

# Fourier' read

Olgu  $f$  lõigus  $[-\pi, \pi]$  määratud tükiti pidev funktsioon.

**Def.** Trigonomeetrilist rida  $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ , kus

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

nim. funktsiooni  $f$  **Fourier reaks lõigus  $[-\pi, \pi]$** , kirjutatakse

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Kas see rida koondub? Kas rea summa on  $f(x)$ ?

## Teoreem (Riemann-Lebesgue'i lemma)

*Kui funktsioon  $f$  on tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel, siis*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

## Teoreem (Riemann-Lebesgue'i lemma)

*Kui funktsioon  $f$  on tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel, siis*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

**Tõestus.** Näitame ainult esimese integraali jaoks. Olgu  $\varepsilon > 0$  antud.

Valime  $R > 0$  nii, et  $\left( \int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

Siis  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \leq \left| \int_{-R}^R f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4}$ .

## Teoreem (Riemann-Lebesgue'i lemma)

*Kui funktsioon  $f$  on tükiti pidev ja absoluutselt integreeruv kogu reaalteljel, siis*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

**Tõestus.** Näitame ainult esimese integraali jaoks. Olgu  $\varepsilon > 0$  antud.

Valime  $R > 0$  nii, et  $\left( \int_{-\infty}^{-R} + \int_R^{\infty} \right) |f(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

Siis  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \leq \left| \int_{-R}^R f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4}$ .

Olgu  $a_1, \dots, a_n$  funktsiooni  $f$  katkevuspunktid vahemikus  $(-R, R)$ , olgu  $a_0 = -R$  ja  $a_{n+1} = R$ . Siis  $f$  on ühtlaselt pidev lõikudes  $[a_j, a_{j+1}]$ .

$\exists \delta > 0$ :  $x_1, x_2 \in [a_j, a_{j+1}]$ ,  $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{8R}$ .

Valime  $a_j = b_{j,0} < b_{j,1} < \dots < b_{j,m_j} = a_{j+1}$ :  $b_{j,k+1} - b_{j,k} < \delta$ ,  
 $k = 0, \dots, m_j - 1$ .

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| &\leq \left| \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\
&\leq \left| \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} f(b_{j,k}) \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} \cos \lambda x \, dx \right| + \\
&\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} \int_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} |f(x) - f(b_{j,k})| |\cos \lambda x| \, dx + \frac{\varepsilon}{4} < \\
&< \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j-1} |f(b_{j,k})| \left| \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \right|_{b_{j,k}}^{b_{j,k+1}} + \frac{\varepsilon}{8R} \cdot 2R + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\
&\leq N \max_{j=0, \dots, n, k=0, \dots, m_j-1} |f(b_{j,k})| \frac{2}{|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kui  $|\lambda| > N \max_{x \in [-R, R]} |f(x)| 4/\varepsilon$  (siin  $N$  on punktide  $b_{j,k}$  arv).

## Järeldus

*Kui funktsioon  $f$  on lõigus  $[-\pi, \pi]$  tükiti pidev, siis tema Fourier' kordajad rahuldavad tingimusi*

$$\lim_k a_k = \lim_k b_k = 0.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

# Dirichlet' integraal

Olgu  $f$  tükiti pidev lõigul  $[-\pi, \pi]$  ning olgu  $s_n$  funktsiooni  $f$  Fourier' rea osasumma:

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

## Lause (Dirichlet' integraal)

*Funktsiooni  $f$  osasumma avaldub integraalina*

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) D_n(u) du,$$

*kus*

$$D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}}.$$

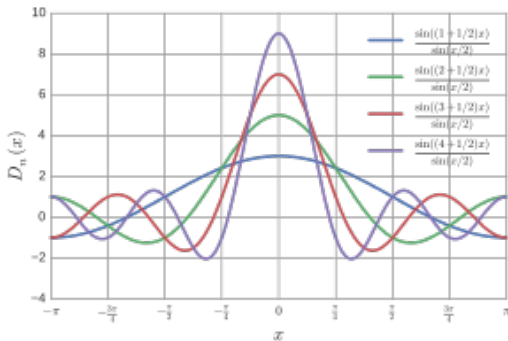
**Def.** Funktsiooni  $D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$  nim. **Dirichlet' tuumaks.**

**Omadusi:**

1)  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(u) du = 1;$

2)  $\lim_{u \rightarrow 0} D_n(u) = n + \frac{1}{2};$

3)  $D_n$  on  $2\pi$ -perioodiline.



# Fourier' rea koonduvus

## Teoreem (Fourier' rea koonduvus)

*Olgu  $f$  lõigus  $[-\pi, \pi]$  tükiti pidev  $2\pi$ -perioodiline funktsioon. Kui punktis  $x \in (-\infty, \infty)$  on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised*

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \text{ ja } f'_-(x) = \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

*siis funktsiooni  $f$  Fourier' rida koondub punktis  $x$  summaks*  
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

# Fourier' rea koonduvus

## Teoreem (Fourier' rea koonduvus)

*Olgu  $f$  lõigus  $[-\pi, \pi]$  tükiti pidev  $2\pi$ -perioodiline funktsioon. Kui punktis  $x \in (-\infty, \infty)$  on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised*

$$f'_+(x) = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \text{ ja } f'_-(x) = \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

*siis funktsiooni  $f$  Fourier' rida koondub punktis  $x$  summaks*  
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

## Järeldus

*Olgu  $2\pi$ -perioodiline funktsioon  $f$  lõigus  $[-\pi, \pi]$  tükiti pidev. Kui ta on punktis  $x$  pidev ja tal on selles punktis lõplikud ühepoolsed tuletised, siis tema Fourier' rida koondub selles punktis summaks  $f(x)$ .*

# Funktsioonide arendamine Fourier' reaks

1. Kui  $f$  on paarisfunktsioon, s.t.  $f(-x) = f(x)$ , siis  $b_k = 0$  iga  $k = 1, 2, \dots$  korral ja  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ .

Kui  $f$  on paaritu funktsioon, siis  $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ .

2. Kui  $f$  pole perioodiline, siis defineerime  $g(x) := f(x)$  iga  $x \in (-\pi, \pi]$  korral, ning  $g(x + 2\pi) = g(x)$  iga  $x \in (-\infty, \infty)$  korral. Siis  $f$  ja  $g$  Fourier' read on samad ning Fourier' rea koonduvusteoreemi saame kasutada  $g$  jaoks.
3. Olgu  $f$  määratud lõigus  $[0, \pi]$ . Kui defineerime  $f(x) = f(-x)$ , kui  $x \in [-\pi, 0)$ , siis saame lõigus  $[-\pi, \pi]$  paarisfunktsiooni, mille Fourier' rida koosneb vaid koosinusliikmetest. Kui defineerime  $f(x) := -f(-x)$  ( $x \in [-\pi, 0)$ ), siis saame lõigus  $[-\pi, \pi]$  paaritu funktsiooni, mille Fourier' rida sisaldab vaid siinusliikmeid. Neid ridu nim. vastavalt funktsiooni  $f$  **koosinus-** ja **siinusreaks**.

4. Olgu funktsioon  $f$  määratud mingis lõigus  $[-l, l]$ , kus  $l > 0$ .  
Tähistame  $t := \frac{\pi x}{l}$  ja  $F(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$ . Arendame  $F$  Fourier' ritta ning läheme tagasi esialgsele muutujale  $x$ , saame

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{\pi}{l} x + b_k \sin k \frac{\pi}{l} x,$$

$$\text{kus } a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos k \frac{\pi}{l} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ ja}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin k \frac{\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

# Fejéri teoreem

Saab näidata, et iga punkti  $x \in [-\pi, \pi]$  puhul saab leida sellise pideva  $2\pi$ -perioodilise funktsiooni  $f$ , mille Fourier' rida selles punktis hajub.

# Fejéri teoreem

Saab näidata, et iga punkti  $x \in [-\pi, \pi]$  puhul saab leida sellise pideva  $2\pi$ -perioodilise funktsiooni  $f$ , mille Fourier' rida selles punktis hajub.

## Teoreem (Fejér)

*Iga pideva  $2\pi$ -perioodilise funktsiooni  $f$  Fourier' rea osasummade*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

*aritmeetiliste keskmiste*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} (s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$$

*jada  $(\sigma_n)$  koondub piirväärtuseks  $f$  ühtlaselt kogu arvteljel  $(-\infty, \infty)$ .*

## Lause (Fejéri tuum)

*Funktsiooni  $f$  osasummade aritmeetilised keskmised avalduvad integraalina*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u)) F_n(u) du,$$

*kus*

$$F_n(u) = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2.$$

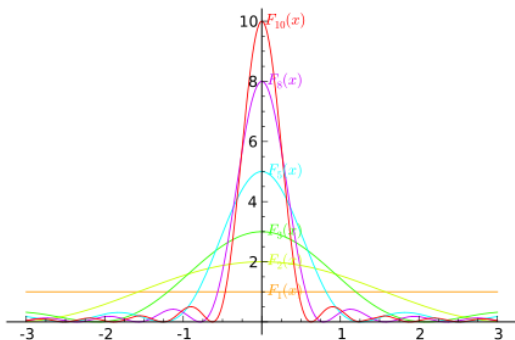
**Def.** Funktsiooni  $F_n(u) = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2$  nim. **Fejéri tuumaks.**

**Omadusi:**

1)  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(u) du = 1;$

2)  $\lim_{u \rightarrow 0} F_n(u) = \frac{n}{2};$

3)  $F_n$  on  $2\pi$ -perioodiline.



## Teoreem (Weierstrassi teine lähendusteoreem)

*Kui lõigus  $[-\pi, \pi]$  pidev funktsioon  $f$  on omadusega  $f(-\pi) = f(\pi)$ , siis iga positiivse arvu  $\varepsilon$  korral leidub selline trigonomeetrilise polünoomi  $T$ , et*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \text{ iga } x \in [-\pi, \pi] \text{ puhul.}$$

# Fourier' rea komplekskuju

**Def.**  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Olgu  $f$  lõigus  $[-\pi, \pi]$  määratud tükiti pidev funktsioon, mis võib olla nii reaali- kui ka kompleksväärtustega.

**Def.** Rida  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ , kus

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

nim. funktsiooni  $f$  **Fourier reaks komplekskujul lõigus  $[-\pi, \pi]$** , kirjutatakse

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx - i \sin kx) dx = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k \geq 0$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx + i \sin kx) dx = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \geq 0.$$