

Kodutöö nr. 5

2 punkti, tähtaeg 24.05.2017

1. Olgu E keha, mis on piiratud pindadega $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ ja $z = 3$. Olgu Σ selle keha väliskülg ning Ω pinna Σ esimesse oktanti jääv osa. Leida pindintegraal

$$\iint_{\Omega} y^2 z \, dx \, dy + xz \, dy \, dz + x^2 y \, dz \, dx.$$

2. Tõestage, et funktsioon $F(x) = \int_0^3 \frac{\sin(tx)}{t\sqrt{3-t}} dt$ on pidev lõigul $[0, 5]$.

3. Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leidke integraal

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cdot \sin x \, dx,$$

kus $a > 0$, $b > 0$.

Näpunäide: Võib vajadusel eeldada, et (näiteks) $a < b$. Uurimisel, kas integraal $\int_1^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cdot \sin x \, dx$ punktiviisi koondub, tasub integrandi võrrelda näiteks $\frac{\sin x}{xe^{ax}}$ -ga, mis on omakorda vajadusel hästi võrreldav $\frac{1}{ax^2}$ -ga.

4. Arendage funktsioon $f(x) = \frac{\pi^2}{2} - x^2$, $x \in [0, \pi]$, siinusreaks. (St. jätkake f paaritult viisil lõigule $[-\pi, \pi]$ ning leidke saadud jätku Fourier' rida lõigul $[-\pi, \pi]$.) Uurige rea koonduvust lõigul $[0, \pi]$.

Olgu $s_n(x)$ selle siinusrea n -nes osasumma ning $\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n}$. Joonistage lõigul $[-5, 5]$ graafik, millel oleks toodud funktsioonid f , s_{10} , s_{100} , ning samas lõigul teine graafik, millel oleks toodud funktsioonid f , σ_{10} , σ_{100} .