

Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$. Funktsiooni $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ nim. **vektorväljaks**, $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$. Kui vektorvälja komponendid on pidevad/diferentseeruvad, siis vektorvälja nim. pidevaks/diferentseeruvaks.

Näide. Tuule kiirus igas ruumi punktis;
voolava vedeliku kiirus igas ruumi punktis.

Näide. Jõuväljad: gravitatsiooniväli $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\gamma M}{|\vec{R}|^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$;

elektriväli $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^2} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$.

Näide. Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Siis ∇f on hulgal D määratud vektorväli.

Vektorvälja joonintegraal

Joonel L määratud vektorvälja (teist liiki) joonintegraaliks nim. joonintegraali

$$\int_L F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \cdots + F_m dx_m,$$

tähistatakse ka $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$, $\int_L \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$, kus $d\vec{s} = (dx_1, \dots, dx_m)$.

Füüsikaline rakendus. Olgu $\vec{F}$ mingile kehale mõjuv jõud (võib sõltuda keha asukohast). Selle jõu töö keha liigutamisel mööda joont L on $\int_L \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Esimest liiki joonintegraali füüsikaline rakendus. Olgu $\vec{v}(\mathbf{x})$ vedeliku voolamise kiirus tasandil. Siis selle vedeliku **voog läbi joone L** ehk vedeliku hulk, mis ajaühikus voolab läbi joone L , on $\int_L \varrho \vec{v} \cdot \vec{n} ds$, kus $\vec{n}$ on joone L normaal.

Kahekordne integraal üle ristküliku

Olgu $K := [a, b] \times [c, d]$ ristkülik tasandil $\mathbb{R}^2$, s.t.

$$K = \{\mathbf{x} = (x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Olgu $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ kahe muutuja funktsioon.

Olgu $T[x_0, \dots, x_n]$ ning $T[y_0, \dots, y_r]$ vastavalt lõikude $[a, b]$ ja $[c, d]$ alajaotused

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_r = d.$$

Vastava ristküliku K alajaotuse tähistame $T = T[K_{kl}]$.

Valime suvaliselt $\mathbf{X}_{kl} = (\xi_k, \eta_l) \in K_{kl}$ ja moodustame
integraalsumma

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l.$$

Arvu $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq r} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ nim. alajaotuse
 $T[K_{kl}]$ diameetriks.

Def. Arvu I nim. funktsiooni f kahekordseks Riemanni integraaliks üle ristiküliku K , kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \lambda(T) < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l - I \right| < \varepsilon$$

punktide $\mathbf{X}_{kl} = (\xi_k, \eta_l) \in K_{kl}$ suvalise valiku korral. Kirjutatakse

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma(T) = I, \text{ tähistatakse } I = \iint_K f(x, y) dx dy, \iint_K f dS.$$

Kui leidub lõplik kahekordne integraal, siis öeldakse, et funktsioon f on Riemanni mõttes integreeruv ristikülikus K .

Lause

Iga ristikülikus K integreeruv funktsioon on selles ristikülikus tõkestatud.

Olgu $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Olgu $\mathfrak{T}$ kõigi ristküliku K alajaotuste $T = T[K_{kl}]$ hulk. Antud $T \in \mathfrak{T}$ puhul eksisteerivad

$$M_{kl} = \sup_{\mathbf{X} \in K_{kl}} f(\mathbf{X}), \quad m_{kl} = \inf_{\mathbf{X} \in K_{kl}} f(\mathbf{X}), \quad k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, r.$$

Darboux' ülem- ja alamsumma:

$$S(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r M_{kl} \Delta x_k \Delta y_l, \quad s(T) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^r m_{kl} \Delta x_k \Delta y_l.$$

Ilmselt $s(T) \leq \sigma(T) \leq S(T)$ ja

$$\sup_{\substack{\mathbf{X}_{kl} \in K_{kl} \\ 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq r}} \sigma(T) = S(T), \quad \inf_{\substack{\mathbf{X}_{kl} \in K_{kl} \\ 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq r}} \sigma(T) = s(T).$$

Darboux' summade omadusi

1. Alajaotuse peenendamisel ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.
2. Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.
3. $\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ on ülalt tõkestatud ja $\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ on alt tõkestatud.

Seega leiduvad **Darboux' ülem- ja alamintegraalid**

$$I^* = \inf \{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}, \quad I_* = \sup \{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}.$$

Omadusi:

1. $s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T)$.
2. $I^* = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T), \quad I_* = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(T)$.

Teoreem

Ristkülikus K tõkestatud funktsiooni f korral on järgmised väited samaväärsed:

- (a) *f on integreeruv,*
- (b) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(T),$
- (c) $I^* = I_*,$
- (d) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0.$

Teoreem

Ristkülikus K tõkestatud funktsiooni f korral on järgmised väited samaväärsed:

- (a) f on integreeruv,*
- (b) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} s(T),$*
- (c) $I^* = I_*,$*
- (d) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0.$*

Teoreem (integreeruvuse kriteerium)

Tõkestatud funktsioon $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ on ristkülikus K integreeruv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku K selline alajaotus $T = T[K_k]$, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$, s.t.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathfrak{T} : S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Teoreem

Kui funktsioon $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ on ristkülikus K pidev, siis on ta integreeruv.

Järeldus

Kui funktsioon f on integreeruv ristkülikus $K = [a, b] \times [c, d]$, siis on ta integreeruv ka igas ristkülikus $K_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, mis sisaldub ristkülikus K .

Järeldus

Olgu K ja K_0 ristkülikud, kusjuures $K_0 \subset K$. Kui funktsioon f on integreeruv ristkülikus K_0 ning $f(\mathbf{X}) = 0$ iga $\mathbf{X} \in K \setminus K_0$ korral, siis

$$\iint_K f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{K_0} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Kahekordne integraal üle tõkestatud piirkonna

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk, olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Valime ristküliku $K = [a, b] \times [c, d]$ nii, et $D \subset K$, ja defineerime $F : K \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in K \setminus D. \end{cases}$$

Def. Funktsiooni $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nim. **integreeruvaks hulgas D** , kui funktsioon F on ristkülikus K integreeruv. Sel juhul

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_K F(x, y) \, dx \, dy.$$

Integraal ei sõltu K valikust.

Kui $D \subset D_1$ ning $g(\mathbf{X}) = \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in D_1 \setminus D, \end{cases}$

siis $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} g(x, y) \, dx \, dy.$

Kahekordse integraali omadusi

1. **Aditiivsus:** kui $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, siis

$$\iint_D f \, dx = \iint_{D_1} f \, dx + \iint_{D_2} f \, dx.$$

2. **Lineaarsus:**

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f \, dx \, dy + \beta \iint_D g \, dx \, dy.$$

3. **Monotoonsus:** kui $f(\mathbf{X}) \leq g(\mathbf{X}) \, \forall \mathbf{X} \in D$, siis

$$\iint_D f \, dx \, dy \leq \iint_D g \, dx \, dy.$$

4. **Absoluutväärtuse integraal:** kui f on integreeruv hulgas D , siis ka $|f|$ on integreeruv hulgas D ning

$$\left| \iint_D f \, dx \, dy \right| \leq \iint_D |f| \, dx \, dy.$$

5. **Korrutise integreeruvus:** kui f ja g on integreeruvad hulgas D , siis ka fg on integreeruv hulgas D .

6. **Keskvaartusteoreem:** kui f ja g on integreeruvad kinnises sidusas tõkestatud piirkonnas D , f on pidev ja $g \geq 0$, siis

$$\exists \mathbf{X}_0 \in D : \iint_D f(x, y) g(x, y) \, dx \, dy = f(\mathbf{X}_0) \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

Mõõtuvad hulgad tasandil

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ning olgu $\chi_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hulga D karakteristlik funktsioon:

$$\chi_D(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin D. \end{cases}$$

Def. Tõkestatud alamhulka $D \subset \mathbb{R}^2$, mille karakteristlik funktsioon on integreeruv, nim. (Jordani mõttes) mõõtuvaks hulgaks. Arvu

$\mu(D) = \iint_D dx dy$ nim. hulga D pindalaks ehk tema Jordani mõõduks.

Näide. $D = K \cap \mathbb{Q}^2$ pole Jordani mõttes mõõtuv.

Näide. $\mu([a, b] \times \{0\}) = 0$.

Def. Mõõtuvat hulka, mille Jordani mõõt on null, nim. nullmõõduga hulgaks e. hüljatavaks hulgaks.