^x + 5x$,
- 6) $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$,
- 7) $f(x) = x|x|$.

94. Tõestage võrratused

- 1) $e^x \geq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R})$,
- 2) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0)$,
- 3) $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x \quad (0 < x \leq 1)$,
- 4) $\ln(1 + x) \leq x \quad (x > -1)$,
- 5) $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$,
- 6) $1 + x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \geq \sqrt{1 + x^2}$.

95. Arvutage piirväärtused

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}, n \in \mathbb{N}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in \mathbb{N}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{3}{x-1}}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

96. Lähtudes Tayloriga valemist, esitage polünoom $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ avaldise $x - 1$ astmete lineaarse kombinatsioonina.

97. Leidke funktsiooni $f(x) = \ln(x + 1)$ Tayloriga valem punktis $a = 0$. Hinnake absoluutset viga lõigus $[0, 1]$ juhul $n = 9$.

98. Leidke funktsiooni $f(x) = e^x$ Tayloriga valem punktis $a = 0$. Leidke n , mis lõigus $[-1, 1]$ garanteerib täpsuse 0,001.

99. Hinnake absoluutset viga järgmistes ligikaudsetes valemities:

- 1) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, kui $|x| \leq \frac{1}{2}$;
- 2) $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, kui $0 \leq x \leq 1$.

100*. Tooge näide funktsioonist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis on diferentseeruv täpselt kahes punktis: $a = 0$ ja $a = 1$. (Mujal ei tohi f olla diferentseeruv: veenduge ka selles.)

Olgu $\varkappa > 0$. Vaatleme järgmist tingimust:

f on diferentseeruv vahemikus $(a, a + \varkappa)$ ning
leidub piirväärtus (lõplik või lõpmatu) $A := \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. (9.1)

101*. Tõestage, et kui funktsioon f rahuldab tingimust (9.1) ja f on paremalt pidev punktis a , siis $f'_+(a) = A$.

102*. 1) Kas leidub funktsioon f , mis rahuldab tingimust (9.1) ning $f'_+(a) \in \mathbb{R}$, aga $f'_+(a) \neq A$?
2) Kas leidub funktsioon f , mis rahuldab tingimust (9.1) ning $f'_+(a) = \infty$, aga $f'_+(a) \neq A$?

10. Integreeruvate funktsioonide omadused

103. Tõestage, et iga tõkestatud funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korral $I^* - I_* = \inf\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}$, kus I^* ja I_* on funktsiooni f Darboux' ülem- ja alamintegraal lõigus $[a, b]$ ja $\mathfrak{T}$ on lõigu $[a, b]$ alajaotuste hulk.

104. Tõestage, et iga tõkestatud funktsiooni $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korral kehtib samaväärsus: f on integreeruv parajasti siis, kui $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$.

105. Lähtudes a) Darboux', b) Riemanni integraali definitsioonist, tõestage, et kui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruvad, siis ka funktsioonid $f \pm g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruvad ja

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

106. Lähtudes a) Darboux', b) Riemanni integraali definitsioonist, tõestage, et kui $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv, siis ka funktsioon $\lambda f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv ja $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

107. Olgu funktsioonid $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruvad. Lähtudes a) Darboux', b) Riemanni integraali definitsioonist, tõestage, kui $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

108. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruvad ning $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx =: I$. Veenduge a) Darboux', b) Riemanni integraali definitsiooni põhjal, et kui $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis ka $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv ning $\int_a^b h(x) dx = I$.

109. Tõestage, et järgmised funktsioonid ei ole integreeruvad lõigus $[0, 1]$.

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ x, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 3) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kui } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

110. Veenduge, et sinc-funktsioon

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \in [a, b] \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{kui } x = 0, \end{cases}$$

on lõigus $[a, b]$ integreeruv.

111. Tooge näide mitteintegreeruvast funktsioonist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral $|f|: [a, b] \rightarrow$

$\mathbb{R}$ on integreeruv.

112. Leidke järgmised integraalid vahetult Riemanni integraali definitsiooni põhjal (kuna integrandid on pidevad antud piirkondades, võib eeldada, et need integraalid eksisteerivad).

$$1) \int_0^5 3 \, dx, \quad 2) \int_0^2 x \, dx, \quad 3) \int_2^3 x^2 \, dx, \quad 4) \int_0^3 e^x \, dx.$$

113. Olgu $a > 0$ ning olgu f lõigus $[-a, a]$ integreeruv funktsioon. Tõestage, et

- 1) kui f on paaritu, siis $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$;
- 2) kui f on paaris, siis $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$.

114. Olgu f lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon. Tõestage, et

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx.$$

115*. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Tõestage võrratused

$$\frac{3^n}{n+1} \leq \int_0^1 (x^2 + x + 1)^n \, dx \leq 3^n.$$

11. Integreeruvate funktsioonide omadused

116. Olgu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon ning olgu $f(x) \geq 0$ iga $x \in [a, b]$ korral. Tõestage, et kui $\int_a^b f(x) \, dx = 0$, siis $f = 0$.

117. Olgu $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ning olgu $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$. Tõestage, et $f = g$.

118. Olgu $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid, kehtigu $f(x) \leq g(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral ning leidugu punkt $x_0 \in [a, b]$ nii, et $f(x_0) < g(x_0)$. Tõestage, et $\int_a^b f(x) \, dx < \int_a^b g(x) \, dx$.

119. Tehke kindlaks, kumb arvudest on suurem.

$$1) \int_0^1 \sin x^2 \, dx \text{ ja } \int_0^1 x^2 \, dx, \quad 2) \int_0^2 e^{x^2} \, dx \text{ ja } \int_0^2 x \, dx, \quad 3) \int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \text{ ja } \int_2^5 \frac{dx}{x-1}.$$

120. Tõestage, et $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2-x} \, dx < 2e^2$.

121. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemist lähtudes tõestage, et kui f on lõigus $[a, b]$ pidev, siis

$$\left(\int_x^b f(t) \, dt \right)' = -f(x), \quad x \in [a, b].$$

122. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$\begin{array}{lll} 1) F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}, x > -1; & 3) F(x) = \int_{x^2}^2 \frac{dt}{\ln t}, x > 1; & 5) F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{t^2} dt, x \in \mathbb{R}. \\ 2) F(x) = \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt, x \in \mathbb{R}; & 4) F(x) = \int_x^{2x} (\ln t)^2 dt, x > 0; \end{array}$$

123*. Olgu f lõigus $[0, 1]$ pidevalt diferentseeruv. Tõestage, et leidub arv $\delta \in (0, 1)$ nii, et

$$\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2} f'(\delta).$$

12. Päratud integraalid

124. Kasutades päratute integraalide võrdluslauset, tõestage, et kui leiduvad sellised arvud $K > 0$ ja $q > 1$, et $0 \leq f(x) \leq \frac{K}{x^q}$ ($x \in [a, \infty)$), siis päratu integraal $\int_a^\infty f(x) dx$ koondub.

125. Sõnastage ja tõestage eelmise väitega analoogiline väide tõkestamata funktsiooni päratu integraali $\int_a^b f(x) dx$ kohta.

126. Sõnastage ja tõestage kahe eelmise väitega analoogilised väited päratute integraalide hajuvuse kohta.

127. Arvutage päratu integraali väärtus:

$$\begin{array}{lll} \text{a1)} \int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}, & \text{a4)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}, & \text{a7)} \int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^4} dx, \\ \text{a2)} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx, & \text{a5)} \int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{x^2 + 1}, & \text{a8)} \int_0^\infty x \sin x dx, \\ \text{a3)} \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2) \arctan^2 x}, & \text{a6)} \int_1^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4} dx, & \text{a9)} \int_{-\infty}^0 x e^x dx; \\ \text{b1)} \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx; & \text{b4)} \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}; & \text{b7)} \int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1 - \cos x}; \\ \text{b2)} \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx; & \text{b5)} \int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx; & \text{b8)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; \\ \text{b3)} \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}; & \text{b6)} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}; & \text{b9)} \int_0^1 \ln x dx. \end{array}$$

128. Uurige järgmiste päratute integraalide koonduvust.

$$\begin{array}{lll}
\text{a1)} \int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{x}}; & \text{a3)} \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x)^2}; & \text{a5)} \int_0^\infty \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx; \\
\text{a2)} \int_1^\infty \frac{(x^2+1) \arctan x dx}{x^4+x^2+1}; & \text{a4)} \int_0^\infty \frac{|\cos x| dx}{x^2+1}; & \text{a6)} \int_0^\infty \frac{\cos^2 x dx}{x^4+1}; \\
\text{b1)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}; & \text{b3)} \int_0^3 \frac{|\sin x| dx}{\sqrt{3-x}}; & \text{b5)} \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}\sqrt{x-2}}; \\
\text{b2)} \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx; & \text{b4)} \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}; & \text{b6)} \int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}.
\end{array}$$

129*. Olgu funktsioonid $f, g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sellised, et $f(x) \geq 0$ ja $g(x) > 0$, kui $x \in [a, \infty)$. Hajugu integraal $\int_a^\infty f(x) dx$. Tõestage, et vähemalt üks integraalidest

$$\int_a^\infty f(x)g(x) dx, \quad \int_a^\infty \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

hajub.

130*. Olgu $0 < a < b$. Tõestage, et päratu integraal

$$\int_0^\infty \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$$

koondub.

Näpunäide. Avaldage $\arctan bx - \arctan ax$ ühe arkustangensina. Pange tähele, et lõigus $[0, 1]$ on tegu Riemanni integraaliga.

13. Arvread

131. Tõestage, et kui rida $\sum_k u_k$ koondub, siis $\lim_k u_k = 0$.

132. Koondugu read $\sum_k u_k$ ja $\sum_k v_k$ vastavalt summaks u ja v . Tõestage, et read $\sum_k (u_k + v_k)$ ja $\sum_k \lambda u_k$ koonduvad vastavalt summaks $u + v$ ja λu ($\lambda \in \mathbb{R}$).

133. Tõestage, et rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \geq 0$, koondub parajasti siis, kui tema osasummade jada

$\left(\sum_{k=1}^n u_k \right)$ on tõkestatud. Tooge näide hajuvast reast, mille osasummade jada on tõkestatud.

134. Uurige järgmiste väidete kehtivust.

1) Kui rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, koondub, siis rida $\sum_k \frac{1}{u_k}$ hajub.

2) Kui rida $\sum_k u_k$, kus $u_k \neq 0$, hajub, siis rida $\sum_k \frac{1}{u_k}$ koondub.

135. Tõestage, et kui $0 \leq u_k \leq v_k$ ($k \in \mathbb{N}$) ja rida $\sum_k v_k$ koondub, siis koondub ka rida $\sum_k u_k$.

136. Tõestage, et kui rida koondub absoluutselt, siis ta koondub.

137. Põhjendage järgmiste ridade hajuvust:

- 1) $\sum_k \frac{k}{100k+1}$, 2) $\sum_k (-1)^k$, 3) $\sum_k \frac{1}{k}$, 4) $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}$, 5) $\sum_k \tan \frac{\pi}{k+2}$.

138. Leidke rea summa:

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, 4) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$, 7) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k} \right)$,
 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$, 5) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, 8) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(5a)^k} - \frac{1}{6^{k+1}} \right)$,
 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$, 6) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{4^k}$,

139. Uurige ridade koonduvust:

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$, 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^{55}}{2k^3+k^2+1}$, 7) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \tan \frac{\pi}{3^k}$,
 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)5^k}$, 5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+10)}}$, 8) $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \sqrt{\frac{2}{k}} \right)$,
 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-1}$, 6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10000k+1}$,
 9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$, 13) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{e} \sin \frac{\pi}{k}$, 17) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, 21) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\ln(k+2)}$,
 10) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k^2}$, 14) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$, 18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)!}$, 22) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k+1}$,
 11) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$, 15) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{3} \right)^k$, 19) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$,
 12) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{3k-1} \right)^k$, 16) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{k}{2} \right)^k$, 20) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+2}$,

140*. Leibnizi tunnus väidab, et kui vahelduvate märkidega rea $\sum_k (-1)^k u_k$ üldliige u_k hääbub monotoonselt, siis rida koondub. Tooge näide **hajuvast** vahelduvate märkidega reast

$\sum_k (-1)^k u_k$, mille üldliige u_k hääbub, kusjuures $u_k > 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

141*. Leidke rea $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ summa.

Näpunäide: Püüdke osasummad teisendada teleskoopsummadeks.

14. Funktsionaaljadad ja -read

142. Leidke funktsionaaljada (f_k) koonduvuspiirkond D ja piirväärtus $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- | | | |
|--------------------------------|--|-----------------------------------|
| 1) $f_k(x) = x^k$, | 3) $f_k(x) = \left(1 + \frac{x}{k}\right)^k$, | 5) $f_k(x) = \sin \frac{x}{k}$, |
| 2) $f_k(x) = \frac{1}{1+kx}$, | 4) $f_k(x) = \frac{kx}{1+kx+x}$, | 6) $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}$. |

143. Otsustage, kas funktsionaaljada (f_k) koondub ühtlaselt antud intervallis.

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $f_k(x) = x^k, D = [0, 1]$; | 3) $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}, D = \mathbb{R}$; | 5) $f_k(x) = \frac{1}{1+kx}, D = [0, 1]$. |
| 2) $f_k(x) = x^k, D = [0, a], 0 < a < 1$; | 4) $f_k(x) = \sin \frac{x}{k}, D = \mathbb{R}$; | |

144. Leidke funktsionaalrea koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A . Kui võimalik, arvutage funktsionaalrea summa.

- | | | | |
|---|--|---|--|
| 1) $\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}$, | 5) $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln x)^k$, | 9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k(k+1)}$, | 13) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}$, |
| 2) $\sum_{k=0}^{\infty} (x-2)^k$, | 6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, | 10) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2x-1}}$, | 14) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, |
| 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$, | 7) $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$, | 11) $\sum_{k=1}^{\infty} (kx)^k$, | 15) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, |
| 4) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}$, | 8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^k}$, | 12) $\sum_{k=1}^{\infty} (\ln(1+x^2))^k$, | 16) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k2^k}$. |

145. Weierstrassi tunnuse abil tõestage funktsionaalrea ühtlane koonduvus antud intervallis.

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, [-1, 1]$; | 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}, [0, 4]$; | 5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + \arccos x}, [-1, 1]$; |
| 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin kx)}{\sqrt{k^3+1}}, (-\infty, \infty)$; | 4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}}, (-\infty, \infty)$; | 6) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k^2 x^2}}{k\sqrt{k}}, (-\infty, \infty)$. |

146. Leidke järgmised summad. (Põhjendage tehtavad sammud.)

$$1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k},$$

$$5) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k},$$

$$4) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!},$$

$$6) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}.$$

147. Leidke järgmised piirväärtused. (Põhjendage tehtavad sammud.)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{3^k},$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(k+1)},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^x}.$$

148. Arvutage nõutud suurused. (Põhjendage tehtavad sammud.)

$$1) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} \right) dx,$$

$$2) \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + n \cos nx}{5^n} \right) dx,$$

$$3) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \arccos \frac{x}{n+1},$$

leidke $f'(0)$.

149. Arendage järgmised funktsioonid f Maclaurini reaks ning leidke suurimad intervallid, kus f võrdub rea summaga.

$$1) f(x) = e^{2x};$$

$$4) f(x) = (\cos x)^2;$$

$$7) f(x) = \frac{1}{2-x};$$

$$2) f(x) = e^{-x^2};$$

$$5) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$8) f(x) = \frac{5-2x}{6-5x+x^2};$$

$$3) f(x) = \sin \frac{x}{2};$$

$$6) f(x) = \frac{x^9}{1-x};$$

$$9) f(x) = \ln(8+x);$$

150*. Kui funktsionaaljada (f_n) koondub hulgal A ühtlaselt funktsiooniks f , siis kirjutame $f_n \rightrightarrows_A f$. Kas iga hulga $A \subset \mathbb{R}$, funktsionaaljadade (f_n) ja (g_n) (kus $f_n, g_n: A \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) ja funktsioonide $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ korral kehtivad implikatsioonid

$$a) f_n \rightrightarrows_A f, g_n \rightrightarrows_A g \Rightarrow f_n + g_n \rightrightarrows_A f + g; \quad b) f_n \rightrightarrows_A f, g_n \rightrightarrows_A g \Rightarrow f_n \cdot g_n \rightrightarrows_A f \cdot g?$$

151*. Ütleme, et hulgal A määratud funktsionaaljada (f_n) koondub pidevalt hulgal A funktsiooniks f , kui iga $x \in A$ ja iga jada (x_n) korral hulgast A korral kehtib implikatsioon

$$\lim_n x_n = x \Rightarrow \lim_n f_n(x_n) = f(x).$$

Tõestage, et kui $f_n \rightrightarrows_A f$, siis (f_n) koondub pidevalt hulgas A . Kas kehtib ka vastupidine väide?

Vastused ja lahendusvihjed

1. a1) $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$; a2) $\delta = \varepsilon$, kasutades ka $|\sin x| \leq |x|$; a3) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; a4) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; a5) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{15}\right\}$; a6)

$\delta = \varepsilon$; a7) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; a8) $\delta = \min\left\{1, \frac{7\varepsilon}{2}\right\}$; a9) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{22}\right\}$; a10) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; a11) $\delta = \min\left\{1, \frac{3\varepsilon}{2}\right\}$;

a12) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$; a13) $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$; a14) $\delta = 2\varepsilon$; a15) $\delta = \varepsilon^2$; a16) $\delta = \varepsilon^2$; b1) $D = \frac{1}{4\varepsilon}$; b2) $D = \frac{5}{9\varepsilon}$; b3)

$D = \frac{5}{3\varepsilon} + \frac{2}{3}$; b4) $D = \frac{5}{\varepsilon} + 1$; b5) $D = \frac{32}{3\varepsilon}$; b6) $D = \frac{17}{3\varepsilon} + \frac{1}{3}$; c1) $D = E + 2$; c2) $D = E$; c3) $D = E$.

2. 1) $N = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$; 2) $N = \left\lfloor \frac{3}{5\varepsilon} \right\rfloor + 1$; 3) $N = \left\lfloor \frac{14}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$; 4) $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$; 5) $N = \left\lfloor \frac{13}{16\varepsilon} + \frac{3}{8} \right\rfloor + 1$; 6)

$N = \left\lfloor \frac{3}{20\varepsilon} + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1$.

3. 1) kui $a = 0$, siis $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, kui $a \neq 0$, siis $\delta = \min\left\{|a|, \frac{\varepsilon}{3|a|}\right\}$; 2) kui $a = 2$, siis $\delta = \varepsilon^2$, kui $a > 2$, siis

$\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{a-2}$; 3) kasutades võrratust $|\sin x| \leq |x|$, $\delta = \varepsilon$; 4) kasutades võrratust $\ln(1+x) \leq x$, $\delta = \varepsilon \cdot a$.

5. a1) $\frac{1}{2}$; a2) $-\frac{3}{2}$; a3) $\frac{1}{2}$; a4) 1; b1) 1; b2) $\frac{1}{12}$; b3) $\frac{2}{3}$; b4) $\frac{2}{3}$; b5) $\frac{1}{2}$; b6) $-\frac{1}{2}$; b7) $\frac{1}{2}$; b8) $-\frac{1}{12}$; c1) $\frac{4}{3}$; c2) 0; c3)

∞ ; c4) 1; c5) -1 ; c6) -1 ; d1) 1; d2) $\frac{7}{5}$; d3) $\frac{1}{2}$; d4) 5; d5) $\frac{7}{5}$; d6) $\frac{1}{2}$; d7) $\frac{1}{8}$; d8) -2 ; e1) 1; e2) -1 ; e3) 1; e4)

-1 ; e5) -1 ; e6) 1; e7) $-\infty$; e8) ∞ ; e9) 4; e10) -4 ; e11) 0; e12) 1; f1) e; f2) $\frac{1}{e}$; f3) e; f4) e^6 ; g1) 1; g2) 0; g3) ∞ ;

g4) 0; g5) $-\frac{7}{12}$.

6. 1) pidev kogu reaalteljel; 2) kui $a = 1$, siis pidev kogu reaalteljel, vastasel korral katkev punktis 1 ja pidev mujal; 3) katkev punktides 0 ja 1, mujal pidev; 4) katkev punktis $x = \frac{2}{3}$, mujal pidev.

7. 1) I liiki katkevus, ei ole kõrvaldatav; 2) I liiki kõrvaldatav katkevus, $f(0) = \frac{\pi}{2}$; 3) I liiki kõrvaldatav

katkevus, $f(0) = 0$; 4) I liiki kõrvaldatav katkevus, $f(0) = \frac{1}{10}$; 5) I liiki kõrvaldatav katkevus, $f(0) = e$; 6)

II liiki katkevus.

9. 1) $(x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$; 2) $(x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$; 3) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$;

4) $\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}$; 5) $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = -\frac{x-a}{ax}$; 6) $e^x - e^a = e^a \cdot (e^{x-a} - 1)$; 7) $\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$; 8) $b^x - b^a = b^a \cdot (b^{x-a} - 1)$.

10. a1) $3 \sin^2 x \cos x$; a2) $\frac{1}{\sin x \cos x}$; a3) $-2^{\cos x} \cdot \ln 2 \cdot \sin x$; a4) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; a5) $-\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$; a6) $e^x \cdot (\sin x +$

$\cos x)$; a7) $\frac{(x-1)e^x}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$; a8) $-(\sin x) \cdot \tan a$; a9) $a^x x^{a-1} (\ln a + a)$; a10) $\frac{2}{(x^2+1)^2}$; a11) $-\frac{2 \operatorname{sgn} x}{x^2+1}$; a12)

$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; a13) $\frac{1-x^2}{1+x^4}$; a14) $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$; a15) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$; a16) $\frac{8x+2}{4x^2+1}$; a17) $\arcsin x$; b1) $x^x(1 +$

$\ln x)$; b2) $(\cos x)^{\sin x} \left((\cos x) \ln \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right)$; b3) $\sqrt[3]{\frac{(x^2+4)^5(3x-1)^8}{9(6x^3+1)e^{\sin 5x}}} \cdot \left(\frac{10x}{x^2+4} + \frac{24}{3x-1} - \frac{36x^2}{6x^3+1} - 5 \cos 5x \right)$;

c1) $\operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$; c2) $2|x|$; c3) $\begin{cases} 3x^2-1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 2x, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$ c4) $\begin{cases} 2x, & \text{kui } x < 2, \\ 3x^2, & \text{kui } x > 2; \end{cases}$ c5) $\begin{cases} 2x, & \text{kui } x < 0, \\ \cos x, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$

- c6) $\begin{cases} -\sin x, & \text{kui } x < 0, \\ 4x^3, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$ c7) $\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos^2 x}, & \text{kui } x < 0, \\ \frac{1}{\cos^2 x}, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$ c8) $\begin{cases} 2(x-5), & \text{kui } x > 1, \\ -2xe^{1-x^2}, & \text{kui } x < 1; \end{cases}$ c9) $\begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}, & \text{kui } x > 0, \\ \frac{2}{x^2+1} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}, & \text{kui } x < 0; \end{cases}$
- c10) $\begin{cases} x^{x+1} \left(\frac{x+1}{x} + \ln x \right), & \text{kui } x > 0, \\ \frac{2^x}{\sqrt{3x^2+1}} \left(\ln 2 - \frac{3x}{3x^2+1} \right), & \text{kui } x < 0; \end{cases}$
11. 1) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 2) $3+2\ln x$; 3) $-2e^x \sin x$; 4) $\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\begin{cases} -2, & \text{kui } x < 0, \\ 2, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2, & \text{kui } x < 0, \\ 6x, & \text{kui } x > 0; \end{cases}$
- 7) $\begin{cases} 6x, & \text{kui } x < 0, \\ 12x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$ 8) $6x, \text{ kui } x \neq 0.$
14. a1) $8\sqrt{2}-2$; a2) $\frac{99}{10\ln 10}$; a3) -4 ; a4) $\frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + x \ln 2$; a5) 0 ; a6) $\frac{\pi}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$; a7) $1 - \frac{\pi}{4}$; a8) $\frac{\pi}{2}$; a9) $1 - \frac{\pi}{4}$; a10) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$; a11) $1 - \frac{\pi}{2}$; a12) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; a13) π ; b1) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}$; b2) $\frac{e^5}{5}(e^5-1)$; b3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b4) $\ln \frac{2}{\sqrt{3}}$; b5) π ; b6) $\frac{1}{6}$; b7) $\frac{11}{5}$; b8) $\ln 2$; b9) $\ln \sqrt{3}$; b10) 0 ; b11) $\sin 1$; b12) $\frac{e}{2}(e^2-1)$; b13) $\frac{\pi}{4}$; b14) $\frac{\pi}{24}$; b15) $\ln 2$; b16) $\frac{\ln 9}{3}$; b17) 0 ; b18) $\frac{\pi}{2}$; b19) $1 + \frac{\pi}{2}$; b20) 0 ; b21) $1 - \sin 1$; b22) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; b23) $\frac{\pi^4}{1024}$; b24) $\frac{2}{3}$; b25) $\frac{\pi}{2}$; b26) 1 ; b27) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$; b28) $\frac{1}{2}$; b29) $\frac{\pi}{4}$; b30) $-\arctan \frac{\pi}{4}$; c1) 2π ; c2) -2 ; c3) $6\ln 6 - 3\ln 3 - 3$; c4) $1 - \frac{2}{e}$; c5) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$; c6) -2π ; d1) $\pi^2 + 1$; d2) $2\pi^2 + \frac{1}{2}$.
15. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $2 - \frac{2}{e}$; 3) $\frac{1}{12}$.
16. 1) $\frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)$; 2) $\frac{e^2 + 1}{4}$; 3) $8a$.
18. 1) oletage, et a_1 ja a_2 on F nullelemendid ning vaadelge summat $a_1 + a_2$; 2) oletage, et b_1 ja b_2 on a vastandelemendid ning vaadelge summat $(b_1 + a) + b_2$; 3) näidake, et kui x rahuldab seost $a + x = b$, siis $x = b - a$ ning kui $x = b - a$, siis x rahuldab seost $a + x = b$; 4) näidake, et $(a + b) + (-a - b) = 0$.
19. Lahendusvõtted on analoogilised ülesandega 18.
20. 1) kasutage liitmise monotoonsust; 2) kasutage korrutamise monotoonsust, korrutades võrduse $a < b$ pooli elemendiga $-c > 0$ (miks kehtib $-c < 0$?); 3) kasutage korrutamise monotoonsust ja seda, et $0 \cdot a = 0$ (miks kehtib?); 4) $a + c < b + c < b + d$; 5) $ac < bc < bd$; 6) näidake, et $a^{-1} \leq 0$ annab vastuolu; 7) kasutage ülesannet 6) ja korrutamise monotoonsust; 8) tarvis on näidata, et $a + a < a + b < b + b$.
21. Oletage, et hulga X ülemised rajad on a ja b , siis kehtib $a < b$ või $a > b$. Vaatleme juhtu $a < b$; leidub element $x_0 \in X$ omadusega $a < x_0 \leq a$ (miks?). Vastuolu.
22. Olgu a hulga X suurim element, siis $a \in X$ ja $x \leq a$ iga $x \in X$ korral. Arvu a jaoks on $\sup X$ mõlemad tingimused täidetud (kontrollige!).
23. Hulga Y ülemiseks tõkkeks sobib $\lambda a + 1$. Lisaks sellele, olgu $b < \lambda a + 1$, siis $\lambda^{-1}(b - 1) < a$, mistõttu leidub x_0 omadusega $\lambda^{-1}(b - 1) < x_0$. Seega $b < \lambda x_0 + 1 =: y_0$.
24. Kõigepealt saame, et iga $y \in Y$ korral kehtib $\forall x \in X \leq y$. Seega iga $y \in Y$ korral $\sup X \leq y$. Järelikult $\sup X \leq \inf Y$.
- Alternatiiv: Kuna X ja Y on mittetühjad, siis hulkadele X ja Y leiduvad vastavalt ülemine ja alumine tõke. Olgu $a := \sup X$ ja $b := \inf Y$. Oletame, et $a > b$, siis arvu $\frac{a+b}{2}$ jaoks leiduvad $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$

omadusega $x_0 > \frac{a+b}{2} > y_0$, vastuolu.

25. 1) Kuna $0 \in X$ ja $0 \leq x$ iga $x \in X$ korral, siis $\min X = 0$ ja seega $\inf X = 0$. Saame, et $x \leq 1$ iga $x \in X$ korral. Kui d on hulga X ülemine tõke, siis $x \leq d$ iga $x \in X$ korral. Muuhulgas $1 - \frac{1}{n} \leq d$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, sest $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq X$. Siit järeldub, et $1 - d \leq \frac{1}{n}$. Kui kehtiks $d < 1$, siis $n \leq \frac{1}{1-d}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, vastuolu Archimedese printsiibiga. Järelikult $d \geq 1$ ning $\sup X = 1$.

Näeme, et $\max X$ ei eksisteeri. Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et $x_0 \in X$ on selline, et $x \leq x_0$ iga $x \in X$ korral. Siis $0 \leq x_0 < 1$ ning $0 \leq x_0 < \frac{x_0+1}{2} < 1$, vastuolu (korraga kehtib $x_0 < \frac{x_0+1}{2}$ ja $\frac{x_0+1}{2} \leq x_0$).

Alternatiiv: näitamaks, et $\sup X = 1$, märkame, et $x \leq 1$ iga $x \in X$ korral ning et iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $x_0 \in X$ nii, et $1 - \varepsilon < x_0$. Kui $\varepsilon \geq 1$, siis valime nt. $x_0 = \frac{1}{2}$, muul juhul aga $x_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Ülejäanud ülesannete lahenduskeemid on sarnased.

2) $\sup X = \max X = \frac{1}{5}$, $\inf X = 0$, $\min X$ ei eksisteeri;

3) $\inf X = \min X = 0$, $\sup X = 1$, $\max X$ ei eksisteeri;

4) $\sup X = \max X = \frac{3}{4}$, $\inf X = 0$, $\min X$ ei eksisteeri.

Märkus. Ül. 2) ja 3) (aga **mitte** 1) ega 4)) juures saab kasutada ka monotoonsusprintsipi. Jada liikmetega $x_n = \frac{1}{2n+3}$ on kahanev (sest $\frac{1}{2(n+1)+3} < \frac{1}{2n+3}$) ja alt tõkestatud (arvuga 0). Seega on see jada koonduv ja $\inf X = \lim x_n = 0$.

26. 1), 2), 3), 4) vaadeldge juhtusid $a \geq 0$ ja $a < 0$; 5) kui $|a| \leq c$, siis $-c \leq -|a| \leq -a \leq |a| \leq c$; kui aga $-c \leq a \leq c$, siis juhul $a \geq 0$ kehtib $|a| = a \leq c$ ning juhul $a < 0$ kehtib $|a| = -a \leq c$; 6), 7) väited järelduvad võrratustest $-|a| - |b| \leq a \pm b \leq |a| + |b|$; 8) väited järelduvad võrratustest $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$.

29. ja 31. $(x_n + y_n)$ hajub, muidu $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ koonduks; valides $x_n \rightarrow 0$ ja (y_n) hajuv tõkestatud, on $x_n \cdot y_n \rightarrow 0$, aga nt. $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = n^2$, on $x_n \cdot y_n = n$ hajuv.

30. $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, siis $x_n + y_n = 0$, $x_n \cdot y_n = -1$; $x_n = (-1)^n$, $y_n = n(-1)^n$, siis $x_n + y_n = (n+1)(-1)^n$, $x_n \cdot y_n = n$.

32. 1) kasutage jada piirväärtuse definitsiooni ja seost $n_k \geq k$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral; 2) $(-1)^n$.

33. 1) valige jada piirväärtuse definitsioonis näiteks $\varepsilon = a$; 2) valige $\varepsilon = -a$.

34. Kui jada (x_n) on tõkestatud, siis mingite $m, M \in \mathbb{R}$ korral $m \leq x_n \leq M$; tähistame $K = \max\{|m|, |M|\} + 1$, siis $-K < -|m| \leq -m \leq x_n \leq M \leq |M| < K$. Kui $|x_n| \leq K$, siis sobivad $m = -K$, $M = K$.

35. 1) jada piirväärtuse definitsioonis sobibki N rolli eelduses antud arv N ; 2) $(x_n) = (a, a+1, a, a+1, a, \dots)$.

36. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Eeldused $x_n \rightarrow a$ ja $y_n \rightarrow a$ annavad arvud K_1 ja K_2 nii, et $k \geq K_1 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$ ja $k \geq K_2 \Rightarrow |y_k - a| < \varepsilon$. Tähistame $N = 2 \max\{K_1, K_2\}$. Kui $n \geq N$ ja $n = 2k$, siis $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$; kui $n = 2k-1$, siis $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$.

37. 1) Oletame, et $a > b$. Valige $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$ definitsioonides näiteks $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, siis leidub N omadusega $x_N > \frac{a+b}{2} > y_N$. See on võimatu, sest $x_N \leq y_N$. 2) Kasutage ülesannet 1).

38. 1) Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kasutades $\lim_n x_n = \lim_n z_n = a$ definitsioone, leidke N omadusega: kui $n \geq N$, siis $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$. 2) Kasutage ülesannet 1).

39. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Koondumise $\lim_n \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$ kontrollimiseks vaatleme kõigepealt juhtu $a < b$, siis $\max\{a, b\} = b$. Kasutades $\lim_n x_n = a$ ja $\lim_n y_n = b$ definitsioone, leidke N omadusega:

kui $n \geq N$, siis $x_n < \frac{a+b}{2} < y_n$. Seega, kui $n \geq N$, siis $\max\{x_n, y_n\} = y_n$. Nüüd koondumise $\lim_n y_n = b$ põhjal leidke $N_1 \geq N$, et $|y_n - b| < \varepsilon$.

Juhul $a = b$ leidke antud koondumiste põhjal N , et kui $n \geq N$, siis $|x_n - a| < \varepsilon$ ja $|y_n - a| < \varepsilon$.

Alternatiiv: tõestage ja kasutage seoseid $\max\{u, v\} = \frac{u+v}{2} + \frac{|u-v|}{2}$, $\min\{u, v\} = \frac{u+v}{2} - \frac{|u-v|}{2}$, kus $u, v \in \mathbb{R}$.

40. Leidugu $K > 0$ omadusega $|y_n| \leq K$. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Valige koondumise $\lim_n x_n = 0$ arvu ε rolli meie $\frac{\varepsilon}{K}$.

41. 1) ja 2) $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$; 3) jada (x_n) on tõkestatud, seega mingi $K > 0$ korral $|x_n| \leq K$, edasi tasub vahele $x_n y_n - ab$ liita-lahutada $b x_n$; 4) kasutage ülesannet 3); 5) tõestage, et leidub N omadusega $n \geq N \Rightarrow |x_n| \leq \frac{|a|}{2}$, arvestades seost $a \neq 0$; 6) kasutage ülesandeid 3) ja 5).

42. a) Tarvis läheb võrratust $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$; b) $(-1)^n$; c) $|x_n| < \varepsilon$ ja $||x_n| < \varepsilon$ on samaväärsed tingimused.

43. Iga n korral saab leida arvu x_n näiteks a ja $a + \frac{1}{n}$ vahelt.

44. Kui $0 < |r| < 1$, siis tähistage $b = \frac{1}{|r|} - 1 > 0$ ja kasutage binoomvalemit $\frac{1}{|r|^n} = \frac{1}{(1+b)^n} > nb$, millest järeldage ülesande väide. Ilmselt $\lim_n 1^n = 1$ ja jada $(-1)^n$ hajub; juhul $|r| > 1$ tähistage $b = |r| - 1 > 0$, seega $|r|^n = (1+b)^n > nb$, millest järeldage, et $\lim_n |r|^n = \infty$.

45. Olgu $a > 1$, tähistage $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ ning veenduge binoomvalemi abil, et $\lim_n x_n = 0$. Juhul $0 < a < 1$ tähistage $b = \frac{1}{a} > 0$ ning kasutage just tõestatud väidet.

46. Kuna $\sqrt[n]{n} > 1$, siis $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$; binoomvalemist järeldage, et $n = (1+x_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$, mis annab, et $\lim_n x_n = 0$.

49. Tähistame $u_k = \inf\{x_n : n \geq k\}$. Ilmselt jada (u_k) on kasvav ja tõkestatud, seega koonduv ja piirväärtus on $\sup\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$, nagu vaja.

Võrratuse $\inf_n x_n \leq \liminf_n x_n$ tõestamiseks pange tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\inf\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \leq \inf\{x_k : k \geq n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks parema poole piirväärtus on lõplik?)

50. Olgu jada (y_n) osajada (y_{n_k}) selline, et $\lim_k y_{n_k} = \liminf_n y_n$. Nüüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. On jäänud kirjutada, et $\liminf_n x_n \leq \lim_j x_{n_{k_j}} \leq \lim_j y_{n_{k_j}} = \liminf_n y_n$.

Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k : k \geq n\} \leq \inf\{y_k : k \geq n\}$ kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)

51. Konstandiga korrutamine ei mõjuta (osa)jada koonduvust.

Alternatiiv: uurige $\inf\{c x_k : k \geq n\}$ ja $c \cdot \inf\{x_k : k \geq n\}$ või $c \cdot \sup\{x_k : k \geq n\}$ vahekorda.

52. Olgu jada $(x_n + y_n)$ osajada $(x_{n_k} + y_{n_k})$ selline, et $\lim_k (x_{n_k} + y_{n_k}) = \liminf_n (x_n + y_n)$. Nüüd leidke jadale (x_{n_k}) koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})$. Siis jada $(y_{n_{k_j}})$ on samuti koonduv. On jäänud kirjutada, et $\liminf_n x_n + \liminf_n y_n \leq \lim_j x_{n_{k_j}} + \lim_j y_{n_{k_j}} = \lim_j (x_{n_{k_j}} + y_{n_{k_j}}) = \liminf_n (x_n + y_n)$.

Alternatiiv: näidake, et $\inf\{x_k : k \geq n\} + \inf\{y_k : k \geq n\} \leq \inf\{x_k + y_k : k \geq n\}$ ning kasutage piirväärtuse monotoonsust. (Miks mõlemad piirväärtused on lõplikud?)

Teine võrratus järeldeb esimesest, kui vaadelda $\liminf_n (x_n + y_n) - \limsup_n y_n = \liminf_n (x_n + y_n) + \liminf_n (-y_n) \leq \liminf_n x_n$.

Näideteks sobivad: $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$ ning $x_n = y_n = (-1)^n$.

53. Kasutage seda, et $\lim_n x_n = \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$.

54. $x_{mp+k} = a_k$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{1, \dots, p\}$.

55. $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, \dots$, kindlasti esinevad (x_n) osapiirväärtustena jada (a_n) kõik osapiirväärtused.

56. 1) (n) ; 2) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots$; 3) ja 3) $\mathbb{Q}$ kõik elemendid jadana.

57. 1) $0, 1, 1, 1$; 2) $-3\frac{1}{2}, 5, -2, 2$; 3) $-1, 1\frac{1}{2}, 0, 1$; 4) $0, 2, 0, 2$; 5) $-\infty, \infty, -\infty, \infty$; 6) $-\infty, -1, -\infty, -\infty$; 7) $0, 1, 0, 0$; 8) $-5, \frac{5}{4}, 0, 0$.

58. 1) $\left\{-e \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, e, e \pm 1\right\}$ (pange tähele, et need on osajadade (x_{8k+p}) , kus $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, piirväärtused); 2) $\{0, 1\}$; 3) $\{0\}$; 4) $\{0, 1\}$; 5) $[0, 1]$ (pange tähele, et iga reaalarvu $\alpha \in [0, 1]$ korral saab hulgast $\left\{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ valida ratsionaalarvu $\frac{k}{n}$ nii, et $\left|\frac{k}{n} - \alpha\right| < \frac{1}{n}$); 6) $\{1, 5\}$.

61. Oletage, et $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $B = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, kus $A < B$. Funktsiooni piirväärtuse definitsioonis valige $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ ning seeläbi leidke x omadusega $f(x) < \frac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.

62. Oletage, et $A > B$. Valige antud koondumiste definitsioonides $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ ning leidke $x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$ omadusega $g(x) < \frac{A+B}{2} < f(x)$. Vastuolu.

63. Kasutage ülesannet 62.

64. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke δ nii, et kui $0 < |x - a| < \delta$, siis $A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$.

65. Kasutage funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 41.

66. Kasutage funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumit ning jadade omadusi ülesandest 41.

67. Tõestage, et $g(x) = x^n$ on pidev, $n \in \mathbb{N}$.

68. Olgu $a \in \mathbb{Q}$. Leidke jada $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ omadusega $\lim_n x_n = a$. Funktsiooni f pidevuse tõttu $0 = \lim_n 0 = \lim_n f(x_n) = f(a) = 1$, vastuolu. Analoomiline arutelu sobib juhtumil $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

69. Funktsioon f on pidev punktis 0, sest $-|x| \leq f(x) \leq x$; edasi kasutage ülesannet 64. Näitamaks, et f on katkev igas punktis $a \neq 0$, saab kasutada ülesande 68 lahenduse ideed.

70. 1), 2) kasutage Dirichlet' funktsiooni; 3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ kui } x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{2}, & \text{ kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

71. Kasutage võrratust $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$. Vastupidise väite vääramiseks vaadeldge funktsiooni $2D(x) - 1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

72. f on pidev kõigis vahemikes $(k-1, k)$, kus $k \in \mathbb{Z}$, paremalt pidev kõigis punktides $k \in \mathbb{Z}$ ja ei ole vasakult pidev üheski punktis $k \in \mathbb{Z}$.

73. f on katkev ainult punktis 0.

74. Olgu $x \in \mathbb{R}$, siis leidub jada $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ omadusega $\lim_n x_n = x$. Seega $f(x) = \lim_n f(x_n) = \lim_n g(x_n) = g(x)$.

75. 1) Veenduge, et $e^x > 2^x \geq x$. Teise võrratuse tõestamiseks näidake kõigepealt induktsiooniga, et $2^n \geq n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. 2) Kasutage osa 1) tulemust.

76. Kasutage pidevuse definitsiooni, võttes vastavalt $\varepsilon = f(a)$ või $\varepsilon = -f(a)$.

77. Koondumine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ annab arvu $D > 0$ omadusega $x > D \Rightarrow c - 1 < f(x) < c + 1$. Kuna f on pidev lõigus $[0, D + 1]$, siis on ta selles lõigus tõkestatud, mistõttu leiduvad m ja M omadusega $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [0, D + 1]$. Kokkuvõttes on $\min\{m, c - 1\}$ ja $\max\{M, c + 1\}$ arvud, mille vahel on f kõik väärtused intervallis $[0, \infty)$.

78. Kuna $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, siis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Seega $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

81. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$.

82. Kasutage tuletise definitsiooni ja funktsiooni piirväärtuse omadusi.

83. Kui $f(x) = \sin x$, siis $f'(0) = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$.

84. Kuna $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$, siis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ei eksisteeri.

85. $f'_-(0) = l$, $f'_+(0) = k$. Tuleti $f'(0)$ eksisteerib parajasti juhul $k = l$.

86. Dirichlet' funktsioon.

87. 1) $c = -1$; 2) $c = e - 1$.

88. $(-1, -1)$, $(1, 1)$.

89. Olgu $x, y \in (a, b)$ sellised, et $x < y$. Lagrange: leidub $c \in (x, y) \subseteq (a, b)$ omadusega $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$.

90. Kasutage ülesande 89 lahenduse ideed. Teistpidised implikatsioonid punktides 1), 2) ja 4) kehtivad tänu piirväärtuse monotoonsusele. Punktides 3) ja 5) teistpidised implikatsioonid ei kehti (vt. nt. $f(x) = x^3$).

91. Vaadelge funktsiooni $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ning näidake, et $g'(x) = 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.

92. Kasutage ülesannet 90 intervallide $(a - \delta, a]$ ja $[a, a + \delta)$ jaoks.

93. 1) f on rangelt kahanev intervallis $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, rangelt kasvav intervallis $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, range lokaalne miinimum punktis $\frac{1}{2}$; 2) f on rangelt kasvav intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[4, \infty)$, rangelt kahanev intervallis $[-1, 4]$, range lokaalne maksimum punktis -1 , range lokaalne miinimum punktis 4; 3) f on rangelt kahanev intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$, rangelt kasvav intervallis $[0, 2]$, range lokaalne miinimum punktis 0, range lokaalne maksimum punktis 2; 4) f on rangelt kahanev intervallis $(-\infty, 0]$ ja rangelt kasvav intervallis $(0, \infty)$; 5) f on rangelt kasvav kogu reaalteljel; 6) f on rangelt kasvav intervallides $\left[\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right]$

ja $[1, \infty)$, rangelt kahanev intervallides $\left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right]$ ja $(-\infty, -1]$, ranged lokaalsed maksimumid punktides $\frac{1}{2k}$, kus $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, ranged lokaalsed miinimumid punktides $\frac{1}{2k+1}$, kus $k \in \mathbb{Z}$; 7) f on rangelt kasvav kogu reaalteljel.

94. 1) Uurige funktsiooni $f(x) = e^x - (1 + x)$; 2) uurige funktsioone $f(x) = x - \sin x$ ja $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$; 3) uurige funktsioone $f(x) = x - \arctan x$ ja $g(x) = \arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$; 4) näidake, et $f(x) = x - \ln(1 + x)$ on hulgas $(-1, 0]$ kahanev ja hulgas $[0, \infty)$ kasvav ning $f(0) = 0$; 5) ja 6) analoogilised ülesandega 4), miinimumkohaks mõlemal 0.

95. 1), 2), Kasutage l'Hospitali reeglit; 3), 5) kasutage eksponent- ja logaritmfunktsiooni pidevust ja l'Hospitali reeglit; 4) taandage murdu avaldisega x ning kasutage seda, et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (miks?); 6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$96. (x-1)^5 + 3(x-1)^4 + 3(x-1)^3.$$

$$97. \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}}, \text{ kus } \xi \in (0, x), \text{ kusjuures } \left| -\frac{x^{10}}{10(\xi+1)^{10}} \right| \leq$$

$$\frac{1}{10}.$$

$$98. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ kus } \xi \text{ asub } 0 \text{ ja } x \text{ vahel; } \left| \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}, \text{ saame, et } \frac{e}{(6+1)!} < 0,001.$$

$$99. 1) \text{ Taylori valemi kohaselt } \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{(\cos \xi)x^5}{120}, \text{ kus } \xi \text{ asub } 0 \text{ ja } x \text{ vahel, seega } \left| \frac{(\cos \xi)x^5}{120} \right| \leq \frac{1}{3840};$$

$$2) \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac{5}{2}}}, \text{ kus } \xi \text{ asub } 0 \text{ ja } x \text{ vahel, seega } \left| \frac{x^3}{16(\xi+1)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{1}{16}.$$

103. Näidake, et arv $I^* - I_*$ rahuldab arvuhulga $\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}$ infimumi nõudeid.

104. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kui f on integreeruv, siis leidub arv I omadusega $\lambda(T) < \delta \Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma(T, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{4}$. Järelikult eeldusel $\lambda(T) < \delta$ kehtib $I - \frac{\varepsilon}{2} < s(T) \leq S(T) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, millest järeldub, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Vastupidi, kui $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral $0 \leq I^* - I_* \leq S(T) - s(T) < \varepsilon$, millest järeldub, et $I^* = I_* =: I$. Olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub $\delta > 0$ omadusega $\lambda(T) < \delta \Rightarrow S(T) - s(T) < \varepsilon$, mistõttu $I - \varepsilon < \sigma(T, \xi) < I + \varepsilon$.

105. a) Olgu f Darboux' integraalid I_* ja I^* ning g jaoks J_* ja J^* . Vaja on näidata, et $\sup\{s_{f \pm g}(T) : T \in \mathfrak{T}\} = \inf\{S_{f \pm g}(T) : T \in \mathfrak{T}\}$, eeldusel, et $I_* = I^*$ ja $J_* = J^*$. Näitame, et $\sup\{s_{f \pm g}(T) : T \in \mathfrak{T}\} \geq I_* + J_*$.

Fikseerime $\varepsilon > 0$, siis leiduvad alajaotused T_1 ja T_2 nii, et $s_f(T_1) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}$ ja $s_g(T_2) > J_* - \frac{\varepsilon}{2}$. Olgu $T = T_1 \cup T_2$, nüüd $s_f(T) \geq s_f(T_1) > I_* - \frac{\varepsilon}{2}$ ja $s_g(T) \geq s_g(T_2) > J_* - \frac{\varepsilon}{2}$. Kokkuvõttes $\sup\{s_{f \pm g}(T) : T \in \mathfrak{T}\} > I_* + J_* - \varepsilon$ ning ε on valitud suvaliselt.

b) Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke selline δ , et kui $\lambda(T) < \delta$, siis $\left| \sigma_f(T, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $\left| \sigma_g(T, \xi) - \int_a^b g(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Nüüd kasutage kolmnurga võrratust.

106. a) Juht $\lambda = 0$ on ilmne, sest alam- ja ülemsummad, aga siis ka alam- ja ülemintegraal on nullid. Paneme tähele, et kui $\lambda < 0$, siis $s_{\lambda f}(T) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \lambda f(x) \right) \Delta x_k = \lambda \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) \Delta x_k = \lambda S_f(T)$. Kui aga $\lambda > 0$, siis $s_{\lambda f}(T) = \lambda s_f(T)$. Ülesande lahendamiseks on nüüd jäänud kasutada supreeumi ja infimumi sobivat homogeensust.

b) Juhul $\lambda = 0$ on f kõik Riemanni summad võrdsed nulliga; kui $\lambda \neq 0$, siis kasutage f integreeruvuse definitsiooni, valides seal $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.

107. a) Olgu f Darboux' integraalid I_* ja I^* ning g jaoks J_* ja J^* . Eeldusel $I_* = I^*$ ja $J_* = J^*$ ning $f \leq g$ on vaja näidata, et (näiteks) $I_* \leq J_*$. Saame, et $s_f(T) = \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \right) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x) \right) \Delta x_k$, millest järeldub vajalik võrratus.

b) Tähistame $A = \int_a^b f(x) dx$ ja $B = \int_a^b g(x) dx$. Oletage, et $A > B$ ning kasutage integreeruvuse definitsioone, valides $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Leidke konkreetne (näiteks võrdsete pikkustega alalõikudega) alajaotus T ja konkreetne punktide ξ_k valik, mille korral $\sigma_f(T, \xi) > \sigma_g(T, \xi)$. See annab vastuolu, sest tingimus $f(x) \leq g(x)$ annab $\sigma_f(T, \xi) \leq \sigma_g(T, \xi)$ iga alajaotuse T korral.

108. a) Olgu f, g ja h Darboux' integraalid I_* ja I^* , J_* ja J^* ning K_* ja K^* . Eeldused on, et $I_* = I^* = K_* = K^* = I$ ning $f \leq h \leq g$. Kuna $s_f(T) \leq s_h(T) \leq s_g(T)$, siis $I_* \leq J_* \leq K_*$, analoogiliselt leiame, et $I^* \leq J^* \leq K^*$. Siit järeldub vajalik tulemus $J_* = I = J^*$.

b) Fikseerime $\varepsilon > 0$. Leidke $\delta > 0$ omadusega: kui $\lambda(T) < \delta$, siis $I - \varepsilon < \sigma_f(T, \xi) \leq \sigma_h(T) \leq \sigma_g(T) < I + \varepsilon$.

109. 1) $S(T) = 1$, $s(T) = 0$. 2) Oletades, et f on integreeruv, peab vahe $S(T) - s(T)$ olema väike ka ühtlase alajaotuse $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, korral, kui n on piisavalt suur. Saame, et $S(T) = 2$ ja $s(T) = \frac{0}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{2n} \leq \frac{1}{2}$. Seega $S(T) - s(T) \geq 1$. 3) Kasutage ül. 2) lahenduse ideed ja võrdust $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

110. sinc on pidev.

111. $f(x) = 2D(x) - 1$, kus D on Dirichlet' funktsioon.

112. Kuna antud funktsioonid on integreeruvad, võib integraali leida konkreetsetele (näiteks ühtlastele) alajaotustele vastavate integraalsummade piirväärtusena.

113. Integraali võib arvutada teatud konkreetsete alajaotuste T kaudu, kus $\lambda(T) \rightarrow 0$ (miks?). Eeldusel, et alajaotuse T jaotuspunktid ning valitud punktid ξ_k on nullpunkti suhtes sümmeetrilised, saame juhul 1) $\sigma(T) = 0$ ja juhul 2), et $\sigma(T) = 2\sigma'(T)$, kus $\sigma'(T)$ on lõigu $[0, a]$ alajaotusele vastav integraal-summa.

114. Tehes teisenduse $x \mapsto a + b - x$, peegeldatakse lõigu $[a, b]$ kõik punktid keskpunkti $\frac{a+b}{2}$ suhtes.

116. Oletame, et leidub punkt $x_0 \in [a, b]$ nii, et $f(x_0) > 0$. Kui $x_0 \in (a, b)$, siis f pidevuse tõttu leidub $\delta > 0$ omadusega $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. (Analoogiliselt käitume juhul, kui $x_0 = a$ või $x_0 = b$.)

Integraali aditiivsust ja monotoonsust kasutades leidke, et $\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) dx \geq \delta f(x_0) > 0$.
Vastuolu.

117. Rakendage ülesannet 116 funktsiooni $g - f$ jaoks.

118. Rakendage ülesannet 117.

119. 1) $\sin x^2 \leq x^2$, $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{2} = 1$; 2) $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \geq x$, $e^4 > 2$; 3) $\ln x \leq x - 1$, $\ln 2 < \ln e = 1$.

120. $-\frac{1}{4} \leq x^2 - x \leq 2$.

121. Diferentseerige valemit $\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$ muutuva x järgi.

122. 1) $\frac{1}{1+x}$. 2) Kuna funktsioon $F(x) = \int_0^{2x} f(t) dt$ (ja seega ka tuletisfunktsioon F') ei sõltu sellest, kuidas on defineeritud $f(0)$ (tähtis on ainult, et f oleks integreeruv lõigus otspunktidega 0 ja $2x$), siis valime f nii, et ta oleks pidev: $f(x) = \text{sinc } x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$ (Sageli kõrvaldatava katkevuse

korral integrandi kirjanepikul katkevuse kõrvaldamist eraldi ära näitama ei hakata.) Saame, et $F'(x) =$

$$2 \operatorname{sinc} 2x. 3) -\frac{2x}{\ln x^2}. 4) 2 (\ln 2x)^2 - (\ln x)^2. 5) -e^{\sin^2 x} \cos x - e^{\cos^2 x} \sin x.$$

$$124. \text{ Arvutage } \int_a^\infty \frac{K dx}{x^q}.$$

125. Kui f on tõkestamata punkti b vasakpoolses ümbruses, siis on majorant $\frac{K}{(b-x)^q}$.

126. Vaadelda tuleb olukorda $0 \leq \frac{K}{x^q} \leq f(x)$, kus q on selline, et $\int_a^\infty \frac{K dx}{x^q}$ hajub. Analoogiliselt juhul, kus päratu integraal leitakse lõigus $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

127. a1) $\frac{1}{8}$; a2) $\frac{1}{2}$; a3) $\frac{2}{\pi}$; a4) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; a5) integraal hajub; a6) $\frac{4}{3}$; a7) ∞ ; a8) integraal hajub; a9) -1 ; b1) $-\frac{4}{3}$; b2) $\frac{102}{7}$; b3) $\sqrt{3}$; b4) $\frac{1}{\ln 2}$; b5) integraal hajub; b6) π ; b7) integraal hajub; b8) π ; b9) -1 .

128. a1) koondub; a2) koondub; a3) hajub; a4) koondub; a5) hajub; a6) koondub; b1) koondub; b2) koondub; b3) koondub; b4) hajub; b5) koondub; b6) hajub.

$$131. u_k = s_k - s_{k-1}.$$

$$132. \text{ Avaldage osasummad } \sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k.$$

133. Osasummade jada on kasvav; $(-1)^n$.

134. 1) Väide kehtib. Näidake, et kui $\lim_k u_k = 0$, siis jada liikmetega $\frac{1}{u_k}$ on tõkestamata. Seega see jada hajub ning ei kehti rea koonduvuse tarvilik tingimus $\lim_k \frac{1}{u_k} = 0$. 2) Väide ei kehti: kontranäiteks sobib $u_k = 1, k \in \mathbb{N}$.

135. Kasutage ülesannet 133.

136. Kasutage Cauchy kriteeriumit ja kolmnurga võrratust.

Alternatiiv: koondugu rida $\sum_k 2|u_k|$, siis $0 \leq u_k + |u_k| \leq 2|u_k|$ ja I võrdlause tõttu koondub ka rida

$\sum_k (u_k + |u_k|)$, millest järeldub rea $\sum_k u_k$ koonduvus.

137. 1) $\lim_k \frac{k}{100k+1} = \frac{1}{100} \neq 0$; 2) $\lim_k |(-1)^k| = 1 \neq 0$, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;

alternatiiv: jada $((-1)^k)$ hajub, seega $\lim_k (-1)^k = 0$ ei kehti;

alternatiiv: osasummade jada on $(-1, 0, -1, \dots)$, mis hajub; 3) tähistame $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; oletades, et $\lim_n s_n =$

s , kehtib $0 = \lim_n (s_{2n} - s_n) \geq \frac{1}{2}$, vastuolu; 4), 5) analoogiline ülesandega 3).

138. 1) kasutage seost $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, summa on 1; 2) $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$, summa on $\frac{11}{18}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 2; 6) 12; 7) $\frac{3}{4}$; 8) eeldusel, et $|a| > \frac{1}{5}$ on summa $\frac{45a+1}{25a-5}$.

139. 1) koondub (I või II VL); 2) koondub (I või II VL); 3) koondub (I või II VL); 4) koondub (II VL); 5) hajub (II VL); 6) hajub (II VL); 7) koondub (II VL); 8) hajub (II VL); 9) koondub (Cauchy või d'Alembert); 10) hajub (Cauchy või d'Alembert); 11) koondub (Cauchy või d'Alembert); 12) koondub (Cauchy või d'Alembert); 13) hajub (II VL); 14) koondub (d'Alembert); 15) koondub (d'Alembert); 16) hajub (d'Alembert); 17) koondub (d'Alembert); 18) koondub (d'Alembert); 19) koondub (Leibniz); 20) koondub (Leibniz); 21) koondub (Leibniz); 22) hajub ($\lim_k \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$).

142. 1) $D = (-1, 1], f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in (-1, 1), \\ 1, & \text{kui } x = 1; \end{cases}$ 2) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 3) $D = \mathbb{R}, f(x) = e^x$;

4) $D = \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$ 5) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$; 6) $D = \mathbb{R}, f(x) = 0$.

143. 1) ei; 2) jah; 3) jah; 4) ei; 5) ei.

144. 1) $D = A = (-1, 1), S(x) = \frac{x}{1-x}$; 2) $D = A = (1, 3), S(x) = \frac{1}{3-x}$; 3) $D = A = (1, \infty)$; 4) $D = (0, \infty), A = (1, \infty)$; 5) $D = A = \left(\frac{1}{e}, e\right), S(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; 6) $D = [-1, 1), A = (-1, 1), S(x) = -\ln(1-x)$; 7) $D = A = (-1, 1),$

$S(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$; 8) $D = A = \mathbb{R}$; 9) $D = A = [0, 2], S(x) = 1 - \frac{x-2}{x-1} \ln(2-x)$; 10) $D = \left(\frac{1}{2}, \infty\right), A = (1, \infty)$; 11)

$D = A = \{0\}$; 12) $D = A = [0, \sqrt{e-1}), S(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \ln(1+x^2)}$; 13) $D = A = \mathbb{R}, S(x) = e^{x+2} - 1$; 14) $D = A = \mathbb{R},$

$S(x) = \operatorname{sh} x^2$; 15) $D = (-1, 1), A = (-1, 1), S(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$; 16) $D = [-4, 0), A = (-4, 0), S(x) = \ln \left(-\frac{2}{x} \right).$

145. 1) $\left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$; 2) $\left| \frac{\sin^2 kx}{\sqrt{k^3+1}} \right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 3) $\left| \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k} \right| \leq \frac{1}{k^2}$; 4) $\left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2+k^3}} \right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$; 5) $\left| \frac{1}{2^k + \arccos x} \right| \leq \frac{1}{2^k}$; 6) $\left| \frac{e^{-k^2 x^2}}{k\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}.$

146. 1) Geomeetiline rida, summa on 2.

2) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$, siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$
 Niisiis antud rea summa on 2.

3) Funktsionaalrida $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$ on astmerida koonduvusvahemikuga $(-1, 1)$. Saame, et kui $x \in (-1, 1)$, siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k = x \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^k \right)' = -\frac{x(x+1)}{(x-1)^3}.$$
 Niisiis antud rea summa on 6.

4) e^3 .

5) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

6) $\cos \frac{2\pi}{2} = 0$.

147. 1) Rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{2}$; 2) rida koondub ühtlaselt koguni hulgas $\mathbb{R}$, piirväärtus on $\frac{1}{3}$; 3) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \infty)$, piirväärtus on 1.

148. 1) rida koondub ühtlaselt hulgas $[\ln 2, \ln 3]$, integraal on $\frac{1}{2}$; alternatiivne lahendus on leida $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} =$

$$\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$
 ning võtta sellest integraal antud rajades; 2) rida koondub ühtlaselt hulgas $[0, \pi]$, integraal

$$\text{on } \frac{5\pi}{2}; 3) \text{ rida ise koondub punktiviisi ja tuletiste rida koondub ühtlaselt hulgas } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f'(0) = -2.$$

149. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}, \mathbb{R}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \mathbb{R}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}, \mathbb{R}$; 4) $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}, \mathbb{R},$

$$\text{kasutada valemit } (\cos x)^2 = \frac{1 + \cos 2x}{2}; 5) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, (-1, 1); 6) \sum_{n=0}^{\infty} x^n, (-1, 1); 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, (-2, 2); 8) \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}})x^n, (-2, 2); 9) \ln 8 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n8^n}, [-8, 8).$$