

Parameetrist sõltuvad integraalid

Def. Parameetrist sõltuvaks integraaliks nim. integraale kujul

$$F(x) = \int_c^d f(x, t) dt,$$

kus integraal võib olla nii tavaline Riemanni integraal kui ka pööratud integraal.

Olgu funktsioon f määratud kinnises ristkülikus

$$D := [a, b] \times [c, d] := \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}.$$

Lause

Kui kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis ka funktsioon $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev.

Lause

Kui kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

Lause

Olgu funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidev ja olgu tal ristkülikus D pidev osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$. Siis funktsioon F on lõigus $[a, b]$ pidevalt diferentseeruv ja

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Parameetrist sõltuvad päratud integraalid

Olgu $F(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ ning olgu see integraal päratu.

Kui $f(x, \cdot)$ on tõkestamata d (või c) ümbruses ja pidev poollõigis $[c, d)$, siis teeme muutujavahetuse $z := \frac{1}{d-t}$, ehk $t = d - \frac{1}{z}$. Siis $dt = \frac{dz}{z^2}$ ning $F(x) = \int_{\frac{1}{d-c}}^{\infty} f\left(x, d - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz$. Kui koondub üks neist kahest päratust integraalist, siis koondub ka teine.

Parameetrist sõltuvad päratud integraalid

Olgu $F(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ ning olgu see integraal päratu.

Kui $f(x, \cdot)$ on tõkestamata d (või c) ümbruses ja pidev poollõigis $[c, d)$, siis teeme muutujavahetuse $z := \frac{1}{d-t}$, ehk $t = d - \frac{1}{z}$. Siis $dt = \frac{dz}{z^2}$ ning $F(x) = \int_{\frac{1}{d-c}}^{\infty} f\left(x, d - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz$. Kui koondub üks neist kahest päratust integraalist, siis koondub ka teine.

Edaspidi vaatleme päratut integraali vaid kujul

$$F(x) := \int_c^{\infty} f(x, t) dt.$$

Päratu integraali omadused on väga sarnased ridade omadustega ja parameetrist sõltuva päratu integraali omadused on väga sarnased funktsionaalride omadustega.

Parameetrist sõltuva päratu integraali koonduvus

Olgu kahe muutuja funktsioon f määratud hulgas

$$D := [a, b] \times [c, \infty) = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t < \infty\}.$$

Def. Kui iga $x \in [a, b]$ korral päratu integraal $\int_c^\infty f(x, t) dt$ on koonduv, siis öeldakse, et päratu parameetrist sõltuv integraal **koondub punktiviisi lõigus $[a, b]$** .

Siis $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_l^\infty f(x, t) dt = 0$ iga $x \in [a, b]$ korral, s.t.

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists l_0 = l_0(x, \varepsilon) > c : l > l_0 \Rightarrow \left| \int_l^\infty f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Def. Öeldakse, et parameetrist x sõltuv päratu integraal **koondub lõigus $[a, b]$ ühtlaselt**, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists l_0 = l_0(\varepsilon) > c : l \geq l_0 \Rightarrow \left| \int_l^\infty f(x, t) dt \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Päratu integraali koonduvus

Lause (Cauchy kriteerium päratu integraali koonduvuseks)

Olgu $g: [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et iga $l \geq c$ korral eksisteerib $\int_c^l g(t)dt$. Päratu integraal $\int_c^\infty g(t)dt$ koondub parajasti siis, kui kehtib Cauchy tingimus

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l_0 \geq c \quad : \quad \forall l, l' \quad l, l' \geq l_0 \Rightarrow \left| \int_l^{l'} g(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Päratu integraali koonduvus

Lause (Cauchy kriteerium päratu integraali koonduvuseks)

Olgu $g: [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et iga $l \geq c$ korral eksisteerib $\int_c^l g(t)dt$. Päratu integraal $\int_c^\infty g(t)dt$ koondub parajasti siis, kui kehtib Cauchy tingimus

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l_0 \geq c \quad : \quad \forall l, l' \quad l, l' \geq l_0 \Rightarrow \left| \int_l^{l'} g(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Lause (Abs. koonduvus ja koonduvus)

Koondugu päratu integraal $\int_c^\infty |g(t)|dt$. Siis päratu integraal $\int_c^\infty g(t)dt$ koondub.

Järgnevalt eeldame, et iga $I \in [c, \infty)$ ja $x \in [a, b]$ korral leidub Riemanni integraal $\int_c^I f(x, t) dt$.

Lause (Cauchy kriteerium parameetrist sõltuva päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks)

Parameetrist sõltuv päratu integraal $F(x) := \int_c^\infty f(x, t) dt$ koondub lõigul $[a, b]$ ühtlaselt parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l_0 : \quad \forall x \in [a, b] \quad I, I' \geq l_0 \Rightarrow \left| \int_I^{I'} f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Järgnevalt eeldame, et iga $l \in [c, \infty)$ ja $x \in [a, b]$ korral leidub Riemanni integraal $\int_c^l f(x, t) dt$.

Lause (Cauchy kriteerium parameetrist sõltuva päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks)

Parameetrist sõltuv päratu integraal $F(x) := \int_c^\infty f(x, t) dt$ koondub lõigus $[a, b]$ ühtlaselt parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists l_0 : \quad \forall x \in [a, b] \quad l, l' \geq l_0 \Rightarrow \left| \int_l^{l'} f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

Lause (Weierstrassi koonduvustunnus)

Olgu $g: [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et päratu integraal $\int_c^\infty g(t) dt$ koondub. Kui $|f(x, t)| \leq g(t)$ iga $x \in [a, b]$ ja $t \in [c, \infty)$ korral, siis päratu integraal $\int_c^\infty f(x, t) dt$ koondub ühtlaselt lõigus $[a, b]$.

Päratu parameetrist sõltuva integraali põhiomadused

Teoreem (Päratu parameetrist sõltuva integraali pidevus)

Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidev kahe muutuja funktsioon ning koondugu integraal $F(x) = \int_c^\infty f(x, t) dt$ ühtlaselt lõigus $[a, b]$. Siis funktsioon $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev.

Teoreem (Päratu parameetrist sõltuva integraali integreeruvus)

Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidev kahe muutuja funktsioon ning koondugu integraal $F(x) = \int_c^\infty f(x, t) dt$ ühtlaselt lõigus $[a, b]$. Siis funktsioon $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv ja

$$\int_a^b \left(\int_c^\infty f(x, t) dt \right) dx = \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

Teoreem (Päratu parameetrist sõltuva integraali diferentseeruvus)

Olgu f ja tema osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ pidevad kahe muutuja funktsioonid hulgas D ning koondugu integraal $F(x) = \int_c^\infty f(x, t) dt$ punktiviisi lõigus $[a, b]$. Kui integraal $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ koondub ühtlaselt lõigus $[a, b]$, siis funktsioon $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidevalt diferentseeruv ja kehtib Leibnizi valem

$$F'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Euleri integraalid

Def. Euleri beetafunktsiooniks ehk Euleri I liiki integraaliks nim. integraali

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad a, b > 0$$

ning Euleri gammafunktsiooniks ehk Euleri II liiki integraaliks nim. integraali

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \alpha > 0.$$

$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad a, b > 0.$$

Beetafunktsiooni omadusi

1. Sümmeetria: $\mathbf{B}(a, b) = \mathbf{B}(b, a)$.
2. Taandamisvalem: $\mathbf{B}(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} \mathbf{B}(a, b-1), \quad a > 0, b > 1.$
3.
$$\mathbf{B}(a, n) = \frac{(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-2) \cdots (a+1)a}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{B}(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$
4.
$$\mathbf{B}(a, b) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}} du, \quad \mathbf{B}(a, 1-a) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du.$$
5. Seos beeta- ja gammafunktsiooni vahel: $\mathbf{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0.$$

Gammafunktsiooni omadusi

1. $\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \ln^n t dt, \alpha > 0.$
2. Taandamisvalem: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \alpha > 0; \Gamma(n + 1) = n!.$
3. Euler-Gaussi valem: $\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}.$
4. Stirlingi valem: $\Gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right),$ kui $\alpha \rightarrow \infty.$
5. Peegeldusvalem: $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, 0 < \alpha < 1.$