

Kodutöö nr. 4

2 punkti, tähtaeg 10.05.2017

1. Olgu L lihtne pidev sirgestuv joon. Sõnastage joonel L määratud funktsioonide f , g ja h esimest liiki joonintegraalide keskmise muutuja omadus. (Funktsioonidele f , g ja h pidevuse nõuet ega muid tarbetuid kitsendusi mitte peale panna!)

Tõestage see omadus ε - δ -keeles.

2. Leidke näide lihtsast pidevast sirgestuvast joonest $L \subset \mathbb{R}^2$ ning funktsioonidest $f, g, h : L \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ iga $(x, y) \in L$ korral, kusjuures $\int_L f \, dy = \int_L h \, dy$, aga $\int_L f \, dy \neq \int_L g \, dy$.
(Sellega saab näidatud, et teist järku joonintegraalil **ei ole** keskmise muutuja omadust!)

3. Olgu antud tõkestatud kahe muutuja funktsioon $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, kus R on mingi ristkülik ruumis $\mathbb{R}^2$. Olgu I^* ja I_* funktsiooni f vastavalt Darboux' ülemine ja alumine integraal ristkülikus R . Tõestage, et kehtib võrdus

$$I^* - I_* = \inf\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\}.$$

(NB! Ettevaatust! $\{S(T) - s(T) : T \in \mathfrak{T}\} \subset \{S(T) : T \in \mathfrak{T}\} + \{-s(T') : T' \in \mathfrak{T}\}$, aga vähemalt vahetult pole näha, et ka $\supset$.)

4. Olgu $R = [a, b] \times [c, d]$.

- Tooge näide funktsioonist $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et f on integreeruv ristkülikus R , aga tingimus "iga $\eta \in [c, d]$ korral leidub $\int_a^b f(x, \eta) dx$ " on rikutud.
- Tooge näide funktsioonist $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et iga $\eta \in [c, d]$ korral leidub $\int_a^b f(x, \eta) dx$, aga f pole integreeruv ristkülikus R .