

Kõrgemat järku osatuletised

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt. Olgu punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses määratud osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, m$.

Def. Kui osatuletisel $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ leidub osatuletis muutuja x_k järgi punktis $\mathbf{A} \in D$, siis seda nim. funktsiooni f teist järku osatuletiseks muutujate x_j ja x_k järgi, tähistatakse

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{A}), \quad f_{x_j x_k}(\mathbf{A}).$$

Kui $j \neq k$, siis neid tuletisi nim. ka segatuletisteks.

Teoreem (Schwarz)

Olgu $\mathbf{A}$ funktsiooni f määramispiirkonna D sisepunkt. Olgu $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$ ning olgu $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ määratud punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses. Kui segaosatuletised $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ on pidevad punktis $\mathbf{A}$, siis nad on võrdsed.

Teoreem (Schwarz)

Olgu $\mathbf{A}$ funktsiooni f määramispiirkonna D sisepunkt. Olgu $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$ ning olgu $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ määratud punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses. Kui segaosatuletised $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ on pidevad punktis $\mathbf{A}$, siis nad on võrdsed.

Lause

Olgu $\mathbf{A}$ funktsiooni f määramispiirkonna D sisepunkt. Olgu $j, k \in \{1, \dots, m\}$, $j \neq k$ ning olgu $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ määratud punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses. Kui $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ja $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$ (vaadelduna x_j ja x_k funktsioonidena), siis on vastavad segaosatuletised võrdsed, s.t. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{A}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{A})$.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt. Olgu $n \in \mathbb{N}$.

Def. Funktsiooni f nim. $n + 1$ korda diferentseeruvaks punktis $\mathbf{A}$, kui punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses leiduvad funktsiooni f kõik n järku osatuletised, mis on kõik diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$.

Samaväärne on: funktsiooni f nim. $n + 1$ korda diferentseeruvaks punktis $\mathbf{A}$ kui punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses leiduvad funktsiooni f kõik kuni n järku osatuletised, mis on kõik diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Olgu $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt. Olgu $n \in \mathbb{N}$.

Def. Funktsiooni f nim. $n + 1$ korda diferentseeruvaks punktis $\mathbf{A}$, kui punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses leiduvad funktsiooni f kõik n järku osatuletised, mis on kõik diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$.

Samaväärne on: funktsiooni f nim. $n + 1$ korda diferentseeruvaks punktis $\mathbf{A}$ kui punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses leiduvad funktsiooni f kõik **kuni** n järku osatuletised, mis on kõik diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$.

Lause

Olgu funktsioon f n korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$. Siis tema n järku segaosatuletised punktis $\mathbf{A}$ ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.

Kõrgemat järku täisdiferentsiaalid

Olgu f kaks korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$.

Def. Funktsiooni f teist järku täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$ nim. funktsiooni $d_{\mathbf{A}}f(h_1, \dots, h_m)$ diferentsiaali, kus argumentide muute $h_1, \dots, h_m$ vaadeldakse fikseerituna, tähistatakse $d_{\mathbf{A}}^2f(h_1, \dots, h_m)$ või $d_{\mathbf{A}}^2f(\mathbf{h})$ või $d^2f(\mathbf{A})$.

Kahe muutuja juhul

$$d^2f(x, y) = f_{xx}(x, y)dx^2 + 2f_{xy}(x, y)dx dy + 2f_{yy}dy^2.$$

$$\text{Üldjuhul } d^2f(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m f_{x_i x_j}(\mathbf{A}) dx_i dx_j.$$

Kõrgemat järku täisdiferentsiaalid

Olgu f kaks korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$.

Def. Funktsiooni f teist järku täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$ nim. funktsiooni $d_{\mathbf{A}}f(h_1, \dots, h_m)$ diferentsiaali, kus argumentide muute $h_1, \dots, h_m$ vaadeldakse fikseerituna, tähistatakse $d_{\mathbf{A}}^2f(h_1, \dots, h_m)$ või $d_{\mathbf{A}}^2f(\mathbf{h})$ või $d^2f(\mathbf{A})$.

Kahe muutuja juhul

$$d^2f(x, y) = f_{xx}(x, y)dx^2 + 2f_{xy}(x, y)dx dy + 2f_{yy}dy^2.$$

$$\text{Üldjuhul } d^2f(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m f_{x_i x_j}(\mathbf{A}) dx_i dx_j.$$

Olgu f n korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$.

Def. Funktsiooni f n järku täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$ nim. funktsiooni $d_{\mathbf{A}}^{n-1}f(h_1, \dots, h_m)$ diferentsiaali, kus argumentide muute $h_1, \dots, h_m$ vaadeldakse fikseerituna, tähistatakse $d_{\mathbf{A}}^nf(h_1, \dots, h_m)$ või $d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h})$ või $d^nf(\mathbf{A})$.

Liitfunktsiooni täisdiferentsiaalid

Olgu $w = f(u_1, \dots, u_l)$ l muutuja funktsioon,

olgu $u_i = \varphi_i(\mathbf{X})$, $i = 1, \dots, l$, $\mathbf{X} \in D \subset \mathbb{R}^m$.

Olgu $F(\mathbf{X}) = f(\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_l(\mathbf{X}))$

Olgu funktsioonid φ_i diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$ ja olgu f diferentseeruv punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_l(\mathbf{A}))$. Siis

$$dF(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f_{u_i}(\mathbf{B}) \varphi_{i,x_j}(\mathbf{A}) dx_j = \sum_{i=1}^l f_{u_i}(\mathbf{B}) du_i(\mathbf{A})$$

ehk esimest järku täisdiferentsiaali kuju on **invariantne muutujavahetuse suhtes**.

Liitfunktsiooni täisdiferentsiaalid

Olgu $w = f(u_1, \dots, u_l)$ / muutuja funktsioon,

olgu $u_i = \varphi_i(\mathbf{X})$, $i = 1, \dots, l$, $\mathbf{X} \in D \subset \mathbb{R}^m$.

Olgu $F(\mathbf{X}) = f(\varphi_1(\mathbf{X}), \dots, \varphi_l(\mathbf{X}))$

Olgu funktsioonid φ_i diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$ ja olgu f diferentseeruv punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \dots, \varphi_l(\mathbf{A}))$. Siis

$$dF(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f_{u_i}(\mathbf{B}) \varphi_{i,x_j}(\mathbf{A}) dx_j = \sum_{i=1}^l f_{u_i}(\mathbf{B}) du_i(\mathbf{A})$$

ehk esimest järku täisdiferentsiaali kuju on **invariantne muutujavahetuse suhtes**.

$$\begin{aligned} d^2 F(\mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^m \sum_{p=1}^l f_{u_i, u_p}(\mathbf{B}) \varphi_{p,x_k}(\mathbf{A}) \varphi_{i,x_j}(\mathbf{A}) dx_k dx_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^m f_{u_i}(\mathbf{B}) \varphi_{i,x_j x_k}(\mathbf{A}) dx_k dx_j \end{aligned}$$

$$d^2 F(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^l \sum_{p=1}^l f_{u_i, u_p}(\mathbf{B}) du_i(\mathbf{A}) du_p(\mathbf{A}) + \sum_{i=1}^l f_{u_i}(\mathbf{B}) d^2 u_i(\mathbf{A})$$

ehk teist järku (ja ka kõrgemat järku) täisdiferentsiaali kuju **ei ole üldiselt invariantne muutujavahetuse suhtes**.

Erandjuhul kui $d^2 u_i(\mathbf{A}) = 0$, $i = 1, \dots, l$, s.t. kui funktsioonid φ_i on lineaarsed, siis on ka teist (ja kõrgemat) järku täisdiferentsiaali kuju invariantne (linearse) muutujavahetuse suhtes.

Ühe muutuja juht. Olgu F punktis a n korda diferentseeruv. Siis

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)h^n + \alpha_n,$$

kus $\alpha_n = o(h)$ protsessis $h \rightarrow 0$.

Kui F on $n+1$ korda diferentseeruv punkti a mingis ümbruses, siis

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1} \text{ mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral.}$$

Ühe muutuja juht. Olgu F punktis a n korda diferentseeruv. Siis

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(a)h^n + \alpha_n,$$

kus $\alpha_n = o(h)$ protsessis $h \rightarrow 0$.

Kui F on $n+1$ korda diferentseeruv punkti a mingis ümbruses, siis

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1} \text{ mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral.}$$

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt.

Teoreem

Olgu f punktis $\mathbf{A}$ n korda diferentseeruv. Siis

$$f(\mathbf{A}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{n!}d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h}) + \alpha_n(\mathbf{h}),$$

kus $\alpha_n(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^n)$ protsessis $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt.

Teoreem

Olgu f punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses $n + 1$ korda diferentseeruv. Siis

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + d_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{n!}d_{\mathbf{A}}^nf(\mathbf{h}) + \frac{1}{(n+1)!}d_{\mathbf{A}+\mathbf{h}}^{n+1}f(\mathbf{h})$$

mingi $\theta \in (0, 1)$ korral.

Juhul $n = 0$ saame siit Lagrange'i valemi (keskväärtusteoreemi).

Konstantsuse kriteerium

Lemma

Sidusat hulka D ei saa esitada kahe mittetühja lõikumatu lahtise hulga (ruumi D topoloogias) ühendina.

Konstantsuse kriteerium

Lemma

Sidusat hulka D ei saa esitada kahe mittetühja lõikumatu lahtise hulga (ruumi D topoloogias) ühendina.

Lemma

Mittetühja lahtise sidusa hulga D iga kahte punkti saab ühendada hulka D kuuluva murdjoonega.

Konstantsuse kriteerium

Lemma

Sidusat hulka D ei saa esitada kahe mittetühja lõikumatu lahtise hulga (ruumi D topoloogias) ühendina.

Lemma

Mittetühja lahtise sidusa hulga D iga kahte punkti saab ühendada hulka D kuuluva murdjoonega.

Lause (Konstantsuse kriteerium)

Olgu f diferentseeruv lahtises sidusas hulgas D . Funktsioon f on konstantne parajasti siis, kui tema kõik esimest järku osatuletised on nullid hulgas D .