

3. Kasutades diferentseerimist parameetri järgi, leidke integraal

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cdot \sin x \, dx,$$

kus $a > 0$, $b > 0$.

Lahendus. Olgu $0 < a < b$. (Vastupidine juht on sümmeetriline, juhul $a = b$ on $I(a, a) = 0$.) Fikseerime lõigu $[\alpha, \beta]$ nii, et $0 < \alpha < a < \beta < b$. Defineerime funktsiooni

$$f(a, x) = \begin{cases} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cdot \sin x, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0, \end{cases} \quad (a, x) \in [\alpha, \beta] \times [0, \infty).$$

Et viia läbi diferentseerimine integraali märgi all, tuleb kontrollida üle Teoreemi 13.10 eeldused:

- 1) f on pidev hulgas $[\alpha, \beta] \times [0, \infty)$;
- 2) $\frac{\partial f}{\partial a}$ on pidev hulgas $[\alpha, \beta] \times [0, \infty)$;
- 3) integraal $\int_0^\infty f(a, x) \, dx$ koondub punktiivsi lõigus $[\alpha, \beta]$;
- 4) integraal $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a} \, dx$ koondub ühtlaselt lõigus $[\alpha, \beta]$.

1) Ilmselt f on pidev punktides $(a, x) \in [\alpha, \beta] \times (0, \infty)$. Vaatleme nüüd punkti $(a, 0)$. Saame, et

$$\lim_{(a', x) \rightarrow (a, 0)} e^{-a'x} = 1, \quad \lim_{(a', x) \rightarrow (a, 0)} (1 - e^{-(b-a')x}) = 0, \quad \lim_{(a', x) \rightarrow (a, 0)} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

mistõttu

$$\lim_{(a', x) \rightarrow (a, 0)} f(a', x) = \lim_{(a', x) \rightarrow (a, 0)} e^{-a'x} \cdot (1 - e^{-(b-a')x}) \cdot \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = f(a, 0).$$

Oleme saanud, et f on pidev hulgas $[\alpha, \beta] \times [0, \infty)$.

2) Kui $x \neq 0$, siis $\frac{\partial f}{\partial a}(a, x) = -e^{-ax} \sin x$. Kui $x = 0$, siis osatuletise definitsiooni kohaselt $\frac{\partial f}{\partial a}(a, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, 0) - f(a, 0)}{h} = 0$. Kokkuvõttes

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, x) = -e^{-ax} \sin x, \quad (a, x) \in [\alpha, \beta] \times [0, \infty).$$

Ilmselt on see pidev kahe muutuja funktsioon.

3) Peame veenduma, et integraal $\int_0^\infty f(a, x) \, dx$ koondub iga $a \in [\alpha, \beta]$ korral (punktiviisi koonduvus). Integraal $\int_0^1 f(a, x) \, dx$ on Riemanni integraal. Näitame, et $\int_1^\infty f(a, x) \, dx$ koondub iga a korral. Saame, et olukorras $x \geq 1$ kehtib

$$\left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cdot \sin x \right| = \left| \frac{1}{xe^{ax}} - \frac{1}{xe^{bx}} \right| \cdot |\sin x| = \left(\frac{1}{xe^{ax}} - \frac{1}{xe^{bx}} \right) \cdot |\sin x| \leq \frac{1}{xe^{ax}} \leq \frac{1}{ax^2}.$$

Päratu integraal $\int_1^\infty \frac{dx}{ax^2} = \frac{1}{a}$ koondub. Päratute integraalide I võrdluslause põhjal integraal $\int_0^\infty f(a, x) dx$ koondub iga a korral absoluutselt, seega Lause 13.6 põhjal ta koondub.

4) Lõpuks peame veenduma, et integraal $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) dx$ koondub ühtlaselt lõigul $[\alpha, \beta]$. Saame, et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) \right| = \frac{|\sin x|}{e^{ax}} \leq \frac{1}{e^{\alpha x}}.$$

Majorandist integraal koondub, sest $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\alpha x}} = \frac{1}{\alpha}$. Weierstrassi tunnuse põhjal koondub integraal $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) dx$ ühtlaselt lõigul $[\alpha, \beta]$.

Tähistanud $F(a) = \int_0^\infty f(a, x) dx$, võime ositi integreerimise abil kirjutada, et

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) dx = \int_0^\infty (-e^{-ax} \sin x) dx = \frac{e^{-ax}(a \sin x + \cos x)}{1 + a^2} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

Järelikult

$$I(a, b) = F(a) = -\arctan a + C$$

Lähteavaldise põhjal teame, et $F(b) = I(b, b) = 0$, millest jäeldub, et $C = \arctan b$. Kokkuvõttes

$$I(a, b) = \arctan b - \arctan a.$$