

Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_m)$ hulga D sisepunkt. Olgu $j \in \{1, \dots, m\}$.

Def. Kui leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_j + h, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{h},$$

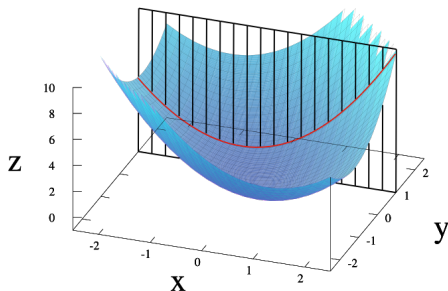
siis seda nimetatakse mitme muutuja funktsiooni f osatuletiseks muutuja x_j järgi punktis $\mathbf{A}$, tähistatakse

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_m), \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{A}), \quad f_{x_j}(a_1, \dots, a_m), \quad f_{x_j}(\mathbf{A}).$$

Osatuletise geomeetriline tähendus

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad g(x) := f(x, 1) = x^2 + x + 1$$

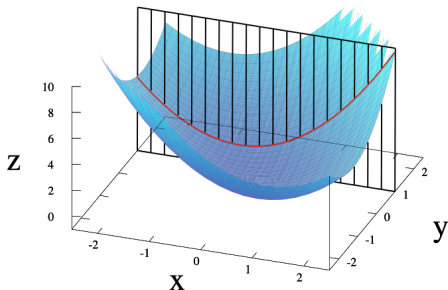
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = g'(1)$$



Osatuletise geomeetriline tähendus

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad g(x) := f(x, 1) = x^2 + x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = g'(1)$$



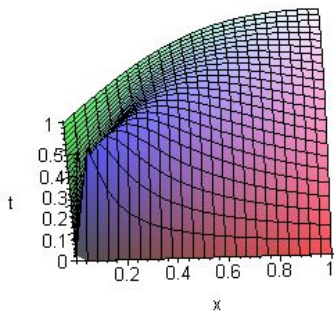
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ on tasandil $y = b$ paikneva joone $z = f(x, b)$ puutuja tõus,
 $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ on tasandil $x = a$ paikneva joone $z = f(a, y)$ puutuja tõus.

NB! Erinevalt ühe muutuja juhust osatuletiste olemasolu ei garanteeri funktsiooni pidevust.

Näide. $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

NB! Erinevalt ühe muutuja juhust osatuletiste olemasolu ei garanteeri funktsiooni pidevust.

Näide. $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$



Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_m)$ hulga D sisepunkt. Olgu Δf funktsiooni muut, mis vastab argumentide muudule vastavalt $h_1, \dots, h_m$, s.t

$$\Delta f = f(a_1 + h_1, \dots, a_m + h_m) - f(a_1, \dots, a_m).$$

Def. Funktsiooni f nim. **diferentseeruvaks punktis $\mathbf{A}$** , kui leiduvad arvud $M_1, \dots, M_m$, mis ei sõltu argumentide muutudest $h_1, \dots, h_m$ nii, et

$$\Delta f = M_1 h_1 + \dots + M_m h_m + \alpha,$$

kus $\alpha = \alpha(h_1, \dots, h_m) = o(\|(h_1, \dots, h_m)\|)$ protsessis $(h_1, \dots, h_m) \rightarrow 0$, s.t.

$$\lim_{(h_1, \dots, h_m) \rightarrow 0} \frac{\alpha(h_1, \dots, h_m)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2}} = 0.$$

Lause

*Punktis **A** diferentseeruv funktsioon on pidev punktis **A**.*

Lause

Punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv funktsioon on pidev punktis $\mathbf{A}$.

Lause

Punktis $\mathbf{A}$ diferentseerual funktsioonil leiduvad selles punktis lõplikud osatuletised, kusjuures

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) h_m + \alpha.$$

Lause

*Punktis **A** diferentseeruv funktsioon on pidev punktis **A**.*

Lause

*Punktis **A** diferentseerual funktsioonil leiduvad selles punktis lõplikud osatuletised, kusjuures*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) h_m + \alpha.$$

Lause

*Kui funktsioonil f leiduvad punkti **A** mingis ümbruses kõik osatuletised, mis on pidevad punktis **A**, siis f on diferentseeruv punktis **A**.*

NB! Osatuletiste pidevus ei ole tarvilik tingimus funktsiooni diferentseeruvuseks.

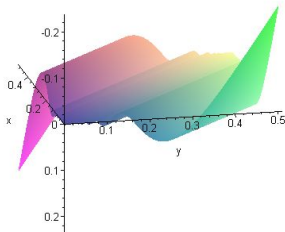
Näide. Olgu $f(x, y) := \begin{cases} (x - y)^2 \sin \frac{1}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y. \end{cases}$

Siis osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $\mathbf{0}$, aga f on diferentseeruv punktis $\mathbf{0}$.

NB! Osatuletiste pidevus ei ole tarvilik tingimus funktsiooni diferentseeruvuseks.

Näide. Olgu $f(x, y) := \begin{cases} (x - y)^2 \sin \frac{1}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y. \end{cases}$

Siis osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole pidevad punktis $\mathbf{0}$, aga f on diferentseeruv punktis $\mathbf{0}$.



Graafiku puutujatasand.

Olgu f diferentseeruv punktis $\mathbf{A} = (a, b)$. Tähistame $x := a + h_1$ ja $y := b + h_2$, $c := f(a, b)$ ja $z := f(x, y)$. Siis diferentseeruvuse tingimus on

$$z = c + M(x - a) + N(y - b) + \alpha.$$

Võrrand

$$z = c + M(x - a) + N(y - b)$$

kirjeldab tasandit, millel paikneb punkt (a, b, c) . Seda tasandit nim. funktsiooni f **graafiku puutujatasandiks punktis $\mathbf{A}' = (a, b, c)$** .

Graafiku puutujatasand.

Olgu f diferentseeruv punktis $\mathbf{A} = (a, b)$. Tähistame $x := a + h_1$ ja $y := b + h_2$, $c := f(a, b)$ ja $z := f(x, y)$. Siis diferentseeruvuse tingimus on

$$z = c + M(x - a) + N(y - b) + \alpha.$$

Võrrand

$$z = c + M(x - a) + N(y - b)$$

kirjeldab tasandit, millel paikneb punkt (a, b, c) . Seda tasandit nim. funktsiooni f **graafiku puutujatasandiks punktis $\mathbf{A}' = (a, b, c)$** .

Def. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ **graafiku puutujatasandiks punktis $\mathbf{A}' := (a, b, c)$** nim. sellist tasandit, mille punktile $\mathbf{X}$ vastava z -koordinaadi ja funktsiooni väärtuse vahe on protsessis $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A} = (a, b)$ kõrgemat järku lõpmata väike kui $\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|$.

Täisdiferentsiaal.

Kui funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv ja $\mathbf{h} := (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, siis avaldist

$$d_{\mathbf{A}} f(h_1, \dots, h_m) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) h_m$$

nim. funktsiooni f täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumendi muudule $\mathbf{h}$.

Tähistatakse ka

$$df(\mathbf{A}) = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) dx_m.$$

Täisdiferentsiaal.

Kui funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv ja $\mathbf{h} := (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$, siis avaldist

$$d_{\mathbf{A}} f(h_1, \dots, h_m) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) h_m$$

nim. funktsiooni f täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumendi muudule $\mathbf{h}$.

Tähistatakse ka

$$df(\mathbf{A}) = df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) dx_m.$$

Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}^m$ on lahtine piirkond.

Def. Kui funktsioonil f on hulgas D pidevad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$, siis öeldakse, et funktsioon f on piirkonnas D pidevalt diferentseeruv.

Liitfunktsiooni diferentseerimine

Olgu $w = f(u_1, \dots, u_l)$ / muutuja funktsioon määramispiirkonnaga Q , kus argumendid $u_1, \dots, u_l$ on omakorda m muutuja funktsioonid:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m),$$

$$u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_m),$$

...

$$u_l = \varphi_l(x_1, \dots, x_m).$$

Eeldame, et funktsioonidel $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ on ühine määramispiirkond D ning iga $\mathbf{X} \in D$ korral $(\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_l(\mathbf{X})) \in Q$. Olgu

$$\begin{aligned} F(\mathbf{X}) &:= F(x_1, \dots, x_m) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_l(\mathbf{X})) \\ &= f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_l(x_1, \dots, x_m)). \end{aligned}$$

$$F(\mathbf{X}) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_l(x_1, \dots, x_m)).$$

Lause

Kui funktsioonidel $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ leiduvad punktis $\mathbf{A}$ lõplikud osatuletised ning funktsioon f on punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_l(\mathbf{A}))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioonil F on punktis $\mathbf{A}$ osatuletised

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\mathbf{A}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_l}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}(\mathbf{A}).$$

$$F(\mathbf{X}) = f(\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_l(x_1, \dots, x_m)).$$

Lause

Kui funktsioonidel $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ leiduvad punktis $\mathbf{A}$ lõplikud osatuletised ning funktsioon f on punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_l(\mathbf{A}))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioonil F on punktis $\mathbf{A}$ osatuletised

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\mathbf{A}) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_l}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j}(\mathbf{A}).$$

Lause

Kui funktsioonid $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A} \in D$ ja funktsioon f on punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_l(\mathbf{A}))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioon F on diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$.

Tähistame $\mathbf{h} := (h_1, \dots, h_m)$.

Lause (Keskväertusteoreem)

Kui f on pidev punktides $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A} + \mathbf{h}$ ning diferentseeruv vahemikus $(\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{h})$, siis leidub selline punkt $\mathbf{C} \in (\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{h})$, et

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{C}) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{C}) h_m = (d_{\mathbf{C}} f)(\mathbf{h}).$$

Tähistame $\mathbf{h} := (h_1, \dots, h_m)$.

Lause (Keskvärtusteoreem)

Kui f on pidev punktides $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{A} + \mathbf{h}$ ning diferentseeruv vahemikus $(\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{h})$, siis leidub selline punkt $\mathbf{C} \in (\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{h})$, et

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{C}) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{C}) h_m = (d_{\mathbf{C}} f)(\mathbf{h}).$$

Märkus. Tegelikult läheb siin vaja ainult tuletist suunas $\mathbf{h}$.

Tuletis antud suunas

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt. Olgu antud vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Punktid $\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\mathbf{s}$ asuvad punkti $\mathbf{A}$ läbival sirgel vektoriga $\mathbf{s}$ määratud suunas.

Def. Kui leidub piirväärtus $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{A} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{A})}{t \|\mathbf{s}\|}$, siis seda nim.

funktsiooni f tuletiseks punktis $\mathbf{A}$ suunas $\mathbf{s}$, tähistatakse $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{A})$.

Gradient

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt.

Def. Funktsiooni f **gradiendiks punktis $\mathbf{A}$** nim. vektorit

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \right)$, tähistatakse **$\text{grad } f(\mathbf{A}) = \nabla f(\mathbf{A})$** .

Kui f on diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{A}) = \left\langle \text{grad } f(\mathbf{A}), \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \right\rangle = \|\text{grad } f(\mathbf{A})\| \cos \varphi,$$

kus φ on nurk vektorite **$\text{grad } f(\mathbf{A})$** ja $\mathbf{s}$ vahel.