

Mõõtuvad hulgad tasandil

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ning olgu $\chi_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hulga D karakteristlik funktsioon:

$$\chi_D(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin D. \end{cases}$$

Def. Tõkestatud alamhulka $D \subset \mathbb{R}^2$, mille karakteristlik funktsioon on integreeruv, nim. (Jordani mõttes) mõõtuvaks hulgaks. Arvu

$\mu(D) = \iint_D dx dy$ nim. hulga D pindalaks ehk tema Jordani mõõduks.

Näide. $D = K \cap \mathbb{Q}^2$ pole Jordani mõttes mõõtuv.

Näide. $\mu([a, b] \times \{0\}) = 0$.

Def. Mõõtuvat hulka, mille Jordani mõõt on null, nim. nullmõõduga hulgaks e. hüljatavaks hulgaks.

Karakteristliku funktsiooni Darboux summade omadusi:

1. $S(T) = \sum_{k,l: D \cap R_{kl} \neq \emptyset} \Delta x_k \Delta y_l.$
2. Kui $\mu(D) = 0$, siis $0 \leq s(T) \leq \mu(D) = 0$, s.t. $s(T) = 0$.
3. Kui $\mu(D) = 0$, siis $S(T) - s(T) = S(T)$ iga alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral.

Lemma

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu K selline ristkülik, et $D \subset K$. Võrdus $\mu(D) = 0$ kehtib parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T = T[R_{kl}] \in \mathfrak{T} : S(T) < \varepsilon.$$

Integreeruvuse kriteerium: Tõk.-d f-n $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ on ristkülikus K int.-v parajasti siis, kui $\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathfrak{T} : S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Järeldus

1. Kui D on nullmõõduga hulk ning $D_1 \subset D$, siis $\mu(D_1) = 0$.
2. Lõpliku arvu nullmõõduga hulkade ühend on nullmõõduga hulk.

Lause

Olgu sile joon L antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Siis L on nullmõõduga hulk.

Lause

Olgu sile joon L antud parameetriliste võrranditega

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Siis L on nullmõõduga hulk.

Järeldus

Tükiti sile joon on nullmõõduga hulk.

Lause

Lõigus $[a, b]$ pideva funktsiooni $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ graafik ruumis $\mathbb{R}^2$ on nullmõõduga hulk.

Lemma

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \in D$ ja $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Siis leidub selline punkt $\mathbf{Z} \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, et $\mathbf{Z} \in \partial D$.

Teoreem

Tõkestatud alamhulk $D \subset \mathbb{R}^2$ on mõõtuv parajasti siis, kui tema rajajoon ∂D on nullmõõduga hulk.

Lemma

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \in D$ ja $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Siis leidub selline punkt $\mathbf{Z} \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, et $\mathbf{Z} \in \partial D$.

Teoreem

Tõkestatud alamhulk $D \subset \mathbb{R}^2$ on mõõtuv parajasti siis, kui tema rajajoon ∂D on nullmõõduga hulk.

Järeldus

Tõkestatud hulk $D \subset \mathbb{R}^2$, mille rajajoon on tükiti sile, on mõõtuv.

Järeldus

Kui hulgad D_1 ja D_2 on mõõtuvad, siis on ka hulgad $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ ja $D_1 \setminus D_2$ mõõtuvad.