

Katkevate funktsioonide integreerimine

Teoreem (Lebesgue'i integreeruvuskriteerium)

Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.

Katkevate funktsioonide integreerimine

Teoreem (Lebesgue'i integreeruvuskriteerium)

Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.

Tõestame ainult piisavuse.

Lemma 9.1. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu K selline ristkülik, et $D \subset K$. Siis $\mu(D) = 0$ parajasti siis, kui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T = T[R_{kl}] \in \mathfrak{T} : S^*(T) < \varepsilon.$$

Integreeruvuse kriteerium. Tõk.-d f-n $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ on ristkülikus K int.-v parajasti siis, kui $\forall \varepsilon > 0 \exists T \in \mathfrak{T} : S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Katkevate funktsioonide integreerimine

Teoreem (Lebesgue'i integreeruvuskriteerium)

Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui tema katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.

Lause

Mõõtuvas hulgas tõkestatud funktsiooni integreeruvus ja integraali väärtus selles hulgas ei sõltu funktsiooni väärtustest hulga rajajoonel.

Lause

Kui funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ integreeruv ja D_1 on hulga D mõõtuv alamhulk, siis funktsioon f on ka hulgas D_1 integreeruv.

MA3: kui ühe muutuja funktsioon $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

määratud funktsioon $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev; kui lisaks g on pidev punktis x , siis $G'(x) = g(x)$.

MA3: kui ühe muutuja funktsioon $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

määratud funktsioon $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev; kui lisaks g on pidev punktis x , siis $G'(x) = g(x)$.

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruv mõõtuvas hulgas $D \subset \mathbb{R}^2$. Iga mõõtuva osahulga $E \subset D$ puhul leidub integraal $H(E) := \iint_E f(x, y) dx dy$. Tähistame $\mathcal{E} = \{E \subset D : E \text{ on mõõtuv ja sidus, } \mu(E) > 0\}$. Siis $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$.

MA3: kui ühe muutuja funktsioon $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

määratud funktsioon $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev; kui lisaks g on pidev punktis x , siis $G'(x) = g(x)$.

Olgu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ integreeruv mõõtuvas hulgas $D \subset \mathbb{R}^2$. Iga mõõtuva osahulga $E \subset D$ puhul leidub integraal $H(E) := \iint_E f(x, y) dx dy$. Tähistame $\mathcal{E} = \{E \subset D : E \text{ on mõõtuv ja sidus, } \mu(E) > 0\}$. Siis $H : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Olgu $\mathbf{X} \in D$. Arvu A , mis rahuldab tingimust

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{E}, E \subset U_\delta(\mathbf{X}) \Rightarrow \left| \frac{H(E)}{\mu(E)} - A \right| < \varepsilon,$$

nim. **funktsiooni H tuletiseks piirkonna järgi kohal $\mathbf{X}$** , tähistatakse $\frac{dH}{d\mu}(\mathbf{X})$ ja $\lim_{E \rightarrow \mathbf{X}} \frac{H(E)}{\mu(E)}$. Siin $E \rightarrow \mathbf{X}$ tähendab $\sup_{\mathbf{Q} \in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| \rightarrow 0$; öeldakse, et **hulk E tõmbub kokku punktiks $\mathbf{X}$** .

$$\frac{dH}{d\mu}(\mathbf{X}) = \lim_{E \rightarrow \mathbf{X}} \frac{H(E)}{\mu(E)}$$

Füüsikaline sisu. Kui $H(E)$ on kujundi $E \subset D$ mass, siis tuletis $\frac{dH}{d\mu}(\mathbf{X})$ on keha D tihedus punktis $\mathbf{X} \in D$.

Lause

Kui funktsioon f on pidev punkti $\mathbf{X}$ mingis ümbruses, siis $\frac{dH}{d\mu}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$.

Lause (Greeni valem)

Olgu $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ lahtine hulk ja olgu $D \subset \mathcal{G}$ tõkestatud kinnine tükiti sileda rajajoonega hulk. Kui $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ning $G: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ on sellised pidevad funktsioonid, millel on hulgas $\mathcal{G}$ pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$, siis

$$\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} F dx + G dy.$$

Siin joonintegraal on võetud raja positiivses suunas.

Tõestame ainult juhul, kui hulka D saab jaotada nii x - kui y -telje suunas lõplikuks arvuks kõvertrapetsiteks.

Piirkonna pindala arvutamine joonintegraali abil

Greeni valem:
$$\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} F dx + G dy.$$

Idee: valime F ja G nii, et $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 1$, siis valemi vasakul pool on piirkonna pindala. Näiteks

1. kui valida $F \equiv 0$ ja $G(x, y) = x$, siis saame $S_D = \int_{\partial D} x dy$;

2. kui valida $F(x, y) = -y$ ja $G(x, y) \equiv 0$, siis saame
$$S_D = - \int_{\partial D} y dx$$
;

3. kui valida $F = -\frac{y}{2}$ ja $G(x, y) = \frac{x}{2}$, siis saame
$$S_D = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

Divergentsi teoreem

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv hulk ning olgu $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorväli.

Vektorvälja $\vec{F}$ voog läbi joone L on $W_L = \int_L \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, kus $\vec{n}$ on joone L ühiknormaal. Normaali $\vec{n}$ suund valitakse nii, et liikudes joonel L positiivses suunas, jääb normaal paremale. Kui joon L on mingi piirkonna raja, siis on normaal suunatud väljapoole.

Olgu $E \subset D$ mõõtuv ning olgu L hulga E raja. Kui $W_L > 0$, siis hulgas E peab olema **allikaid**, kus näiteks vedelik tasandile siseneb; kui $W_L < 0$, siis hulgas E peab olema **neelukohti**, kus näiteks vedelik tasandilt neeldub.

Def. Voo suhet pindalasse $\frac{W_L}{\mu(E)}$ nim. **kujundi E allikate keskmiseks erivõimsuseks**. Piirväärtust $\lim_{E \rightarrow \mathbf{X}} \frac{W_L}{\mu(E)}$, kus $\mathbf{X} \in D^\circ$, nim. **vektorvälja divergentsiks punktis $\mathbf{X}$** , tähistatakse $\operatorname{div} \vec{F}(\mathbf{X})$.

Lause

Kui $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ on pidevad punkti $\mathbf{X}$ mingis ümbruses, siis

$$\operatorname{div} \vec{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

Lause (Divergentsi teoreem)

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ lahtine mõõtv hulk ning olgu $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektorväli.

Kui $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F_2}{\partial y}$ on pidevad hulgas D , siis

$$\iint_E \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy = \int_{\partial E} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

iga kinnise tükiti sileda rajajoonega $E \subset D$ korral.

Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Olgu uv -tasandi mingis **lahtises piirkonnas** $\mathcal{G}'$ defineeritud funktsioonid

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad \mathbf{U} = (u, v) \in \mathcal{G}'.$$

Tähistame $\mathbf{X} = T(\mathbf{U})$. Olgu $\mathcal{G} = T(\mathcal{G}') = \{T(\mathbf{U}) : \mathbf{U} \in \mathcal{G}'\}$.

Def. Kujutust $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ nim. **regulaarseks teisenduseks**, kui

- 1) T on bijektiivne, s.t. $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{G} \exists! \mathbf{U} \in \mathcal{G}' : T(\mathbf{U}) = \mathbf{X}$,
- 2) leiduvad osatuletised $\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \eta}{\partial v}$, mis on pidevad hulgas $\mathcal{G}'$,
- 3) $J(\mathbf{U}) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial v}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial v}(\mathbf{U}) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall \mathbf{U} \in \mathcal{G}'.$

T bijektiivne $\Rightarrow$ saab avaldada $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$,
 $\mathbf{X} = (x, y) \in \mathcal{G}$.

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad \mathbf{U} = (u, v) \in \mathcal{G}',$$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad \mathbf{X} = (x, y) \in \mathcal{G}.$$

Lause

Regulaarse teisenduse $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ poolt määratud funktsioonidel $u: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ leiduvad pidevad osatuletised mõlema muutuja x ja y järgi hulgas $\mathcal{G}$.

$$x = \xi(u, v), \quad y = \eta(u, v), \quad \mathbf{U} = (u, v) \in \mathcal{G}',$$

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad \mathbf{X} = (x, y) \in \mathcal{G}.$$

Lause

Regulaarse teisenduse $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ poolt määratud funktsioonidel $u: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $v: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ leiduvad pidevad osatuletised mõlema muutuja x ja y järgi hulgas $\mathcal{G}$.

Lause

Olgu $y_1 = y_1(v_1, v_2)$ ja $y_2 = y_2(v_1, v_2)$, kusjuures $v_1 = v_1(t_1, t_2)$ ning $v_2 = v_2(t_1, t_2)$. Olgu kõik funktsioonid pidevalt diferentseeruvad. Defineerime liitfunktsioonid

$$Y_1(t_1, t_2) := y_1(v_1(t_1, t_2), v_2(t_1, t_2)),$$

$$Y_2(t_1, t_2) := y_2(v_1(t_1, t_2), v_2(t_1, t_2)).$$

Siis liitfunktsiooni jakobiaan võrdub välimise ja sisemise funktsiooni jakobiaanide korrutisega.

Lause

Olgu $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ regulaarne teisendus, $F' \subset \mathcal{G}'$ kinnine hulk ning $F := T(F')$. Siis $F^\circ = T((F')^\circ)$ ning $\partial F = T(\partial F')$.

Lause

Olgu $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ regulaarne teisendus, $F' \subset \mathcal{G}'$ kinnine hulk ning $F := T(F')$. Siis $F^\circ = T((F')^\circ)$ ning $\partial F = T(\partial F')$.

Järeldus

Regulaarne teisendus teisendab lahtise hulga lahtiseks hulgaks ja kinnise hulga kinniseks hulgaks.

Lause

Olgu $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ regulaarne teisendus, $F' \subset \mathcal{G}'$ kinnine hulk ning $F := T(F')$. Siis $F^\circ = T((F')^\circ)$ ning $\partial F = T(\partial F')$.

Järeldus

Regulaarne teisendus teisendab lahtise hulga lahtiseks hulgaks ja kinnise hulga kinniseks hulgaks.

Lause

Olgu $T: \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ regulaarne teisendus ja olgu Λ lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}'$, mis on antud võrranditega $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Olgu $\Delta \subset \mathcal{G}'$ joonega Λ piiratud piirkond, tähistame $L := T(\Lambda)$ ja $D := T(\Delta)$, need on piirkonna $\mathcal{G}$ alamhulgad. Siis joon L , mis on määratud võrranditega

$$x = x(t) = \xi(u(t), v(t)), \quad y = y(t) = \eta(u(t), v(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

on lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}$.