MATEMAATILINE ANALÜÜS IV

MTMM.00.182 Loengukursus
Tartu Ülikooli
matemaatika-informaatikateaduskonna
üliõpilastele
2010./2011. õppeaasta

Toivo Leiger

Täiendused 2012–2014: Indrek Zolk

Sisukord

1 Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

Olgu $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ mingi m reaalarvust koosnev *järjestatud* süsteem ning olgu D mingi selliste süsteemide hulk. Kui igale elemendile $\mathbf{X} \in D$ on teatava eeskirja järgi seatud vastavusse (üheselt määratud) reaalarv

$$w =: f(\mathbf{X}) =: f(x_1, \ldots, x_m),$$

siis öeldakse, et hulgas D on määratud *m muutuja funktsioon f*. Hulka D nimetatakse funktsiooni f *määramispiirkonnaks* (*domain*), muutujaid $x_1, \ldots, x_m$ tema *argumentideks*. Funktsiooni f *muutumispiirkond* on kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$, *väärtuste hulk* (*range*) on $f(D) := \{f(\mathbf{X}) \mid x \in D\}$.

Üheks m muutuja funktsiooni **näiteks** on funktsioon

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m},$$

s.o. funktsioon, mis suvalisele m reaalarvust koosnevale süsteemile seab vastavusse nende arvude aritmeetilise keskmise. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks D võib võtta *kõigi* nende süsteemide hulga.

1.1 Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

Vektorruum $\mathbb{R}^m$. m muutuja funktsiooni omaduste uurimiseks ja määramispiirkonna kirjeldamiseks on mugav kasutada algebra ja geomeetria kursustest tuntud eukleidilise ruumi mõistet. Tähistame

$$\mathbb{R}^m := \{\mathbf{X} := (x_1, \ldots, x_m) \mid x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\},$$

see on *kõigi* m-mõõtmeliste vektorite ruum. Vektoreid $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ nimetame ruumi $\mathbb{R}^m$ *punktideks*, arve $x_1, \ldots, x_m$ vektori $\mathbf{X}$ *koordinaatideks*. Vektorite liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud *koordinaaditi*: suvaliste $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ ja $\mathbf{X}' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ ning $\lambda \in \mathbb{R}$ korral defineeritakse

$$\mathbf{X} + \mathbf{X}' := (x_1 + x'_1, \ldots, x_m + x'_m) \text{ ja } \lambda\mathbf{X} := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m).$$

Seejuures on täidetud järgmised *vektorruumi aksioomid*:
1^0 $\mathbf{X} + \mathbf{X}' = \mathbf{X}' + \mathbf{X}$ *(liitmise kommutatiivsus)*,
2^0 $\mathbf{X} + (\mathbf{X}' + \mathbf{X}'') = (\mathbf{X} + \mathbf{X}') + \mathbf{X}'' =: \mathbf{X} + \mathbf{X}' + \mathbf{X}''$ *(liitmise assotsiatiivsus)*,
3^0 leidub selline punkt $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{X} + \mathbf{0} = \mathbf{X}$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ korral *(nullelemendi olemasolu)*,
4^0 iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ korral leidub $\mathbf{X}' \in \mathbb{R}^m$, et $\mathbf{X} + \mathbf{X}' = \mathbf{0}$ *(vastandelemendi olemasolu)*,
5^0 $1\mathbf{X} = \mathbf{X}$,
6^0 $\lambda(\mu\mathbf{X}) = (\lambda\mu)\mathbf{X} (= \lambda\mu\mathbf{X})$ *(skalaariga korrutamise assotsiatiivsus)*,
7^0 $(\lambda + \mu)\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} + \mu\mathbf{X}$ *(distributiivsus)*,
8^0 $\lambda(\mathbf{X} + \mathbf{X}') = \lambda\mathbf{X} + \lambda\mathbf{X}'$ *(distributiivsus)*.
Lihtne on veenduda, et nullelement $\mathbf{0}$ on vektor $(0, \ldots, 0)$ ja vektori $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ vastandelement on vektor $-\mathbf{X} := (-x_1, \ldots, -x_m)$.

Norm ruumis $\mathbb{R}^m$. Ruumis $\mathbb{R}^m$ on iga kahe punkti $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ ja $\mathbf{X}' = (x'_1, \ldots, x'_m)$ korral defineeritud nende *skalaarkorrutis* (*inner product, dot product*)

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle := \sum_{k=1}^{m} x_k x'_k,$$

mille abil omakorda defineeritakse vektori $\mathbf{X}$ pikkus ehk punkti $\mathbf{X}$ *norm*

$$\|\mathbf{X}\| := \sqrt{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}.$$

Lemma 1.1. ***(Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratus).*** *Iga kahe vektori* $\mathbf{X}$ *ja* $\mathbf{X}'$ *korral kehtib võrratus*

$$|\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle| \leqslant \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|. \tag{1.1}$$

Seejuures kehtib võrdus parajasti siis, kui üks vektor on teise kordne.

Tõestus. Kui $\mathbf{X}' = \mathbf{0}$, siis seose (1.1) mõlemad pooled on võrdsed nulliga (veenduge!)✠. Olgu $\mathbf{X}' \neq \mathbf{0}$ ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{k=1}^{m} (x_k - \lambda x'_k)^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{m} x_k x'_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{m} x'^2_k \\ &= \|\mathbf{X}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle + \lambda^2 \|\mathbf{X}'\|^2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Valides $\lambda = \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle}{\|\mathbf{X}'\|^2}$, saame võrratuse (1.1) (veenduge!)✠.

Selge, et kui $\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}'$, siis $|\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle| = |\lambda| \|\mathbf{X}'\|^2 = \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|$. Vastupidi, kui $|\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle| = \|\mathbf{X}\| \cdot \|\mathbf{X}'\|$, siis $\sum_{k=1}^{m} \left(x_k - \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X}' \rangle}{\|\mathbf{X}'\|^2} x'_k \right)^2 = 0$ (veenduge! vrd. (1.2))✠, millest järeldub (kuidas?)✠, et leidub $\lambda \in \mathbb{R}$ omadusega $\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}'$. ■

Lemma 1.2. ***(kolmnurga võrratus).*** *Iga kahe vektori* $\mathbf{X}$ *ja* $\mathbf{X}'$ *korral kehtib võrratus*

$$\|\mathbf{X} + \mathbf{X}'\| \leqslant \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}'\|. \tag{1.3}$$

Seejuures kehtib võrdus parajasti siis, kui üks vektor on teise mittenegatiivne kordne.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Lisaks lemmas 1.2 toodud kolmnurga võrratusele rahuldab norm $\| \ \|$ vektorruumis $\mathbb{R}^m$ ka teisi *normi aksioome*. Nimelt, kehtivad väited

(N1) $\|\mathbf{X}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$,

(N2) $\|\lambda \mathbf{X}\| = |\lambda| \|\mathbf{X}\|$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral,

(N3) $\|\mathbf{X} + \mathbf{X}'\| \leqslant \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{X}'\|$.

Punktide $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ vaheline *kaugus* on

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{X}') := \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_m - x'_m)^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - x'_k)^2}. \tag{1.4}$$

Valem (1.4) kahe punkti vahelise kauguse arvutamiseks on meile hästi tuntud juhul $m = 3$ (s.o. kolmemõõtmelises ruumis) ja juhul $m = 2$ (s.o. tasandil). Ka arvsirget $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ võime vaadelda eukleidilise ruumina $\mathbb{R}^1$, sel juhul kehtib samuti valem (1.4) (kontrollige!)✠.

1.2 Ruumi $\mathbb{R}^m$ topoloogiast

Punkti ümbrused. Meenutame, et ruumis $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ nimetasime punkti $a \in \mathbb{R}$ ε-ümbruseks hulka

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(a) &:= (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^1 \mid d(x, a) < \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Analoogilisel viisil defineerime punkti $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ ümbrused ruumis $\mathbb{R}^m$: hulka

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \varepsilon\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2} < \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

nimetatakse punkti $\mathbf{A}$ *lahtiseks ε-ümbruseks* (*open ε-neighbourhood*) ning hulka

$$\begin{aligned} \overline{U}_\varepsilon(\mathbf{A}) &:= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leqslant \varepsilon\} \\ &= \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2} \leqslant \varepsilon\right\} \end{aligned}$$

selle punkti *kinniseks ε-ümbruseks.* Tihtipeale nimetatakse neid hulki ka vastavalt lahtiseks ja kinniseks *keraks* (*ball*) keskpunktiga $\mathbf{A}$ ja raadiusega ε.

Alamhulga sise- ja rajapunktid. Olgu $D \subset \mathbb{R}^m$ suvaline mittetühi alamhulk. Punkti $\mathbf{A} \in D$ nimetatakse hulga D *sisepunktiks* (*interior point*), kui tema mingi ε-ümbrus sisaldub hulgas D, s.t.

leidub selline $\varepsilon > 0$, et $U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset D$.

Hulga D kõigi sisepunktide hulka nimetatakse selle hulga *sisemuseks* (*interior*) ja tähistatakse D°.

Kui punkti $\mathbf{A}$ *iga* ε-ümbrus lõikub nii hulgaga D kui ka hulgaga $\mathbb{R}^m \setminus D$, siis ütleme, et punkt $\mathbf{A}$ on hulga D *rajapunkt* (*boundary point*). Teisi sõnu, $\mathbf{A}$ on hulga D rajapunkt parajasti siis, kui

$$D \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \varnothing \text{ ja } (\mathbb{R}^m \setminus D) \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \varnothing \text{ iga } \varepsilon > 0 \text{ korral.}$$

Hulga D kõigi rajapunktide hulka nimetatakse selle hulga *rajaks* (*boundary*) ja tähistatakse ∂D. Kui $\mathbf{B} \in D$, siis $\mathbf{B}$ on kas hulga D sise- või rajapunkt (selgitage!)✠.

Hulga D raja- ning sisepunktid moodustavad uue hulga $\overline{D} := D \cup \partial D$, mida nimetatakse hulga D *sulundiks* (*closure*), sulundi punkte nimetatakse hulga D *puutepunktideks* (*closure point*).

Lahtised hulgad. Ruumi $\mathbb{R}^m$ alamhulka D nimetatakse *lahtiseks* (*open*), kui iga tema punkt on sisepunkt, s.t. kui

$$\text{iga } \mathbf{A} \in D \text{ korral leidub selline } \varepsilon > 0, \text{ et } U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset D.$$

Kui hulk D sisaldab kõiki oma rajapunkte (s.t. $\partial D \subset D$), siis nimetatakse hulka D *kinniseks* (*closed*). Seega on D kinnine parajasti siis, kui kehtib implikatsioon

$$[\forall \varepsilon > 0 : D \cap U_\varepsilon(\mathbf{A}) \neq \varnothing] \Rightarrow \mathbf{A} \in D$$

(selgitage!)✠.

Lause 1.3. *Iga lahtine kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ on lahtine hulk.*

Tõestus. Olgu $\mathbf{B} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$, näitame, et $\mathbf{B}$ on hulga $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ sisepunkt. Kuna $\mathbf{A}$ on hulga $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ sisepunkt, siis piisab vaadelda juhtu $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$. Sel juhul $r := \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| > 0$ (vrd. **(N1)**). Peame leidma niisuguse positiivse arvu δ, et $U_\delta(\mathbf{B}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$ (selgitage!)✠. Võtame $\delta := \varepsilon - r$, siis iga $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{B})$ korral $\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leqslant \|\mathbf{X} - \mathbf{B}\| + \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| < \delta + r = \varepsilon - r + r = \varepsilon$, seega $\mathbf{X} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$. Tähendab, $U_\delta(\mathbf{B}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$. ■

Risttahukad. Lisaks keradele $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ ja $\overline{U}_\varepsilon(\mathbf{A})$ ruumis $\mathbb{R}^m$ vaatleme me oma kursuses ka alamhulki, millele tasandil $\mathbb{R}^2$ vastavad ristkülikud ja ruumis $\mathbb{R}^3$ risttahukad. Olgu $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ positiivsed arvud ja $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ mingi punkt ruumis $\mathbb{R}^m$. Tähistame

$$K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| < \varepsilon_k \quad (k = 1, \ldots, m)\}$$

ja

$$\overline{K}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| \leqslant \varepsilon_k \quad (k = 1, \ldots, m)\}.$$

Hulki $K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$ ja $\overline{K}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$ nimetatakse vastavalt *lahtiseks ja kinniseks risttahukaks* keskpunktiga $\mathbf{A}$. Kui $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_m =: \varepsilon$, siis kõneldakse lahtisest ja kinnisest *kuubist* keskpunktiga $\mathbf{A}$. Neid tähistame edaspidi vastavalt $K_\varepsilon(\mathbf{A})$ ja $\overline{K}_\varepsilon(\mathbf{A})$.

Tähelepanuväärne on järgmine fakt.

Lause 1.4. (*a*) *Iga risttahuka $K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$ korral leidub kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$, mis sisaldub selles risttahukas, s.t. $U_\varepsilon(\mathbf{A}) \subset K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$.*
(*b*) *Iga kera $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ korral leidub selline risttahukas $K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A})$, mis sisaldub selles keras, s.t. $K_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m}(\mathbf{A}) \subset U_\varepsilon(\mathbf{A})$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Pidevad jooned ruumis $\mathbb{R}^m$. Kahemõõtmelises ruumis (s.o. tasandil) kirjeldatakse jooni tavaliselt parameetriliste võrranditega. Näiteks on ringjoon keskpunktiga $\mathbf{0}$ ning raadiusega r määratud võrranditega

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Teisisõnu, see joon on lõigus $[0, 2\pi]$ määratud **vektorfunktsiooni**

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \ t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$$

väärtuste hulk. Analoogiliselt võime kirjeldada jooni suvalises eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^m$.

Olgu iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral defineeritud punkt $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$ ruumis $\mathbb{R}^m$, seega on määratud kujutus

$$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m, \ \ t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)).$$

Sellist kujutust γ nimetame reaalse argumendiga (ehk parameetriga) *vektorfunktsiooniks* ning punktide hulka

$$\gamma([a, b]) = \{(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

(vektorfunktsiooniga γ defineeritud) *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^m$. Kui kõik koordinaatfunktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ on pidevad lõigus $[\alpha, \beta]$, siis ütleme, et vektorfunktsioon γ ja talle vastav joon ruumis $\mathbb{R}^m$ on pidevad.

Sidusad hulgad ja piirkond. Ühe muutuja funktsioonide analüütiliste omaduste (pidevus, diferentseeruvus, integreeruvus jne.) uurimisel eeldasime me enamasti, et funktsiooni määramispiirkonnaks on mingi (lõplik või lõpmatu) intervall, s.o. vahemik, poollõik või lõik. Mitmemõõtmelises ruumis vastavad intervallidele sidusad alamhulgad.

Definitsioon. Hulka $D \subset \mathbb{R}^m$ nimetame *sidusaks* (*connected*), kui iga tema kahte punkti $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{X}'$ saab ühendada mingi pideva joonega, mis täielikult paikneb hulgas D.

Selle definitsiooni kohaselt on D sidus hulk parajasti siis, kui suvaliste punktide $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in D$ korral saab defineerida niisuguse vektorfunktsiooni

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, \ x_m = \varphi_m(t) \quad (t \in [t_1, t_2]),$$

kus 1) koordinaatfunktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ on lõigus $[t_1, t_2]$ pidevad, 2) $\mathbf{X} = (\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_m(t_1))$, $\mathbf{X}' = (\varphi_1(t_2), \ldots, \varphi_m(t_2))$ ning 3) $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)) \in D$ kõikide $t \in [t_1, t_2]$ korral. Lihtsamalt öeldes, sidus hulk koosneb ühest, mittesidus hulk aga mitmest tükist.

Definitsioon. Mittetühja hulka $D \subset \mathbb{R}^m$, mille iga punkt on kas tema sisepunkt või sisepunktide hulga puutepunkt (see tähendab, $D \subset \overline{D^\circ}$), nimetame edaspidi *piirkonnaks* (*region*).

Iga lahtine hulk on piirkond. Hulk, mis sisaldab nn. *isoleeritud punkte* (punkte $\mathbf{X}$, mille korral leidub ümbrus $U_\varepsilon(\mathbf{X})$ nii, et $U_\varepsilon(\mathbf{X}) \setminus \{\mathbf{X}\} \subset \mathbb{R}^m \setminus D$) ei ole piirkond. Lõplik hulk ei ole piirkond.

Tingimus $D \subset \overline{D^\circ}$ on samaväärne sellega, et D koosneb mingist lahtisest hulgast U ja osast U rajast (veenduge!)✠.

Tõkestatud hulgad. Alamhulka $G \subset \mathbb{R}^m$ nimetatakse *tõkestatuks* (*bounded*), kui ta sisaldub mingis keras. Seega on hulk G tõkestatud parajasti siis, kui leiduvad punkt $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ ja arv $r > 0$, et $G \subset U_r(\mathbf{A})$.

1.3 Jadad ruumis $\mathbb{R}^m$

Vaatleme ruumis $\mathbb{R}^m$ punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$, s.o. vektorite jada

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}\right), \\ \mathbf{X}^{(2)} &= \left(x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}\right), \\ \mathbf{X}^{(3)} &= \left(x_1^{(3)}, \ldots, x_m^{(3)}\right), \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\dots$$
$$\mathbf{X}^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\right).$$
$$\dots .$$

Koonduvus. Öeldakse, et jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ *koondub ruumis* $\mathbb{R}^m$ *punktiks* $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_m)$, kui punktide $\mathbf{X}^{(n)}$ ja $\mathbf{A}$ vaheline kaugus protsessis $n \to \infty$ läheneb nullile, s.t. kui

$$\lim_n \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| = 0. \tag{1.6}$$

Seda koonduvust tähistame kas $\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}$ või $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$. Pidades silmas koonduvuse definitsiooni arvjadade korral, saame tingimuse (1.6) kirjutada kujul

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geqslant N \Rightarrow \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < \varepsilon \tag{1.7}$$

(põhjendage!)✠ ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} : \ n \geqslant N \Rightarrow \sqrt{\left(x_1^{(n)} - a_1\right)^2 + \ldots + \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2} < \varepsilon.$$

Arvestades seda, et

$$\left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon\left(\mathbf{A}\right)$$

(selgitage!)✠, saame tingimusest (1.7) järgmise väite.

Lause 1.5. *Võrdus* $\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}$ *kehtib ruumis* $\mathbb{R}^m$ *parajasti siis, kui punkti* $\mathbf{A}$ *iga ümbruse* $U_\varepsilon\left(A\right)$ *puhul leidub selline indeks* N*, et* $\mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon\left(\mathbf{A}\right)$ *iga* $n \geqslant N$ *korral.*

Olgu antud mingi vektorite jada (1.5). Iga $k = 1, 2, \dots, m$ puhul saame koordinaatide jada $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, seega on määratud m arvjada

$$\begin{aligned}
&\left(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}, \dots\right),\\
&\left(x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n)}, \dots\right),\\
&\dots\\
&\left(x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)}, \dots\right).
\end{aligned}$$

Kerkib üles loomulik küsimus: *kuidas on seotud omavahel vektorite jada* $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ *koonduvus ja koordinaatide jadade* $\left(x_1^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, \left(x_m^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *koonduvus?* Sellele küsimusele annab vastuse järgmine lause.

Lause 1.6. *Jada* $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ *koondub ruumis* $\mathbb{R}^m$ *punktiks* $\mathbf{A}$ *parajasti siis, kui* $x_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$ *iga* $k = 1, 2, \dots, m$ *korral.*

Tõestus.

$$\begin{aligned}\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A} \Leftrightarrow \lim_n \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| = 0 \Leftrightarrow \lim_n \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_n \sum_{k=1}^m \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_n \left(x_k^{(n)} - a_k\right)^2 = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \\ \Leftrightarrow \lim_n \left(x_k^{(n)} - a_k\right) = 0 \quad (k = 1, \dots, m) \\ \Leftrightarrow \lim_n x_k^{(n)} = a_k \quad (k = 1, \dots, m)\end{aligned}$$

(põhjendage kõiki samaväärsusi!)✠. ■

Lause 1.6 abil on lihtne näidata, et kui $\lim_n \mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{A}$ ja $\lim_n \mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{B}$, siis
1) $\lim_n \left(\mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{Y}^{(n)}\right) = \mathbf{A} + \mathbf{B}$,
2) $\lim_n \lambda\mathbf{X}^{(n)} = \lambda\mathbf{A}$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral (kontrollige!)✠.

Tõkestatud jadad. Punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ nimetame tõkestatuks, kui tema liikmete hulk $\left\{\mathbf{X}^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ on tõkestatud. Nii nagu arvjadade korral kehtib ka siin järgmine väide.

Lause 1.7. *Iga koonduv jada on tõkestatud.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Järgnevalt veendume, et kehtima jääb ruumis $\mathbb{R}^m$ ka teine tõkestatud jadade oluline omadus, nimelt **Bolzano-Weierstrassi teoreem.**

Lause 1.8. *Iga ruumis $\mathbb{R}^m$ tõkestatud jada sisaldab koonduva osajada.*

Tõestus. Me tõestame väite juhul $m = 2$. Olgu $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ ruumis $\mathbb{R}^2$ tõkestatud punktide jada. Siis leiduvad punkt $\mathbf{A} = (a, b)$ ja arv $r > 0$, et jada kõik liikmed $\mathbf{X}^{(n)} = (x_n, y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ paiknevad keras $U_r(\mathbf{A})$. Teiste sõnadega,

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < r \quad (n \in \mathbb{N})$$

ehk

$$(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2 < r^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Siit järelduvad võrratused

$$|x_n - a| < r \quad \text{ja} \quad |y_n - b| < r \quad (n \in \mathbb{N})$$

(põhjendage!)✠, need võime kirjutada üles kujul

$$a - r < x_n < a + r \quad \text{ja} \quad b - r < y_n < b + r \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.8}$$

Tingimustest (1.8) selgub, et mõlemad arvjadad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on tõkestatud (selgitage!)✠. Jada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tõkestatusest järeldub vastavalt Bolzano-Weierstrassi teoreemile, et leidub koonduv osajada $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, olgu $c := \lim_k x_{n_k}$. Edasi vaatleme jada (y_n) *vastavat* osajada $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ta on tõkestatud, seega on ka tal mingi koonduv osajada $\left(y_{n_{k_i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, tähistame $d := \lim_i y_{n_{k_i}}$.

Moodustame punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n_{k_i})}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, see on esialgse jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ osajada. Kuna $x_{n_{k_i}} \to c$ (põhjendage!)✠ ning $y_{n_{k_i}} \to d$, siis lause 1.6 kohaselt koondub jada $\left(\mathbf{X}^{(n_{k_i})}\right)$ punktiks $\mathbf{C} := (c,d)$ ruumis $\mathbb{R}^2$. ■

Eelnenud tõestusest on ka selge, kuidas tõestada väidet juhul $m = 3, 4, \ldots$. Nimelt tuleb m korda rakendada arvjadade Bolzano-Weierstrassi teoreemi, tulemuseks on koonduv punktide jada, mis on esialgse jada osajada.

Märgime selle paragrahvi lõpuks veel ühte koonduvate jadadega seotud olulist fakti.

Lause 1.9. *Alamhulk $D \subset \mathbb{R}^m$ on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab iga selle hulga punktidest moodustatud koonduva jada piirväärtuse.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu D kinnine alamhulk ja olgu $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ hulga D punktide niisugune jada, mis koondub punktiks $\mathbf{A}$ ruumis $\mathbb{R}^m$. Näitame, et siis $\mathbf{A} \in D$. Selleks veendume, et punkti $\mathbf{A}$ iga ümbrus sisaldab hulga D punkte. See tähendaks, et $\mathbf{A}$ on kas hulga D sise- või rajapunkt, ja kuna D on kinnine, siis $\mathbf{A} \in D$.

Olgu $U_\varepsilon(\mathbf{A})$ punkti $\mathbf{A}$ suvaline ümbrus ruumis $\mathbb{R}^m$. Et $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$, siis leidub selline indeks N, et $\mathbf{X}^{(n)} \in U_\varepsilon(\mathbf{A})$ iga $n \geqslant N$ korral. Tähendab, $\mathbf{X}^{(N)} \in U_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap D$, seega $U_\varepsilon(\mathbf{A}) \cap D \neq \varnothing$.

Piisavus. Eeldame, et hulga D puhul kehtib implikatsioon

$$\left[\mathbf{X}^{(n)} \in D \ \ (n \in \mathbb{N}),\, \mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}\right] \Rightarrow \ \mathbf{A} \in D. \tag{1.9}$$

Olgu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^m$ hulga D suvaline rajapunkt, siis $U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A}) \cap D \neq \varnothing$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Valime suvaliselt $\mathbf{X}^{(n)} \in U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A}) \cap D$ $(n \in \mathbb{N})$, sel juhul $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$ (põhjendage!)✠, eelduse (1.9) põhjal $\mathbf{A} \in D$. Seega sisaldab D kõik oma rajapunktid, s.t. ta on kinnine hulk. ■

Lausest 1.9 järeldub lihtsalt järgmine väide.

Järeldus 1.10. *Kinnine kera $\overline{U}_\delta(\mathbf{A})$ on kinnine hulk ruumis $\mathbb{R}^m$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

2 Pidevad mitme muutuja funktsioonid

2.1 Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Alustuseks meenutame ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse definitsiooni. Kui a on funktsiooni f määramispiirkonna D kuhjumispunkt, siis $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) = b &:\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : [0 < |x-a| < \delta,\ x \in D] \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x \in D \cap U_\delta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus. Olgu järgnevalt f mingi m muutuja funktsioon määramispiirkonnaga $D \subset \mathbb{R}^m$ (lühidalt, $f\colon D \to \mathbb{R}$) ning olgu $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ hulga D kuhjumispunkt, s.t. punkti $\mathbf{A}$ iga ümbrus, millest on välja jäetud punkt $\mathbf{A}$ ise, lõikab määramispiirkonda D. Niisiis,

$$\forall\delta > 0 : (U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}) \cap D \neq \varnothing.$$

Definitsioon. Arvu b nimetatakse m muutuja funktsiooni f *piirväärtuseks* (*limit*) *punktis* $\mathbf{A}$, kui iga positiivse arvu ε korral leidub selline positiivne arv δ, et määramispiirkonna D iga punkti $\mathbf{X}$ korral, mis rahuldab tingimust $0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta$, kehtib võrratus $|f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon$. Sel juhul kirjutame $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$.

Niisiis,

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : [0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta,\ \mathbf{X} \in D] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \mathbf{X} \in D \cap U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\} \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \mathbf{X} \in D \cap U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\} \Rightarrow b - \varepsilon < f(\mathbf{X}) < b + \varepsilon.\end{aligned}$$

Näide 2.1. Veendume, et

$$\lim_{\mathbf{X}\to(1,2)} \left(x^2 + 3y\right) = 7.$$

Vaja on näidata, et

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\ :\ [0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2] \Rightarrow \left|\left(x^2 + 3y\right) - 7\right| < \varepsilon.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Saame, et

$$\begin{aligned}\left|\left(x^2 + 3y\right) - 7\right| &= \left|\left(x^2 - 1\right) + 3(y-2)\right| = |(x-1)(x+1) + 3(y-2)| \\ &\leqslant |x-1|\,|x+1| + 3\,|y-2|\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Juhul $\delta \leqslant 1$ kehtib

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \Rightarrow |x-1| \leqslant \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < 1 \Rightarrow |x+1| < 3$$

(veenduge!)✠.

Paneme tähele, et

$$|x-1| \cdot |x+1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Leftarrow \quad 3|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(selgitage!)✠. Tähistame $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$, siis kehtib implikatsioon

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta \Rightarrow \left|\left(x^2+3y\right) - 7\right| < \varepsilon$$

(kontrollige!)✠. Seega $\lim\limits_{\mathbf{X}\to(1,2)} \left(x^2+3y\right) = 7$.

Lause 2.1. *Arv b on m muutuja funktsiooni f piirväärtus punktis $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ parajasti siis, kui iga punktiks $\mathbf{A}$ koonduva määramispiirkonna D punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ korral funktsiooni väärtuste jada $\left(f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)\right)$ koondub arvuks b.*

Tõestus. Peame veenduma, et $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$ parajasti siis, kui on täidetud tingimus

$$\left[\mathbf{X}^{(n)} \in D\setminus\{\mathbf{A}\},\ \mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}\right] \Rightarrow f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to b. \tag{2.2}$$

Tarvilikkus. Eeldame, et $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$, ja näitame, et siis kehtib (2.2). Olgu täidetud implikatsiooni (2.2) eeldus, s.t. $\mathbf{X}^{(n)} \in D$ $(n \in \mathbb{N})$ ning $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$. (Kuna $\mathbf{A}$ on hulga D kuhjumispunkt, siis selliseid jadasid $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ leidub. Nimelt kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\left(U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}\right) \cap D \neq \varnothing$ ja kui valida $\mathbf{X}^{(n)} \in \left(U_{\frac{1}{n}}(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}\right) \cap D$, siis $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$ (veenduge!)✠.) Peame näitama, et $f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to b$.

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt leidub $\delta > 0$ omadusega

$$[\mathbf{X} \in D,\ 0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Kuna $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$, siis leidub selline indeks $N \in \mathbb{N}$, et $\left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < \delta$ iga $n \geqslant N$ korral. Tingimusest (2.3) saame $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) - b\right| < \varepsilon$, kui $n \geqslant N$, seega $\lim_n f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) = b$. Implikatsioon (2.2) kehtib.

Piisavus. Eeldame, et (2.2) kehtib. Oletame vastuväiteliselt, et $b \neq \lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})$, s.t.

$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0\ \exists\mathbf{X}_\delta \in D\setminus\{\mathbf{A}\} : 0 < \|\mathbf{X}_\delta - \mathbf{A}\| < \delta, \quad |f(\mathbf{X}_\delta) - b| \geqslant \varepsilon_0.$$

Kui $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, siis saame jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$, et $0 < \left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{A}\right\| < 1/n$ ja $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) - b\right| \geqslant \varepsilon_0$ $(n \in \mathbb{N})$. Seejuures

$$\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A} \text{ ja } f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \nrightarrow b$$

(põhjendage!)✠, mis on vastuolus meie eeldusega (2.2). Kuna meie vastuväiteline oletus $b \neq \lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X})$ viib vastuolule, siis on ta väär. ■

Mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse definitsiooni saab esitada **ümbruste keeles**: $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$ parajasti siis, kui

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(U_\delta(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}) \subset U_\varepsilon(b) := (b-\varepsilon, b+\varepsilon). \tag{2.4}$$

Vaatleme lisaks veel tingimust

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\rho > 0 : f(K_\rho(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}) \subset U_\varepsilon(b), \tag{2.5}$$

kus $K_\rho(\mathbf{A}) = \{\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid |x_k - a_k| < \rho\ \ (k = 1, \ldots, m)\}$ on m-mõõtmeline kuup keskpunktiga $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$. Arvestades lauset 4 paragrahvist 1, saame antud $\delta > 0$

korral valida $\rho > 0$ nii, et $K_\rho(\mathbf{A}) \subset U_\delta(\mathbf{A})$, niisiis tingimusest (2.4) järeldub tingimus (2.5). Sama väide ütleb, et antud $\rho > 0$ puhul leidub $\delta > 0$ omadusega $U_\delta(\mathbf{A}) \subset K_\rho(\mathbf{A})$, mis tähendab implikatsiooni (2.5) $\Rightarrow$ (2.4). Kokkuvõttes oleme saanud veel ühe tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et kehtiks võrdus $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = b$, nimelt tingimuse (2.5).

Lõpmatu piirväärtus. Olgu A funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna kuhjumispunkt. Kirjutame

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = \infty,$$

kui iga $M > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et

$$[0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta,\ \mathbf{X} \in D] \Rightarrow f(\mathbf{X}) > M.$$

Analoogiliselt defineeritakse $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = -\infty$.

Näide 2.2. Olgu

$$f(x,y) := \frac{1}{x + 2y + 1}.$$

Näitame kõigepealt, et piirväärtust $\lim\limits_{\mathbf{X}\to(1,-1)} f(x,y)$ ei eksisteeri. Võtame punkti $\mathbf{A} := (1,-1)$ suvalise ümbruse $U_\delta(\mathbf{A})$ ning fikseerime $x = 1$. Vaatleme punkte $\mathbf{X} = (1,y)$, kus $y \in (-1-\delta, -1+\delta)$. Selge, et need punktid kuuluvad ümbrusse $U_\delta(\mathbf{A})$, s.t. nad rahuldavad tingimust $\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta$. Samal ajal $\lim\limits_{y\to-1-} f(1,y) = -\infty$ ning $\lim\limits_{y\to-1+} f(1,y) = \infty$, mistõttu lõpmatut piirväärtust punktis $\mathbf{A}$ funktsioonil f ei eksisteeri.

Seevastu $\lim\limits_{\mathbf{X}\to(1,-1)} |f(x,y)| = \infty$. Tõepoolest, kuna

$$|x + 2y + 1| = |(x-1) + 2(y+1)| \leqslant \sqrt{5}\,\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|$$

(põhjendage!)✠, siis $|f(x,y)| \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|}$, mistõttu suvalise $M > 0$ puhul

$$0 < \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \frac{1}{M\sqrt{5}} =: \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{X})| > M.$$

Piirväärtus protsessis $\|\mathbf{X}\| \to \infty$. Olgu funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkond D **tõkestamata** hulk. Kirjutame

$$\lim_{\|\mathbf{X}\|\to\infty} f(\mathbf{X}) = b,$$

kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $K > 0$, et

$$[\|\mathbf{X}\| \geqslant K,\ \mathbf{X} \in D] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - b| < \varepsilon.$$

Näide 2.3. Näitame, et

$$\lim_{\|\mathbf{X}\|\to\infty} \cos\frac{1}{x^2 + 2y^2} = 1.$$

Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna koosinusfunktsioon on nullpunktis pidev, siis leidub niisugune $\delta > 0$, et $|\cos z - 1| < \varepsilon$, kui $|z| < \delta$ (selgitage!)✠. Võrratusest

$$\frac{1}{x^2 + 2y^2} \leqslant \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2}$$

(selgitage!)✠ saame eeldusel $\|\mathbf{X}\| > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$, et $\frac{1}{x^2+2y^2} < \delta$, millest tuleneb $\left|\cos \frac{1}{x^2+2y^2} - 1\right| < \varepsilon$. Niisiis, $\lim\limits_{\|\mathbf{X}\| \to \infty} \cos \frac{1}{x^2+2y^2} = 1$.

2.2 Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Meenutame, et ühe muutuja funktsiooni f nimetatakse pidevaks määramispiirkonna punktis a, mis samal ajal on määramispiirkonna kuhjumispunkt, kui $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, s.t. kui on täidetud tingimus

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a)).$$

Analoogiliselt defineeritakse järgnevalt mitme muutuja funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidevus mingis määramispiirkonna D punktis $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$.

Definitsioon. Olgu $\mathbf{A}$ m muutuja funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna D selline punkt, mis samal ajal on hulga D kuhjumispunkt. Öeldakse, et f on *pidev* (*continuous*) *punktis* $\mathbf{A} \in D$, kui

$$\lim_{\mathbf{X} \to \mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A}),$$

s.t.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : [\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| < \delta, \, \mathbf{X} \in D] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| < \varepsilon$$

ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : f(U_\delta(\mathbf{A}) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(\mathbf{A}))$$

(rõhutame, et siin $U_\delta(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m$ ja $U_\varepsilon(f(\mathbf{A})) \subset \mathbb{R}$). Kui f on pidev alamhulga $Q \subset D$ igas punktis, siis ütleme, et ta on *pidev hulgas* Q.

Näide 2.4. Näitame, et seosega

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

määratud funktsioon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on pidev suvalises punktis $\mathbf{A} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, s.t.

$$\lim_{\mathbf{X} \to \mathbf{A}} f(x, y) = f(\mathbf{A}) = 1 - a^2 - b^2.$$

Selleks paneme tähele, et

$$|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})| = \left|\left(1 - x^2 - y^2\right) - \left(1 - a^2 - b^2\right)\right|$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \left|x^2-a^2\right|+\left|y^2-b^2\right|=|x-a|\,|x+a|+|y-b|\,|y+b|\\&\leqslant \|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|\,(|x+a|+|y+b|)\,.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Olgu $\varepsilon > 0$, nõuame, et $0 < \delta \leqslant 1$. Kui $\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\| < \delta$, siis $|x| < |a|+1$ ja $|y| < |b|+1$ (selgitage!)✠, seega saame seosest (2.6)

$$|f(\mathbf{X})-f(\mathbf{A})| < M\,\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|\,,\ \text{kus}\ M := 2\,(|a|+|b|+1)$$

(kontrollige!)✠. Võtame $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$, siis tingimusest $0 < \|\mathbf{X}-\mathbf{A}\| < \delta$ järeldub $|f(\mathbf{X})-f(\mathbf{A})| < \varepsilon$, s.t. funktsioon f on pidev punktis $\mathbf{A}$.

Lause 2.2. *m muutuja funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev punktis $\mathbf{A} \in D$ parajasti siis, kui on täidetud tingimus*

$$\left[\mathbf{X}^{(n)} \in D,\ \mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}\right] \Rightarrow f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to f(\mathbf{A})\,.\tag{2.7}$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ (Kasutada lauset 2.1). ■

Tehted pidevate funktsioonidega. Sarnaselt ühe muutuja funktsioonidega defineeritakse mitme muutuja funktsioonide *summad, korrutised ja jagatised.* Kui f ja g on m muutuja funktsioonid määramispiirkonnaga $D \subset \mathbb{R}^m$, siis defineerime

$$\begin{aligned}(f+g)(\mathbf{X}) &:= f(\mathbf{X})+g(\mathbf{X})\,,\\(fg)(\mathbf{X}) &:= f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})\,,\\\left(\frac{f}{g}\right)(\mathbf{X}) &:= \frac{f(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})}\ (\text{eeldusel } g(\mathbf{X}) \neq 0) \quad (\mathbf{X} \in D)\,.\end{aligned}$$

Vahetu kontroll näitab, et kui funktsioonid f ja g on pidevad punktis $\mathbf{A} \in D$, siis ka funktsioonid $f+g$, fg ja $\frac{f}{g}$ on selles punktis pidevad (veenduge!)✠.

Liitfunktsioon, tema pidevus. Defineerime nüüd mitme muutuja funktsioonide kompositsiooni ehk liitfunktsiooni. Olgu $w = f(u_1,\ldots,u_l)$ l muutuja funktsioon määramispiirkonnaga Q, kus argumendid $u_1,\ldots,u_l$ on omakorda m muutuja funktsioonid:

$$\begin{aligned}u_1 &= \varphi_1(x_1,\ldots,x_m)\,,\\u_2 &= \varphi_2(x_1,\ldots,x_m)\,,\\&\ldots\\u_l &= \varphi_l(x_1,\ldots,x_m)\,.\end{aligned}$$

Eeldame, et funktsioonidel $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ on ühine määramispiirkond D ning iga $\mathbf{X} \in D$ korral $(\varphi_1(\mathbf{X}),\ldots,\varphi_l(\mathbf{X})) \in Q$. Siis saab defineerida m muutuja funktsiooni $F : D \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$\begin{aligned}F(\mathbf{X}) := F(x_1,\ldots,x_m) &:= f(\varphi_1(\mathbf{X}),\ldots,\varphi_l(\mathbf{X}))\\&= f(\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_l(x_1,\ldots,x_m))\,.\end{aligned}$$

Funktsiooni F nimetame funktsioonide $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ *kompositsiooniks* ehk *liitfunktsiooniks* (*composite function*).

Lause 2.3. *Kui funktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ on pidevad punktis $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m) \in D$ ja funktsioon f on pidev punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \ldots, \varphi_l(\mathbf{A}))$, siis kompositsioon F on pidev punktis $\mathbf{A}$.*

Tõestus. Tähistame $b_i := \varphi_i(\mathbf{A})$ $(i = 1, \ldots, l)$, s.t. $\mathbf{B} := (b_1, \ldots, b_l)$. Olgu $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ selline jada, et $\mathbf{X}^{(n)} \in D$ ja $\mathbf{X}^{(n)} \to \mathbf{A}$ $(n \to \infty)$. Meie eesmärk on veenduda, et $F\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to F(\mathbf{A})$. Kuna funktsioonid φ_i on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, siis lause 2.2 kohaselt

$$\varphi_i\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \to \varphi_i(\mathbf{A}) = b_i \ \ (i = 1, \ldots, l).$$

Tähistame $\mathbf{Z}^{(n)} := \left(\varphi_1\left(\mathbf{X}^{(n)}\right), \ldots, \varphi_l\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)\right)$, lause 1.6 põhjal $\mathbf{Z}^{(n)} \to \mathbf{B}$ $(n \to \infty)$. Kuna f on pidev punktis $\mathbf{B}$, siis veelkord lauset 2.2 rakendades saame, et

$$F\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) = f\left(\varphi_1\left(\mathbf{X}^{(n)}\right), \ldots, \varphi_l\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)\right) = f\left(\mathbf{Z}^{(n)}\right) \to f(\mathbf{B}) = F(\mathbf{A}).$$

Lause on tõestatud. ■

2.3 Kinnises tõkestatud hulgas pidevate mitme muutuja funktsioonide omadused

Eelpool toodud definitsiooni kohaselt nimetatakse ruumis $\mathbb{R}^m$ tõkestatuks hulka, mis sisaldub mingis keras $U_r(\mathbf{A})$. Mitme muutuja funktsioonidel, mis on määratud ja pidevad mingis kinnises *tõkestatud hulgas*, on sarnaselt lõigus pidevate ühe muutuja funktsioonidega mitmed tähelepanuväärsed omadusd.

Lause 2.4. ***(Weierstrassi teoreem funktsiooni tõkestatusest).*** *Kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev m muutuja funktsioon f on selles hulgas tõkestatud, s.t.*

$$\exists M > 0 : |f(\mathbf{X})| \leqslant M \quad \textit{iga } \mathbf{X} \in D \ \ \textit{korral.}$$

Tõestus. Eeldame, et f on kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev funktsioon. Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole hulgas D tõkestatud, s.t.

$$\forall M > 0 \ \exists \mathbf{X}_M \in D : |f(\mathbf{X}_M)| > M.$$

Siis iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks saab valida hulgas D punkti $\mathbf{X}^{(n)}$ omadusega $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)\right| > n$. Punktide jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ on tõkestatud (põhjendage!)✠, Bolzano-Weierstrassi teoreemi (vt. lause 1.8) kohaselt sisaldab ta koonduva osajada $\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)$. Olgu $\mathbf{A} := \lim_i \mathbf{X}^{(n_i)}$, siis lause 1.9 kohaselt saame $\mathbf{A} \in D$. Funktsiooni f pidevusest tuleneb $f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) \to f(\mathbf{A})$ (vrd. lause 2.2), niisiis on $\left(f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)\right)$ koonduv arvjada, seega tõkestatud. Samal ajal kehtib vastavalt punktide $\mathbf{X}^{(n)}$ valikule võrratus $\left|f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)\right| > n_i \geqslant i$, mille kohaselt jada $\left(f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)\right)$ ei ole tõkestatud. Saadud vastuolu tähendab, et f peab olema hulgas D tõkestatud funktsioon. ■

Lause 2.5. ***(Weierstrassi teoreem funktsiooni ekstremaalsetest väärtustest).*** *Kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev m muutuja funktsioon f saavutab selles hulgas oma suurima ja vähima väärtuse.*

Tõestus. Tõestame suurima väärtuse olemasolu. Lause 2.4 põhjal on funktsiooni väärtuste hulk $\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ tõkestatud, pidevuse aksioomi kohaselt eksisteerib tal ülemine raja M. Oletame vastuväiteliselt, et

$$f(\mathbf{X}) \neq M \text{ kõikide } \mathbf{X} \in D \text{ korral,}$$

ja defineerime hulgas D uue funktsiooni g seosega

$$g(\mathbf{X}) := \frac{1}{M - f(\mathbf{X})}.$$

Funktsioon g on hulgas D pidev (põhjendage!)✠, järelikult leidub selline arv $K > 0$, et $\frac{1}{M-f(\mathbf{X})} \leqslant K$ ehk $f(\mathbf{X}) \leqslant M - \frac{1}{K}$ iga $\mathbf{X} \in D$ puhul. Viimane võrratus on vastuolus faktiga, et M on hulga $\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ ülemine raja. See vastuolu kinnitab meie vastuväitelise oletuse paikapidamatust. Lause on tõestatud. ■

Definitsioon. Hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ määratud m muutuja funktsiooni f nimetatakse *ühtlaselt pidevaks* (*uniformly continuous*) selles hulgas, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub niisugune $\delta > 0$, et kui $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in D$ ning $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta$, siis $|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')| < \varepsilon$.

Ühe muutuja funktsioonide korral väidab Cantori teoreem, et lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev. Analoogiline väide kehtib ka mitme muutuja funktsioonide puhul.

Lause 2.6. ***(Cantori teoreem funktsiooni ühtlasest pidevusest).*** *Kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev m muutuja funktsioon f on hulgas D ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Olgu funktsioon f kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ pidev. Oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole selles hulgas ühtlaselt pidev. Siis saab leida niisuguse $\varepsilon_0 > 0$, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral leiduvad punktid $\mathbf{X}^{(n)}, \mathbf{X}'^{(n)} \in D$ omadusega

$$\left\|\mathbf{X}^{(n)} - \mathbf{X}'^{(n)}\right\| < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid } \left|f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) - f\left(\mathbf{X}'^{(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon_0 \tag{2.8}$$

(selgitage!)✠. Kuna jada $\left(\mathbf{X}^{(n)}\right)$ on tõkestatud (põhjendage!)✠, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi järgi sisaldab ta koonduva osajada $\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right)$. Olgu $A := \lim_i \mathbf{X}^{(n_i)}$, siis $A \in D$ (selgitage!)✠. Edasi paneme tähele, et

$$\left\|\mathbf{X}^{(n_i)} - \mathbf{X}'^{(n_i)}\right\| < \frac{1}{n_i} \leqslant \frac{1}{i} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

seetõttu

$$\left\|\mathbf{X}'^{(n_i)} - \mathbf{A}\right\| \leqslant \left\|\mathbf{X}'^{(n_i)} - \mathbf{X}^{(n_i)}\right\| + \left\|\mathbf{X}^{(n_i)} - \mathbf{A}\right\| < \frac{1}{i} + \left\|\mathbf{X}^{(n_i)} - \mathbf{A}\right\| \to 0 \quad (i \to \infty),$$

niisiis $\mathbf{X}'^{(n_i)} \to \mathbf{A}$. Kuna f on pidev funktsioon, siis

$$\lim_i f\left(\mathbf{X}'^{(n_i)}\right) = \lim_i f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) = f(\mathbf{A})$$

(selgitage!)✠, järelikult $\lim_i \left(f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) - f\left(\mathbf{X}'^{(n_i)}\right)\right) = 0$. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt saab valida indeksi N omadusega

$$i \geqslant N \Rightarrow \left|f\left(\mathbf{X}^{(n_i)}\right) - f\left(\mathbf{X}'^{(n_i)}\right)\right| < \varepsilon_0,$$

kuid see on vastuolus punktide $\mathbf{X}^{(n)}$ ja $\mathbf{X}'^{(n)}$ valikuga (vrd. (2.8)). Lause on tõestatud. ■

Bolzano-Cauchy teoreemi kohaselt saavutab lõigus pidev ühe muutuja funktsioon iga väärtuse oma ekstremaalsete väärtuste vahel. Erinevalt eelpool tõestatud Cantori ja Weierstrassi teoreemidest ei ole Bolzano-Cauchy teoreem ülekantav kõigile kinnises tõkestatud hulgas pidevatele funktsioonidele. Näiteks, funktsioon

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in [0,1], \\ 1, & \text{kui } x \in [2,3], \end{cases}$$

on pidev kinnises tõkestatud hulgas $D = [0,1] \cup [2,3]$, kuid ta ei saavuta ühtegi väärtust ekstremaalsete väärtuste 0 ja 1 vahel. Väide jääb aga kehtima, kui lisaks hulga D kinnisusele ja tõkestatusele eeldada veel tema sidusust.

Lause 2.7. ***(Bolzano-Cauchy teoreem funktsiooni vahepealsetest väärtustest).*** *Sidusas kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^k$ pidev funktsioon f saab iga väärtuse b oma vähima väärtuse $m := \min\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ ja suurima väärtuse $M := \max\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ vahel.*

Tõestus. Lause 2.5 põhjal saab f väärtused m ja M, olgu $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ sellised punktid, et $m = f(\mathbf{A})$ ja $M = f(\mathbf{B})$. Sidususe eelduse kohaselt leidub hulgas D punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendav pidev joon, olgu see määratud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, \; x_k = \varphi_k(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Eeldame, et $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_k(\alpha))$ ja $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \ldots, \varphi_k(\beta))$ ning $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)) \in D$, kui t paikneb arvude α ja β vahel, konkreetsuse mõttes olgu $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Kui moodustame liitfunktsiooni g seosega

$$g(t) := f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)),$$

siis, kuna kõik komponendid $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ on pidevad, saame lõigus $[\alpha, \beta]$ pideva *ühe muutuja* funktsiooni (kontrollige!)✠. Ilmselt on

$$m = \min\{g(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\} \text{ ja } M = \max\{g(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$$

(põhjendage!)✠. Funktsiooni g puhul kehtib Bolzano-Cauchy teoreem, selle kohaselt leidub iga $b \in [m, M]$ korral argument $t_1 \in [\alpha, \beta]$, et $b = g(t_1)$. Seega, kui tähistada $\mathbf{X}_1 := (\varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_k(t_1))$, siis $\mathbf{X}_1 \in D$ ja

$$b = g(t_1) = (f(\varphi_1(t_1), \ldots, \; \varphi_k(t_1))) = f(\mathbf{X}_1).$$

Väide on tõestatud. ■

Järeldus 2.8. ***(Bolzano-Cauchy teoreem nullkohast).*** *Olgu funktsioon f pidev sidusas kinnises tõkestatud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$. Leidugu punktid $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ nii, et $f(\mathbf{A}) < 0$ ja $f(\mathbf{B}) > 0$. Siis leidub punkt $\mathbf{C} \in D$ nii, et $f(\mathbf{C}) = 0$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

3 Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

3.1 Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Üleminekul ühe muutuja funktsioonidelt m muutuja funktsioonidele, kus $m = 2, 3, \ldots$, kerkib üles **kvalitatiivselt uusi probleeme**, eeskätt just seoses diferentsiaal- ja integraalarvutusega. Tähelepanuväärne on, et nende probleemide olemus ei sõltu oluliselt ruumi dimensioonist, kuigi suurema m puhul on probleemid tehniliselt keerulisemad. Nendel kaalutlustel *piirdume me järgnevas enamasti kahe muutuja funktsioonide vaatlemisega.*

Osatuletised. Olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ kahe muutuja funktsiooni $w = f(x, y)$ määramispiirkonna $D \subset \mathbb{R}^2$ *sise*punkt. Kui fikseerida teine muutuja $y = b$, siis seosega

$$f_1(x) := f(x, b)$$

on määratud ühe muutuja funktsioon f_1 (nn. *osafunktsioon*), mille määramispiirkonnaks on hulk

$$D_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in D\}.$$

Kuna $\mathbf{A}$ on hulga D sisepunkt, siis leidub tal ümbrus $U_\delta(\mathbf{A})$, mis sisaldub hulgas D. Funktsioon f_1 on seega määratud punkti $a \in \mathbb{R}$ ümbruses $(a - \delta, a + \delta)$ (kontrollige!)✠. Kui funktsioonil f_1 eksisteerib punktis a tuletis

$$f_1'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}, \tag{3.1}$$

siis seda nimetatakse kahe muutuja funktsiooni f *osatuletiseks* (*partial derivative*) *punktis* $\mathbf{A} = (a, b)$ *muutuja* x *järgi* ning tähistatakse

$$\frac{\partial w}{\partial x}(a, b) \text{ või } \frac{\partial w}{\partial x}(\mathbf{A}) \text{ või } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ või } \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) \quad (\text{samuti ka } f_x(a, b) \text{ või } f_x(\mathbf{A})).$$

Seega

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x, b)\,|_{x=a} = f'(x, b)\,|_{x=a}.$$

NB! Mahukate valemite tekstis kompaktsema paigutamise huvides kirjutame me allpool mõnikord $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ja $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})$ asemel $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}$.

Analoogiliselt, kui fikseerida esimese muutuja väärtus $x = a$, saame ühe muutuja y osafunktsiooni

$$f_2(x) := f(a, x),$$

see on määratud punkti b ümbruses $(b - \delta, b + \delta)$. Kui eksisteerib tuletis

$$f_2'(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}, \tag{3.2}$$

siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f *osatuletiseks punktis* $\mathbf{A}$ *muutuja* y *järgi* ning tähistatakse

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \text{ või } \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) \quad (\text{samuti ka } f_y(a, b) \text{ või } f_y(\mathbf{A})).$$

Näide 3.1. Olgu $f(x,y) := e^{xy} + \sin(xy)$. Siis f on määratud kogu xy-tasandil $\mathbb{R}^2$ ning

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\left(e^{xy} + \cos(xy)\right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(e^{xy} + \cos(xy)\right).$$

Osatuletiste olemasolu ei garanteeri funktsiooni pidevust. Näide 3.2. Seosega

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{kui } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

määratud funktsioonil f on punktis $\mathbf{0}$ mõlema muutuja järgi osatuletised (veenduge!)✠, kuid ta ei ole selles punktis pidev. Nimelt koondub punktide $\mathbf{X}_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ jada $(\mathbf{X}_n)$ punktiks $\mathbf{0}$ (selgitage!)✠, kuid

$$f(\mathbf{X}_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \text{ iga } n \text{ korral,}$$

seega $f(\mathbf{X}_n) \nrightarrow 0 = f(\mathbf{0})$. Lause 2.2 kohaselt ei ole f punktis $\mathbf{0}$ pidev.

Osatuletiste geomeetriline tähendus. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,y)$ määramispiirkond. Punktide hulka

$$\{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ nimetatakse funktsiooni f *graafikuks* (*graph*). Funktsiooni f graafikut nimetatakse tavaliselt *pinnaks* (*surface*), seost $z = f(x,y)$ selle pinna võrrandiks.

Olgu $\mathbf{A} = (a,b)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Moodustame tasandi $y = b$, see on tasand, mis läheb läbi punkti $\mathbf{A}$ ja on paralleelne xz-tasandiga. Ta lõikab pinda $z = f(x,y)$, tähistame nende lõikejoone sümboliga l_1. Lihtne on näha, et l_1 on osafunktsiooni f_1 graafik tasandil $y = b$. Kui punktis $\mathbf{A}$ eksisteerib osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a)$, siis see on joone l_1 puutuja tõusunurga tangens punktis $\mathbf{A}' = (a, b, f(a,b))$ (selgitage!)✠.

Samamoodi, kui lõigata pinda $z = f(x,y)$ tasandiga $x = a$, siis lõikejoon l_2 on muutuja y osafunktsiooni f_2 graafik ning osatuletis $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ on punktis $\mathbf{A}' = (a, b, f(a,b))$ sellele graafikule võetud puutuja tõusunurga tangens.

3.2 Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Funktsioonide uurimisel on nii teoreetilisest kui ka praktilisest seisukohast lähtudes oluline küsimus, *milline on funktsiooni väärtuste muutumise iseloom argumendi vaadeldaval muutumisel*. Ühe muutuja funktsioonide puhul tuuakse selle probleemi käsitlemiseks sisse sobivad mõisted pidevus ja diferentseeruvus. Kui pidevus on üldtopoloogiline mõiste, mistõttu selle defineerimine on ka mitme muutuja funktsioonide puhul lihtne, siis diferentseeruvusega on asi keerulisem. Eelmises punktis tõime näite 3.2 funktsioonist f, millel on ruumis $\mathbb{R}^2$ olemas osatuletised, kuid mis ei ole punktis $\mathbf{0}$ pidev. Samas teame, et ühe muutuja funktsioonide puhul on diferentseeruvus oluliselt tugevam tingimus kui pidevus. Niisiis, puhtformaalselt võttes võime väita, et osatuletiste olemasolu ei ole see omadus, mis vastaks ühe muutuja funktsioonide diferentseeruvusele. Sisuliselt asjale lähenedes märgime, et osatuletis kirjeldab funktsiooni käitumist antud punkti ümbruses vaid ühe konkreetse argumendi muutumisel. Seejuures ei anna osatuletised vahetult mingit informatsiooni funktsiooni väärtuste muutumise kohta argumentide samaaegsel muutumisel.

Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ kahe muutuja funktsioon ja olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Tähistame sümboliga Δf funktsiooni f muudu punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumentide muutudele h_1 ja h_2, s.t.

$$\Delta f := f(\mathbf{A} + (h_1, h_2)) - f(\mathbf{A}) = f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b).$$

Definitsioon. Funktsiooni f nimetatakse *diferentseeruvaks* (*differentiable*) *punktis* $\mathbf{A} = (a, b)$, kui leiduvad arvud M ja N, mis ei sõltu argumentide muutudest h_1 ja h_2 nii, et

$$\Delta f = Mh_1 + Nh_2 + \alpha, \tag{3.3}$$

kus $\alpha = \alpha(h_1, h_2)$ on protsessis $(h_1, h_2) \to \mathbf{0}$ kõrgemat järku lõpmata väike suurus kui $\|(h_1, h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, s.t.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \tag{3.4}$$

Definitsiooni tingimusi (3.3) ja (3.4) kokku võttes võime öelda, et funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv parajasti siis, kui leiduvad sellised arvud M ja N, et

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) - M(x - a) - N(y - b)}{\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\|} = 0.$$

Lause 3.1. *Punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv funktsioon* f *on selles punktis pidev.*

Tõestus. Eelduse kohaselt on täidetud tingimused (3.3) ja (3.4), peame näitama, et $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{A})$ ehk $\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} (f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})) = 0$. Tähistame $h_1 := x - a$ ja $h_2 := y - b$. Kui $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$, siis $(h_1, h_2) \to 0$. Tingimuse (3.4) põhjal $\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \alpha = 0$ (põhjendage!)✠, mistõttu seosest (3.3) saame

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} (f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})) = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \Delta f = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} (Mh_1 + Nh_2 + \alpha) = 0.$$

Lause on tõestatud. ■

Lause 3.2. *Kui funktsioon* f *on punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv, siis tal eksisteerivad selles punktis lõplikud osatuletised, kusjuures seos (3.3) omandab kuju*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})\, h_2 + \alpha. \tag{3.5}$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv. Kui võtta seoses (3.3) $h_2 := 0$ ja $h_1 \neq 0$, siis eksisteerib piirväärtus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a+h_1,b) - f(a,b)}{h_1} = M \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1}{h_1} + 0 + \lim_{h_1 \to 0} \frac{\alpha}{h_1} = M$$

(selgitage!)✠. Analoogiliselt veendutakse, et $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}) = N$. ■

Kui hulga D igas punktis $\mathbf{X}$ leidub lõplik osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{X})$, siis hulgas D on defineeritud funktsioon $\mathbf{X} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{X})$. Seda funktsiooni nimetatakse *osatuletisfunktsiooniks* ehk *osatuletiseks* (muutuja x järgi). Analoogiliselt defineeritakse osatuletisfunktsioon muutuja y järgi.

Nagu teame, ei garanteeri osatuletiste $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})$ olemasolu üldjuhul veel funktsiooni f diferentseeruvust punktis $\mathbf{A}$ (selgitage!)✠. Küll aga garanteerib selle, nagu selgub järgmisest lausest, osatuletiste **pidevus** punktis $\mathbf{A}$.

Lause 3.3. *Kui funktsioonil f eksisteerivad määramispiirkonna D sisepunkti $\mathbf{A} = (a,b)$ mingis ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ning need on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, siis f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv.*

Tõestus. Eeldame, et osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on määratud hulgas $U_\delta(\mathbf{A})$ ja nad on punktis $\mathbf{A}$ pidevad. Seostega

$$f_1(x) := f(x,b) \quad \text{ja} \quad f_2(y) := f(a,y)$$

määratud funktsioonid f_1 ja f_2 on diferentseeruvad vastavalt vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ ja $(b-\delta, b+\delta)$ ning neis vahemikes siis ka pidevad. Anname muutujatele x ja y punktis $\mathbf{A}$ vastavalt muudud h_1 ja h_2 nii, et $(a+h_1, b+h_2) \in U_\delta(\mathbf{A})$. Rakendame ühe muutuja funktsiooni Lagrange'i keskväärtusteoreemi, selle abil saab funktsiooni f muudu esitada kujul

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) \\ &= f(a+h_1, b+h_2) - f(a, b+h_2) + f(a, b+h_2) - f(a,b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h_1, b+h_2)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 h_2)\, h_2,\end{aligned}$$

kus $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ (selgitage!)✠. Kui tähistada

$$\alpha_1 := \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h_1, b+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \;\; \alpha_2 := \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b),$$

siis saame seose

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, h_2 + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2.$$

See on avaldis kujul (3.3), väite tõestuseks on vaja veenduda, et $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to \mathbf{0}} \frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$.

Paneme tähele, et

$$\left| \frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leqslant |\alpha_1| \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + |\alpha_2| \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$$

ning (tänu osatuletiste pidevusele)

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \alpha_1 = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h_1, b+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \right) = 0,$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \alpha_2 = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right) = 0$$

(põhjendage!)✠. Seega $\left|\frac{\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \to 0$ protsessis $(h_1, h_2) \to \mathbf{0}$. Lause on tõestatud. ■

Lause 3.3 ütleb, et kui kahe muutuja funktsioonil on antud punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ **pidevad** osatuletised, siis need kirjeldavad funktsiooni käitumist mitte ainult sirgetel $x = a$ ja $y = b$, vaid selle punkti teatavas ümbruses.

Osatuletiste pidevus ei ole tarvilik tingimus funktsiooni diferentseeruvuseks.
Näide 3.3. Olgu

$$f(x,y) := \begin{cases} (x-y)^2 \sin\frac{1}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Siis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y)\sin\frac{1}{x-y} - \cos\frac{1}{x-y} \quad (x \neq y)$$

ning

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h} = 0,$$

millest järeldub, et osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$ ei ole pidev punktis $\mathbf{0}$ (tegelikult on ta katkev kogu sirgel $x = y$). Analoogiliselt kontrollitakse, et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ei ole punktis $\mathbf{0}$ pidev. Nimelt,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y)\sin\frac{1}{x-y} + \cos\frac{1}{x-y} \quad (x \neq y)$$

ja $\frac{\partial f}{\partial y}(y,y) = 0$ (kontrollige!)✠.

Näitame, et f on punktis $\mathbf{0}$ diferentseeruv. Tõepoolest,

$$\frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{0}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})\,y}{\|X\|} = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\frac{1}{x-y}, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y \end{cases}$$

(kontrollige!)✠, võrratuse

$$\left| \frac{(x-y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\frac{1}{x-y} \right| \leqslant \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \left(x^2 \neq y^2\right)$$

tõttu saame

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{0}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{0})\,y}{\|\mathbf{X}\|} = 0$$

(veenduge!)✠.

Graafiku puutujatasand. Eeldame, et funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv. Tähistades $\mathbf{X} = (x, y) := (a + h_1, b + h_2)$ (s.t. $x := a + h_1$ ja $y := b + h_2$), $c := f(a, b)$ ja $z := f(x, y)$, saame tingimuse (3.3) kirjutada kujul

$$z = c + M(x - a) + N(y - b) + \alpha, \tag{3.6}$$

kus $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{\alpha}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$. Võrrand

$$z = c + M(x - a) + N(y - b) \tag{3.7}$$

kirjeldab teatavat tasandit, millel paikneb punkt $\mathbf{A}' := (a, b, c)$ (kontrollige!)✠. Lause 3.2 kohaselt $M = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ja $N = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, seega määrab seos (3.6) (ehk (3.3)) üheselt tasandi (3.7). Seda tasandit nimetatakse funktsiooni f *graafiku puutujatasandiks punktis* $\mathbf{A}'$. Esitame puutujatasandi definitsiooni.

Definitsioon. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ graafiku puutujatasandiks punktis $\mathbf{A}' := (a, b, c)$ nimetatakse sellist tasandit, mille punkti aplikaadi (s.o. z-koordinaadi) ja funktsiooni väärtuse vahe on protsessis $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$, kus $\mathbf{X} = (x, y)$ ja $\mathbf{A} = (a, b)$, kõrgemat järku lõpmata väike kui $\|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

Täisdiferentsiaal. Kui funktsioon f on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruv ja $\mathbf{h} := (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, siis avaldist

$$\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})\, h_2$$

nimetatakse funktsiooni f *täisdiferentsiaaliks* punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumendi muudule $\mathbf{h}$.

Puutujatasandi võrrandist (3.7) saame muuhulgas, et $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})\, h_2 = z - c$. Seega *kirjeldab funktsiooni f täisdiferentsiaal* $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(h_1, h_2)$ *punktis* $\mathbf{A} = (a, b)$ *funktsiooni graafikule punktis* $\mathbf{A}' := (a, b, f(a, b))$ *võetud puutujatasandi aplikaadi muutu, mis vastab argumentide muutudele h_1 ja h_2.* Teisisõnu, teljestikus, mille alguspunktiks on algse nullpunkti asemel punkt $\mathbf{A}$, kujutab funktsiooni $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ graafik endast pinna $u = f(x, y)$ puutujatasandit punktis $\mathbf{A}$.

NB! Oluline tähistuslik kokkulepe! Kui punkti $\mathbf{A}$ ja/või argumendi muudu $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ roll on kontekstist selge, siis tähistatakse täisdiferentsiaali $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(h_1, h_2)$ ka lihtsalt $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f$ või $\mathrm{d}f$. Mõnikord tähistatakse seda täisdiferentsiaali ka sümboliga $\mathrm{d}f(\mathbf{A})$. Argumentide x ja y muutusid h_1 ja h_2 tähistatakse vastavalt $\mathrm{d}x$ ja $\mathrm{d}y$. Seega punktis $\mathbf{A}$ võime kirjutada, et

$$\mathrm{d}f(\mathbf{A}) = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})\, h_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})\, \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})\, \mathrm{d}y.$$

m **muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus.** Analoogiliselt kahe muutuja funktsioonidega defineeritakse m muutuja funktsiooni $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$. Öeldakse, et f on punktis $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ diferentseeruv, kui kehtib võrdus

$$\Delta f := f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A})\, h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A})\, h_m + \alpha,$$

kus $\lim\limits_{(h_1,\ldots,h_m)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha}{\sqrt{h_1^2+\ldots+h_2^2}} = 0$. Avaldist

$$\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(h_1,\ldots,h_m) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A})\, h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A})\, h_m =: \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A})\, \mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A})\, \mathrm{d}x_m \tag{3.8}$$

nimetatakse funktsiooni f täisdiferentsiaaliks punktis $\mathbf{A}$.

Valemist (3.8) saame lihtsalt diferentsiaalide leidmiseks järgmised reeglid (NB! punkt $\mathbf{A}$ on fikseeritud!):

$$\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g,\ \ \mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g,\ \ \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\mathrm{d}f - f\,\mathrm{d}g}{g^2} \qquad (g(\mathbf{A}) \neq 0)$$

(kontrollige!)✠.

Definitsioon. Kui funktsioonil $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}^m$ on lahtine piirkond, on hulgas D pidevad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$, siis öeldakse, et funktsioon f on piirkonnas D *pidevalt diferentseeruv.*

Üldine märkus. Olukorras, kus $\mathcal{X}$ ja $\mathcal{Y}$ on mingid normeeritud ruumid (üle $\mathbb{R}$), kasutatakse terminit „funktsiooni $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tuletis punktis $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$“ kahes tähenduses.

1) Tuletis on ruumi $\mathcal{Y}$ element: teatud moel leitud funktsiooni muudu ja argumendi muudu jagatise piirväärtus, kui argumendi muut läheneb nullile. Ühe muutuja funktsiooni ($\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$) tuletis, mitme muutuja funktsiooni ($\mathcal{X} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$) osatuletised ning „tuletis antud suunas“ näiteks leitakse sellel põhimõttel.

2) Tuletis on pidev lineaarne kujutus $A\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, mis rahuldab omadust

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(\mathbf{X}+h) - f(\mathbf{X}) - A(h)}{\|h\|} = 0. \tag{3.9}$$

Taolise pideva lineaarse kujutuse olemasolu kaudu on defineeritud näiteks funktsiooni f diferentseeruvus mitme muutuja analüüsis ($\mathcal{X} = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$). Sealjuures pideva lineaarse kujutuse A rollis on funktsiooni f täisdiferentsiaal $\mathrm{d}f$ punktis $\mathbf{X}$ ehk $\mathrm{d}_{\mathbf{X}} f$ (veenduge!)✠.

Soovides vaadelda diferentseeruva ühe muutuja funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tuletist punktis $x \in \mathbb{R}$ arvu $f'(x)$ asemel pideva lineaarse kujutusena, defineerime $A(h) = f'(x) \cdot h$ ning paneme tähele, et nõue (3.9) on täidetud (kontrollige!)✠.

3.3 Liitfunktsiooni diferentseerimine

Olgu $w = f(u,v)$ kahe muutuja funktsioon määramispiirkonnaga Q, kus argumendid u, v on omakorda kahe muutuja funktsioonid

$$u = \varphi_1(x,y)\,,\ \ v = \varphi_2(x,y)\,.$$

Eeldame, et funktsioonidel φ_1 ja φ_2 on ühine määramispiirkond D ning $(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) \in Q$ iga $\mathbf{X} \in D$ korral. Defineerime hulgas D liitfunktsiooni F seosega

$$F(x,y) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) = f(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))\,. \tag{3.10}$$

Lause 3.4. *Kui funktsioonidel φ_1 ja φ_2 eksisteerivad punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ lõplikud osatuletised $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A})$ ja $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})$ ning funktsioon f on punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioonil F on punktis $\mathbf{A}$ osatuletis*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A}) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A}).$$

Analoogiliselt, kui funktsioonidel φ_1 ja φ_2 eksisteerivad punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ lõplikud osatuletised $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\mathbf{A})$ ja $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(\mathbf{A})$ ning funktsioon f on punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$ diferentseeruv, siis liitfunktsioonil F on punktis $\mathbf{A}$ osatuletis

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\mathbf{A}) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B}) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(\mathbf{A}).$$

Tõestus. Tõestame väite esimese poole, teine tõestatakse analoogiliselt. Olgu h_1 argumendi x muut punktis $\mathbf{A}$. Tähistame

$$\Delta u := \varphi_1(a + h_1, b) - \varphi_1(a, b), \qquad \Delta v := \varphi_2(a + h_1, b) - \varphi_2(a, b)$$

ja $\Delta F := F(a + h_1, b) - F(a, b)$. Seejuures

$$\begin{aligned} \Delta F &= f(\varphi_1(a + h_1, b), \varphi_2(a + h_1, b)) - f(\varphi_1(a, b), \varphi_2(a, b)) = \\ &= f(b_1 + \Delta u, b_2 + \Delta v) - f(b_1, b_2), \end{aligned}$$

kus $\mathbf{B} =: (b_1, b_2)$.

Meie eesmärk on näidata, et

$$\lim_{h_1 \to 0} \left(\frac{\Delta F}{h_1} - T \right) = 0, \tag{3.11}$$

kus $T := \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B}) \cdot \frac{\Delta u}{h_1} + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B}) \cdot \frac{\Delta v}{h_1}$. Tõepoolest, sellest järelduks, et

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A}) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{\Delta F}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A}) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B}) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})$$

(põhjendage!)✠.

Koondumise (3.11) tõestamiseks fikseerime $\varepsilon > 0$; tarvis on leida $\delta > 0$ selliselt, et

$$0 < |h_1| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left| \frac{\Delta F}{h_1} - T \right| < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Eeldusest, et leiduvad lõplikud $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A})$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})$, on teada koondumine

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{|h_1|} = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A}) \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A}) \right)^2} \tag{3.13}$$

(selgitage!)✠.

Koondumine (3.13) annab, et leiduvad arvud $\delta_1 > 0$ ja $K > 0$ omadusega

$$0 < |h_1| < \delta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{|h_1|} < K$$

(miks?)✠.

Eeldusest, et f on diferentseeruv punktis $\mathbf{B}$, on teada koondumine

$$\lim_{(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2)\to\mathbf{0}} \frac{f(b_1+\mathfrak{p}_1, b_2+\mathfrak{p}_2) - f(b_1,b_2) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\mathfrak{p}_1 - \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\mathfrak{p}_2}{\sqrt{\mathfrak{p}_1^2+\mathfrak{p}_2^2}} = 0. \tag{3.14}$$

Koondumise (3.14) põhjal leiame $\delta_2 > 0$ nii, et

$$0 < \sqrt{\mathfrak{p}_1^2+\mathfrak{p}_2^2} < \delta_2 \Rightarrow \frac{\left|f(b_1+\mathfrak{p}_1, b_2+\mathfrak{p}_2) - f(b_1,b_2) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\mathfrak{p}_1 - \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\mathfrak{p}_2\right|}{\sqrt{\mathfrak{p}_1^2+\mathfrak{p}_2^2}} < \frac{\varepsilon}{K}. \tag{3.15}$$

(põhjendage!)✠.

Kuna $\lim_{h_1\to 0}\Delta u = \lim_{h_1\to 0}\Delta v = 0$ (miks?)✠, siis $\lim_{h_1\to 0}\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2} = 0$. Seega leidub $\delta_3 > 0$ nii, et

$$0 < |h_1| < \delta_3 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2} < \delta_2. \tag{3.16}$$

(selgitage!)✠.

Tähistame $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ ja näitame, et kehtib (3.12). Kehtigu $0 < |h_1| < \delta$. Juhul $\Delta u = \Delta v = 0$ on ka $\Delta F = 0$ ja $T = 0$ (selgitage!)✠, seega sel juhul $\left|\frac{\Delta F}{h_1} - T\right| = 0 < \varepsilon$.

On jäänud vaadelda juhtu, et $\Delta u^2 + \Delta v^2 > 0$. Kasutades eeldust $0 < |h_1| < \delta_3$, leiame (3.16) abil, et $0 < \sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2} < \delta_2$. Valime tingimuses (3.15) $(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2) = (\Delta u, \Delta v)$, siis

$$\frac{|\Delta F - T\cdot h_1|}{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}} < \frac{\varepsilon}{K}$$

(miks?)✠. Kuna $0 < |h_1| < \delta_1$, siis

$$\frac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{|h_1|} < K.$$

Viimase kahe valemirea korrutamine annabki võrratuse $\left|\frac{\Delta F}{h_1} - T\right| < \varepsilon$ (selgitage!)✠. ■

Märkus (oluline!). Lauses 3.4 eeldust „f on punktis $\mathbf{B}$ diferentseeruv" asendada nõrgema eeldusega „leiduvad lõplikud osatuletised $\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})$, $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})$" üldiselt asendada **ei saa**.

Näiteks olgu

$$f(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{kui } u \neq 0 \text{ ja } v \neq 0, \\ 0, & \text{kui } u = 0 \text{ või } v = 0, \end{cases} \qquad \varphi_1(x,y) = x - y, \qquad \varphi_2(x,y) = x + y.$$

Olgu $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Siis $\mathbf{B} = (\varphi_1(\mathbf{0}), \varphi_2(\mathbf{0})) = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{0}) = 1$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{0}) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{0}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0}) = 0$, kusjuures f ei ole diferentseeruv punktis $\mathbf{0}$ (selgitage!)✠.

Saame, et

$$F(x,0) = f(x-0, x+0) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Seega ei leidu lõplikku osatuletist $\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0})$ (põhjendage!)✠.

Lause 3.5. *Kui funktsioonid* φ_1 *ja* φ_2 *on punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruvad ning funktsioon* f *on diferentseeruv punktis* $\mathbf{B} = (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$, *siis liitfunktsioon* F *on punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv.*

Tõestus. Olgu h_1 ja h_2 funktsiooni F argumentide muudud punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ ning (erinevalt eelmise tõestuse tähistustest!)

$$\begin{aligned} \Delta F &:= F(a + h_1, b + h_2) - F(a, b), \\ \Delta u &:= \varphi_1(a + h_1, b + h_2) - \varphi_1(a, b), \\ \Delta v &:= \varphi_2(a + h_1, b + h_2) - \varphi_2(a, b). \end{aligned}$$

Tähistame

$$\beta := \Delta F - \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})h_1 - \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})h_2,$$

meie eesmärk on veenduda, et

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\beta}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \tag{3.17}$$

Tähistame veel

$$\alpha_1 := \Delta u - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A})h_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\mathbf{A})h_2, \qquad \alpha_2 := \Delta v - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})h_1 - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(\mathbf{A})h_2$$

ning mistahes $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) \in \mathbb{R}^2$ korral, kus $(b_1 + \mathfrak{p}_1, b_2 + \mathfrak{p}_2) \in Q$,

$$\alpha(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) := f(b_1 + \mathfrak{p}_1, b_2 + \mathfrak{p}_2) - f(b_1, b_2) - \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\mathfrak{p}_1 - \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\mathfrak{p}_2.$$

Lause eeldused annavad, et

$$\lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \tag{3.18}$$

ning

$$\lim_{(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2)\to\mathbf{0}} \frac{\alpha(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)}{\sqrt{\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2}} = 0. \tag{3.19}$$

Lisaks lause 3.4 põhjal

$$\beta = \Delta F - \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})h_1 - \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})h_2 = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\alpha_2 + \alpha(\Delta u, \Delta v)$$

(selgitage ja arvutage läbi!)✠.

Asume tõestama koondumist (3.17). Fikseerime $\varepsilon > 0$. Võrratused

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Delta u}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right| &\leqslant \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(\mathbf{A})\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(\mathbf{A})\right| + \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}, \\ \left|\frac{\Delta v}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right| &\leqslant \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(\mathbf{A})\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(\mathbf{A})\right| + \frac{|\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \end{aligned}$$

koos koondumistega (3.18) annavad, et leidub $\delta_1 > 0$ ja $K > 0$ omadusega

$$0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} < K \tag{3.20}$$

(põhjendage!)✠. Tingimus (3.19) annab meile $\delta_2 > 0$ omadusega

$$0 < \sqrt{\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2} < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{|\alpha(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)|}{\sqrt{\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2}} < \frac{\varepsilon}{2K}. \tag{3.21}$$

Koondumine $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} = 0$ (miks kehtib?)✠ annab nüüd arvu $\delta_3 > 0$ omadusega

$$0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} < \delta_2. \tag{3.22}$$

Koondumine $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to\mathbf{0}} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\alpha_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$ (miks kehtib?)✠ annab arvu $\delta_4 > 0$ omadusega

$$0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta_4 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\alpha_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.23}$$

Tähistame $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Kehtigu $0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta$. Kui $\Delta u = \Delta v = 0$, siis ka $\Delta F = 0$, millest $\alpha(\Delta u, \Delta v) = \alpha(0,0) = 0$ (selgitage!)✠. Niisiis $\beta = 0$ ja seetõttu

$$\left| \frac{\beta}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| = 0 < \varepsilon.$$

Juhul $\Delta u^2 + \Delta v^2 > 0$ saame seose (3.22) abil, et $0 < \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} < \delta_2$. Valides nüüd $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2) = (\Delta u, \Delta v)$, annavad tingimused (3.20), (3.21) ja (3.23), et

$$\begin{aligned} \left| \frac{\beta}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| &\leqslant \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\alpha_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| + \frac{|\alpha(\Delta u, \Delta v)|}{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K = \varepsilon, \end{aligned}$$

nagu vaja. ■

Järeldus 3.6. *Kui ühe muutuja funktsioonid* $u = \varphi_1(x)$ *ja* $v = \varphi_2(x)$ *on punktis* $a \in \mathbb{R}$ *diferentseeruvad ning kahe muutuja funktsioon* $w = f(u, v)$ *on diferentseeruv punktis* $\mathbf{B} := (\varphi_1(a), \varphi_2(a))$, *siis seosega* $F(x) := f(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ *määratud ühe muutuja funktsioon* F *on diferentseeruv punktis* a. *Seejuures*

$$F'(a) = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\,\varphi_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\,\varphi_2'(a). \tag{3.24}$$

Lause 3.7. ***(keskväärtusteoreem).*** *Tähistame* $\mathbf{h} := (h_1, h_2)$. *Olgu funktsioon* f *pidev punktides* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{A} + \mathbf{h}$ *ning diferentseeruv neid punkte ühendavas sirglõigus* $[\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{h}]$. *Siis leidub selline punkt* $\mathbf{C} \in (\mathbf{A}, \mathbf{A} + \mathbf{h})$, *et*

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{C})\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{C})\,h_2 = (d_{\mathbf{C}}f)(\mathbf{h}).$$

Tõestus. Olgu $\mathbf{A} := (a, b)$. Ühe muutuja liitfunktsioon

$$F(t) := f(a + th_1, b + th_2),$$

on lõigus $[0, 1]$ pidev ja vahemikus $(0, 1)$ diferentseeruv (põhjendage!)✠, kusjuures $F(0) = f(\mathbf{A})$ ja $F(1) = f(\mathbf{A}+\mathbf{h})$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal leidub $t_0 \in (0, 1)$ omadusega $F'(t_0) = F(1) - F(0)$. Valemi (3.24) kohaselt

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + th_1, b + th_2)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a + th_1, b + th_2)\,h_1 \quad (0 < t < 1)$$

(selgitage!)✠ Võtame $\mathbf{C} := (a + t_0h_1, b + t_0h_2)$, siis

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{A}) = F(1) - F(0) = F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{C})\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{C})\,h_2.$$

Lause on tõestatud. ■

Liitfunktsiooni täisdiferentsiaal. Vaatleme (nii nagu käesoleva punkti alguses) seosega (3.10) määratud kahe muutuja liitfunktsiooni F. Eeldame, et funktsioonid φ_1 ja φ_2 on punktis $\mathbf{A} \in D$ ning funktsioon f punktis $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$ diferentseeruvad. Lause 3.5 kohaselt eksisteerib

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathbf{A}}F &= \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})\,\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})\,\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y} + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{A})}{\partial y}\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{A})}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(\mathbf{B})\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}}\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{B})\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}}\varphi_2
\end{aligned}$$

ehk lühemalt

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v. \tag{3.25}$$

See on sama valem, mille me saaksime funktsiooni F täisdiferentsiaali jaoks juhul, kui u ja v oleksid sõltumatud muutujad. Seetõttu öeldakse, et **täisdiferentsiaali kuju**

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

on invariantne muutujate vahetuse suhtes.

NB! Funktsiooni F täisdiferentsiaali kuju

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v$$

ei ole invariantne muutujate vahetuse suhtes.

Näide 3.4. Kuna $\Delta f = \mathrm{d}f + \alpha$, kusjuures α on protsessis $(h_1, h_2) \to \mathbf{0}$ kõrgemat järku lõpmatu väike suurus kui $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, siis saab **täisdiferentsiaali abil arvutada funktsiooni ligikaudseid väärtusi.** Olgu vaja arvutada $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$. Vaatleme funktsiooni

$f(x,y) := \sqrt{x^3+y^3}$, punkt $\mathbf{A} := (1,2)$ on tema määramispiirkonna sisepunkt. Olgu $h_1 := 0,02$, $h_2 := -0,03$, siis

$$\begin{aligned}\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3} &= f(a+h_1, b+h_2) = f(a,b) + \Delta f \\ &\approx \sqrt{1^3+2^3} + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial y}h_2 \\ &= 3 + \left[\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}0{,}02 - \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}0{,}03\right]_{\substack{x=1\\y=2}} = 2{,}95.\end{aligned}$$

Sõnastame mõned eespool tõestatud väited ka **üldisel juhul.** Olgu $w = f(u_1, \ldots, u_l)$ hulgas $Q \subset \mathbb{R}^l$ määratud l muutuja funktsioon, kusjuures $u_k = \varphi_k(x_1, \ldots, x_m)$ on iga $k = 1, \ldots, l$ korral määratud hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ ja $(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_l(x_1, \ldots, x_m)) \in Q$ iga $(x_1, \ldots, x_m) \in D$ korral.

$1°$. *Kui eksisteerivad osatuletised* $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\mathbf{A})$ $(k = 1, \ldots, l)$ *ja* f *on punktis* $\mathbf{B} := (\varphi_1(\mathbf{A}), \ldots, \varphi_l(\mathbf{A}))$ *diferentseeruv, siis liitfunktsiooni*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = f(\varphi_1(\mathbf{X}), \ldots, \varphi_l(\mathbf{X})) = f(\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_l(x_1, \ldots, x_m))$$

jaoks kehtib valem

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{B})\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(\mathbf{A}) + \ldots. + \frac{\partial f}{\partial u_l}(\mathbf{B})\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}(\mathbf{A}).$$

$2°$. *Kui funktsioonid* φ_k *on diferentseeruvad punktis* $\mathbf{A}$ *ja funktsioon* f *on diferentseeruv punktis* $\mathbf{B}$, *siis funktsioon* F *on samuti punktis* $\mathbf{A}$ *diferentseeruv.*

3.4 Tuletis antud suunas. Gradient

Olgu kolme muutuja funktsioon $w = f(x,y,z)$ määratud lahtises hulgas $D \subset \mathbb{R}^3$ ning olgu $\mathbf{A} = (a,b,c) \in D$. Edasi, olgu vektoriga $\boldsymbol{\ell} = (l_1, l_2, l_3) \neq \mathbf{0}$ ruumis $\mathbb{R}^3$ antud suund, vaatleme punkte

$$\mathbf{X} = (x,y,z) = (a + tl_1, b + tl_2, c + tl_3) = \mathbf{A} + t\boldsymbol{\ell}.$$

Need on punktid, mis asuvad punkti $\mathbf{A}$ läbival suunaga $\boldsymbol{\ell}$ määratud sirgel.

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A})}{t\,\|\boldsymbol{\ell}\|} =: \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}),$$

siis seda nimetatakse funktsiooni f *tuletiseks punktis* $\mathbf{A}$ *suunas* $\boldsymbol{\ell}$.

Piirväärtuse $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A})$ definitsioon on korrektne, see tähendab, vektoriga $\boldsymbol{\ell}$ samasuunalise nullist erineva vektori $\mathbf{k}$ korral $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A})$ (veenduge!)✠.

Kui vektori $\boldsymbol{\ell}$ suund ühtib x-telje (y-telje, z-telje) suunaga, siis tuletis selles suunas on osatuletis muutuja x (muutuja y, muutuja z) järgi (põhjendage!)✠.

Näide 3.5. Olgu

$$f(x,y,z) := 3x^2 - 2z^2 + 3xyz,$$

leiame funktsiooni f tuletise punktis $\mathbf{A} = (a,b,c)$ suunas $\boldsymbol{\ell} = (l_1, l_2, l_3)$.

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A} + t\boldsymbol{\ell}) - f(\mathbf{A}) &= 3(a + tl_1)^2 - 2(c + tl_3)^2 + 3(a + tl_1)(b + tl_2)(c + tl_3) - 3a^2 + 2c^2 - 3abc \\ &= 3\left(2al_1 t + l_1^2 t^2\right) - 2\left(2cl_3 t + l_3^2 t^2\right) \\ &+ 3\left((bcl_1 + acl_2 + abl_3)t + (al_2 l_3 + bl_1 l_3 + cl_1 l_2)t^2 + l_1 l_2 l_3 t^3\right), \end{aligned}$$

seega

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = \frac{6al_1 - 4cl_3 + 3bcl_1 + 3acl_2 + 3abl_3}{\|\boldsymbol{\ell}\|} = \frac{(6a + 3bc)l_1 + 3acl_2 + (3ab - 4c)l_3}{\|\boldsymbol{\ell}\|}.$$

Eeldame järgnevas, et f on diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$. Tuletise $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A})$ arvutamiseks tähistame tähtedega α, β ja γ nurgad, mille vektor $\boldsymbol{\ell}$ moodustab vastavalt x-, y- ja z-teljega. Paneme tähele, et

$$x - a = t\,\|\boldsymbol{\ell}\| \cos\alpha, \qquad y - b = t\,\|\boldsymbol{\ell}\| \cos\beta, \qquad z - c = t\,\|\boldsymbol{\ell}\| \cos\gamma$$

(põhjendage!)✠. Defineerime funktsiooni

$$F(t) := f(a + t\cos\alpha, b + t\cos\beta, c + t\cos\gamma),$$

siis

$$F'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}).$$

Teisalt on F liitfunktsioon, selle diferentseerimise reeglite kohaselt, tähistades $\mathbf{X}(t) = (a + t\cos\alpha, b + t\cos\beta, c + t\cos\gamma)$, kehtib

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{X}(t))\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{X}(t))\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{X}(t))\cos\gamma,$$

(põhjendage!)✠, millest

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A})\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A})\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{A})\cos\gamma. \tag{3.26}$$

Märgime $\mathbf{e} := (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, see on vektori $\boldsymbol{\ell}$ suunaline ühikvektor.

Definitsioon. Kolme muutuja funktsiooni $w = f(x,y,z)$ *gradiendiks* punktis $\mathbf{A}$ nimetatakse kolmemõõtmelist vektorit $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{A}), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{A}), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{A})\right) =: \mathbf{grad} f(\mathbf{A}) = \nabla f(\mathbf{A})$.

Võrdusest (3.26) saame

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = \langle \mathbf{grad} f(\mathbf{A}), \mathbf{e} \rangle = \|\mathbf{grad} f(\mathbf{A})\| \, \|\mathbf{e}\| \cos\varphi,$$

kus φ on nurk vektorite $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(\mathbf{A})$ ja $\mathbf{e}$ vahel. Niisiis,
1) tuletise $\frac{\partial f}{\boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A})$ väärtus on maksimaalne parajasti siis, kui $\varphi = 0$, s.t. kui vektori $\boldsymbol{\ell}$ suund ühtib gradiendi suunaga, ning minimaalne parajasti siis, kui vektorid $\boldsymbol{\ell}$ ja $\mathbf{grad} f(\mathbf{A})$ on vastassuunalised,
2) juhul $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{grad} f(\mathbf{A})$ kehtib võrdus $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\ell}}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{grad} f(\mathbf{A})\|$.
Teiste sõnadega, $\mathbf{grad} f(\mathbf{A})$ *määrab suuna, mille suhtes punktis* $\mathbf{A}$ *võetud tuletis on maksimaalne, seejuures see maksimaalne väärtus on gradiendi pikkus.*

4 Kõrgemat järku osatuletised ja täisdiferentsiaalid. Taylori valem

4.1 Segaosatuletised

Kui kahe muutuja funktsioonil f on määramispiirkonna D igas punktis $\mathbf{X} = (x, y)$ osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, siis funktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on määratud hulgas D ning neil kui kahe muutuja funktsioonidel võivad samuti olla muutjate x ja y järgi osatuletised

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =: f_{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =: f_{yx},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =: f_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =: f_{y^2}.$$

Saadud osatuletisi nimetatakse funktsiooni f *teist järku osatuletisteks*, seejuures $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ kannavad nimetust *segaosatuletised.*

Lause 4.1. ***(Schwarzi teoreem segaosatuletistest).*** *Olgu $\mathbf{A} = (a, b)$ kahe muutuja funktsiooni f määramispiirkonna D sisepunkt. Eeldame, et osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ on määratud punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses. Kui segaosatuletised $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, siis on nad võrdsed, s.t.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b). \tag{4.1}$$

Tõestus. Eeldame, et segaosatuletised $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ on punktis $\mathbf{A}$ pidevad, ja näitame, et kehtib võrdus (4.1). Anname muutujatele x ja y punktis $\mathbf{A}$ vastavalt muudud h_1 ja h_2 ning vaatleme avaldist

$$\Delta := f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b + h_2) - f(a + h_1, b) + f(a, b).$$

Kui tähistada

$$F(x) := f(x, b + h_2) - f(x, b) \text{ ja } G(y) := f(a + h_1, y) - f(a, y),$$

võime kirjutada

$$\Delta = F(a + h_1) - F(a) = G(b + h_2) - G(b).$$

Olgu $U_\delta(\mathbf{A}) \subset D$ punkti $\mathbf{A}$ selline ümbrus, milles eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Arvestades osatuletise definitsiooni (vt. valemid (3.1) ja (3.2)), saame Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leida niisugused arvud $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, et

$$\Delta = F'(a + \theta_1 h_1) h_1 = G'(b + \theta_2 h_2) h_2$$

ehk üksikasjalikumalt lahti kirjutatuna

$$\Delta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h_1, b + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h_1, b)\right) h_1 \tag{4.2}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y} (a + h_1, b + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y} (a, b + \theta_2 h_2) \right) h_2.$$

[Meenutame, et Lagrange'i keskväärtusteoreemi järgi kehtib (mingi sobivalt valitud $\theta \in (0,1)$ puhul) võrdus $\varphi(a+h) - \varphi(a) = \varphi'(a + \theta h) h$, kui ühe muutuja funktsioon φ on lõigus $[a, a+h]$ pidev ning vahemikus $(a, a+h)$ diferentseeruv. Kontrollige, kas eeldused selle teoreemi rakendamiseks on täidetud!✠] Rakendame seostele (4.2) veel kord Lagrange'i keskväärtusteoreemi, saame

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (a + \theta_1 h_1, b + \theta_2' h_2) h_1 h_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a + \theta_1' h_1, b + \theta_2 h_2) h_1 h_2,$$

kus $\theta_1', \theta_2' \in (0,1)$. Järelikult

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (a + \theta_1 h_1, b + \theta_2' h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a + \theta_1' h_1, b + \theta_2 h_2).$$

Kuna mõlemad segaosatuletised selles seoses on pidevad punktis $\mathbf{A}$, siis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (a,b) &= \lim_{(h_1,h_2) \to \mathbf{0}} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (a + \theta_1 h_1, b + \theta_2' h_2) = \lim_{(h_1,h_2) \to \mathbf{0}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a + \theta_1' h_1, b + \theta_2 h_2) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a,b). \end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ■

Lause 4.2. *Olgu kahe muutuja funktsioon f ja osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ määratud punkti $\mathbf{A} = (a,b)$ mingis ümbruses. Kui mõlemad funktsioonid $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruvad, siis kehtib võrdus (4.1).*

Tõestus. Olgu h_1 ja h_2 funktsiooni f argumentide muudud punktis $\mathbf{A} = (a,b)$, tähistame

$$\Delta := f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b + h_2) - f(a + h_1, b) + f(a,b).$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil saame (vrd. (4.2))

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} (a + \theta_1 h_1, b + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x} (a + \theta_1 h_1, b) \right) h_1 \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} (a + h_1, b + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial y} (a, b + \theta_2 h_2) \right) h_2, \end{aligned}$$

kus $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ (kontrollige, kas eeldused selle teoreemi rakendamiseks on täidetud!✠). Võtame $h_1 = h_2 =: t$, sel juhul

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f}{\partial x} (a + \theta_1 t, b + t) - \frac{\partial f}{\partial x} (a,b) \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} (a + \theta_1 t, b) - \frac{\partial f}{\partial x} (a,b) \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} (a + t, b + \theta_2 t) - \frac{\partial f}{\partial y} (a,b) \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} (a, b + \theta_2 t) - \frac{\partial f}{\partial y} (a,b) \right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Kasutame nüüd asjaolu, et osatuletised on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$, sellest tulenevad seosed

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 t, b+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,\theta_1 t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\, t + \alpha_1,\\
\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 t, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,\theta_1 t + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\cdot 0 + \alpha_2,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(a+t, b+\theta_2 t) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\, t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,\theta_2 t + \alpha_3,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 t) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot 0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\,\theta_2 t + \alpha_4,
\end{aligned}$$

kus α_i $(i = 1,2,3,4)$ on lõpmata väikesed suurused vastavalt omadusega

$$\begin{aligned}
0 &\leftarrow \frac{\alpha_1}{\sqrt{\theta_1^2 t^2 + t^2}} = \frac{\alpha_1}{|t|}\frac{1}{\sqrt{\theta_1^2+1}}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_1}{|t|} = 0,\\
0 &\leftarrow \frac{\alpha_2}{\sqrt{\theta_1^2 t^2 + 0}} = \frac{\alpha_2}{|t|}\frac{1}{\theta_1}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_2}{|t|} = 0,\\
0 &\leftarrow \frac{\alpha_3}{\sqrt{t^2 + \theta_2^2 t^2}} = \frac{\alpha_3}{|t|}\frac{1}{\sqrt{1+\theta_2^2}}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_3}{|t|} = 0,\\
0 &\leftarrow \frac{\alpha_2}{\sqrt{0 + \theta_2^2 t^2}} = \frac{\alpha_2}{|t|}\frac{1}{\theta_2}, \text{ s.t. } \lim_{t\to 0}\frac{\alpha_2}{|t|} = 0.
\end{aligned}$$

Võrduse (4.3) saab nüüd esitada kujul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)\, t + \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\, t + \alpha_3 - \alpha_4.$$

Jagame võrduse pooli arvuga t, protsessis $t \to 0$ saamegi seose $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{A}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{A})$. ∎

4.2 Kõrgemat järku täisdiferentsiaalid

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$. Olgu $\mathbf{A}$ hulga D sisepunkt ning $n \in \mathbb{N}$.

Definitsioon. Kui punktil $\mathbf{A}$ leidub ümbrus, milles eksisteerivad kõik n-järku osatuletised $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$, kusjuures need osatuletised on kõik diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$, siis öeldakse, et funktsioon f on $n+1$ *korda diferentseeruv* punktis $\mathbf{A}$.

Eelnev abstraktne definitsioon rakendub näiteks kahe muutuja funktsiooni f jaoks juhul $n = 1$ järgnevalt: kui punktil $\mathbf{A}$ leidub ümbrus, milles eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$, kusjuures nad on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$, siis funktsiooni f nimetatakse *kaks korda diferentseeruvaks* punktis $\mathbf{A}$.

Osutub, et (veenduge!✠) väljend „f on punktis $\mathbf{A}$ $n+1$ korda diferentseeruv“ tähendab järgmist:

> leidub $\delta > 0$ nii, et ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ on määratud funktsioonid
> $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$,
> kusjuures **kõik** need funktsioonid on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$.

Esitame järgnevas skeemi, kuidas defineeritakse funktsiooni f teist järku diferentsiaal.

Olgu f kaks korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$ ning olgu U punkti $\mathbf{A}$ selline ümbrus, milles eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$. Iga fikseeritud $\mathbf{h} := (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ korral defineerime funktsiooni $\delta f \colon U \to \mathbb{R}$ seosega

$$\delta f(\mathbf{X}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{X})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{X})\, h_2.$$

Funktsioon δf on diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$ (miks?)✠. Seega on olemas täisdiferentsiaal

$$\mathrm{d}_{\mathbf{A}}(\delta f)(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = \frac{\partial(\delta f)}{\partial x}(\mathbf{A})\mathfrak{h}_1 + \frac{\partial(\delta f)}{\partial y}(\mathbf{A})\mathfrak{h}_2, \qquad (\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Avaldist

$$\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} f(h_1, h_2) := \mathrm{d}_{\mathbf{A}}(\delta f)(h_1, h_2),$$

nimetatakse funktsiooni f *teist järku* (ehk *teiseks*) *täisdiferentsiaaliks* punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumendi muudule $\mathbf{h}$.

Niisiis teist järku täisdiferentsiaal $\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} f(h_1, h_2)$ on esimest järku täisdiferentsiaali $\mathrm{d}_{\mathbf{X}} f(\mathbf{h})$ (tõlgendatuna argumendi $\mathbf{X}$ funktsioonina) täisdiferentsiaal punktis $\mathbf{A}$, mis vastab argumendi muudule $\mathbf{h}$.

NB! Nagu ka täisdiferentsiaali puhul, kirjutatakse teise diferentsiaali avaldises argumentide muutude h_1 ja h_2 kohale tihti vastavalt $\mathrm{d}x$ ja $\mathrm{d}y$, ning kui punkt $\mathbf{A}$ ja/või muut (h_1, h_2) on kontekstist selge, kasutatakse tähist $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{A})$ või koguni $\mathrm{d}^2 f$. Analoogiline tähistuslik kokkulepe kehtib ka kõrgemat järku täisdiferentsiaalide kohta.

Saame, et kui f on punktis $\mathbf{X}$ kaks korda diferentseeruv, siis lauset 4.2 kasutades

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 f(\mathbf{X}) &= \frac{\partial(\delta f)}{\partial x}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x + \frac{\partial(\delta f)}{\partial y}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}y = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{X})\,\mathrm{d}y^2
\end{aligned}$$

(kontrollige!)✠.

Järgnevalt tõestame lause 4.2 üldistuse.

Lause 4.3. *Olgu m muutuja funktsioonil $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ punktis $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ kõigi muutujate järgi osatuletised, mis on $n-1$ korda diferentseeruvad, s.t. kõik osatuletised kuni $n-1$ järguni on punktis $\mathbf{A}$ diferentseeruvad. Siis selles punktis võetud n-dat järku segaosatuletis ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.*

Tõestus. Piisab näidata, et kehtib võrdus

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}}(\mathbf{A}) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_1}}(\mathbf{A}), \tag{4.4}$$

s.t., et tohib vahetada kahe järjestikuse diferentseerimise järjekorda. Vaatleme funktsiooni

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}},$$

see on kaks korda diferentseeruv. Leiame sellest algul osatuletise muutuja x_{i_k} ning seejärel $x_{i_{k+1}}$ järgi. Kui lugeda ülejäänud muutujad fikseerituks, siis saame rakendada lauset 4.2, mis annab võrduse $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \ldots \partial x_{i_1}} (\mathbf{A}) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \ldots \partial x_{i_1}} (\mathbf{A})$. Sellest omakorda saame seose (4.4).
■

Kui funktsioon f on punktis $\mathbf{X}$ kolm korda diferentseeruv, siis analoogilise skeemi abil, lähtudes teist järku diferentsiaalist, saadakse *kolmandat järku* (ehk *kolmas*) *täisdiferentsiaal*

$$\mathrm{d}^3 f(\mathbf{X}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (\mathbf{X})\, \mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (\mathbf{X})\, \mathrm{d}x^2\, \mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} (\mathbf{X})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (\mathbf{X})\, \mathrm{d}y^3$$

(veenduge!)✠. Samamoodi on võimalik saada valemid n-järku täisdiferentsiaali jaoks, eeldusel, et funktsioon on n korda diferentseeruv. Üldiselt,

$$\mathrm{d}^n f(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} (\mathbf{X})\, \mathrm{d}x^{n-k}\, \mathrm{d}y^k =: \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{d}y\right)^n f\right] (\mathbf{X})$$

(meenutame, et $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$).

Liitfunktsiooni kõrgemat järku täisdiferentsiaalid. Olgu $w = f(u, v)$ kahe muutuja funktsioon määramispiirkonnaga Q, kus argumendid u, v on omakorda kahe muutuja funktsioonid

$$u = \varphi_1(x, y), \ v = \varphi_2(x, y).$$

Seejuures eeldatatakse, et funktsioonidel φ_1 ja φ_2 on ühine määramispiirkond D ning iga $\mathbf{X} \in D$ korral $(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) \in Q$. Liitfunktsioon $F\colon D \to \mathbb{R}$ on määratud seosega

$$F(x, y) := f(\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X})) = f(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)).$$

Tähistame iga $\mathbf{X}$ korral $\mathbf{Y} := (\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X}))$. Olgu funktsioonid φ_1, φ_2 kaks korda diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$ ning funktsioon f olgu kaks korda diferentseeruv punktis $\mathbf{B} = (\varphi_1(\mathbf{A}), \varphi_2(\mathbf{A}))$. Siis liitfunktsioon F on kaks korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$ (kontrollige!)✠.

Tuletame valemi $d^2_{\mathbf{A}} F$ arvutamiseks. Fikseerime $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ning moodustame peatüki algusest tuttava funktsiooni

$$\delta F(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{Y})}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{X})}{\partial x} + \frac{\partial f(\mathbf{Y})}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{X})}{\partial x}\right) \cdot h_1 + \left(\frac{\partial f(\mathbf{Y})}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{X})}{\partial y} + \frac{\partial f(\mathbf{Y})}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{X})}{\partial y}\right) \cdot h_2$$

(kontrollige!)✠. Nüüd

$$\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} F(h_1, h_2) = \mathrm{d}^2_{\mathbf{B}} f(\mathrm{d}_{\mathbf{A}} \varphi_1(h_1, h_2), \mathrm{d}_{\mathbf{A}} \varphi_2(h_1, h_2)) + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial u} \cdot \left(\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} \varphi_1\right)(h_1, h_2) + \frac{\partial f(\mathbf{B})}{\partial v} \cdot \left(\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} \varphi_2\right)(h_1, h_2),$$

(kontrollige!)✠; lühemalt kirjapanduna

$$\mathrm{d}^2 F = \mathrm{d}^2 f + \frac{\partial f}{\partial u} \mathrm{d}^2 u + \frac{\partial f}{\partial v} \mathrm{d}^2 v.$$

Näeme, et üldjuhul (erinevalt esimest järku täisdiferentsiaalist) **teist järku täisdiferentsiaali kuju**

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\, du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\, du\, dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\, dv^2$$

ei ole invariantne muutuja vahetuse suhtes. Invariantne on ta (s.t. kehtib võrdus $d^2 F = d^2 f$) juhul, kui $d^2 u = d^2 v = 0$, s.t. juhul, kui funktsioonid φ_1 ja φ_2 on lineaarsed. Tõepoolest, kui

$$\varphi_1 (x, y) = a_{11} x + a_{12} y + a_{13}, \quad \varphi_2 (x, y) = a_{21} x + a_{22} y + a_{23},$$

siis $du = a_{11}\, dx + a_{12}\, dy$, $dv = a_{21}\, dx + a_{22}\, dy$ ja $d^2 u = d^2 v = 0$.

4.3 Taylori valem

Meenutame kõigepealt Taylori valemit ühe muutuja funktsiooni puhul. Kui funktsioon $y = F(t)$ on punktis a n korda diferentseeruv, siis punktil a leidub selline ümbrus $U_\delta (a)$, et iga $t \in U_\delta (a)$ korral kehtib võrdus

$$F(t) = F(a) + F'(a)(t-a) + \frac{1}{2!} F''(a)(t-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(a)(t-a)^n + \alpha_n,$$

kus $\lim\limits_{t \to a} \frac{\alpha_n}{(t-a)^n} = 0$ (jääkliikme *Peano tingimus*). Tähistame $h := t - a$, siis saame Taylori valemi kujul

$$F(a+h) = F(a) + F'(a) h + \frac{1}{2!} F''(a) h^2 + \ldots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(a) h^n + \alpha_n, \quad \lim_{h \to 0} \frac{\alpha_n}{h^n} = 0. \quad (4.5)$$

Kui eeldada, et F on ümbruses $U_\delta(a)$ $n+1$ korda diferentseeruv, siis saab jääkliikme α_n esitada *Lagrange'i kujul*

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(a + \theta h) h^{n+1} \quad \text{mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral.} \quad (4.6)$$

Tähistame $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$. Kahe muutuja funktsiooni f korral saab Taylori valem järgmise kuju.

Teoreem 4.4. *Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$ määratud punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses. Olgu f punktis $\mathbf{A}$ n korda diferentseeruv. Siis*

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + d_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}) + \frac{1}{2!} d^2_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}) + \alpha_n(\mathbf{h}), \quad (4.7)$$

kusjuures $\lim\limits_{\mathbf{h} \to 0} \dfrac{\alpha_n(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^n} = 0$.

Tõestuse skeem. Teoreem tõestatakse matemaatilise induktsiooni meetodil. Valemi kehtivus juhul $n = 1$ järeldub vahetult diferentseeruvuse definitsioonist.

Edasi, kehtigu teoreemi väide mingi $n = k$ jaoks. Juhul $n = k+1$ tähistame jääkliikme järgmiselt:

$$g(\mathbf{h}) = f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{A}) - d_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}) - \frac{1}{2!} d^2_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}) \ldots - \frac{1}{n!} d^n_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}).$$

Näidatakse, et

1. $g(\mathbf{0}) = 0$;
2. g on diferentseeruv punkti $\mathbf{0}$ mingis ümbruses $U_r(\mathbf{0}) \ni \mathbf{h}$, kusjuures

$$d_{\mathbf{h}}g(\boldsymbol{\ell}) = \mathrm{d}_{\mathbf{A}+\mathbf{h}}f(\boldsymbol{\ell}) - \mathrm{d}_{\mathbf{A}}f(\boldsymbol{\ell}) - \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}}(\,\mathrm{d}_{(\cdot)}f(\boldsymbol{\ell}))(\mathbf{h}) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}}^{k-1}(\,\mathrm{d}_{(\cdot)}f(\boldsymbol{\ell}))(\mathbf{h}), \qquad \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^2; \tag{4.8}$$

3. keskväärtusteoreemi (teoreem 3.7) põhjal kehtib igasuguse $\mathbf{h} \in U_r(\mathbf{0})$ korral

$$g(\mathbf{h}) - g(\mathbf{0}) = \mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g(\mathbf{h}),$$

kus $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{0}, \mathbf{h})$.

Tähistades $\|\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g\| = \sup\limits_{\|\boldsymbol{\ell}\|\leqslant 1} |\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g(\boldsymbol{\ell})|$, saadakse Cauchy-Bunjakovski-Schwarzi võrratuse (teoreem 1.1) põhjal, et $\|\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{\xi})\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{\xi})\right)^2}$.

Pannes tähele, et võrduses (4.8) paremal seisab funktsiooni $\mathbf{X} \mapsto d_{\mathbf{X}}f(\boldsymbol{\ell})$ Taylori $(n-1)$-järku valemi (punktis $\mathbf{A}$) jääkliige, leidub induktsiooni eelduse tõttu iga $\varepsilon > 0$ jaoks arv $\delta > 0$ nii, et kui $\|\boldsymbol{\xi}\| < \delta$, siis $\dfrac{|\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g(\boldsymbol{\ell})|}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{n-1}} < \varepsilon$ (miks?)✠. Seega, nõudes, et $\|\mathbf{h}\| < \delta$, kehtib $M(\varepsilon) := \sup\limits_{\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{0},\mathbf{h})} \dfrac{\|\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g\|}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{n-1}} \leqslant \varepsilon$.

Kokkuvõttes

$$|\alpha_n(\mathbf{h})| = |g(\mathbf{h}) - g(\mathbf{0})| \leqslant \sup_{\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{0},\mathbf{h})} \|\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g\| \cdot \|h\| = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in(\mathbf{0},\mathbf{h})} \frac{\|\,\mathrm{d}_{\boldsymbol{\xi}}g\|}{\|\boldsymbol{\xi}\|^{n-1}} \cdot \|\boldsymbol{\xi}\|^{n-1}\|\mathbf{h}\| \leqslant M(\varepsilon)\|\mathbf{h}\|^n,$$

nagu soovitud. ■

Teoreem 4.5. *Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ punkti $\mathbf{A}$ ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ $n+1$ korda diferentseeruv. Kui $\mathbf{A} + \mathbf{h} \in U_\delta(\mathbf{A})$, siis leidub $\theta \in (0, 1)$ nii, et kehtib valem*

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + \mathrm{d}_{\mathbf{A}}f(\mathbf{h}) + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}}^2 f(\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{n!}\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}}^n f(\mathbf{h}) + \frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{d}_{\mathbf{A}+\theta\mathbf{h}}^{n+1} f(\mathbf{h}). \tag{4.9}$$

Tõestus. Tähistame $\mathbf{A} =: (a, b)$. Olgu muut $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ selline, et $\mathbf{A}+\mathbf{h} = (a + h_1, b + h_2) \in U_\delta(\mathbf{A})$ Moodustame ühe muutuja liitfunktsiooni

$$F(t) := f(a + th_1, b + th_2) = f(\mathbf{A} + t\mathbf{h})$$

ja paneme tähele, et
1) $F(0) = f(\mathbf{A})$ ja $F(1) = f(\mathbf{A} + \mathbf{h})$,
2) leidub $\gamma > 0$, et kui $t \in (-1 - \gamma, 1 + \gamma)$, siis $(a + th_1, b + th_2) \in U_\delta(\mathbf{A})$ (põhjendage!)✠,
3) kuna funktsioonid $x = \varphi_1(t) := a + th_1$ ja $y = \varphi_2(t) := b + th_2$ on kuitahes palju kordi diferentseeruvad ja f on $n+1$ korda punkti $\mathbf{A}$ ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ diferentseeruv, siis ühe muutuja funktsioon F on $n+1$ korda diferentseeruv punkti $t = 0$ ümbruses $U_{1+\gamma}(0)$ (vrd. järeldus 3.6).

(Ühe muutuja) Maclaurini valemi (4.5) (see on Taylori valem punktis $a = 0$) kohaselt leidub juhul $h = 1$ selline arv $\theta \in (0, 1)$ nii, et (vt. (4.6))

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta) = \tag{4.10}$$

$$= \quad F(0) + \mathrm{d}_0 F(1) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}_0^2 F(1) + \ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}_0^n F(1) + \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}_\theta^{n+1} F(1).$$

Kuna funktsioonid φ_1 ja φ_2 on lineaarsed, siis liitfunktsiooni F kõrgemat järku täisdiferentsiaalide valemid on muutuja vahetuse suhtes invariantsed (vrd. märkus eelmise punkti lõpus), niisiis

$$\mathrm{d}_0^i F(1) = \mathrm{d}_{\mathbf{A}}^i f(\mathbf{h}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.11}$$

ning

$$\mathrm{d}_\theta^{n+1} F(1) = \mathrm{d}_{\mathbf{A}+\theta\mathbf{h}}^{n+1} f(\mathbf{h}) \tag{4.12}$$

(selgitage!)✠.

Võttes arvesse seoseid (4.11) ja (4.12), omandabki valem (4.10) kuju (4.9). ■

NB! Teoreemi 4.5 järeldasime vahetult ühe muutuja Taylori valemist. Põhimõtteliselt samal moel võib kasutada ühe muutuja Taylori valemit, et tuletada jääkliikme Peano tingimus konkreetses suunas $\mathbf{h}$:
Kui f on n korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A}$, siis Taylori valemi jääkliige α_n rahuldab tingimust $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\alpha_n}{\|t\mathbf{h}\|^n} = 0$.

Ent teoreem 4.4 on oluliselt üldisem: sealne Peano tingimus $\lim\limits_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{\alpha_n}{\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|^n} = 0$ ütleb, et koondumine on **ühtlane kõigi suundade h jaoks**.

Teoreemid 4.4 ja 4.5 saab vahetult ümber kirjutada m muutuja funktsioonide jaoks.

Teoreem 4.6. ***(m muutuja funktsiooni Taylori valem).*** *Olgu m muutuja funktsioon $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ ning punktis $\mathbf{A}$ n korda diferentseeruv. Siis suvalise $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ korral*

$$f(\mathbf{A}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{A}) + \mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(\mathbf{h}) + \frac{1}{2!} d_{\mathbf{A}}^2 f(\mathbf{h}) + \ldots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}_{\mathbf{A}}^n f(\mathbf{h}) + \alpha_n,$$

kus $\lim\limits_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\alpha_n}{\|\mathbf{h}\|^n} = 0$ (jääkliikme Peano tingimus).

Kui f on ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ $n+1$ korda diferentseeruv, siis juhul $\mathbf{A}+\mathbf{h} \in U_\delta(\mathbf{A})$ avaldub jääkliige Lagrange'i kujul

$$\alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{d}_{\mathbf{X}}^{n+1} f(\mathbf{h}), \textit{ kus } \mathbf{X} \textit{ on teatav punkt vahemikus } (\mathbf{A}, \mathbf{A}+\mathbf{h}).$$

Lagrange'i valem. Juhul $n = 0$ (s.t. eeldusel, et funktsioon f on punkti $\mathbf{A}$ mingis ümbruses $U_\delta(\mathbf{A})$ diferentseeruv) saame Taylori valemist (4.9) Lagrange'i valemi (vt. teoreem 3.7)

$$f(\mathbf{B}) - f(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{X})\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{X})\, h_2, \text{ kus } \mathbf{X} := (a+\theta h_1, b+\theta h_2) \text{ mingi } \theta \in (0,1) \text{ korral} \tag{4.13}$$

(veenduge!)✠. (Siin $\mathbf{B} := (a+h_1, b+h_2) \in U_\delta(\mathbf{A})$ ning punkt $\mathbf{X}$ on punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendava sirglõigu $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ sisepunkt.)

Lagrange'i valemi abil tõestame diferentseeruvate funktsiooni jaoks konstantsuse kriteeriumi lahtises sidusas hulgas.

Lemma 4.7. *Kui hulk D on sidus, siis teda ei saa esitada kahe mittetühja lõikumatu lahtise hulga (ruumi D topoloogias) ühendina.*

Tõestus. Olgu $D = D_1 \cup D_2$, kus D_1 ja D_2 on lahtised lõikumatud mittetühjad hulgad topoloogilises ruumis D. Ruum D on ka lahtine ning D_1 ja D_2 on seega kinnised ruumis D. Valime suvaliselt $\mathbf{A} \in D_1$ ja $\mathbf{B} \in D_2$. Hulga D sidususe tõttu leidub lõik $[t_1, t_2]$ ja pidev funktsioon $f\colon [t_1, t_2] \to D$ nii, et $f(t_1) = \mathbf{A}$ ja $f(t_2) = \mathbf{B}$.

Kuna f on pidev, siis $f^{-1}(D_1)$ ja $f^{-1}(D_2)$ on lahtised ja kinnised (ruumi $[0,1]$ topoloogias), lõikumatud ja mittetühjad (miks?)✠ hulgad, kusjuures $[t_1, t_2] = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$. Tähistame $x = \sup f^{-1}(D_1)$. Et $f^{-1}(D_1)$ on kinnine, siis $x \in f^{-1}(D_1)$. Kui $x < 1$, siis hulga $f^{-1}(D_1)$ lahtisuse tõttu leidub δ nii, et $(x-\delta, x+\delta) \subset f^{-1}(D_1)$, mis on vastuolus sellega, et $x = \sup f^{-1}(D_1)$ (kuidas?)✠. Seega $x = 1$. Analoogiliselt $1 = \sup f^{-1}(D_2) \in f^{-1}(D_2)$. Niisiis $f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \neq \emptyset$, millest $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, vastuolu. ■

Märkus. Topoloogiliste ruumide teoorias defineeritaksegi *sidus ruum* kui ruum, mis **ei ole** esitatav kahe mittetühja lõikumatu lahtise hulga ühendina. Meie sidususe definitsioon (mistahes kaks punkti on ühendatavad pideva joonega) kannaks sel juhul nime *ahelsidusus* (*path-connectedness*). Ruumi $\mathbb{R}^m$ lahtiste hulkade jaoks on need kaks mõistet samaväärsed, üldiselt aga mitte.

Näide. Vaatleme „topoloogi siinust“ $T = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0,1]\right\} \cup \{(0,0)\}$. Hulk T on sidus topoloogiliste ruumide mõttes (iga lahtine hulk, mis sisaldab $(0,0)$, peab sisaldama ka punkte ülejäänud osast), aga ei ole ahelsidus (nullpunkt pole hulga teiste punktidega pideva joone abil ühenduses).

Lemma 4.8. *Mittetühja lahtise sidusa hulga $D \subset \mathbb{R}^m$ ja punktide $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$ korral leidub murdjoon $\mathbf{A}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_{n-1}\mathbf{B}$ selliselt, et (tähistades $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$) iga $k = 1, \ldots, n$ korral $[\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_k] \subset D$.*

Tõestus. Olgu antud mittetühi lahtine sidus hulk $D \subset \mathbb{R}^m$ ning $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in D$. Tähistame

$$D_1 = \{\mathbf{X} \in D \,:\, \text{leidub hulgas } D \text{ sisalduv murdjoon } \mathbf{A}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}\}.$$

Meie eesmärk on näidata, et $\mathbf{B} \in D_1$.

Hulk D_1 on lahtine (veenduge!)✠. Samuti on $D_2 := D \setminus D_1$ lahtine (veenduge!)✠, kusjuures $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Ilmselt $D_1 \neq \emptyset$ (miks?)✠. Lemma 4.7 põhjal $D_2 = \emptyset$, millest $D = D_1$ ja järelikult $\mathbf{B} \in D_1$. ■

Lause 4.9. *Olgu funktsioon $w = f(x, y)$ diferentseeruv lahtises sidusas hulgas D. Funktsioon f on konstantne hulgas D parajasti siis, kui*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{X}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{X}) = 0 \text{ iga } \mathbf{X} \in D \text{ korral.} \tag{4.14}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui f on konstantne funktsioon, siis $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ hulgas D.

Piisavus. Eeldame, et tingimus (4.14) on täidetud, ning näitame, et f on hulgas D konstantne funktsioon. Fikseerime suvaliselt punkti $\mathbf{A} = (a, b) \in D$, olgu $\mathbf{X} = (x, y)$ hulga D suvaline punkt. Ühendame need kaks punkti mingi *murdjoonega* $\mathbf{A}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_{m-1}\mathbf{X}$, mis paikneb hulgas D (vt. lemma 4.8). Olgu punkti $\mathbf{X}_i$ koordinaadid x_i ja y_i, s.t. $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i)$

$(i = 1, \ldots, m-1)$. Valemi (4.13) kohaselt saab igas lõigus $[\mathbf{A}\mathbf{X}_1]$, $[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2], \ldots, [\mathbf{X}_{m-1}\mathbf{X}]$ fikseerida punkti $\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_m$ nii, et kehtivad seosed

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{X}_1) - f(\mathbf{A}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{Z}_1)\, h_1^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{Z}_1)\, h_2^{(1)}, \\
f(\mathbf{X}_2) - f(\mathbf{X}_1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{Z}_2)\, h_1^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{Z}_2)\, h_2^{(2)}, \\
&\cdots \\
f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_{m-1}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{Z}_m)\, h_1^{(m)} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{Z}_m)\, h_2^{(m)},
\end{aligned}$$

(siin $h_1^{(i)}$ ja $h_2^{(i)}$ on vektori $\overrightarrow{\mathbf{X}_{i-1}\mathbf{X}_i}$ koordinaadid, kui tähistada $\mathbf{X}_0 := \mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}_m := \mathbf{X}$). Eelduse (4.14) tõttu saame nendest seostest, et

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) = \ldots = f(\mathbf{X}).$$

Kuna $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}$ olid valitud suvaliselt hulgas D, siis f on tõepoolest konstantne funktsioon. ■

5 Ilmutamata funktsioonid

5.1 Ühe muutuja ilmutamata funktsioonid

Pideva ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ graafik xy-tasandil on pidev joon. Üldiselt esitatakse tasandilist joont analüütilises geomeetrias võrrandiga

$$F(x, y) = 0, \tag{5.1}$$

kus F on mingis hulgas $D \subset \mathbb{R}^2 = \{\mathbf{X} = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ määratud kahe muutuja funktsioon. Kõige lihtsamad sellekohased näited on sirge ja ringjoon, mis on defineeritud vastavalt võrranditega

$$ax + by + c = 0$$

ja

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0. \tag{5.2}$$

Küsimus on selles, **kas joont** (5.1) **on võimalik mingi funktsiooni** f **abil esitada nn. "ilmutatud kujul" antud võrrandiga** $y = f(x)$. Sirge puhul on see ilmselt võimalik (eeldusel, et kordaja b on nullist erinev), ringjoone puhul aga üldjuhul mitte.

Ilmutamata funktsiooni mõiste. Läheneme püstitatud probleemile üldisemalt. Olgu F mingi kahe muutuja funktsioon määramispiirkonnaga D. Lähtudes võrrandist (5.1), fikseerime selles muutuja x väärtuse ξ. Saame ühe tundmatuga võrrandi $F(\xi, y) = 0$, sellel võib olla, aga võib ka mitte olla lahendeid. Esimesel juhul on võimalik, et on kas üks lahend või rohkem lahendeid. Tähistame

$$X := \{\xi \in \mathbb{R} \mid \exists! y \in \mathbb{R} : (\xi, y) \in D \text{ ja } F(\xi, y) = 0\}$$

(siin $\exists!$ tähendab *"leidub parajasti üks"*), siis iga $x \in X$ korral leidub selline üheselt määratud arv $y =: f(x)$, et kehtib võrdus (5.1). Nii saame ühe muutuja funktsiooni f määramispiirkonnaga X. Sel juhul öeldakse, et *võrrand* (5.1) *määrab funktsiooni* $f : X \to \mathbb{R}$ *ilmutamata* (*implicit*) *kujul.*

Antud võrrandi (5.1) puhul esitame kõigepealt küsimuse, **kas võrrand** (5.1) **määrab ilmutamata funktsiooni** f**?** Teiseks, kui ilmutamata funktsioon on tõepoolest olemas, siis küsime **millistel eeldustel (funktsiooni** F **suhtes) on ta pidev, millistel diferentseeruv?**

Lihtne **näide** ringjoone võrrandist (5.2) ütleb, et *üldise probleemiasetuse* juures on positiivne vastus esimesele küsimusele üldjuhul vähetõenäone: kui funktsiooni $F(x, y) := x^2 + y^2 - r^2$ vaadelda tema "mõistlikus" määramispiirkonnas $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leqslant x, y \leqslant r\}$ (kui $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, siis võrrandil (5.2) ei ole üldse lahendeid), siis koosneb hulk X võrrandi (5.2) puhul kahest arvust r ja $-r$. Seevastu, kui võtta määramispiirkonnaks

$$D_1 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leqslant x \leqslant r,\, 0 \leqslant y \leqslant r\right\}$$

või

$$D_2 := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r \leqslant x \leqslant r,\ -r \leqslant y \leqslant 0\right\},$$

siis on vastus esimesele küsimusele positiivne, kusjuures ilmutamata funktsiooni $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (vastavalt $f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$) määramispiirkonnaks on lõik $[-r, r]$.

Seda näidet silmas pidades püüame eelpool püstitatud probleeme lahendada **lokaalselt.** Fikseerime punkti $\mathbf{A} = (a, b)$, mis rahuldab võrrandit (5.1) (s.t. $F(a, b) = 0$), ning püüame leida niisugust **ristkülikut**

$$K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{X} = (x, y) \mid a - \delta < x < a + \delta,\ b - \sigma < y < b + \sigma\},$$

et iga $x \in (a - \delta, a + \delta)$ puhul leidub parajasti üks $f(x) := y \in (b - \sigma, b + \sigma)$ omadusega $F(x, y) = 0$. Sel juhul ütleme, et *võrrand* (5.1) *määrab ristkülikus* $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ *ilmutamata funktsiooni* $f : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$.

Teoreem 5.1. ***(ilmutamata funktsioonide põhiteoreem).*** *Eeldame, et kahe muutuja funktsioon $w = F(x, y)$ rahuldab punktis $\mathbf{A} = (a, b)$ järgmisi tingimusi:*
1^0 punktil $\mathbf{A}$ on niisugune ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles funktsioon F on pidev ja tal on selles ümbruses pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial y}$,
2^0 $F(\mathbf{A}) = 0$,
3^0 $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) \neq 0$.
Siis leiduvad sellised arvud $\delta, \sigma > 0$, et võrrand (5.1) *määrab ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ ilmutamata funktsiooni $y = f(x)$, mis on pidev vahemikus $(a - \delta, a + \delta)$.*

Kui lisaks eeldustele 1^0 - 3^0 on täidetud tingimus
4^0 hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonil F pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial x}$,
siis funktsioon f on vahemikus $(a - \delta, a + \delta)$ pidevalt diferentseeruv ning

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}. \tag{5.3}$$

Teoreemi 5.1 põhiväite saab kirja panna ka kujul

$$\exists \delta, \sigma > 0, \quad \exists f : U_\delta(a) \to U_\sigma(b) \quad : \quad \forall (x, y) \in K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A}) \quad F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Tõestus. Eeldame, et tingimused 1^0 - 3^0 on täidetud, olgu konkreetsuse mõttes $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) > 0$. Kuna $\frac{\partial F}{\partial y}$ on pidev, siis leidub punktil $\mathbf{A}$ selline ümbrus $U_{\theta_1}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$, et $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{X}) > 0$ iga $\mathbf{X} = (x, y) \in U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ korral (põhjendage!)✠. Valime $\sigma > 0$ nii väikese, et kinnine ruut $\overline{K}_\sigma(\mathbf{A}) := \{(x, y) \mid a - \sigma \leqslant x \leqslant a + \sigma,\ b - \sigma \leqslant y \leqslant b + \sigma\}$ sisalduks ringis $U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ (põhjendage niisuguse valiku võimalikkust!)✠. Siis iga fikseeritud $\xi \in [a - \sigma, a + \sigma]$ puhul on ühe muutuja funktsioon $F(\xi, y)$ lõigus $[b - \sigma, b + \sigma]$ rangelt kasvav (põhjendage!)✠. Erijuhul, kui $\xi = a$, saame seosega $g(y) := F(a, y)$ määratud rangelt kasvava funktsiooni $g : [b - \sigma, b + \sigma] \to \mathbb{R}$. Kuna eelduse 2^0 põhjal $g(b) = 0$, siis $g(b - \sigma) < 0$ ja $g(b + \sigma) > 0$.

Moodustame nüüd funktsioonid v_1 ja v_2 seostega $v_1(x) := F(x, b - \sigma)$ ja $v_2(x) := F(x, b + \sigma)$. Mõlemad on lõigus $[a - \sigma, a + \sigma]$ pidevad (põhjendage!)✠, kusjuures $v_1(a) = g(b - \sigma) < 0$ ja $v_2(a) = g(b + \sigma) > 0$. Seetõttu leiduvad punktil a sellised ümbrused $U_{\delta_1}(a) = (a - \delta_1, a + \delta_1)$ ning $U_{\delta_2}(a) = (a - \delta_2, a + \delta_2)$, et $v_1(x) < 0$ iga $x \in U_{\delta_1}(a)$ korral ning $v_2(x) > 0$ iga $x \in U_{\delta_2}(a)$ korral (põhjendage!)✠. Tähistame $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ja moodustame ristküliku $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$.

Näitame *esiteks*, et võrrand $F(x,y)=0$ määrab ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ ilmutamata funktsiooni. Olgu ξ suvaline punkt vahemikus $(a-\delta,a+\delta)$, vaatleme xy-tasandil vertikaalset lõiku, mille otspunktid on $(\xi,b-\sigma)$ ja $(\xi,b+\sigma)$, ning sellel määratud argumendist y sõltuvat funktsiooni $F(\xi,y)=:g_\xi(y)$. Funktsioon g_ξ on lõigus $[b-\sigma,b+\sigma]$ pidev (põhjendage!)✠ ja lõigu otspunktides on tal erimärgilised väärtused. Bolzano-Cauchy teoreemi põhjal leidub selline punkt $\eta\in(b-\sigma,b+\sigma)$, et $F(\xi,\eta)=g_\xi(\eta)=0$. Seejuures on η üheselt määratud, see tuleneb faktist, et g_ξ on rangelt kasvav funktsioon. Seega saame funktsiooni $y=f(x)$, mis on määratud vahemikus $(a-\delta,a+\delta)$ ja seab igale arvule $\xi\in(a-\delta,a+\delta)$ vastavusse arvu $\eta\in(b-\sigma,b+\sigma)$. Definitsiooni kohaselt tähendab see, et võrrand $F(x,y)=0$ määrab ilmutamata funktsiooni f ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$. Paneme tähele, et $f(a)=b$ (selgitage!)✠.

Teiseks näitame, et ilmutamata funktsioon f on pidev vahemikus $(a-\delta,a+\delta)$. Kõigepealt veendume, et f on pidev punktis a. See tuleneb vahetult eelnenud arutelust. Nimelt jääb senine arutelu kehtima iga väiksema ristküliku puhul, mille keskpunktiks on $\mathbf{A}$. Seega, kui võtame σ asemel suvalise positiivse arvu ε, kus $\varepsilon<\sigma$, siis valime (samamoodi nagu eespool) positiivse $\delta'\leqslant\delta$ nii, et iga $x\in(a-\delta',a+\delta')$ korral vastaks talle üheselt määratud $y\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ omadusega $F(x,y)=0$. Selge, et $y=f(x)$ (põhjendage!)✠. Niisiis,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta'>0: x\in(a-\delta',a+\delta')\Rightarrow f(x)\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon),$$

s.t. f on pidev punktis a.

Kui x on suvaline punkt vahemikust $(a-\delta,a+\delta)$, siis kordame eelnevat arutelu, asendades punkti $\mathbf{A}$ punktiga $\mathbf{X}:=(x,f(x))$. Lihtne on veenduda, et kuna $\mathbf{X}$ on lahtise hulga $U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ punkt, siis leidub tal ümbrus $U_{\theta'}(\mathbf{X})\subset U_{\theta_1}(\mathbf{A})$ ning selles ümbruses on täidetud tingimused 1^0 - 3^0. Eelneva arutelu põhjal on f pidev suvalises punktis $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

Kolmandaks näitame, et kui kehtivad tingimused 1^0 - 4^0, siis ilmutamata funktsioon f on vahemikus $(a-\delta,a+\delta)$ diferentseeruv. Olgu x vahemiku $(a-\delta,a+\delta)$ suvaline punkt ja olgu h argumendi muut punktis x, talle vastab funktsiooni muut $\Delta y:=f(x+h)-f(x)$. Kuna $y+\Delta y=f(x+h)$, siis $F(x+h,y+\Delta y)=0$.

Vaatleme kahe muutuja funktsiooni F muutu punktis (x,y), mis vastab argumentide muutudele h ja Δy :

$$\Delta F=F(x+h,y+\Delta y)-F(x,y)=0-0=0.$$

Teisalt saame Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil sobivalt valitud $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$ korral

$$\begin{aligned}0&=(F(x+h,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y))+(F(x,y+\Delta y)-F(x,y))\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta_1h,y+\Delta y)\,h+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y+\theta_2\Delta y)\,\Delta y,\end{aligned}$$

(kontrollige!)✠, millest tuleneb

$$\frac{\Delta y}{h}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta_1h,y+\Delta y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y+\theta_2\Delta y)}. \tag{5.4}$$

Kui $h\to0$, siis $\Delta y\to0$ ja funktsioonide $\frac{\partial F}{\partial x}$ ning $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevuse tõttu

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\Delta y}{h}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$$

(peame silmas, et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ ja $y = f(x)$). Seejuures on tuletis f' pidev punktis x (põhjendage!)✠. ■

Märkus. Kui eeldada, et teoreemi 5.1 eelduses 1^0 on osatuletis $\frac{\partial F}{\partial y}$ asendatud osatuletisega $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja eelduse 3^0 asemel võtta tingimus
3^{00} $\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A}) \neq 0$,
siis määrab võrrand (5.1) ristkülikus $K_{\delta,\sigma}(\mathbf{A})$ pideva ilmutamata funktsiooni $x = \varphi(y)$, mis pideva osatuletise $\frac{\partial F}{\partial y}$ olemasolu korral on vahemikus $(b-\sigma, b+\sigma)$ pidevalt diferentseeruv. Seejuures

$$\varphi'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(y), y)}. \tag{5.5}$$

5.2 Joone iseärased punktid, nende liigid

Tasandilist joont nimetatakse *siledaks*, kui tal on pidevalt muutuv puutuja. Kui joon on antud võrrandiga $y = f(x)$ $(x \in [a,b])$, siis tema siledus tähendab funktsiooni f' pidevust. Teisi sõnu, võrrandiga $y = f(x)$ määratud joon on sile parajasti siis, kui funktsioon f on pidevalt diferentseeruv.

Joone puutuja. Olgu kahe muutuja funktsiooni F korral punktis $\mathbf{A}$ täidetud teoreemi 5.1 tingimused 1^0 ja 2^0 ning veel kas 3^0 või 3^{00}. Sel juhul määrab võrrand (5.1) punkti $\mathbf{A}$ läbiva sileda joone, mille saab esitada kas võrrandiga $y = f(x)$ (kui on täidetud 3^0) või $x = \varphi(y)$ (kui kehtib 3^{00}). Kui $\mathbf{X} = (x,y)$ on selle joone punkt, siis selles punktis joonele võetud puutuja võrrand on vastavalt

$$Y - y = f'(x)(X - x) \text{ või } X - x = \varphi'(y)(Y - y)$$

(siin on X ja Y *puutuja* suvalise punkti koordinaadid). Need kaks võrrandit saab esitada seoste (5.3) ja (5.5) abil ühe võrrandiga:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)(Y-y) = 0 \tag{5.6}$$

(kontrollige!)✠.

Vaatleme nüüd olukorda, kus $\varphi_1, \varphi_2\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruvad funktsioonid ning $t_0 \in (\alpha,\beta)$, kusjuures $\varphi_1'(t_0)^2 + \varphi_2'(t_0)^2 > 0$. Sel juhul joone

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha,\beta]$$

punktis $\mathbf{A} := (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0))$ tõmmatud puutuja sihivektor on $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$.

Tõepoolest, olgu $F(x,t) = x - \varphi_1(t)$. Tähistame $x_0 = \varphi_1(t_0)$. Juhul $\varphi_1'(t_0) \neq 0$ teoreemi 5.1 tingimused on täidetud (kui $\varphi_1'(t_0) = 0$, siis kasutame $G(y,t) = y - \varphi_2(t)$) (selgitage!✠). Niisiis leiduvad arvud $\delta, \sigma > 0$ ja funktsioon $\psi\colon (x_0-\delta, x_0+\delta) \to (t_0-\sigma, t_0+\sigma)$, et iga $(x,t) \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \times (t_0-\sigma, t_0+\sigma)$ korral kehtib $x = \varphi_1(t)$ parajasti siis, kui $t = \psi(x)$. Saame, et $y = \varphi_2(t) = \varphi_2(\psi(x))$. Sealjuures $\psi'(x) = \frac{1}{\varphi_1'(\psi(x))}$ (veenduge!✠). Tähistades $f = \varphi_2\psi$, paneme tähele, et otsitava puutuja sihivektor punktis $\mathbf{A}$ on $(1, f'(x_0))$, mis on kollineaarne vektoriga $(\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0))$ (veenduge!✠).

Joone harilikud ja iseärased punktid. Joone $F(x,y)=0$ neid punkte $\mathbf{X}=(x,y)$, kus on täidetud kas 3^0 või 3^{00} (s.t. osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ ja $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ ei ole mõlemad võrdsed nulliga), nimetatakse selle joone *harilikeks punktideks*. Joonel on igas tema harilikus punktis puutuja, mille saab esitada võrrandiga (5.6). Joone neid punkte $\mathbf{X}=(x,y)$, mille korral $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0$, nimetatakse tema *iseärasteks punktideks*.

Näide 5.1. Leiame ringjoone $x^2+y^2=r^2$ puutuja võrrandi. Tähistame $F(x,y):=x^2+y^2-r^2$, siis

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2x \text{ ja } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y,$$

seega ei ole ringjoonel iseäraseid punkte. Vastavalt valemile (5.6) saame ringjoone punktis $\mathbf{X}$ puutuja esitada võrrandiga

$$2x(X-x)+2y(Y-y)=0$$

ehk $xX-x^2+yY-y^2=0$, s.t.

$$xX+yY=r^2.$$

Uurime järgnevas võrrandit (5.1) **selle võrrandiga määratud joone iseärase punkti ümbruses.** Niisiis, olgu $\mathbf{A}=(a,b)$ joone $F(x,y)=0$ iseärane punkt, s.t. $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})=\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})=0$, siis teoreem 5.1 ei kehti. Me *eeldame lisaks, et funktsioon F on punktis $\mathbf{A}$ kaks korda diferentseeruv ning $d^2F(\mathbf{A})\neq 0$.*

Kui oletada, et võrrand (5.1) määrab punkti $\mathbf{A}$ läbiva sileda joone, mida saab kirjeldada parameetriliste võrranditega $x=x(t)$, $y=y(t)$, siis $F(x(t),y(t))=0$ ja võrrandi vasakut poolt saab vaadelda muutuja t liitfunktsioonina, tähistame $g(t):=F(x(t),y(t))$. *Oletame* veelgi enam, *et funktsioonid $x=x(t)$ ja $y=y(t)$ on kaks korda diferentseeruvad* ning arvutame

$$d^2g=g''(t)\,dt^2=d^2F+\frac{\partial F}{\partial x}d^2x+\frac{\partial F}{\partial y}d^2y$$

(vrd. punkt 4.2). Kohal $\mathbf{A}$ on parempoolses avaldises teine ja kolmas liige võrdsed nulliga, seega saame seose

$$d^2g=d^2_{\mathbf{A}}F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{A})\,dx^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(\mathbf{A})\,dxdy+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{A})\,dy^2.$$

Tähistame $B:=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{A})$, $C:=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(\mathbf{A})$ ja $D:=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{A})$ ning vaatleme tingimust

$$Bdx^2+2Cdxdy+Ddy^2=0,$$

Kordajad B,C ja D ei ole kõik nullid, sest me eeldasime, et $d^2F(\mathbf{A})\neq 0$. Olgu näiteks $D\neq 0$, tähistame $m:=\frac{dy}{dx}$ (see on vaadeldava joone puutuja x-telje suhtes võetud tõusunurga tangens), siis saame võrrandi

$$B+2Cm+Dm^2=0. \tag{5.7}$$

Sellel võrrandil on põhimõtteliselt kaks lahendit m_1 ja m_2, need võivad olla kas
1) kompleksed (s.t. mittereaalsed), kui võrrandi diskriminant $d:=C^2-BD<0$,
2) reaalsed ja erinevad, kui $d>0$, või

3) reaalsed ja võrdsed, kui $d = 0$.
Geomeetriliselt kõneldes tähendab see, et kui võrrand $F(x, y) = 0$ määrab sileda joone, siis sellel joonel on vaadeldavas iseärases punktis **A** kaks puutujat, mis võivad olla ka imaginaarsed (juht 1)) või kokkulangevad (juht 3)).

Vaatleme lähemalt juhtu $d > 0$. Niisiis, me eeldame, et võrrandil (5.7) on kaks erinevat reaalset lahendit m_1 ja m_2. Avaldiste lihtsustamiseks eeldame, et $\mathbf{A} = (0, 0)$ (see ei ole kitsendus, sobiva muutujavahetusega on seda võimalik saavutada). Taylori valemi kohaselt

$$\begin{aligned} F(x, y) = {} & F(\mathbf{0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0})\, x + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{0})\, y \right) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\mathbf{0})\, x^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\mathbf{0})\, xy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{0})\, y^2 \right) + \alpha \end{aligned}$$

(selgitage!)✠, kus $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\alpha}{r^2} = 0$ ja $r := \|(x, y)\|$. Pidades silmas, et $F(\mathbf{0}) = \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0}) = \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{0}) = 0$, saame võrduse

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \left(Bx^2 + 2Cxy + Dy^2 \right) + \alpha. \tag{5.8}$$

Toome seosega

$$y = (m_1 + z)\, x \tag{5.9}$$

sisse uue muutja z, siis $x \neq 0$ korral

$$\begin{aligned} F(x, (m_1 + z)\, x) &= \frac{1}{2} x^2 \left(B + 2C(m_1 + z) + D(m_1 + z)^2 \right) + \alpha \\ &= x^2 \left(Cz + Dz \left(m_1 + \frac{z}{2} \right) + \frac{\alpha}{x^2} \right) \\ &= x^2 \chi(x, z) \end{aligned} \tag{5.10}$$

(kontrollige!)✠, kus

$$\chi(x, z) := Cz + Dz \left(m_1 + \frac{z}{2} \right) + \frac{\alpha}{x^2}.$$

Kui vaadata funktsiooni χ argumente x ja z sõltumatute muutujatena, siis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{x^2 + y^2} \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \lim_{r \to 0} \frac{\alpha}{r^2} \left(1 + (m_1 + z)^2 \right) = 0$$

(peame silmas, et kui $x \to 0$, siis $y = (m_1 + z)\, x \to 0$). Seega, kui defineerime $\chi(\mathbf{0}) := \lim\limits_{(x,z) \to \mathbf{0}} \chi(x, z) = 0$, siis funktsioon χ on pidev punktis $\mathbf{0}$ ja ka selle punkti teatavas ümbruses (selgitage!)✠.

Rakendame nüüd Taylori valemit funktsioonile $\frac{\partial F}{\partial y}$ punktis $\mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{0}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\mathbf{0})\, x + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\mathbf{0})\, y + \beta \\ &= Cx + Dy + \beta, \end{aligned}$$

kus $\lim\limits_{r \to 0} \frac{\beta}{r^2} = 0$ (selgitage!)✠. Siit saame liitfunktsiooni diferentseerimise reeglite kohaselt (vrd. (5.10))

$$\frac{\partial \chi}{\partial z}(x, z) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial F}{\partial y}(x, (m_1 + z)\, x)\, x = \frac{1}{x} \left(Cx + D(m_1 + z)\, x + \beta \right)$$

ehk
$$\frac{\partial \chi}{\partial z}(x,z)=C+D(m_1+z)+\frac{\beta}{x},$$
seejuures $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{\beta}{r}\sqrt{1+1+(m_1+z)^2}=0$. Järelikult, kui defineerime $\frac{\partial\chi}{\partial z}(\mathbf{0}):=\lim\limits_{(x,z)\to\mathbf{0}}\frac{\partial\chi(x,z)}{\partial z}=C+D(m_1+z)$, siis $\frac{\partial\chi}{\partial z}$ on pidev punktis $\mathbf{0}$ ning seega ka selle punkti mingis ümbruses.

Võrrandist (5.7) tuleneb $m_1+m_2=-2\frac{C}{D}$ (selgitage!)✠, siit
$$\frac{\partial\chi}{\partial z}(\mathbf{0})=-\frac{D}{2}(m_1+m_2)+Dm_1=\frac{D}{2}(m_1-m_2)\neq 0.$$
Rakendame funktsioonile χ teoreemi 5.1 ning sellele järgnevat märkust, nende põhjal määrab ta punkti $\mathbf{0}$ ümbruses muutuja z argumendi x pideva funktsioonina, s.t. $z=z_1(x)$, kusjuures $z_1(0)=0$. Arvestades seost (5.9), saame võrrandile $F(x,y)=0$ ühe pideva lahendi kujul $y=(m_1+z_1(x))\,x$. Kuna
$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=m_1+\lim_{x\to 0}z_1(x)=m_1,$$
siis selle lahendi $y=(m_1+z_1(x))\,x$ graafikul on punktis $\mathbf{0}$ puutuja, mille tõusunurga tangens on m_1.

Võttes seoses (5.9) m_1 asemel m_2 ning korrates sama arutelu, saame võrrandile $F(x,y)=0$ teise pideva lahendi $y=(m_1+z_2(x))\,x$, mille puutuja tõusunurga tangens punktis $\mathbf{0}$ on m_2.

Kokkuvõtteks. Kui võrrandi (5.7) diskriminant d on positiivne, siis joone $F(x,y)=0$ iseärasel punktil $\mathbf{A}$ on selline ümbrus, milles võrrand $F(x,y)=0$ määrab kaks erinevat siledat ilmutamata funktsiooni, kusjuures punktis $\mathbf{A}$ on nende funktsioonide graafikutel erinevad puutujad. Seda punkti $\mathbf{A}$ nimetatakse joone $F(x,y)=0$ *sõlmpunktiks.*

Vaatleme ka juhtu $d<0$. Siis saab võrdus $Bx^2+2Cxy+Dy^2=0$ kehtida vaid punktis $\mathbf{0}$ (selgitage!)✠. Teeme seoses (5.8) muutujate vahetuse $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, saame võrduse
$$F(x,y)=\frac{1}{2}r^2\left(B\cos^2\theta+2C\cos\theta\sin\theta+D\sin^2\theta\right)+\alpha,$$
milles sulgudes olev avaldis on muutuja θ suhtes lõigus $[0,2\pi]$ pidev funktsioon. Olgu
$$k:=\frac{1}{4}\min\left|B\cos^2\theta+2C\cos\theta\sin\theta+D\sin^2\theta\right|,$$
siis $k\neq 0$. Kui $r>0$ on nii väike, et $\frac{|\alpha|}{r^2}<k$ (põhjendage sellise valiku võimalikkust!)✠, siis
$$\begin{aligned}|F(x,y)|&\geqslant\frac{1}{2}r^2\left|B\cos^2\theta+2C\cos\theta\sin\theta+D\sin^2\theta\right|-|\alpha|\\&>2kr^2-kr^2=kr^2.\end{aligned}$$
Tähendab, punktil $\mathbf{0}$ leidub selline ümbrus, kus võrrandil $F(x,y)=0$ on vaid null-lahend. Sel juhul nimetatakse punkti $\mathbf{0}$ joone $F(x,y)=0$ *isoleeritud punktiks.*

Juhul $d=0$ saab näidata, et $\mathbf{A}$ on kas isoleeritud punkt või koosneb vaadeldav joon punkti $\mathbf{A}$ ümbruses kahest siledast kõverast, millel on punktis $\mathbf{A}$ ühine puutuja. Viimasel juhul nimetatakse punkti $\mathbf{A}$ joone $F(x,y)=0$ *tagasipöördepunktiks.*

5.3 Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid

Olgu kolme muutuja funktsioon $w = F(x, y, z)$ määratud risttahukas

$$K_{\delta_1,\delta_2,\delta}(\mathbf{A}) :=$$
$$\left\{\mathbf{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a - \delta_1 < x < a + \delta_1,\ b - \delta_2 < y < b + \delta_2,\ a_3 - \delta < z < a_3 + \delta\right\}$$

keskpunktiga $\mathbf{A} = (a, b, c)$. Kui võrrandil

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5.11}$$

on iga punkti (x, y) korral ristkülikust

$$K_{\delta_1,\delta_2}(\mathbf{A}') := \{(x, y) \mid a - \delta_1 < x < a + \delta_1,\ b - \delta_2 < y < b + \delta_2\}$$

olemas üheselt määratud lahend $z = f(x, y)$, siis öeldakse, et võrrand (5.11) määrab risttahukas $K_{\delta_1,\delta_2,\delta_3}(\mathbf{A})$ muutuja z muutujate x ja y ilmutamata funktsioonina ehk, teisiti väljendudes, kahe muutuja funktsioon f on ilmutamata kujul antud võrrandiga (5.11).

Teoreem 5.2. *Eeldame, et kolme muutuja funktsioon $w = F(x, y, z)$ rahuldab punktis $\mathbf{A} = (a, b, c)$ järgmisi tingimusi:*
1^0 punktil $\mathbf{A}$ leidub niisugune ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles funktsioon F on pidev ja tal on selles ümbruses pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial z}$,
2^0 $F(\mathbf{A}) = 0$,
3^0 $\frac{\partial F(\mathbf{A})}{\partial z} \neq 0$.
Siis saab leida sellise risttahuka $K_{\delta_1,\delta_2,\delta}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$, milles võrrand (5.11) määrab pideva ilmutamata funktsiooni $z = f(x, y)$, kusjuures $f(a, b) = c$.

Kui lisaks eeldustele 1^0 - 3^0 on täidetud veel tingimus
4^0 hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonil F pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial x}$,
siis on funktsioonil f ristkülikus $K_{\delta_1,\delta_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}. \tag{5.12}$$

Kui lisaks eeldustele 1^0 - 3^0 on täidetud tingimus
5^0 hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonil F pidev osatuletis $\frac{\partial F}{\partial y}$,
siis on funktsioonil f ristkülikus $K_{\delta_1,\delta_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}. \tag{5.13}$$

Võrrand (5.11) määrab ruumis $\mathbb{R}^3$ teatava pinna. Kui selle pinna igas punktis on olemas *pidevalt muutuv* puutujatasand, siis öeldakse, et see pind on *sile.* Ilmutatud kujul võrrandiga $z = f(x, y)$ esitatud pind on sile, kui eksisteerivad pidevad osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}$. Sellele pinnale punktis $\mathbf{X} = (x, y, z)$ võetud puutujatasandi võrrand on

$$Z - z = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(Y - y),$$

kus X, Y ja Z on puutujatasandi suvalise punkti koordinaadid. Pidades silmas seoseid (5.12), on siit lihtne saada puutujatasandi võrrandiks

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)(Z-z)=0 \tag{5.14}$$

(kontrollige!)✠. Pinna $F(x,y,z)=0$ neid punkte, kus kõik osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial F}{\partial z}$ ei ole korraga nullid, nimetatakse harilikeks, ülejäänud iseärasteks punktideks. **Kokkuvõttes:** pinnal $F(x,y,z)=0$ on igas tema harilikus punktis puutujatasand (5.14).

5.4 Võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid

Ruumis $\mathbb{R}^3$ võib joon olla antud kahe pinna lõikejoonena (näiteks on sirge kahe tasandi lõikejoon). Seega saab ruumilise kõvera esitada üldjuhul võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{5.15}$$

kus F ja G on mingis lahtises hulgas määratud kolme muutuja funktsioonid.

Olgu antud süsteem (5.15) ning rahuldagu punkt $\mathbf{A}=(a,b,c)$ seda süsteemi. Kui iga $x\in(a-\delta,a+\delta)$ korral on ristkülikus

$$K_{\delta',\delta''}\left(\mathbf{A}''\right):=\{(y,z)\mid b-\delta'<y<b+\delta',\quad c-\delta''<z<c+\delta''\}$$

keskpunktiga $\mathbf{A}'':=(b,c)$ olemas selle süsteemi ühene lahend

$$y=:f(x),\quad z=:g(x),$$

siis öeldakse, et *võrrandisüsteem* (5.15) *määrab risttahukas*

$$K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A}):=\{(x,y,z)\mid a-\delta<x<a+\delta,\quad b-\delta'<y<b+\delta',\quad c-\delta''<z<c+\delta''\}$$

muutujad y ja z muutuja x ilmutamata funktsioonina. Meie eesmärk on kindlaks teha, millistel tingimustel funktsioonide F ja G osas sellised ilmutamata funktsioonid f ja g olemas on.

Vaatleme osatuletiste maatriksit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ja tähistame punkti $\mathbf{A}=(a,b,c)$ korral determinandi

$$J(\mathbf{A}):=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{A}) & \frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{A}) \end{vmatrix}.$$

Teoreem 5.3. *Eeldame, et kolme muutuja funktsioonid F ja G rahuldavad punktis $\mathbf{A} = (a, b, c)$ järgmisi tingimusi:*
1^0 punktil $\mathbf{A}$ on niisugune ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles funktsioonid F ja G on pidevad ja neil on pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial G}{\partial y}$ ja $\frac{\partial G}{\partial z}$,
2^0 $F(\mathbf{A}) = 0$ ja $G(\mathbf{A}) = 0$,
3^0 $J(\mathbf{A}) \neq 0$.
Siis leidub selline risttahukas $K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$, milles võrrandisüsteem (5.15) määrab pidevad ilmutamata funktsioonid $y = f(x)$ ja $z = g(x)$, kusjuures $f(a) = b$ ja $g(a) = c$.

Kui lisaks eeldustele 1^0 - 3^0 on täidetud veel tingimus
4^0 hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonidel F ja G pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$,
siis on funktsioonid f ja g vahemikus $(a-\delta, a+\delta)$ diferentseeruvad ning

$$f'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{X})\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X}) - \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X})\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})}, \quad g'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X})\frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{X}) - \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{X})\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})}, \tag{5.16}$$

kus $\mathbf{X} := (x, f(x), g(x)) \in K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$.

Tõestus. Kuna $J(\mathbf{A}) \neq 0$, siis on selle determinandi teise veeru elementidest vähemalt üks nullist erinev, olgu $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{A}) \neq 0$. Vaatleme võrrandit $F(x, y, z) = 0$ teoreemi 5.2 kontekstis, selle teoreemi tingimused 1^0 - 3^0 ja 5^0 on täidetud (kontrollige!)✠. Teoreemi 5.2 kohaselt saab moodustada niisuguse risttahuka $K_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma}(\mathbf{A}) \subset U_\theta(\mathbf{A})$, milles võrrand $F(x, y, z) = 0$ määrab muutuja z muutujate x ja y pideva ilmutamata funktsioonina $z = \varphi(x, y)$ ristkülikus $K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$, kus $\mathbf{A}' := (a, b)$. See funktsioon rahuldab tingimust $\varphi(a, b) = c$ ja tal on hulgas $K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$ pidev osatuletis

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{Q})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q})}, \tag{5.17}$$

kus $\mathbf{Q} := (x, y, \varphi(x, y))$. Vaadeldavas risttahukas $K_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma}(\mathbf{A})$ võime seega süsteemi (5.15) võrrandi $F(x, y, z) = 0$ asendada võrrandiga $z = \varphi(x, y)$, siis saame süsteemiga (5.15) samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y), \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Asendame muutuja z esimesest võrrandist teise ja tähistame $\Psi(x, y) := G(x, y, \varphi(x, y))$, siis oleme esialgse süsteemi teisendanud kujule

$$\begin{cases} z = \varphi(x, y), \\ \Psi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Veendume, et kahe muutuja funktsioon Ψ rahuldab teoreemi 5.1 eeldusi 1^0 - 3^0. Esiteks, kuna φ ja G on pidevad funktsioonid, siis funktsioon Ψ on pidev hulgas $K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$, veelgi enam, tal on pidev osatuletis $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (selgitage!)✠. Seosest (5.17) saame, et

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q})}\left(\frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{Q})\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q}) - \frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{Q})\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{Q})\right) = -\frac{J(\mathbf{Q})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q})}, \tag{5.18}$$

kus $\mathbf{Q} = (x, y, \varphi(x, y))$. Teiseks, $\Psi(a, b) = G(a, b, \varphi(a, b)) = G(a, b, c) = 0$ ja, kolmandaks,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(a, b) = -\frac{J(\mathbf{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{A})} \neq 0$$

(vrd. (5.18)). Teoreemi 5.1 põhjal saab leida niisuguse ristküliku $K_{\delta,\delta'}(\mathbf{A}') \subset K_{\sigma_1,\sigma_2}(\mathbf{A}')$, milles $\frac{\partial\Psi}{\partial y}$ on nullist erinev ja võrrand $\Psi(x,y)=0$ määrab ilmutamata funktsiooni $y=f(x)$. See on vahemikus $(a-\delta,a+\delta)$ pidev ning rahuldab tingimust $b=f(a)$. Võtame $\delta'':=\sigma$ ja moodustame risttahuka $K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$. Selles on esialgne võrrandisüsteem (5.15) samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} z=\varphi(x,y), \\ y=f(x). \end{cases}$$

Asendades muutuja y teisest võrrandist esimesse, saame eelmisega samaväärse süsteemi

$$\begin{cases} y=f(x), \\ z=g(x), \end{cases}$$

kus $g(x):=\varphi(x,f(x))$ $(x\in(a-\delta,a+\delta))$. Seejuures on f ja g vahemikus $(a-\delta,a+\delta)$ pidevad ning rahuldavad tingimust $f(a)=b$ ja $g(a)=c$ (kontrollige!)✠. Esimene osa väitest on tõestatud.

Teise osa tõestuseks eeldame, et kehtib veel ka tingimus 4^0, s.t. hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on olemas pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$. Rakendades (nii nagu eespool) võrrandile $F(x,y,z)=0$ teoreemi 5.2, paneme tähele, et nüüd on täidetud ka selle teoreemi eeldus 4^0, mistõttu lisaks valemile (5.17) kehtib ilmutamata funktsiooni $z=\varphi(x,y)$ jaoks ka valem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{Q})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q})},$$

kus $\mathbf{Q}=(x,y,\varphi(x,y))\in K_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma}(\mathbf{A})$. Arvutame

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{Q})+\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{Q})\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\\&=\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q})}\left(\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{Q})\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{Q})-\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{Q})\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{Q})\right).\end{aligned}$$

Võrrandi $\Psi(x,y)=0$ jaoks on nüüd täidetud ka teoreemi 5.1 tingimus 4^0, mistõttu ilmutamata funktsioon f, mille see võrrand määrab, on oma määramispiirkonnas $(a-\delta,a+\delta)$ diferentseeruv ning

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial\Psi}{\partial y}(x,f(x))}=\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X})\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{X})-\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{X})\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})}$$

(vrd. (5.18)), kus $\mathbf{X}:=(x,f(x),\varphi(x,f(x)))\in K_{\delta,\delta',\delta''}(\mathbf{A})$. Siit tuleneb ka funktsiooni g diferentseeruvus ja valem

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,f(x))+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,f(x))f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{X})}-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{X})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{X})}\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X})\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{X})-\frac{\partial G}{\partial z}(\mathbf{X})\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})}\\&=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{X})\frac{\partial G}{\partial y}(\mathbf{X})-\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{X})\frac{\partial G}{\partial x}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X})}\end{aligned}$$

(kontrollige!)✠. Teoreem on tõestatud. ■

Me sõnastame järgnevalt analoogilise väite **võrrandisüsteemiga määratud ilmutamata mitme muutuja funktsioonide** jaoks. Selleks vajame **funktsionaaldeterminante.**

Olgu hulgas $D \subset \mathbb{R}^m$ antud m funktsiooni

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ w_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots \\ w_m &= f_m(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Moodustame nn. **Jacobi maatriksi**

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{pmatrix},$$

eeldades, et kõik selles esinevad osatuletised eksisteerivad ja on määratud hulgas D. Selle maatriksi determinanti nimetatakse funktsionaaldeterminandiks, Jacobi determinandiks ehk **jakobiaaniks** ja tähistatakse kas $\frac{D(f_1,\ldots,f_m)}{D(x_1,\ldots,x_m)}$ või lihtsalt J.

Teoreem 5.4. *Vaatleme süsteemi*

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \qquad \ldots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) = 0, \end{cases} \tag{5.19}$$

kus $m+n$ muutuja funktsioonid $F_1, \ldots, F_n$ rahuldavad punktis $\mathbf{A} = (a_1 \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ järgmisi tingimusi:
1^0 punktil $\mathbf{A}$ on ruumis $\mathbb{R}^{m+n}$ niisugune ümbrus $U_\theta(\mathbf{A})$, milles funktsioonid $F_1, \ldots, F_n$ on pidevad ja neil on muutujate $y_1, \ldots, y_n$ järgi pidevad osatuletised $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$,
2^0 $F_i(\mathbf{A}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,
3^0 $J(\mathbf{A}) = \frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}(\mathbf{A}) \neq 0$.
Siis saab leida punkti $\mathbf{A}$ sellise ümbruse, milles võrrandisüsteem (5.19) *määrab muutujad $y_1, \ldots, y_n$ muutujate $x_1, \ldots, x_m$ ilmutamata funktsioonidena, s.t.*

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ y_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned}$$

kusjuures $b_i = f_i(a_1, \ldots, a_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ja funktsioonid $f_1, \ldots, f_n$ on punkti $(a_1, \ldots, a_m)$ teatavas ümbruses pidevad.

Kui lisaks eeldustele 1^0 - 3^0 on täidetud veel tingimus
4^0 hulgas $U_\theta(\mathbf{A})$ on funktsioonidel $F_1, \ldots, F_n$ muutujate $x_1, \ldots, x_m$ järgi pidevad osatuletised $\frac{\partial F_i}{\partial x_l}$ $(i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, m)$,
siis funktsioonidel $f_1, \ldots, f_n$ on punkti $(a_1, \ldots, a_m)$ teatavas ümbruses pidevad osatuletised $\frac{\partial f_i}{\partial x_l}$ $(i = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, m)$.

6 Mitme muutuja funktsioonide ekstreemumid

6.1 Mitme muutuja funktsioonide lokaalsed ekstreemumid

Lokaalse ekstreemumi mõiste. Olgu antud m muutuja funktsioon $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ ning olgu $\mathbf{A}$ tema määramispiirkonna sisepunkt.

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $\mathbf{A}$ *(range) lokaalne maksimum* (*(strict) local maximum, relative maximum*), kui leidub arv $\delta > 0$ selliselt, et

$$f(\mathbf{X}) \overset{(<)}{\leqslant} f(\mathbf{A}) \qquad \forall \mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}.$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis $\mathbf{A}$ *(range) lokaalne miinimum*, kui leidub arv $\delta > 0$ selliselt, et

$$f(\mathbf{X}) \overset{(>)}{\geqslant} f(\mathbf{A}) \qquad \forall \mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}.$$

Tarvilik tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks. Olgu funktsioonil f punktis $\mathbf{A}$ lokaalne ekstreemum (s.o. maksimum või miinimum). Lihtne on veenduda, et *kui tal on selles punktis mingi i korral osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, siis $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{A}) = 0$.* Tõepoolest, moodustame ühe muutuja funktsiooni

$$\varphi(x) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$

see on punktis a_i diferentseeruv ja tal on selles punktis lokaalne ekstreemum (selgitage!)✠. Selge, et $\frac{\partial f(\mathbf{A})}{\partial x_i} = \varphi'(a_i) = 0$.

Funktsiooni statsionaarne punkt. Kui funktsioonil f on tema ekstreemumpunktis $\mathbf{A}$ olemas kõik osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{A})$ $(i = 1, \ldots, m)$, siis

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{A}) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) = 0. \tag{6.1}$$

Kui mingis punktis $\mathbf{A} \in D$ on täidetud tingimus (6.1), siis ütleme, et $\mathbf{A}$ on funktsiooni f *statsionaarne punkt.*

Samal ajal *ei pruugi funktsioonil statsionaarses punktis ekstreemumit olla.* Lihtne **näide** selle kohta on funktsioon $w = xy$ ainukese statsionaarse punktiga $\mathbf{0}$, milles funktsiooni väärtus on 0, kuid mille igas ümbruses on funktsioonil nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Me püüame järgnevalt välja selgitada, *millised on need piisavad tingimused, mis garanteerivad m muutuja funktsiooni ekstreemumi olemasolu tema statsionaarses punktis.* Nende tingimuste kirjeldamisel on mugav kasutada lineaarsest algebrast tuntud ruutvorme.

Positiivselt (negatiivselt) määratud ruutvormid. Kui reaalarvud a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m)$ moodustavad sümmeetrilise maatriksi $\mathcal{A} = (a_{ij})$ (st. $a_{ki} = a_{ik}$ iga i ja k korral), siis seosega

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sum_{k,i=1}^{m} a_{ki} x_k x_i \tag{6.2}$$

määratud funktsiooni $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nimetatakse *ruutvormiks* (*quadratic form*). Lihtne on kontrollida, et $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon (selgitage!)✠.

Öeldakse, et ruutvorm Φ on

- *positiivselt määratud* (*positive-definite*), kui $\Phi(\mathbf{X}) > 0$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ korral;
- *negatiivselt määratud*, kui $\Phi(\mathbf{X}) < 0$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ korral;
- *määratud*, kui Φ on positiivselt või negatiivselt määratud;
- *positiivselt poolmääratud* (*positive-semidefinite*), kui $\Phi(\mathbf{X}) \geqslant 0$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ korral;
- *negatiivselt poolmääratud*, kui $\Phi(\mathbf{X}) \leqslant 0$ iga $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ korral;
- *määramata* (*indefinite*), kui leiduvad $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbb{R}$, et $\Phi(\mathbf{X}) > 0$ ja $\Phi(\mathbf{X}') < 0$.

Saab tõestada nn. **Sylvesteri kriteeriumi**, mille kohaselt ruutvorm Φ on 1) positiivselt määratud parajasti siis, kui maatriksi $\mathcal{A}$ kõik juhtmiinorid (*leading principal minors*) on positiivsed, s.t. kehtivad võrratused

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0, \tag{6.3}$$

ja 2) negatiivselt määratud parajasti siis, kui

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ldots, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0. \tag{6.4}$$

Märkus. Sylvesteri kriteerium **ei ole** ümber kirjutatav poolmääratuse juhtudeks. Vaatleme näiteks järgmist maatriksit ja temale vastavat ruutvormi:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(x, y) = -y^2.$$

Ilmselt maatriksi $\mathcal{A}$ kõik juhtmiinorid on mittenegatiivsed, samas Φ **ei ole** positiivselt poolmääratud (selgitage!)✠.

Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks statsionaarses punktis. Olgu antud $f\colon D \to \mathbb{R}$, kus $D \subset \mathbb{R}^m$.

Teoreem 6.1. *Olgu f kaks korda diferentseeruv punktis $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ ning olgu $\mathbf{A}$ funktsiooni f statsionaarne punkt. Tähistame $\Phi(h_1, \ldots, h_m) = \sum_{i,j}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{A})$; kujutus $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ on ruutvorm (selgitage!)✠.*

- *Kui Φ on positiivselt määratud, siis funktsioonil f on punktis $\mathbf{A}$ range lokaalne miinimum.*
- *Kui Φ on negatiivselt määratud, siis funktsioonil f on punktis $\mathbf{A}$ range lokaalne maksimum.*
- *Kui Φ on määramata, siis funktsioonil f punktis $\mathbf{A}$ lokaalset ekstreemumit ei ole.*

Tõestus. Olgu täidetud teoreemi eeldused. Kuna f on punktis $\mathbf{A}$ kaks korda diferentseeruv, siis leidub arv $\theta > 0$, et ümbruses $U_\theta(\mathbf{A})$ on määratud f kõik osatuletised, kusjuures nad on diferentseeruvad punktis $\mathbf{A}$.

Taylori valem jääkliikmega Peano kujul (vt. teoreem 4.6 juhul $n = 2$) annab koondumise

$$\lim_{\mathbf{X}\to\mathbf{A}} \frac{f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) - \mathrm{d}_{\mathbf{A}} f(\mathbf{X}-\mathbf{A}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} f(\mathbf{X}-\mathbf{A})}{\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|^2} = 0. \tag{6.5}$$

Kuna $\mathbf{A}$ on funktsiooni f statsionaarne punkt, siis $\mathrm{d}_{\mathbf{A}} f = 0$ (selgitage!)✠.

Kasutades teist järku diferentsiaali kuju, võime kirjutada, et

$$\Phi(h_1,\ldots,h_m) = \mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} f(h_1,\ldots,h_m), \qquad (h_1,\ldots,h_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Vaatleme juhtu, kus ruutvorm Φ on määratud. Paneme tähele, et ruumi $\mathbb{R}^m$ ühiksfäär $S(0,1) = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m \colon \|\mathbf{X}\| = 1\}$ on kinnine ja tõkestatud hulk (põhjendage!)✠. Et Φ on pidev ruumis $\mathbb{R}^m$, on ka $|\Phi|$ pidev ruumis $\mathbb{R}^m$ (selgitage!)✠.

Weierstrassi teoreemi 2.5 kohaselt saavutab hulgas $S(0,1)$ pidev funktsioon $|\Phi|$ selles hulgas oma vähima väärtuse, s.t. leidub

$$\min\{|\Phi(\mathbf{T})| :\ \|\mathbf{T}\| = 1\} =: 2\mu. \tag{6.6}$$

Paneme tähele, et $\mu > 0$. Nimelt, kui oletada, et $\mu = 0$, siis peaks leiduma $\mathbf{T}_0 \in S(0,1)$ omadusega $\Phi(\mathbf{T}_0) = 0$, mis ruutvormi määratuse tõttu ei ole võimalik.

Koondumise (6.5) abil (valides arvu ε rolli μ) leiame $\delta > 0$ selliselt, et iga $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A})\setminus\{\mathbf{A}\}$ korral

$$\frac{1}{2}\Phi(\mathbf{X}-\mathbf{A}) - \mu\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|^2 < f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) < \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{X}-\mathbf{A}) + \mu\|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|^2$$

(selgitage!)✠. Tähistame $r := \|\mathbf{X}-\mathbf{A}\|$.

Kui Φ on positiivselt määratud, siis tingimuse (6.6) abil saame iga $\mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{A}\}$ jaoks, et

$$f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) > \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{X}-\mathbf{A}) - \mu r^2 = \frac{r^2}{2}\Phi\left(\frac{\mathbf{X}-\mathbf{A}}{r}\right) - \mu r^2 \geqslant \frac{r^2}{2}\cdot 2\mu - \mu r^2 = 0,$$

millest $f(\mathbf{X}) > f(\mathbf{A})$. Niisiis on funktsioonil f punktis $\mathbf{A}$ range lokaalne miinimum.

Kui aga Φ on negatiivselt määratud, siis analoogiliselt $f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) < 0$ (iseseisvalt!)✠, millest $f(\mathbf{X}) < f(\mathbf{A})$. Seega on funktsioonil f punktis $\mathbf{A}$ range lokaalne maksimum.

Vaatleme nüüd juhtu, kui ruutvorm Φ on määramata. Sel juhul saab valida $\mathbf{T}' = (h_1',\ldots,h_m')$ ning $\mathbf{T}'' = (h_1'',\ldots,h_m'')$ nii, et $\Phi(\mathbf{T}') > 0$ ja $\Phi(\mathbf{T}'') < 0$. Olgu $\mathbf{Q}' := \mathbf{A}+s\mathbf{T}' = (a_1 + sh_1',\ldots,a_m + sh_m')$ ning $\mathbf{Q}'' := \mathbf{A} + s\mathbf{T}'' = (a_1 + sh_1'',\ldots,a_m + sh_m'')$, kus $s > 0$. Võtame s nii väikese, et $\mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in U_\theta(\mathbf{A})$. Siis seosest (6.5) saame

$$f(\mathbf{Q}') - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} f(\mathbf{Q}'-\mathbf{A}) + \alpha_2' = \frac{1}{2}s^2\Phi(\mathbf{T}') + \alpha_2',$$
$$f(\mathbf{Q}'') - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2_{\mathbf{A}} f(\mathbf{Q}'-\mathbf{A}) + \alpha_2'' = \frac{1}{2}s^2\Phi(\mathbf{T}'') + \alpha_2'',$$

kus

$$\lim_{s\to 0}\frac{\alpha_2'}{s^2}=0 \text{ ja } \lim_{s\to 0}\frac{\alpha_2''}{s^2}=0$$

(selgitage!)✠. Tähendab,

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(\mathbf{Q}')-f(\mathbf{A})}{s^2}=\frac{1}{2}\Phi(\mathbf{T}')>0 \text{ ja } \lim_{s\to 0}\frac{f(\mathbf{Q}'')-f(\mathbf{A})}{s^2}=\frac{1}{2}\Phi(\mathbf{T}'')<0.$$

Siit järeldub (selgitage!✠), et punkti $\mathbf{A}$ igas ümbruses on punkte $\mathbf{Q}'$ ja $\mathbf{Q}''$, mille puhul $f(\mathbf{Q}')-f(\mathbf{A})>0$ ning $f(\mathbf{Q}'')-f(\mathbf{A})<0$. Seega ei ole punktis $\mathbf{A}$ lokaalset ekstreemumit. ■

Paneme tähele, et kuna tõestuses läks tarvis tingimust $\mu>0$, mis saadi ruutvormi Φ määratuse tõttu, pole teoreemi analoogiliselt võimalik tõestada juhul, kui Φ on positiivselt või negatiivselt poolmääratud.

Eelpooltoodud Sylvesteri kriteeriumi kohaselt on funktsioonil f statsionaarses punktis $\mathbf{A}$ lokaalne maksimum, kui ruutvorm (6.2) rahuldab tingimust (6.4), ning lokaalne miinimum, kui kehtib (6.3). Kahe muutuja funktsiooni puhul saame järgmise väite.

Järeldus 6.2. *Kaks korda diferentseeruval kahe muutuja funktsioonil $w=f(x,y)$ on statsionaarses punktis $\mathbf{A}=(a,b)$ lokaalne ekstreemum, kui $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$. Juhul $a_{11}>0$ on funktsioonil f selles punktis lokaalne miinimum, juhul $a_{11}<0$ aga lokaalne maksimum. Kui $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, siis funktsioonil f punktis $\mathbf{A}$ ekstreemumit ei ole.*

Tõestus. Kontrollimist vajab vaid viimane väide, ülejäänud järelduvad vahetult teoreemist 6.1. Olgu $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, vaatleme algul juhtu, kus $a_{11}\neq 0$. Siis ruutvormi $\Phi(h_1,h_2)=a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2$ saab kirjutada kujul

$$\Phi(h_1,h_2)=\frac{1}{a_{11}}\left((a_{11}h_1+a_{12}h_2)^2+\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)h_2^2\right).$$

Kui võtta $h_1\neq 0$ ja $h_2=0$, siis ruutvormi märk on sama mis arvul a_{11}. Kui aga $h_1:=-\frac{a_{12}}{a_{11}}h_2$ ja $h_2\neq 0$, siis on ruutvormi märk vastupidine arvu a_{11} märgile. Seega on ruutvorm Φ määramata. Sama tulemuse saame juhul $a_{22}\neq 0$.

Olgu $a_{11}=a_{22}=0$, siis $a_{12}\neq 0$ ja ruutvorm on kujul $\Phi(h_1,h_2)=2a_{12}h_1h_2$ ning seega määramata. ■

Järeldus 6.3. *Kaks korda diferentseeruval **ühe** muutuja funktsioonil $y=f(x)$ on statsionaarses punktis $\mathbf{a}$ juhul $a_{11}>0$ lokaalne miinimum, juhul $a_{11}<0$ aga lokaalne maksimum.*

6.2 Tinglik ekstreemum

Praktiliste ekstreemumi leidmise ülesannetena on kõige sagedasemad sedalaadi probleemid, kus tuleb leida mitme muutuja funktsiooni ekstreemum teatavaid lisatingimusi rahuldavate punktide hulgas. Täpsemalt, olgu $w=f(x_1,\ldots,x_m)$ mingi m muutuja funktsioon ja olgu antud teatav tingimuste komplekt

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_m)=0,\\ F_2(x_1,\ldots,x_m)=0,\\ \qquad\cdots\\ F_r(x_1,\ldots,x_m)=0,\end{cases} \tag{6.7}$$

kus $r < m$. Olgu $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ niisugune punkt funktsiooni f määramispiirkonnas, mis rahuldab tingimust (6.7), s.t. $F_i (a_1, \ldots, a_m) = 0$ iga $i = 1, \ldots, r$ korral. Kui punktil $\mathbf{A}$ leidub selline ümbrus $U_\delta (\mathbf{A})$ et

$$f (\mathbf{A}) \leqslant f (\mathbf{X}) \text{ iga } \mathbf{X} \in U_\delta (\mathbf{A}) \text{ puhul, } \textbf{mis rahuldab tingimust } (6.7),$$

siis ütleme, et funktsioonil f on punktis $\mathbf{A}$ (seostega (6.7) määratud) *tinglik miinimum.* Analoogiliselt defineeritakse *tinglik maksimum.*

Kui **näiteks** kolme muutuja funktsiooni $w = f (x, y, z)$ määramispiirkond sisaldab kera $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ ja on fikseeritud tingimus $F_1 (x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, siis vastava tingliku ekstreemumi leidmine tähendab funktsiooni f ekstremaalse väärtuse leidmist sfääri $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ pinnal.

Langrange'i määramata kordajate meetod.

Teoreem 6.4. *Olgu antud funktsioon $f\colon D\to\mathbb{R}$, kus $D\subset\mathbb{R}^m$. Leidugu $\sigma>0$ nii, et funktsioonidel $f,F_1,\ldots,F_r$ on pidevad osatuletised kõigi muutujate $x_1,\ldots,x_m$ järgi ümbruses $U_\sigma(\mathbf{A})$. Lisaks kehtigu*

$$J(\mathbf{A}) := \frac{D(F_1,\ldots,F_r)}{D(x_{s+1},\ldots,x_m)}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F_r}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) & \ldots & \frac{\partial F_r}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ kus } s := m-r$$

Määrame arvud $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) = -\frac{\partial f}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}), \\ \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) = -\frac{\partial f}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}), \\ \qquad\ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_m}(\mathbf{A}) = -\frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \end{cases} \tag{6.8}$$

(selgitage, miks süsteem on lahenduv!)✠.

Kui funktsioonil f on punktis $\mathbf{A}$ *tinglik ekstreemum tingimustel (6.7), siis* $\mathbf{A}$ *on* Lagrange'i funktsiooni

$$\Phi(\mathbf{X}) := f(\mathbf{X}) + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k F_k(\mathbf{X}) \tag{6.9}$$

statsionaarne punkt.

Teoreem 6.4 on lihtsasti ümber sõnastatav ka juhule, kus osatuletiste maatriksi

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{A})\right)_{i,j=1}^{r,m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\mathbf{A}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{A}) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1}(\mathbf{A}) & \frac{\partial F_r}{\partial x_2}(\mathbf{A}) & \ldots & \frac{\partial F_r}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

mõne teise r veeruvektorist koosneva alammaatriksi determinant on nullist erinev.

Kokkuvõttes annab teoreem 6.4 juhise, millistes punktides võib olla funktsiooni f tinglik ekstreemum tingimustel (6.7):

1) punktid, mille mistahes ümbruses puuduvad vähemalt ühel funktsioonidest f, $F_1,\ldots,F_r$ pidevad osatuletised,

2) punktid, milles 1) on rikutud, aga osatuletiste maatriksi (6.10) kõik r-järku determinandid on nullid,

3) punktid, milles 1) ja 2) on rikutud, aga mis on Lagrange'i funktsiooni (6.9) (või analoogilise, sõltuvalt, milline (6.10) r-järku determinant on nullist erinev) statsionaarsed punktid.

Muudes punktides funktsioonil f tinglikku ekstreemumit tingimustel (6.7) ei ole.

Teoreemi 6.4 tõestus. Kehtigu teoreemi eeldused. Peame näitama, et

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(\mathbf{A}) = \ldots = \frac{\partial\Phi}{\partial x_s}(\mathbf{A}) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) = \ldots = \frac{\partial\Phi}{\partial x_m}(\mathbf{A}) = 0.$$

Paneme tähele, et tingimuste (6.8) tõttu juba kehtibki

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) = \ldots = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(\mathbf{A}) = 0 \tag{6.11}$$

(selgitage!)✠. Niisiis on jäänud veel kontrollida, et $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(\mathbf{A}) = 0$, kus $k = 1, \ldots, s$. Fikseerime konkreetse $k \in \{1, \ldots, s\}$.

Rakendame teoreemi 5.4, selle kohaselt leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\forall \mathbf{X} \in U_\delta(\mathbf{A}) \qquad (6.7) \quad \Leftrightarrow \quad (6.12),$$

kus tingimustes

$$\begin{cases} x_{s+1} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_s), \\ x_{s+2} = \varphi_2(x_1, \ldots, x_s), \\ \quad\ldots \\ x_m = \varphi_r(x_1, \ldots, x_s), \end{cases} \tag{6.12}$$

seisvad funktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ on pidevad ja pidevalt diferentseeruvad hulgas $U_\delta(\mathbf{A}')$ (kus $\mathbf{A}' := (a_1, \ldots, a_s)$).

Tähistame

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) := f(x_1, \ldots, x_s, \varphi_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \varphi_r(x_1, \ldots, x_s)),$$

siis funktsioonil φ on ümbruses $U_\delta(\mathbf{A}')$ pidevad osatuletised kõigi muutujate $x_1, \ldots, x_s$ järgi (põhjendage!)✠.

Kuna eelduse kohaselt on funktsioonil f tinglik ekstreemum punktis $\mathbf{A}$ tingimustel (6.7), siis funktsioonil φ on lokaalne ekstreemum punktis $\mathbf{A}'$ (selgitage!)✠, järelikult $\mathbf{A}'$ on funktsiooni φ statsionaarne punkt. Seetõttu

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_{s+i}}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\mathbf{A}') = -\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{A}), \tag{6.13}$$

kus $\mathbf{A} = (a_1, \ldots, a_s, \varphi_1(a_1, \ldots, a_s), \ldots, \varphi_r(a_1, \ldots, a_s))$ (põhjendage!)✠. Teame, et

$$F_j(x_1, \ldots, x_s, \varphi_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \varphi_r(x_1, \ldots, x_s)) = 0 \qquad \forall (x_1, \ldots, x_s) \in U_\delta(\mathbf{A}'), \qquad j = 1, \ldots, r. \tag{6.14}$$

Niisiis, diferentseerides samaselt nulliga võrduvaid funktsioone (6.14) muutuja x_k järgi, saame võrrandid

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_1}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\mathbf{A}') & = & \displaystyle -\frac{\partial F_1}{\partial x_k}(\mathbf{A}), \\ & \ldots & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F_r}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\mathbf{A}') & = & \displaystyle -\frac{\partial F_r}{\partial x_k}(\mathbf{A}) \end{array} \tag{6.15}$$

(põhjendage!)✠.

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_k}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(\mathbf{A}')\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_{s+1}}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k}(\mathbf{A}')\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_{s+2}}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} - \ldots - \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_k}(\mathbf{A}')\cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}.$$

Seega seoste (6.11) tõttu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(\mathbf{A}) &= \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{A}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(\mathbf{A}) = \\ &= -\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\mathbf{A}') \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_{s+j}}(\mathbf{A}) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_{s+j}}(\mathbf{A}) \right) = \\ &= -\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\mathbf{A}') \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_{s+j}}(\mathbf{A}) = 0. \end{aligned}$$

■

Märkus. Juhul $r = 1$ osutub võrrandisüsteem (6.8) nõudeks, et vektor $\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{A}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(\mathbf{A})\right)$ oleks kollineaarne vektoriga $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{A}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A})\right)$. Teoreemi tõestuse käigus selgus, et tinglikkuse eeldusel vektor $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$ avaldub vektorite $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \\ \frac{\partial F}{\partial x_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$ kaudu.

Seega võrrandisüsteemis (6.8) sisuliselt nõutakse, et pinna $F(x_1, \ldots, x_m) = 0$ normaalvektor $\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{A}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_m}(\mathbf{A})\right)$ ja pinna $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ gradient $\nabla f(\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{A}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{A})\right)$ oleksid kollineaarsed, ehk et $\nabla f(\mathbf{A})$ oleks punktis $\mathbf{A}$ risti pinna F puutujatasandiga, ehk et f muutumiskiirus pinna F rihis oleks null.

Kui nõue (6.8) on rikutud, siis f muutumiskiirus pinna F rihis on nullist erinev, seega mingis sihis saab f nii väiksemaid kui ka suuremaid väärtusi kui $f(\mathbf{A})$, mistõttu sel juhul pole võimalik, et funktsioonil f oleks (tinglik) ekstreemum punktis $\mathbf{A}$.

Analoogiliselt saab arutleda ka juhul $r > 1$, sel juhul osutub (6.8) sisuliselt samuti nõudeks, et pinna (6.7) rihis oleks funktsiooni f muutumiskiirus null.

Selleks, et kirjeldada **piisavaid tingimusi** funktsiooni $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ tingliku ekstreemumi olemasoluks funktsiooni Φ statsionaarses punktis $\mathbf{A}$, eeldame lisaks tingimustele $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\mathbf{A}) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ ja $F_k(\mathbf{A}) = 0$ $(k = 1, \ldots, r)$, et funktsioonid $f, F_1, \ldots, F_r$ on punkti $\mathbf{A}$ ümbruses kaks korda diferentseeruvad ning omavad punktis $\mathbf{A}$ pidevaid teist järku osatuletisi kõigi muutujate $x_1, \ldots, x_m$ järgi. Paneme tähele, et nende punktide $\mathbf{X}$ puhul, mis rahuldavad tingimusi (6.7), kehtib $f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{A}) = \Phi(\mathbf{X}) - \Phi(\mathbf{A})$, seega on tingimustel (6.7) funktsioonidel f ja Φ samad ekstreemumpunktid. Nende leidmiseks saame rakendada Lagrange'i funktsioonile Φ teoreemi 6.1, s.t. tuleks uurida teise diferentsiaali $\mathrm{d}^2\Phi$ määratust. Tähelepanuväärne on seejuures asjaolu, et ruutvormi $\mathrm{d}^2\Phi$ uurimisel võib muutujad $x_1, \ldots, x_m$ lugeda sõltumatuks.

Näide 6.1. Leida kahe muutuja funktsiooni $f(x, y) = x^3 + y^3$ ekstreemum tingimusel $x + y = 2$.

Moodustame funktsiooni $\Phi(x,y) := x^3 + y^3 + \lambda(x + y - 2)$ ja arvutame

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3x^2 + \lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 + \lambda.$$

Funktsiooni Φ statsionaarse punkti leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x^2 + \lambda = 0 \\ 3y^2 + \lambda = 0 \end{cases}$$

koos võrrandiga $x + y = 2$. Süsteemist saame $x^2 = y^2$, arvestades võrrandit $x + y = 2$, jõuame statsionaarse punktini $\mathbf{A} := (1,1)$. Kuna see on funktsiooni Φ ainuke statsionaarne punkt ja maatriksi $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A}) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})\right) = (1 \quad 1)$ mõlemad esimest järku determinandid on nullist erinevad, siis punktis $\mathbf{A}$ on tõepoolest funktsioonil $f(x,y) = x^3 + y^3$ tingimusel $x + y = 2$ ekstreemum väärtusega 2. Tegemist on tingliku *miinimumiga.* Et selles veenduda, tuleb vastavalt eelnenud märkusele leida $\mathrm{d}^2\Phi(1,1) = 6(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$ ning veenduda selle ruutvormi positiivses määratuses (kontrollige!)✠.

Näide 6.2. Leida funktsiooni $f(x,y,z) = xyz$ suurim ja vähim väärtus ringjoonel Δ, mis tekib sfääri

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \tag{6.16}$$

ja tasandi

$$x + y + z = 5 \tag{6.17}$$

lõikumisel.

Märgime kõigepealt, et sfäär (6.16) ja tasand (6.17) tõepoolest lõikuvad: tuntud valemi järgi on tasandi $Ax+By+Cz+D = 0$ kaugus nullpunktist võrdne arvuga $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, niisiis on tasandi (6.17) kaugus nullpunktist $\frac{5}{\sqrt{3}}$, mis on väiksem kui sfääri (6.16) raadius 3. Teiseks paneme tähele, et kuna hulk Δ on kinnine (põhjendage!)✠ ja tõkestatud, siis saavutab pidev funktsioon f selles hulgas oma suurima ja vähima väärtuse, seega on ülesanne korrektselt püstitatud.

Lihtne on näha, et otsitavad suurim ja vähim väärtus on funktsiooni f tinglikud ekstreemumid tingimustel (6.16) ja (6.17). Nende leidmiseks kasutame eelpool käsitletud Lagrange'i meetodit. Selleks peame eelnevalt veenduma, et vajalikud eeldused 1) - 3) on rahuldatud. On selge, et nii funktsioonil f kui ka seoseid (6.16) ja (6.17) määravatel funktsioonidel F_1 ja F_2, kus $F_1(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 9$ ja $F_2(x,y,z) := x + y + z - 5$, on pidevad osatuletised kõigi muutujate järgi. Teiseks, osatuletiste maatriksi

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinandid on

$$2(x-y), \quad 2(x-z) \quad \text{ja} \quad 2(y-z),$$

need saavad olla korraga nullid vaid siis, kui $x = y = z$, kuid nende võrranditega määratud sirgel ei ole ühiseid punkte ringjoonega Δ (selgitage!)✠. Niisiis, me võime rakendada Lagrange'i meetodit selleks, et leida need punktid, kus on üldse võimalik ekstreemumi olemasolu.

Lagrange'i funktsiooni $\Phi(x, y, z) := xyz + \lambda_1 (x^2 + y^2 + z^2 - 9) + \lambda_2 (x + y + z - 5)$ järgi saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \\ xy + 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{6.18}$$

(kontrollige!)✠. Selle lahendamiseks kasutame seostest (6.16) ja (6.17) tulenevat võrdust

$$yz + xz + xy = \frac{1}{2}\left[(x + y + z)^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right] = 8$$

(kontrollige!)✠, mistõttu süsteemist (6.18) saame

$$10\lambda_1 + 3\lambda_2 = -8. \tag{6.19}$$

Edasi, lahutades süsteemi (6.18) esimesest võrrandist teise, teisest kolmanda ja kolmandast esimese, saame

$$\begin{cases} (z - 2\lambda_1)(y - x) = 0 \\ (x - 2\lambda_1)(z - y) = 0 \\ (y - 2\lambda_1)(x - z) = 0 \end{cases}.$$

Siin ei saa vahed $y - x$, $z - y$ ja $x - z$ kõik olla nullist erinevad, kuid neist vaid üks saab võrduda nulliga (selgitage!)✠.

Vaatleme kõigepealt juhtu $x - y = 0$, siis $2\lambda_1 = x = y$ (kontrollige!)✠ ning (tänu seosele (6.17)) $z = 5 - 2x$. Süsteemi (6.18) esimene võrrand saab kuju $5x - 2x^2 + x^2 + \lambda_2 = 0$ ehk

$$\lambda_2 = x^2 - 5x.$$

Seosest (6.19) saame võrrandi

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

mille lahenditeks on $x_1 = 2$ ja $x_2 = 4/3$. Pidades silmas eelpool fikseeritud seoseid $y = x$ ning $z = 5 - 2x$, jõuame kahe võimaliku ekstreemumpunktini: $(2, 2, 1)$ ja $(4/3, 4/3, 7/3)$.

Eeldades, et $z - y = 0$, ja korrates sama arutelu, saame punktid $(2, 1, 2)$ ja $(4/3, 7/3, 4/3)$, *juhul* $x - z = 0$ aga punktid $(1, 2, 2)$ ja $(7/3, 4/3, 4/3)$. Nüüd on lihtne veenduda, et funktsioon f saavutab ringjoonel Δ oma suurima väärtuse $\frac{112}{27}$ punktides $(4/3, 4/3, 7/3)$, $(4/3, 7/3, 4/3)$ ja $(7/3, 4/3, 4/3)$ ning vähima väärtuse 4 punktides $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$ ja $(1, 2, 2)$.

7 Joonintegraalid

7.1 Joone kaare pikkus

Jooned ruumis $\mathbb{R}^m$. Olgu igale arvule t intervallist $I \subset \mathbb{R}$ seatud vastavusse ruumi $\mathbb{R}^m$ punkt $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$. Kujutust

$$\gamma\colon I \to \mathbb{R}^m, \ \ t \mapsto (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$$

nimetatakse reaalse argumendiga (ehk parameetriga) *vektorfunktsiooniks,* punktide hulka

$$\gamma(I) = \{(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)) \mid t \in I\}$$

nimetatakse (vektorfunktsiooniga γ määratud) *jooneks* ruumis $\mathbb{R}^m$. Tavaliselt esitatakse see joon *parameetriliste võrranditega*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \quad\ldots \\ x_m = \varphi_m(t) \end{cases} \quad (t \in I)\,. \tag{7.1}$$

Joont (7.1) nimetatakse

- *pidevaks* (*continuous*), kui kõik *koordinaatfunktsioonid* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ on pidevad intervallis I;
- *siledaks* (*smooth*), kui funktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ on intervallis I pidevalt diferentseeruvad ja tuletised $\varphi_1'(t), \ldots, \varphi_m'(t)$ ei ole korraga nullid selle intervalli üheski punktis t;
- *kaareks* (*arc*), kui I on lõik;
- *tükiti siledaks* (*piecewise smooth*), kui (7.1) koosneb lõplikust arvust siledatest kaartest;
- *lihtsaks* (*simple*), kui γ on üksühene (see tähendab, puuduvad *kordsed punktid*: punktid $\gamma(t_1)$ ja $\gamma(t_2)$, kus $t_1 \neq t_2$, aga $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$);
- *kinniseks* (*closed*), kui I on lõik $[\alpha, \beta]$ ning $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$;
- *lihtsaks kinniseks* (*simple closed*), kui (7.1) on kinnine ning ainus kordne punkt on $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Enamus praktikas tähtsust omavaid jooni on esitatavad **lihtsate kaarte lõplike ühendina.**

Järgnevas vaatleme **pidevaid jooni ruumis** $\mathbb{R}^2$ ehk xy-tasandil. Kaart otspunktidega **A** ja **B** tähistame edaspidi AB.

Olgu antud pidev lihtne kaar $L = AB$ võrranditega

$$x = \varphi_1(t)\,, \quad y = \varphi_2(t) \qquad (t \in [\alpha, \beta])\,, \tag{7.2}$$

kus $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$ ning $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$. Jaotame lõigu $[\alpha, \beta]$ osadeks punktidega

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta, \tag{7.3}$$

tähistame selle alajaotuse $T[t_0, \ldots, t_n]$. Olgu $\lambda(T)$ osalõikude $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ pikkuste maksimaalne väärtus, s.t.

$$\lambda(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - t_{i-1}).$$

Tähistame $\mathbf{X}_i := (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 0, \ldots, n)$, need on lõigu jaotuspunktidele vastavad joone punktid. Ühendame sirglõiguga omavahel iga kaks järjestikust punkti $\mathbf{X}_{i-1}$ ja $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, nii saame kaare AB *kõõlmurdjoone* (*polygonal approximation*) $\pi = \mathbf{X}_0\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_{n-1}\mathbf{X}_n$ (siin $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$). Selle murdjoone pikkuse märgime tähega $p(T)$.

Tähistame järgnevas tähega $\mathfrak{T}$ lõigu $[\alpha, \beta]$ kõikvõimalike alajaotuste T hulka. Paneme tähele, et jaotuse peenendamisel (s.o. uute jaotuspunktide lisamisel) kõõlmurdjoone pikkus ei kahane: kui $T, T' \in \mathfrak{T}$ ja $T \subset T'$, siis $p(T) \leqslant p(T')$ (selgitage!)✠.

Definitsioon. Kui parameetriliste võrranditega (7.2) määratud lihtsa joone AB puhul eksisteerib $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p(T)$, siis seda piirväärtust nimetatakse *kaare AB pikkuseks.* Kui kaarel on olemas lõplik pikkus, siis nimetatakse teda *sirgestuvaks* (*rectifiable*). Kaare AB pikkust tähistame sümboliga $|AB|$.

Lause 7.1. *Lihtne kaar on sirgestuv parajasti siis, kui tema kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu lihtne kaar AB määratud parameetriliste võrranditega (7.2), olgu T lõigu $[\alpha, \beta]$ mingi alajaotus. Eeldame, et eksisteerib $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p(T) =: s$, siis leidub selline $\delta > 0$, et kui $\lambda(T) < \delta$, siis $p(T) \in (s-1, s+1)$. Niisiis, kui $\lambda(T) < \delta$, siis $p(T) < M := s+1$. Veendume, et sama hinnang kehtib ka juhul $\lambda(T) \geqslant \delta$. Olgu antud selline jaotus T_0, et tema maksimaalse lõigu pikkus $\lambda(T_0)$ ei ole väiksem arvust δ. Peenendame seda jaotust uute punktide juurdevõtmise teel niimoodi, et uue jaotuse T' korral maksimaalse osalõigu pikkus $\lambda(T') < \delta$, siis $p(T_0) \leqslant p(T') < M$. Kokkuvõttes $\sup\{p(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} < \infty$.

Piisavus. Kui kaare AB kõikvõimalike kõõlmurdjoonte pikkused on ülalt tõkestatud, siis nendel pikkustel on olemas ülemine raja $\sup\{p(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} =: s$. Näitame, et $s = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p(T)$.

Olgu ε suvaline positiivne arv. Leiame lõigu $[\alpha, \beta]$ sellise alajaotuse $T' = T[t'_0, \ldots, t'_l]$, et talle vastava kõõlmurdjoone $Q_0Q_1 \ldots Q_l$ ($Q_0 = A$, $Q_l = B$) pikkus $p(T')$ oleks suurem kui $s - \frac{\varepsilon}{2}$. Arvestades funktsioonide φ_1 ja φ_2 pidevust, saame Cantori teoreemi põhjal leida niisuguse $\delta > 0$, et kui $|t - t'| < \delta$, $t, t' \in [\alpha, \beta]$, siis $|\varphi_1(t) - \varphi_1(t')| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}(l-1)}$ ja $|\varphi_2(t) - \varphi_2(t')| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}(l-1)}$, millest saame võrratuse

$$\sqrt{(\varphi_1(t) - \varphi_1(t'))^2 + (\varphi_2(t) - \varphi_2(t'))^2} < \frac{\varepsilon}{4(l-1)}$$

(selgitage!)✠. Olgu $X_0X_1 \ldots X_n$ ($X_0 = A$, $X_n = B$) kaare AB mingi selline kõõlmurdjoon, mis vastab lõigu $[\alpha, \beta]$ teatavale alajaotusele $T = T[t_0, \ldots, t_n]$ omadusega $\lambda(T) < \delta$.

Teeme lõigus $[\alpha, \beta]$ uue alajaotuse T'' punktidega $t_0, \ldots, t_n$ ja $t'_0, \ldots, t'_l$. See määrab uue kõõlmurdjoone $Z_0Z_1 \ldots Z_s$, mille tippudeks on punktid $X_0, X_1, \ldots, X_n$ ja $Q_1, \ldots, Q_{l-1}$. Tipu Q_i juurdevõtmisel murdjoonele $X_0X_1 \ldots X_n$ tekib selle teatava lüli $X_{k-1}X_k := [\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{X}_k]$ asemele kaks uut lüli $X_{k-1}Q_i$ ning Q_iX_k, seejuures

$$|X_{k-1}Q_i| = \sqrt{(\varphi_1(t_{k-1}) - \varphi_1(t_i'))^2 + (\varphi_2(t_{k-1}) - \varphi_2(t_i'))^2},$$
$$|Q_iX_k| = \sqrt{(\varphi_1(t_i') - \varphi_1(t_k))^2 + (\varphi_2(t_i') - \varphi_2(t_k))^2},$$

kus $|XQ|$ tähistab lõigu $[\mathbf{X}, \mathbf{Q}]$ pikkust. Kuna $|t_{k-1} - t_i'| < t_k - t_{k-1} \leqslant \lambda(T) < \delta$ ja $|t_i' - t_k| < t_k - t_{k-1} \leqslant \lambda(T) < \delta$, siis $|X_{k-1}Q_i| < \frac{\varepsilon}{4(l-1)}$ ja $|Q_iX_k| < \frac{\varepsilon}{4(l-1)}$. Kõõlmurdjoonte $X_0X_1 \ldots X_n$ ja $Z_0, Z_1, \ldots, Z_s$ pikkuste jaoks saame seose

$$p(T'') - p(T) < (l-1)\frac{2\varepsilon}{4(l-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(selgitage!)✠. Teiselt poolt, $p(T'') \geqslant p(T') > s - \frac{\varepsilon}{2}$ ehk

$$s - p(T'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Järelikult, kui $\lambda(T) < \delta$, siis

$$|s - p(T)| = s - p(T) = (s - p(T'')) + (p(T'') - p(T)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s.t. $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p(T) = s$. ■

Esitame kaare pikkuse kolm tähtsat omadust.

Omadus 7.2. ***(kaarepikkuse funktsiooni pidevus)*** *Olgu $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ sirgestuv joon. Tähistame $s(t) = |\{\gamma(u)\colon u \in [a,t]\}|$. Siis γ on punktis $x_0 \in [a,b]$ pidev parajasti siis, kui s on pidev punktis x_0.*

Omadus 7.3. ***(kaare pikkuse monotoonsus).*** *Sirgestuva kaare AB iga osakaar $A'B'$ on sirgestuv, seejuures osakaare pikkus ei ületa kogu kaare pikkust.*

Tõestus. Olgu π' osakaare $A'B'$ mingi kõõlmurdjoon pikkusega p'. Moodustame ka osakaarte AA' ja $B'B$ kõõlmurdjooned, saame kogu kaare AB kõõlmurdjoone π pikkusega p. Lause 7.1 kohaselt leidub selline positiivne arv M, et kaare AB iga kõõlmurdjoone pikkus on väiksem kui M, seega $p \leqslant M$. On selge, et $p' < p$, järelikult $p' < M$. Tähendab, kaare $A'B'$ kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud, lause 7.1 põhjal on $A'B'$ sirgestuv kaar. ■

Omadus 7.4. ***(kaare pikkuse aditiivsus).*** *Kui kaar AB on sirgestuv, siis tema pikkus on võrdne kaarte AC ja CB pikkuste summaga, kus $\mathbf{C}$ on suvaline punkt kaarel AB.*

Tõestus. Moodustame kaarte AC ja CB kõõlmurdjooned π' ja π'', olgu nende pikkused vastavalt p' ja p''. Siis nende murdjoonte ühend $\pi := \pi' \cup \pi''$ on kaare AB kõõlmurdjoon pikkusega $p := p' + p''$. Eelduse kohaselt eksisteerib $s := \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p$, omaduse 7.3 põhjal leiduvad $s' := \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p'$ ja $s'' := \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} p''$, siit järeldub $s = s' + s''$. ■

Järgmine lause võimaldab meil edaspidi sileda joone kaare pikkust arvutada integraali abil.

Lause 7.5. *Olgu lihtne kaar* AB *antud võrranditega* (7.2), *kus funktsioonid* φ_1 *ja* φ_2 *on lõigus* $[\alpha, \beta]$ *pidevalt diferentseeruvad. Siis joon* AB *on sirgestuv ning iga* $t \in [\alpha, \beta]$ *korral eksisteerib*

$$s(t) := |AX|, \text{ kus } X = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Seejuures funktsioon $s : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *on diferentseeruv ja*

$$s'(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}.$$

Tõestus. A. Vaatleme kaare AB suvalist osakaart $\tilde{A}\tilde{B}$. Fikseerime selleks $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subset [\alpha, \beta]$.

Eelduse kohaselt eksisteerivad tuletised φ_1' ja φ_2', mis on lõigus $\left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]$ pidevad funktsioonid. Siis ka absoluutväärtustega $|\varphi_1'(t)|$ ja $|\varphi_2'(t)|$ määratud funktsioonid on pidevad ning Weierstrassi teoreemi kohaselt saavutavad selles lõigus ekstremaalsed väärtused

$$M_l := \max_{t \in \left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]} |\varphi_l'(t)|, \quad m_l := \min_{t \in \left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]} |\varphi_l'(t)| \quad (l = 1, 2).$$

Lähtume lõigu $\left[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\right]$ jaotusest (7.3) ja moodustame vastava kõõlmurdjoone $\pi = X_0 X_1 \ldots X_n$, s. t. $\mathbf{X}_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, kusjuures $\mathbf{X}_0 = \tilde{\mathbf{A}}$ ning $\mathbf{X}_n = \tilde{\mathbf{B}}$. Selle murdjoone pikkus on

$$p(T) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1}))^2 + (\varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1}))^2}. \tag{7.4}$$

Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leiduvad iga $i = 1, \ldots, n$ korral vahemikus (t_{i-1}, t_i) sellised punktid ξ_i ja η_i, et

$$\varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1}) = \varphi_1'(\xi_i)\Delta t_i, \quad \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1}) = \varphi_2'(\eta_i)\Delta t_i,$$

kus $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$. Valemist (7.4) saame seega

$$p(T) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\eta_i)^2}\Delta t_i.$$

Kuna

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \leqslant \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\eta_i)^2} \leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

(selgitage!)✠, siis

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi_1'(\xi_i)^2 + \varphi_2'(\eta_i)^2}\Delta t_i \leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i,$$

s. t.

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\left(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\right) \leqslant p(T) \leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\left(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}\right). \tag{7.5}$$

Siit järeldub, et kõõlmurdjoonte pikkused on tõkestatud, niisiis on joon $\tilde{A}\tilde{B}$ sirgestuv, tal on pikkus $s = \lim_{\lambda(T) \to 0} p(T)$. Valemist (7.5) saame protsessis $\lambda(T) \to 0$ võrratused

$$\sqrt{m_1^2 + m_2^2} \leqslant \frac{s}{\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}} \leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2}. \tag{7.6}$$

Muuhulgas näeme siit, et algne kaar AB on sirgestuv (selgitage!✠).

B. Olgu $t \in [\alpha, \beta]$ suvaline ja olgu $\mathbf{X} := \mathbf{X}(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ talle vastav punkt joonel AB, seejuures kaar AX on sirgestuv (põhjendage!)✠. Protsessis, kus parameeter t muutub punktist α punktini β, kujundab punkt $\mathbf{X}(t)$ joone AB, seejuures ei ole sel joonel kordseid punkte. Tähistades sümboliga $s(t)$ kaare AX pikkuse, defineerime me funktsiooni $s : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, näitame, et see funktsioon on diferentseeruv.

Anname argumendile t muudu h, olgu $\mathbf{Q} := (\varphi_1(t+h), \varphi_2(t+h))$. Kui $h > 0$, siis $\mathbf{Q}$ paikneb joonel AB punktide $\mathbf{X}$ ja $\mathbf{B}$ vahel, juhul $h < 0$ aga punktide $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{X}$ vahel. Esimesel juhul saame omadusest 7.4 võrduse $|AX| + |XQ| = |AQ|$, teisel $|AQ| + |XQ| = |AX|$. Seejuures $|AX| = s(t)$ ja $|AQ| = s(t+h)$, järelikult

$$|XQ| = \begin{cases} \Delta s, \text{ kui } h > 0, \\ -\Delta s, \text{ kui } h < 0, \end{cases}$$

seega

$$\frac{|XQ|}{|h|} = \frac{\Delta s}{h}.$$

Rakendades kaarele XQ võrratusi (7.6), saame

$$\sqrt{m_1^{*2} + m_2^{*2}} \leqslant \frac{\Delta s}{h} \leqslant \sqrt{M_1^{*2} + M_2^{*2}}, \tag{7.7}$$

kus $M_l^* := \max|\varphi_l'(u)|$, $m_l^* := \min|\varphi_l'(u)|$ $(l = 1, 2)$ ja maksimum ning miinimum on võetud lõigus otspunktidega t ja $t+h$ (kontrollige!)✠. Seejuures $\lim\limits_{h\to0} M_1^* = \lim\limits_{h\to0} m_1^* = |\varphi_1'(t)|$ ja $\lim\limits_{h\to0} M_2^* = \lim\limits_{h\to0} m_2^* = |\varphi_2'(t)|$ (see tuleneb funktsioonide φ_1' ja φ_2' pidevusest punktis t (selgitage!)✠), seega

$$\lim_{h\to0} \sqrt{M_1^{*2} + M_2^{*2}} = \lim_{h\to0} \sqrt{m_1^{*2} + m_2^{*2}} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$$

ning seostest (7.7) saame

$$s'(t) = \lim_{h\to0} \frac{\Delta s}{h} = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}.$$

Lause on tõestatud. ■

Järeldus 7.6. *Lause* 7.5 *eeldustel saab joone AB pikkuse arvutada valemist*

$$|AB| = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Tõestus. Newton-Leibnizi valemist saame

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt = \int_\alpha^\beta s'(t)\, dt = s(\beta) - s(\alpha) = |AB| - 0 = |AB|.$$

■

Järeldus 7.7. *Iga tükiti siledal joonel on lõplik pikkus.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠. ■

7.2 Esimest liiki joonintegraal

Olgu lihtne **sirgestuv** joon $L = AB$ antud võrranditega (7.2) ja olgu sellel joonel määratud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$. Moodustame lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotuse $T = T[t_0, \dots, t_n]$, olgu $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$, $\mathbf{X}_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 1, \dots, n-1)$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$. Need punktid jaotavad joone AB n kaareks AX_1, $X_1X_2, \dots, X_{n-1}B$, kaar $X_{i-1}X_i$ määratakse võrranditega (7.2), kus $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Valime igas lõigus $[t_{i-1}, t_i]$ suvaliselt punkti τ_i, olgu $\mathbf{Q}_i := (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$, see punkt asub kaarel $X_{i-1}X_i$. Moodustame summa

$$\sigma(T) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i)\, s_i,$$

kus $s_i := |X_{i-1}X_i|$ on kaare $X_{i-1}X_i$ pikkus. Nagu eespool, olgu ka edaspidi $\lambda(T)$ lõikude $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ maksimaalne pikkus.

Definitsioon. Kui eksisteerib $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T)$, siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f *esimest liiki joonintegraaliks* (*line integral of the first kind*) (ehk joonintegraaliks kaare pikkuse järgi) üle joone L ning tähistatakse $\int_L f(x, y)\, \mathrm{d}s$ või lühemalt $\int_L f\, \mathrm{d}s$. Integraali $\int_L$ asemel kirjutame tihti ka $\int_{AB}$.

Selle definitsiooni kohaselt on arv J funktsiooni f esimest liiki joonintegraal üle L parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub selline $\delta > 0$, et kui alajaotuse (7.3) kõik osalõigud on lühemad kui δ, siis $|\sigma(T) - J| < \varepsilon$ punktide $\mathbf{Q}_i \in X_{i-1}X_i$ $(i = 1, \dots, n)$ suvalise valiku korral.

Sileda joone korral annab esimest liiki joonintegraali arvutamiseks valemi järgmine lause.

Lause 7.8. *Olgu võrranditega* (7.2) *antud sile joon* $L = AB$*, millel on määratud pidev funktsioon* $w = f(x, y)$*. Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal* $\int_L f\, \mathrm{d}s$*, seejuures kehtib võrdus*

$$\int_L f\, \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Tõestus. Tähistame $\Phi(t) := f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ $\quad (t \in [\alpha, \beta])$, siis $f(\mathbf{Q}_i) = \Phi(\tau_i)$ iga $i = 1, \dots, n$ korral. Järelduse 7.6 kohaselt $s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt$, seega saame integraalsummale kuju

$$\sigma(T) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(\tau_i) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt.$$

Vaatleme integraali $\int_\alpha^\beta \Phi(t) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, \mathrm{d}t =: I$. Kuna integraalialune funktsioon on pidev (veenduge!)✠, siis see integraal tõepoolest eksisteerib. Riemanni integraali aditiivsuse omaduse tõttu

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, \mathrm{d}t,$$

niisiis

$$\sigma(T) - I = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\Phi(\tau_i) - \Phi(t)) \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Funktsioon $t \mapsto \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev, seega on ta tõkestatud, s.t. $M := \sup_{t \in [\alpha,\beta]} \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ on lõplik. Funktsioon Φ kui pidev funktsioon on Cantori teoreemi põhjal ühtlaselt pidev lõigus $[\alpha, \beta]$. Olgu ε suvaline positiivne arv. Ühtlase pidevuse definitsiooni kohaselt saab valida $\delta > 0$ niiviisi, et kui $t, t' \in [\alpha, \beta]$ ja $|t - t'| < \delta$, siis $|\Phi(t) - \Phi(t')| < \frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$. Siit järeldub, et kui lõigu $[\alpha, \beta]$ jaotuses kõikide osalõikude pikkused on väiksemad kui δ, siis kõikide $t, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ korral $|\Phi(\tau_i) - \Phi(t)| < \frac{\varepsilon}{M(\beta-\alpha)}$ ning

$$|\sigma(T) - I| < \varepsilon.$$

Teisi sõnu, $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$. Lause on tõestatud. ■

Märkus 1. Selgitame esimest liiki joonintegraali **füüsikalist sisu.** Olgu võrranditega (7.2) määratud lihtne *materiaalne* joon AB, mille mass jaotub joonel vastavalt funktsioonile $w = f(x, y)$, s.t. punktis $\mathbf{X} \in AB$ on joone massi tihedus $f(\mathbf{X})$. Selleks, et arvutada kogu joone massi, jaotame ta väikesteks osadeks AX_1, $X_1X_2, \ldots, X_{n-1}B$. Kui osakaared on küllalt väikesed, võime eeldada, et neil on massi tihedus konstantne ja osakaare $X_{i-1}X_i$ ligikaudse massi saame, kui korrutame tema pikkuse s_i selle konstantse tihedusega, s.o. arvuga $f(\mathbf{Q}_i)$, kus $\mathbf{Q}_i \in X_{i-1}X_i$. Kogu joone AB ligikaudne mass võrdub sel juhul integraalsummaga $\sigma(T)$, tema täpne mass aga piirväärtusega $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = \int_L f \, \mathrm{d}s$.

7.3 Teist liiki joonintegraal

Olgu lihtne joon $L = AB$ antud võrranditega (7.2), kus $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha))$ ja $\mathbf{B} = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$. Olgu sellel joonel määratud kahe muutuja funktsioon $w = f(x, y)$.

Moodustame lõigu $[\alpha, \beta]$ alajaotuse $T = T[t_0, \ldots, t_n]$, olgu $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{X}_i = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ ja $\mathbf{X}_n = \mathbf{B}$. Need punktid jaotavad joone L n kaareks AX_1, $X_1X_2, \ldots$, $X_{n-1}B$, mis vastvad osalõikudele $[\alpha, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, \beta]$. Valime igas osalõigus $[t_{i-1}, t_i]$ suvaliselt punkti τ_i, olgu $\mathbf{Q}_i := (\varphi_1(\tau_i), \varphi_2(\tau_i))$, see punkt asub kaarel $X_{i-1}X_i$. Moodustame summad

$$\sigma_1(T) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i) \Delta x_i \text{ ja } \sigma_2(T) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{Q}_i) \Delta y_i,$$

kus $\Delta x_i := \varphi_1(t_i) - \varphi_1(t_{i-1})$ ning $\Delta y_i := \varphi_2(t_i) - \varphi_2(t_{i-1})$. Märgime, et Δx_i ja Δy_i on kaare $X_{i-1}X_i$ projektsioonid vastavalt x- ja y-teljele. Olgu $\lambda(T)$ lõikude $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ maksimaalne pikkus.

Definitsioon. Kui eksisteerivad $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_1(T)$ ja $\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma_2(T)$, siis neid piirväärtusi nimetatakse funktsiooni f *teist liiki joonintegraalideks* (ehk joonintegraalideks koordinaatide järgi) üle joone L ning tähistatakse vastavalt $\int_L f(x, y) \, \mathrm{d}x$ ja $\int_L f(x, y) \, \mathrm{d}y$ või lühemalt $\int_L f \, \mathrm{d}x$ ja $\int_L f \, \mathrm{d}y$. Integraali $\int_L$ asemel kirjutame mõnikord ka $\int_{AB}$.

Definitsiooni kohaselt on arv J_1 funktsiooni f teist liiki joonintegraal koordinaadi x järgi üle joone L parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub selline $\delta > 0$, et kui alajaotuse (7.3) kõik osalõigud on lühemad kui δ, siis $|\sigma_1(T) - J_1| < \varepsilon$ punktide $\mathbf{Q}_i \in X_{i-1}X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ suvalise valiku korral. Analoogiline kommentaar on õige ka koordinaadi y järgi võetud integraali puhul.

Tavaliselt esineb rakendustes teist liiki integraalide summa kujul $\int_L F\,\mathrm{d}x + \int_L G\,\mathrm{d}y$, mida tähistatakse lühidalt

$$\int_L F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y.$$

Pidades silmas, et $\Delta x_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_1'(t)\,\mathrm{d}t$ ja $\Delta y_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_2'(t)\,\mathrm{d}t$ $(i = 1, \ldots, n)$ (selgitage!)✠, siis saab analoogiliselt lausega 7.8 tõestada järgmise lause, mis annab valemid teist liiki joonintegraalide arvutamiseks tavalise Riemanni integraali abil.

Lause 7.9. *Olgu võrranditega* (7.2) *antud sile joon* L, *millel on määratud pidev funktsioon* $w = f(x, y)$. *Siis eksisteerivad teist liiki joonintegraalid* $\int_L f\,\mathrm{d}x$ *ja* $\int_L f\,\mathrm{d}y$, *seejuures kehtivad võrdused*

$$\int_L f\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,\varphi_1'(t)\,\mathrm{d}t \text{ ja } \int_L f\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tõestus. Selle väite tõestus kordab sõna-sõnalt lause 7.8 tõestust, kui selles funktsioon $\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}$ asendada vastavalt funktsiooniga $\varphi_1'(t)$ või $\varphi_2'(t)$ (veenduge!)✠. ■

Märkused. 1. Lause 7.9 puhul saab nõuet joone sileduse kohta nõrgendada. Lause tõestus jääb integraali $\int_L f dx$ jaoks kehtima, kui eeldada, et funktsioon φ_1 on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevalt diferentseeruv. Integraali $\int_L f dy$ puhul piisab eeldusest, et φ_2 on pidevalt diferentseeruv.

2. Esimest ja teist liiki joonintegraalidel on rida ühiseid omadusi, eeskätt need, mis on omased kõikidele integraalidele, s.h. Riemanni integraalile. Märkigem siinkohal joonintegraalide **aditiivsuse omadust**, millele tugineb järgnev tähelepanek. Kui lausete 7.8 ja 7.9 eeldused kas joone või integraalialuse funktsiooni suhtes on rikutud lõpliku arvu joone L punktide korral, siis saab jagada joone lõplikuks arvuks kaarteks $L_1, , , ., L_r$, mis kõik rahuldavad nende lausete eeldusi. Sel juhul eksisteerivad integraalid $\int_{L_1}, \ldots, \int_{L_r}$ ja $\int_L = \int_{L_1} + \ldots + \int_{L_r}$ kõikide eelpool vaadeldud joonintegraalide puhul. Muuhulgas kehtib see juhul, kui funktsioon f on pidev ning joon L **on tükiti sile**, s.t. koosneb lõplikust arvust siledatest kaartest.

3. Oluline **erinevus esimest ja teist liiki joonintegraalide vahel** seisneb selles, et

$$\int_{AB} f\,\mathrm{d}s = \int_{BA} f\,\mathrm{d}s, \text{ kuid } \int_{AB} f\,\mathrm{d}x = -\int_{BA} f\,\mathrm{d}x \text{ ja } \int_{AB} f\,\mathrm{d}y = -\int_{BA} f\,\mathrm{d}y.$$

Esimest liiki integraali korral on toodud võrdus ilmne, sest $|X_{i-1}X_i| = |X_iX_{i-1}| = s_i$ iga i korral. Seevastu teist liiki joonintegraalid on tundlikud integreerimissuuna vahetuse suhtes. Tõepoolest, integraalsummades $\sigma_1(T) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i)\,\Delta x_i$ ja $\sigma_2(T) = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{Q}_i)\,\Delta y_i$ saame integreerimissuuna muutmisel Δx_i ja Δy_i asemel vastavalt $-\Delta x_i$ ja $-\Delta y_i$, millest tuleneb märgi muutus ülaltoodud valemites (kontrollige!)✠. See asjaolu toob ka kaasa selle, et esimest liiki joonintegraal on monotoonne ning tema jaoks kehtib sändvitšiteoreem, aga teist liiki joonintegraalil üldiselt pole kumbagi omadust.

4. Kui võrranditega (7.2) määratud joon $L = AB$, üle mille me joonintegraali defineerime, on **kinnine joon** (ehk kinnine kontuur) L, siis $\mathbf{A} = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha)) = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta)) = \mathbf{B}$. Võtame vabalt joonel punkti **C** ning fikseerime integreerimissuuna (ühe kahest võimalikust). Integraali aditiivsust arvestades defineerime $\int_L = \int_{AC} + \int_{CA}$ eeldusel, et parempoolsed integraalid eksisteerivad. Lihtne on veenduda, et $\int_L$ ei sõltu punktide **A** ja **C** valikust (kontrollige!)✠, küll aga **sõltub ta teist liiki joonintegraali puhul integreerimissuuna valikust.** Lepime kokku lugeda **positiivseks suunaks** see, mille korral liikumisel joonega piiratud piirkond jääb vasakule (nn. "kellaosuti liikumisele vastupidine" suund), ning eeldame, et integraalis $\int_L$ üle kinnise joone L integreerimissuunaks on valitud positiivne suund. Esimest liiki joonintegraali puhul ei oma suunavalik tähtsust, teist liiki integraalide puhul on vaja vastupidises suunas integreerimisel võtta integraali märgi ette miinusmärk.

5. Kõiki joonintegraalidega seotud mõisteid saab defineerida ja analoogiliselt uurida ka m-mõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^m$. Tulemused ja valemite väliskujud on kõik analoogilised.

7.4 Teist liiki joonintegraal kui vektorvälja joonintegraal

Ruumi $\mathbb{R}^2$ alamhulgal D (näiteks kaarel AB) määratud funktsiooni $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ nimetatakse *vektoriks* ehk *vektorväljaks* (*vector field*). Vektorvälja $\vec{F}$ *komponente* (*component*) tähistatakse F_x ja F_y (NB! Ei ole osatuletised!), kus $F(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y))$.

Kui komponendid F_x ja F_y on pidevad (mingis punktis või hulgas), siis vastavat vektorvälja nimetatakse (selles punktis või hulgas) *pidevaks.*

Tähistame (puhtformaalselt) $\mathrm{d}\vec{s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$. Joonel $L = AB$ määratud vektorvälja $\vec{F}$ joonintegraaliks nimetatakse teist liiki joonintegraalide summat

$$\int_L F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y =: \int_L \langle \vec{F}, \mathrm{d}\vec{s} \rangle.$$

(Skalaarkorrutis on siin ka puhtalt tähistuslik; pole vaja otsida aluseks oleva eukleidilise ruumi otseruutu ega muud taolist.)

Ka vektorväli võib olla antud üldisemalt funktsioonina $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ning siis vastav vektorvälja joonintegraal on kõigi m komponendi vastavate teist liiki joonintegraalide summa.

8 Kahekordne integraal

8.1 Kahekordne integraal üle ristküliku

Olgu $R := [a, b] \times [c, d]$ ristkülik tasandil $\mathbb{R}^2$, s.t.

$$R = \{\mathbf{X} = (x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Rõhutame, et kõneldes allpool ristkülikutest, peame me silmas just selliseid, mille küljed on koordinaattelgedega paralleelsed. Olgu $T[x_0, \ldots, x_n]$ ning $T[y_0, \ldots, y_r]$ vastavalt lõikude $[a, b]$ ja $[c, d]$ alajaotused

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \ \text{ ja } \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_r = d.$$

Siis ristkülik R jaotub *osaristkülikuteks* $R_{kl} := [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$ $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r)$. Niimoodi saadud **ristküliku** R **alajaotuse** tähistame $T = T[R_{kl}]$, arvu

$$\lambda(T) := \max_{1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant r} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}, \text{ kus } \Delta x_k := x_k - x_{k-1} \text{ ja } \ \Delta y_l := y_l - y_{l-1},$$

nimetame alajaotuse $T[R_{kl}]$ *diameetriks.*

Olgu $f\colon R \to \mathbb{R}$ kahe muutuja funktsioon. Moodustame (fikseeritud alajaotuse T korral) *integraalsumma*

$$\sigma(T) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} f(\xi_k, \eta_l)\, \Delta x_k \Delta y_l,$$

kus $\mathbf{X}_{kl} = (\xi_k, \eta_l)$ on mingi suvaliselt valitud punkt osaristkülikust R_{kl}.

Definitsioon 1. Arvu I nimetatakse funktsiooni f *kahekordseks Riemanni integraaliks* üle ristküliku R, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $\delta > 0$, et iga alajaotuse $T[R_{kl}]$ korral, mille diameeter $\lambda(T)$ on väiksem kui δ, kehtib punktide $\mathbf{X}_{kl} = (\xi_k, \eta_l) \in R_{kl}$ suvalise valiku korral võrratus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} f(\xi_k, \eta_l)\, \Delta x_k \Delta y_l - I \right| < \varepsilon.$$

Sel juhul kirjutatakse

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(T) = I,$$

kahekordset integraali tähistatakse

$$I = \iint_R f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \text{ ehk, lühemalt, } \iint_R f\, \mathrm{d}\mu. \tag{8.1}$$

Kui integraal (8.1) eksisteerib, siis ütleme, et funktsioon f on (Riemanni mõttes) ristkülikus R *integreeruv.*

Nii nagu ühe muutuja funktsioonide korral on ka kahe muutuja funktsiooni puhul integreeruvuseks **tarvilik tingimus** tema tõkestatus.

Lause 8.1. *Iga ristkülikus R integreeruv funktsioon f on selles ristkülikus tõkestatud.*

Tõestus. Olgu $f\colon R\to\mathbb{R}$ integreeruv. Siis leidub ristküliku R selline alajaotus $T[R_{kl}]$, et

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\xi_k,\eta_l)\,\Delta x_k\Delta y_l - I\right| < 1 \text{ suvaliste } \mathbf{X}_{kl}\in R_{kl} \text{ puhul.}$$

Kui $\mathbf{A}_{kl}$ ja $\mathbf{B}_{kl}$ on mingid punktid osaristkülikust R_{kl}, siis

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{A}_{kl})\,\Delta x_k\Delta y_l - I\right| < 1 \text{ ja } \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{B}_{kl})\,\Delta x_k\Delta y_l - I\right| < 1,$$

mistõttu

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{A}_{kl})\,\Delta x_k\Delta y_l - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{B}_{kl})\,\Delta x_k\Delta y_l\right| < 2 \tag{8.2}$$

(selgitage!)✠. Olgu $\mathbf{A}_{kl}=\mathbf{B}_{kl}$ kõikide indeksite k ja l korral, väljaarvatud juht $k=l=1$, siis tingimusest (8.2) saame võrratuse

$$|f(\mathbf{A}_{11}) - f(\mathbf{B}_{11})| < \frac{2}{\Delta x_1\Delta y_1},$$

millest tuleneb tingimus $|f(\mathbf{A}_{11})| < \frac{2}{\Delta x_1\Delta y_1} + |f(\mathbf{B}_{11})|$. Fikseerides punkti $\mathbf{B}_{11}\in R_{11}$, saame suvalise $\mathbf{X}\in R_{11}$ jaoks hinnangu

$$|f(\mathbf{X})| < M := \frac{2}{\Delta x_1\Delta y_1} + |f(\mathbf{B}_{11})|,$$

niisiis on funktsioon f osaristkülikus R_{11} tõkestatud. Analoogiliselt kontrollitakse tõkestatust ka ülejäänud osaristkülikutes R_{kl}. ■

Olgu $f\colon R\to\mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon. Me tähistame tähega $\mathfrak{T}$ kõigi ristküliku R alajaotuste $T=T[R_{kl}]$ hulka. Antud $T\in\mathfrak{T}$ puhul eksisteerivad

$$M_{kl} := \sup_{\mathbf{X}\in R_{kl}} f(\mathbf{X}) \quad \text{ja} \quad m_{kl} := \inf_{\mathbf{X}\in R_{kl}} f(\mathbf{X})$$

suvaliste $k=1,\ldots,n$ ja $l=1,\ldots,r$ korral. Moodustame **Darboux' ülem- ja alamsumma**

$$S(T) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k\Delta y_l \quad \text{ning} \quad s(T) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} m_{kl}\Delta x_k\Delta y_l,$$

seejuures

$$s(T) \leqslant \sigma(T) \leqslant S(T)$$

(selgitage!)✠ ning

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}\\ 1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant r}} \sigma(T) &= \sup_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}\\ 1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant r}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k\Delta y_l \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \sup_{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}} f(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k\Delta y_l = S(T),\end{aligned}$$

$$\inf_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}\\ 1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant r}} \sigma(T) = \inf_{\substack{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}\\ 1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant r}} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \inf_{\mathbf{X}_{kl}\in R_{kl}} f(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l \quad = s(T). \tag{8.3}$$

Darboux' summade põhilised omadused on samad, mis tavalise (ühekordse) Riemanni integraali puhul.

Omadus 8.2. *Alajaotuse peenendamisel (s.o. antud alajaotuselt teisele üleminekul uute jaotuspunktide x_i ja/või y_j lisamise teel) ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda.*

Tõestus. Olgu $S(T)$ antud alajaotusele $T[R_{kl}]$ vastav ülemsumma. Lisame alajaotusse $T[x_0,\ldots,x_n]$ uue jaotuspunkti x', siis leidub selline i, et $x' \in (x_{i-1}, x_i)$. Saame uue alajaotuse T', millele vastab ülemsumma

$$S(T') = \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il}^1 (x' - x_{i-1})\,\Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il}^2 (x_i - x')\,\Delta y_l,$$

kus $M_{il}^1 := \sup\limits_{\mathbf{X}\in[x_{i-1},x']\times[y_{l-1},y_l]} f(\mathbf{X})$ ning $M_{il}^2 := \sup\limits_{\mathbf{X}\in[x',x_i]\times[y_{l-1},y_l]} f(\mathbf{X})$. Selge, et $M_{il}^1 \leqslant M_{il}$ ja $M_{il}^2 \leqslant M_{il}$ iga $l = 1,\ldots,r$ puhul, seega

$$S(T') \leqslant \sum_{k=1,\ k\neq i}^{n} \sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il} (x' - x_{i-1})\,\Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} M_{il} (x_i - x')\,\Delta y_l$$
$$= S(T).$$

Analoogiliselt veendutakse, et $s(T') \geqslant s(T)$. ■

Omadus 8.3. *Ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.*

Tõestus. Olgu $T = T[R_{kl}]$ ja $T' = [R_{ij}]$ ristküliku R kaks alajaotust. Näitame, et $s(T') \leqslant S(T)$. Moodustame uue alajaotuse T'', mille määravad kõik jaotuste T ja T' jaotuspunktid. Selge, et T'' on peenem kui T ja T'. Omaduse 8.2 kohaselt

$$s(T') \leqslant s(T'') \leqslant S(T'') \leqslant S(T).$$

Väide on tõestatud. ■

Omaduse 8.3 põhjal on kõikvõimalike alamsummade hulk $\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ ülalt tõkestatud ja kõikvõimalike ülemsummade hulk $\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\}$ alt tõkestatud. Pidevuse aksioomi kohaselt leiduvad

$$\sup\{s(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} =: I_* \text{ ja } \inf\{S(T) \mid T \in \mathfrak{T}\} =: I^*.$$

Arve I^* ja I_* nimetatakse vastavalt Darboux' ülem- ja alamintegraaliks. Selge, et suvalise $T \in \mathfrak{T}$ korral kehtivad võrratused

$$s(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(T). \tag{8.4}$$

Darboux' ülem- ja alamintegraali omaduste täpsemaks iseloomustamiseks vajame järgmist lemmat.

Lemma 8.4. *Olgu funktsioon f tõkestatud ristkülikus R ja olgu $M > 0$ selline arv, et*

$$|f(\mathbf{X})| \leqslant M \quad (\mathbf{X} \in R),$$

ja olgu $T = T[R_{kl}]$ ristküliku R mingi alajaotus. Kui T' on mingi selline alajaotus, mis saadakse alajaotusest T sellele p (kas vertikaalse või horisontaalse) sirge lisamise teel, siis

$$\begin{aligned} S(T) &\geqslant S(T') \geqslant S(T) - 2Mpv\lambda(T), \\ s(T) &\leqslant s(T') \leqslant s(T) + 2Mpv\lambda(T), \end{aligned}$$

kus $v := \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$ on ristküliku R diagonaali pikkus.

Tõestus. Tõestame väite ülemsumma jaoks, alamsumma puhul on tõestuskäik analoogiline. Võrratus $S(T) \geqslant S(T')$ kehtib vastavalt Darboux' summade omadustele. Näitame, et

$$S(T) - S(T') \leqslant 2Mpv\lambda(T). \tag{8.5}$$

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $p = 1$. Konkreetsuse mõttes olgu alajaotusele T lisatud sirge paralleelne y-teljega, s.t. sirge $x = x'$, kus $x' \in (x_{i-1}, x_i)$ mingi $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Paneme tähele, et kui $k \neq i$, siis liidetavad $\sum\limits_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l$ on summades $S(T)$ ja $S(T')$ ühised, seega vahes $S(T) - S(T')$ koonduvad nad välja. Tähistame

$$M_{il}^1 := \sup\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in [x_{i-1}, x'] \times [y_{l-1}, y_l]\}, \; M_{il}^2 := \sup\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in [x', x_i] \times [y_{l-1}, y_l]\},$$

siis

$$\begin{aligned} S(T) - S(T') &= \sum_{l=1}^{r} M_{il}\Delta x_i \Delta y_l - \sum_{l=1}^{r} M_{il}^1 (x' - x_{i-1}) \Delta y_l - \sum_{l=1}^{r} M_{il}^2 (x_i - x') \Delta y_l \\ &= \sum_{l=1}^{r} \left(M_{il} - M_{il}^1\right)(x' - x_{i-1}) \Delta y_l + \sum_{l=1}^{r} \left(M_{il} - M_{il}^2\right)(x_i - x') \Delta y_l \\ &\leqslant 2M\Delta x_i \sum_{l=1}^{r} \Delta y_l \leqslant 2Mv\lambda(T) \end{aligned}$$

(selgitage!)✠, seega saime soovitud võrratuse. Samamoodi põhjendatakse võrratus (8.5) siis, kui T' saadakse alajaotusest T ühe x-teljega paralleelse sirge lisamise teel.

Olgu nüüd $p > 1$, s.t. alajaotus T' saadakse alajaotusest T teatavate (mingil viisil nummerdatud) p sirge lisamise teel. Tähistame $T_0 := T$, olgu T_1 saadud alajaotusest T_0 esimese sirge lisamise teel, T_2 saadakse alajaotusest T_1 teise sirge lisamisega jne., $T' = T_p$ saame alajaotusele T_{p-1} p-nda sirge lisamisel. Tõestuse esimes osa kohaselt

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant S(T_0) - S(T_1) \leqslant 2Mv\lambda(T_0), \\ 0 &\leqslant S(T_1) - S(T_2) \leqslant 2Mv\lambda(T_1), \\ &\ldots \\ 0 &\leqslant S(T_{p-1}) - S(T_p) \leqslant 2Mv\lambda(T_{p-1}). \end{aligned}$$

Nende võrratuste liitmisel saame

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant S(T) - S(T') = S(T_0) - S(T_p) \leqslant 2Mv\left(\lambda(T_0) + \ldots + \lambda(T_{p-1})\right) \\ &\leqslant 2Mpv\lambda(T_0) = 2Mpv\lambda(T) \end{aligned}$$

(selgitage!)✠, sellega on võrratus (8.5) tõestatud. ■

Omadus 8.5. *Olgu f ristkülikus R tõkestatud funktsioon. Iga $\varepsilon > 0$ puhul saab leida sellise $\delta > 0$, et kui $\lambda(T) < \delta$, siis*

$$I^* \leqslant S(T) < I^* + \varepsilon \quad \textit{ja} \quad I_* \geqslant s(T) > I_* - \varepsilon.$$

Teisisõnu,

$$I^* = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) \quad \textit{ja} \quad I_* = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T)$$

iga tõkestatud funktsiooni $f\colon R \to \mathbb{R}$ korral.

Tõestus. Tõestame väite ülemsumma jaoks, alamsumma puhul tõestatakse see analoogiliselt. Selge, et $I^* \leqslant S(T)$ iga alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral. Olgu $\varepsilon > 0$, peame leidma sellise $\delta > 0$, et kehtiks implikatsioon

$$\lambda(T) < \delta \Rightarrow S(T) < I^* + \varepsilon.$$

Vastavalt alumise raja definitsioonile leiame ristküliku R niisuguse alajaotuse T_0, et

$$S(T_0) < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.6}$$

(selgitage!)✠. Olgu $T \in \mathfrak{T}$ suvaline ning $T' := T \cup T_0$, s.t. alajaotuse T' tekitavad parajasti need sirged, mis määravad alajaotused T ja T_0. Kui alajaotuses T_0 on nr osaristkülikut, siis võime öelda, et T' saadakse alajaotusest T mingi p sirge lisamise teel, kus $p < nr$ (kontrollige!)✠. Lemma 8.4 kohaselt

$$S(T) - S(T') \leqslant 2Mpv\lambda(T),$$

kus $|f(\mathbf{X})| \leqslant M \quad (\mathbf{X} \in R)$ ja v on ristküliku R diagonaali pikkus. Seega seostest $S(T') \leqslant S(T_0)$ (peame silmas, et T' on peenem kui T_0) ja (8.6) saame

$$\begin{aligned} S(T) &\leqslant S(T') + 2Mpv\lambda(T) \leqslant S(T_0) + 2Mpv\lambda(T) \\ &< I^* + \frac{\varepsilon}{2} + 2Mpv\lambda(T). \end{aligned}$$

Võtame nüüd $\delta := \frac{\varepsilon}{4Mvnr}$. Kui $\lambda(T) < \delta$, siis

$$S(T) < I^* + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I^* + \varepsilon.$$

Lemma on tõestatud. ■

Teoreem 8.6. *Ristkülikus R tõkestatud funktsiooni f korral on järgmised väited samaväärsed:*
(a) f on integreeruv,
(b) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T)$,
(c) $I^* = I_*$,
(d) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0$.

Tõestus. $(a) \Rightarrow (b)$ Eeldame, et f on ristkülikus R integreeruv, olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Leiame $\delta > 0$, et kehtiks $|I - \sigma(T)| < \frac{\varepsilon}{2}$ iga alajaotuse T korral, mille diameeter on väiksem kui δ, s.t.

$$\lambda(T) < \delta \Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} f(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

suvalise valiku $\mathbf{X}_{kl} \in R_{kl}$ $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r)$ korral. Pidades silmas seoseid (8.3), saame siit

$$I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s(T) \leqslant S(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon,$$

niisiis, $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I$ ja $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T) = I$.

Seos $(b) \Leftrightarrow (c)$ kehtib omaduse 8.5 põhjal, implikatsiooni $(b) \Rightarrow (d)$ kehtivus on ilmne.

$(d) \Rightarrow (a)$ Eeldame, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0$. Siis seostest (8.4) järeldub võrdus $I_* = I^*$, tähistame tähega I nende ühise väärtuse. Seega $s(T) \leqslant I \leqslant S(T)$ iga alajaotuse T puhul. Olgu $\varepsilon > 0$. Leiame sellise $\delta > 0$, et kui $\lambda(T) < \delta$, siis $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Kuna nii arv I kui ka summa $\sigma(T)$ asuvad summade $s(T)$ ja $S(T)$ vahel, siis kehtib implikatsioon

$$\lambda(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(T) - I| < \varepsilon$$

(selgitage!)✠, mis tähendab, et $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T) = I$. Seega on funktsioon f integreeruv ristkülikus R. ■

Lemmast 8.5 ning lausest 8.6 tuleneb järgmine teoreem, mis oluliselt täpsustab integreeruvuse seost Darboux' summadega.

Järgnev teoreem, mida nimetatakse integreeruvuse kriteeriumiks, võimaldab funktsioonide integreeruvuse probleemi taandada Darboux' summade uurimisele.

Teoreem 8.7. ***(integreeruvuse kriteerium).*** *Tõkestatud funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on ristkülikus R integreeruv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku R selline alajaotus $T = T[R_{kl}]$, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$, s.t.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T \in \mathfrak{T}\ : S(T) - s(T) < \varepsilon. \tag{8.7}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Kui f on ristkülikus R integreeruv siis lause 8.6 kohaselt

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} (S(T) - s(T)) = 0.$$

Sellest tuleneb väide (8.7).

Piisavus. Eeldame, et tingimus (8.7) on täidetud, siis seose (8.4) põhjal kehtib võrdus $I^* = I_*$ (kontrollige!)✠. Lausest 8.6 saame, et F on integreeruv. ■

Märkus 1. Kui tähistame

$$\omega_{kl} := M_{kl} - m_{kl}$$

(seda arvu nimetatakse funktsiooni f võnkumiseks ristkülikus R_{kl}), siis tingimuse (8.7) saame kirjutada kujul

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists T \in \mathfrak{T}\ : \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l < \varepsilon.$$

Teoreemi 8.6 abil saame anda lihtsa tõestuse järgmisele olulisele teoreemile.

Teoreem 8.8. *Kui funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on ristkülikus R pidev, siis on ta integreeruv.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna f on Cantori teoreemi kohaselt ristkülikus R ühtlaselt pidev (põhjendage!)✠, siis leidub selline $\delta > 0$, et

$$[\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in R,\ \ \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta] \Rightarrow |f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')| < \frac{\varepsilon}{\mu}, \tag{8.8}$$

kus μ on ristküliku R pindala, s.t. $\mu := (b-a)(d-c)$. Olgu T ristküliku R selline alajaotus, et $\lambda(T) < \delta$. Funktsiooni f pidevuse tõttu saab leida punktid $\mathbf{X}_{kl}, \mathbf{X}'_{kl} \in R_{kl}$ omadusega

$$f(\mathbf{X}_{kl}) = M_{kl} = \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} f(\mathbf{X}), \quad f(\mathbf{X}'_{kl}) = m_{kl} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{kl}} f(\mathbf{X}) \quad (k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r)$$

(põhjendage!)✠. Seega

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} (f(\mathbf{X}_{kl}) - f(\mathbf{X}'_{kl})) \Delta x_k \Delta y_l. \tag{8.9}$$

Kuna $\lambda(T) < \delta$, siis $\|\mathbf{X}_{kl} - \mathbf{X}'_{kl}\| < \delta$ ning tingimustest (8.8) ja (8.9) tuleneb $S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{\mu} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \Delta x_k \Delta y_l = \varepsilon$ (selgitage!)✠. Teoreemi 8.7 kohaselt on f integreeruv ristkülikus R. ■

Järeldus 8.9. *Kui funktsioon f on integreeruv ristkülikus $R = [a,b] \times [c,d]$, siis on ta integreeruv ka igas ristkülikus $R_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, mis sisaldub ristkülikus R.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Teoreemi 8.7 kohaselt saame leida sellise alajaotuse T, et $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et a_1 ja b_1 on alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n]$ ning c_1 ja d_1 on alajaotuse $T[y_0, \ldots, y_r]$ jaotuspunktid (vastasel korral läheme üle seda tingimust rahuldavale peenemale alajaotusele T'), siis $S(T') - s(T') \leqslant S(T) - s(T) < \varepsilon$ (selgitage!)✠). Niisiis, olgu $a_1 = x_i$, $b_1 = x_j$, $c_1 = y_p$ ja $d_1 = y_q$, sel juhul

$$\sum_{k=i+1}^{j} \sum_{l=p+1}^{q} \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l < \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l < \varepsilon.$$

Teoreemi 8.7 põhjal on $f\colon R_1 \to \mathbb{R}$ integreeruv. ■

Järeldus 8.10. *Olgu R ja R_0 ristkülikud, kusjuures $R_0 \subset R$. Kui funktsioon f on integreeruv ristkülikus R ning $f(\mathbf{X}) = 0$ iga $\mathbf{X} \in R \diagdown R_0$ korral, siis*

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

8.2 Kahekordne integraal üle suvalise tõkestatud piirkonna

Olgu nüüd $D \subset \mathbb{R}^2$ **tõkestatud** hulk, milles on määratud funktsioon f. Valime niisuguse ristküliku $R = [a,b] \times [c,d]$, et $D \subset R$, ja defineerime uue funktsiooni $F\colon R \to \mathbb{R}$ seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R \diagdown D. \end{cases} \tag{8.10}$$

Definitsioon 2. Funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ nimetame integreeruvaks hulgas D, kui funktsioon F on ristkülikus R integreeruv. Sel juhul

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Märkused. 2. Definitsiooni korrektsuse kontrollimiseks näitame, et funktsiooni f integreeruvus ja integraali $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ väärtus ei sõltu ristküliku R valikust: kui antud funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ puhul defineerime lisaks funktsioonile F, mis on antud seosega (8.10), veel funktsiooni

$$F_1(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R_1 \diagdown D, \end{cases} \tag{8.11}$$

kus R_1 on samuti hulka D sisaldav ristkülik, siis $\iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. **Põhjenduseks** paneme tähele, et D sisaldub sel juhul **ristkülikus** $R \cap R_1 =: R_0$ ning järelduse 8.10 põhjal

$$\iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_0} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_0} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Olgu D ja D_1 tõkestatud hulgad ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $D \subset D_1$. Kui $f\colon D \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$g(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in D_1 \diagdown D, \end{cases}$$

määratud funktsioon $g\colon D_1 \to \mathbb{R}$ on integreeruv hulgas D_1 ja vastavad integraalid on võrdsed. **Põhjenduseks** võtame ristküliku R, mis sisaldab hulka D_1 ning paneme tähele, et kui defineerida $F\colon R \to \mathbb{R}$ ning $G\colon R \to \mathbb{R}$ vastavalt seosele (8.10), saame

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R G(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Me esitame järgnevalt rea kahekordse integraali omadusi, millest osa jätame lugejale isesisvaks tõestamiseks. Märgime, et tõestused on sarnased vastavate väidete tõestustega tavalise Riemanni integraali korral.

Omadus 8.11. *Kui funktsioonid* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ning* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *on integreeruvad, siis ka* $f+g\colon D \to \mathbb{R}$ *on integreeruv ning*

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Olgu $T = T[R_{kl}]$ ristküliku $R \supset D$ mingi alajaotus ja olgu $F\colon R \to \mathbb{R}$ ning $G\colon R \to \mathbb{R}$ funktsioonid, mis on määratud vastavalt seostega (8.10) ja

$$G(\mathbf{X}) := \begin{cases} g(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R \diagdown D. \end{cases}$$

Siis funktsiooni $F+G$ integraalsumma $\sigma_{F+G}(T)$ on funktsioonide F ja G integraalsummade $\sigma_F(T)$ ja $\sigma_G(T)$ summa:

$$\begin{aligned}\sigma_{F+G}(T) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} (F(\mathbf{X}_{kl}) + G(\mathbf{X}_{kl}))\,\Delta x_k \Delta y_l \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} F(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} G(\mathbf{X}_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l = \sigma_F(T) + \sigma_G(T).\end{aligned}$$

Olgu $\varepsilon > 0$, leiame sellised $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$, et

$$\begin{aligned}\lambda(T) < \delta_1 &\Rightarrow \left|\sigma_F(T) - \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lambda(T) < \delta_2 &\Rightarrow \left|\sigma_G(T) - \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Võttes nüüd $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, saame eeldusel $\lambda(T) < \delta$ tingimuse

$$\begin{aligned}&\left|\sigma_{F+G}(T) - \left(\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\right| \\ &= \left|\left(\sigma_F(T) - \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) + \left(\sigma_G(T) - \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\right| \\ &\leqslant \left|\sigma_F(T) - \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| + \left|\sigma_G(T) - \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Seega

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Väide on tõestatud. ■

Omadus 8.12. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis ka $cf\colon D \to \mathbb{R}$ on iga konstandi $c \in \mathbb{R}$ puhul integreeruv ning*

$$\iint_D cf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Omadus 8.13. *Kui funktsioon f on integreeruv nii hulgas D_1 kui ka hulgas D_2, kusjuures $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, siis f on integreeruv hulgas $D_1 \cup D_2$ ja*

$$\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Olgu R ristkülik omadusega $D_1 \cup D_2 \subset R$ ning olgu funktsioonid $g_i\colon R \to \mathbb{R}$ määratud seosega

$$g_i(\mathbf{X}) = \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D_i, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R\diagdown D_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2).$$

Peame silmas, et eelduse $D_1 \cap D_2 = \varnothing$ tõttu

$$(g_1 + g_2)(\mathbf{X}) = g_1(\mathbf{X}) + g_2(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) \text{ iga } \mathbf{X} \in D_1 \cup D_2 \text{ korral.} \tag{8.12}$$

Rakendame eelnevat märkust 3, selle kohaselt on funktsioonid g_i $(i = 1, 2)$ hulgas $D_1 \cup D_2$ integreeruvad ja $\int\int_{D_1\cup D_2} g_i(x,y)\,dxdy = \iint_{D_i} g_i(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Omadusest 8.11 saame tänu seosele (8.12), et

$$\begin{aligned}\iint_{D_1\cup D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{D_1\cup D_2} (g_1(x,y) + g_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_1\cup D_2} g_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_1\cup D_2} g_2(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Väide on tõestatud. ■

Omadus 8.14. *Kui funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ning $g\colon D \to \mathbb{R}$ on integreeruvad ja $f(\mathbf{X}) \leqslant g(\mathbf{X}) \quad (\mathbf{X} \in D)$, siis*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Omadus 8.15. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis ka seosega $|f|(\mathbf{X}) := |f(\mathbf{X})|$ määratud funktsioon $|f| : D \to \mathbb{R}$ on integreeruv ning*

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Omadus 8.16. *Kui funktsioonid* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *ning* $g\colon D \to \mathbb{R}$ *on integreeruvad, siis ka nende korrutis* $fg\colon D \to \mathbb{R}$ *on integreeruv.*

Tõestus. Me esitame siinkohal tõestuse juhul kui D on mingi ristkülik R. Lihtne on veenduda, et siis kehtib väide ka suvalise tõkestatud hulga D korral (selgitage!)✠.

Eelduse kohaselt on funktsioonid f ja g hulgas R integreeruvad, seega on nad tõkestatud: leiduvad arvud $M > 0$ ja $K > 0$, et $|f(\mathbf{X})| \leqslant M$ ning $|g(\mathbf{X})| \leqslant K$ iga $\mathbf{X} \in R$ puhul. Seejuures $|f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})| \leqslant MK \quad (\mathbf{X} \in R)$, tähendab, funktsioonide f ja g korrutis fg on tõkestatud funktsioon hulgas R. Olgu $T[R_{kl}]$ ristküliku R mingi alajaotus, meie *eesmärk* on veenduda, et

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \omega_{kl}(fg)\,\Delta x_k \Delta y_l = 0,$$

kus $\omega_{kl}(fg)$ tähistab funktsiooni fg võnkumist osaristkülikus R_{kl}, seejuures (vt. märkus 1)

$$\begin{aligned}\omega_{kl}(fg) &= \sup_{\mathbf{X}\in R_{kl}} (f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})) - \inf_{\mathbf{X}\in R_{kl}} (f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X})) \\ &= \sup_{\mathbf{X},\mathbf{X}'\in R_{kl}} (f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')\,g(\mathbf{X}')) \\ &= \sup_{\mathbf{X},\mathbf{X}'\in R_{kl}} |f(\mathbf{X})\,g(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}')\,g(\mathbf{X}')|\,.\end{aligned}$$

Me *näitame järgnevalt, et*

$$\omega_{kl}(fg) \leqslant M\omega_{kl}(g) + K\omega_{kl}(f) \quad (k = 1,\dots,n;\ l = 1,\dots,r)\,, \tag{8.13}$$

kus $\omega_{kl}(f)$ ja $\omega_{kl}(g)$ on vastavalt funktsiooni f ja g võnkumised osaristkülikus R_{kl}. Sellest tuleneb väide, sest

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \omega_{kl}(fg)\,\Delta x_k \Delta y_l \\ &\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \omega_{kl}(g)\,\Delta x_k \Delta y_l + K\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} \omega_{kl}(f)\,\Delta x_k \Delta y_l \to 0 \quad (\lambda(T) \to 0)\end{aligned}$$

(põhjendage!)✠, mis tähendab funktsiooni fg integreeruvust ristkülikus R (vrd. märkus 1).

Niisiis, olgu $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ suvalised punktid osaristkülikus R_{kl}, siis seosest $f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\,g(\mathbf{B}) = f(\mathbf{A})\,(g(\mathbf{A}) - g(\mathbf{B})) + g(\mathbf{B})\,(f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B}))$ saame

$$|f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\,g(\mathbf{B})| \leqslant M\,|g(\mathbf{A}) - g(\mathbf{B})| + K\,|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})|\,.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\omega_{kl}(fg) &= \sup_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in R_{kl}} |f(\mathbf{A})\,g(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})\,g(\mathbf{B})| \\ &\leqslant M \sup_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in R_{kl}} |g(\mathbf{A}) - g(\mathbf{B})| + K \sup_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in R_{kl}} |f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})|\,,\end{aligned}$$

niisiis kehtib võrratus (8.13). Väide on tõestatud. ■

Omadus 8.17. ***(keskväärtusteoreem).*** *Olgu funktsioonid f ja g integreeruvad kinnises sidusas tõkestatud piirkonnas D, olgu f seejuures pidev ja g mittenegatiivne. Siis leidub punkt $\mathbf{X}_0 \in D$ omadusega*

$$\iint_D f(x,y)\, g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = f(\mathbf{X}_0) \iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{8.14}$$

Tõestus. Tähistame $m := \min\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ ja $M := \max\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in D\}$ (selgitage ekstremaalsete väärtuste olemasolu!)✠. Võrratustest $m \leqslant f(\mathbf{X}) \leqslant M$ saame

$$mg(\mathbf{X}) \leqslant f(x,y)\, g(x,y) \leqslant Mg(\mathbf{X}) \quad (\mathbf{X} \in D).$$

Siis omaduse 8.14 põhjal

$$m \iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant \iint_D f(x,y)\, g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leqslant M \iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{8.15}$$

Kui $\iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$, siis $\iint_D f(x,y)\, g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$ ning võrdus (8.14) kehtib. Olgu $\iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \neq 0$, siis $\iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y > 0$. Tähistades

$$c := \frac{\iint_D f(x,y)\, g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y},$$

saame võrratused $m \leqslant c \leqslant M$. Bolzano-Cauchy teoreemi 2.7 kohaselt leidub $\mathbf{X}_0 \in D$ omadusega $f(\mathbf{X}_0) = c$, seega kehtib (8.14). ■

Märkus. Analoogiliselt saab tõestada keskväärtusteoreemi ka juhtumil, kui g on pidev ja mittepositiivne. Saab tõestada ka üldisema teoreemi, kus funktsioon f on tõkestatud, aga ei tarvitse olla pidev; siis jääb võrduse paremale poolele $f(\mathbf{X}_0)$ asemele $c \in [m, M]$.

Järeldus 8.18. *Kui funktsioon f on pidev kinnises sidusas tõkestatud piirkonnas D, siis leidub selline arv $c \in [m, M]$, et*

$$\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = c\mu(D),$$

kus $\mu(D)$ on piirkonna D pindala.

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

8.3 Kahekordse integraali taandamine ühekordsetele integraalidele

Kahekordse integraali $\iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ arvutamiseks taandatakse see tavaliselt kahe ühekordse integraali arvutamisele. See on siiski võimalik vaid teatavatel eeldustel hulga D suhtes. Me vaatleme alljärgnevalt kahte juhtu.

1. Olgu $D = R = [a,b] \times [c,d]$. Teeme selles ristkülikus mingi alajaotuse $T = T[R_{kl}]$ nii nagu eelmistes punktides. Olgu $f\colon R \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, tähistame $M_{kl} := \sup\limits_{\mathbf{X} \in R_{kl}} f(\mathbf{X})$ ja $m_{kl} := \inf\limits_{\mathbf{X} \in R_{kl}} f(\mathbf{X})$. Tõestame järgmise lause.

Lause 8.19. *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on integreeruv ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$ ja iga $\xi \in [a, b]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_1(\xi) := \int_c^d f(\xi, y)\,\mathrm{d}y$, siis kehtib valem*

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{8.16}$$

Tõestus. Kuna $m_{kl} \leqslant f(\mathbf{X}) \leqslant M_{kl}$ $(\mathbf{X} \in R_{kl})$, siis, pidades silmas tavalise Riemanni integraali omadusi, saame fikseeritud $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ puhul võrratused

$$m_{kl}\Delta y_l \leqslant \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leqslant M_{kl}\Delta y_l \ \ (k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r)$$

(põhjendage!)✠. Neist tulenevad seosed

$$\sum_{l=1}^{r} m_{kl}\Delta y_l \leqslant g_1(\xi_k) \leqslant \sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta y_l,$$

millest saame

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} m_{kl}\Delta x_k\Delta y_l \leqslant \sum_{k=1}^{n} g_1(\xi_k)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r} M_{kl}\Delta x_k\Delta y_l = S(T).$$

Paneme tähele, et $\sum_{k=1}^{n} g_1(\xi_k)\,\Delta x_k$ on ühe muutuja funktsiooni g_1 integraalsumma σ_{g_1} alajaotuse $T[x_0, \ldots, x_n]$ suhtes, seega $s(T) \leqslant \sigma_{g_1} \leqslant S(T)$.

Tähistades $\lambda' := \max\{\Delta x_k \mid k = 1, \ldots, n\}$ saame, et $\lambda' < \lambda(T)$. Tähendab, kuna $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T) = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, siis eksisteerib $\lim\limits_{\lambda'\to 0} \sigma_{g_1} = \int_a^b g_1(x)\,\mathrm{d}x$ ja kehtib võrdus (8.16) (selgitage!✠). ■

Analoogiliselt tõestatakse järgmine väide.

Lause 8.20. *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on integreeruv ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$ ja iga $\eta \in [c, d]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_2(\eta) := \int_a^b f(x, \eta)\,\mathrm{d}x$, siis kehtib valem*

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x. \tag{8.17}$$

Järeldus 8.21. *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on integreeruv ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$ ning eksisteerivad ühekordsed integraalid $\int_c^d f(\xi, y)\,\mathrm{d}y$ $(\xi \in [a, b])$ ja $\int_a^b f(x, \eta)\,\mathrm{d}x$ $(\eta \in [c, d])$, siis kehtib võrdus*

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Järeldus 8.22. *Kui funktsioon $w = f(x, y)$ on pidev ristkülikus $R := [a, b] \times [c, d]$, siis*

$$\iint_R f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

2. Vaatleme nüüd üldisemat juhtu, kus integreerimispiirkonnaks D on ülalt ja alt pidevate joontega $y = \varphi(x)$ ja $y = \psi(x)$ ning külgedelt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ piiratud **kõvertrapets** xy-tasandil. Seejuures eeldame, et $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ $(x \in [a,b])$.

Lause 8.23. *Kui funktsioon $w = f(x,y)$ on integreeruv kõvertrapetsis D ja iga $\xi \in [a,b]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_1(\xi) := \int_{\psi(\xi)}^{\varphi(\xi)} f(\xi,y)\,\mathrm{d}y$, siis kehtib valem*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Tõestus. Olgu c ja d sellised arvud, mis rahuldavad tingimusi $c \leqslant \psi(x)$ ning $d \geqslant \varphi(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Moodustame ristküliku $R := [a,b] \times [c,d]$, siis $D \subset R$. Defineerime hulgas R funktsiooni F seosega (8.10), F on integreeruv ristkülikus R ja $\iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Kuna integraal

$$\begin{aligned}\int_c^d F(\xi,y)\,\mathrm{d}y &= \int_c^{\psi(\xi)} F(\xi,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\psi(\xi)}^{\varphi(\xi)} F(\xi,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\varphi(\xi)}^{d} F(\xi,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\psi(\xi)}^{\varphi(\xi)} f(\xi,y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

eksisteerib iga $\xi \in [a,b]$ korral, siis lause 8.19 kohaselt

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\psi(x_1)}^{\varphi(x_1)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

(selgitage!)✠. ■

Olgu integreerimispiirkond D_1 selline, mis ülalt ja alt on piiratud sirgetega $y = d$ ja $y = c$ ning külgedelt pidevate joontega $x = \chi(y)$ ja $x = \varkappa(y)$, kusjuures $\chi(y) \leqslant \varkappa(y)$ $(y \in [c,d])$. Siis kehtib järgmine lause, mille tõestus on analoogiline lause 8.23 tõestusega.

Lause 8.24. *Kui funktsioon $w = f(x,y)$ on integreeruv eelpool defineeritud kõvertrapetsis D_1 ja iga $\eta \in [c,d]$ korral eksisteerib ühekordne integraal $g_2(\eta) := \int_{\chi(\eta)}^{\varkappa(\eta)} f(x,\eta)\,\mathrm{d}x$, siis kehtib valem*

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\chi(y)}^{\varkappa(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

9 Mõõtuvad hulgad tasandil

9.1 Mõõtuvad hulgad tasandil

Tasandilise hulga pindala. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ning olgu $\chi_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hulga D karakteristlik funktsioon, s.t.

$$\chi_D(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin D. \end{cases}$$

Teatavasti (vt. pt. 8) nimetatakse tõkestatud funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ integreeruvaks hulgas D, kui seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} f(\mathbf{X}), & \text{kui } \mathbf{X} \in D, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \in R \diagdown D \end{cases} \tag{9.1}$$

määratud funktsioon F on integreeruv mingis ristkülikus R, mis sisaldab hulka D. Seega sõltub funktsiooni f integreeuvus funktsiooni F omadustest, mis omakorda sõltuvad nii funktsiooni f kui ka hulga D omadustest.

Loomulik on nõuda hulgalt D, et tema karakteristlik funktsioon oleks integreeruv, s.t., et

$$\text{eksisteerib integraal } \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =: \mu(D). \tag{9.2}$$

Kui D on ristkülik $R := [a,b] \times [c,d]$, siis suvalise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$ korral

$$\mu(R) = \sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \Delta x_k \Delta y_l = (b-a)(d-c)$$

(vrd. pt. 8, punkti 8.1 algus), niisiis, $\mu(R)$ **on ristküliku** R **pindala** $(b-a)(d-c)$.

Definitsioon. Tõkestatud alamhulka $D \subset \mathbb{R}^2$ omadusega (9.2) nimetatakse (Jordani mõttes) *mõõtuvaks* (*measurable*) hulgaks. Arvu $\mu(D)$ nimetatakse hulga D *pindalaks* ehk tema *Jordani mõõduks* (*Jordan measure*).

Me teeme lihtsa näitega selgeks tõsiasja, et **mitte kõikidel tõkestatud hulkadel ei ole pindala.**

Näide 9.1. Olgu $R := [a,b] \times [c,d]$ mingi ristkülik ja olgu $D \subset R$ hulk, mis koosneb ristküliku R neist punktidest, mille mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud. Moodustame funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ seosega

$$F(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } X \in D, \\ 0, & \text{kui } X \in R \diagdown D. \end{cases}$$

Tehes ristkülikus mingi alajaotuse $T = T[R_{kl}]$, paneme tähele, et iga osaristkülik R_{kl} sisaldab nii punkte hulgast D kui ka hulgast $R \diagdown D$ (põhjendage!)✠, mistõttu

$$m_{kl} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X}) = 0 \quad \text{ja} \quad M_{kl} := \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X}) = 1.$$

Seega $S(T) - s(T) = (b-a)(d-c) > 0$ iga alajaotuse T puhul (kontrollige!)✠, seega integraali (9.2) ei eksisteeri (vrd. teoreem 8.7). Järelikult ei ole vaadeldav hulk D mõõtuv.

Nullmõõduga hulgad. Mõõtuvat hulka $D \subset \mathbb{R}^2$, mille puhul $\mu(D) = 0$, nimetame edaspidi *nullmõõduga* ehk *hüljatavaks* (*negligible*) hulgaks.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud alamhulk ning olgu R teda sisaldav ristkülik, milles on fikseeritud mingi alajaotus $T = T[R_{kl}]$. Kuna hulga D mõõtuvuse uurimiseks tuleb meil uurida tema karakteristliku funktsiooni $\chi_D : R \to \mathbb{R}$ integreeruvust, siis esitame kõigepealt selle funktsiooni Darboux' summade kaks omadust. Paneme tähele, et

$$M_{kl} := \sup_{\mathbf{X} \in R_{kl}} \chi_D(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } D \cap R_{kl} \neq \varnothing, \\ 0, & \text{kui } D \cap R_{kl} = \varnothing, \end{cases}$$

$$m_{kl} := \inf_{\mathbf{X} \in R_{kl}} \chi_D(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } (R \diagdown D) \cap R_{kl} = \varnothing, \\ 0, & \text{kui } (R \diagdown D) \cap R_{kl} \neq \varnothing, \end{cases}$$

mistõttu

$$M_{kl} - m_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{kui } D \cap R_{kl} \neq \varnothing \text{ ja } (R \diagdown D) \cap R_{kl} \neq \varnothing, \\ 0 & \text{ülejäänud juhtudel.} \end{cases}$$

Siit tulenevad järgmised väited.

1^0. $S(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} M_{kl} \Delta x_k \Delta y_l = \sum_{\substack{k,l \\ D \cap R_{kl} \neq \varnothing}} \Delta x_k \Delta y_l =: S^*(T) =$ kõigi nende osaristkülikute pindalade summa, millel on ühiseid punkte hulgaga D.

2^0. Kui $\mu(D) = 0$, siis (pidades silmas, et $s(T) \leqslant \iint_R f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ suvalise funktsiooni f ja alajaotuse T puhul) saame

$$0 \leqslant s(T) \leqslant \mu(D) = 0, \ \text{ s.t. } s(T) = 0.$$

3^0 Kui $\mu(D) = 0$, siis

$$S(T) - s(T) = S(T) = S^*(T)$$

iga alajaotuse $T \in \mathfrak{T}$ korral.

Omadustest 1^0 - 3^0 saame järgmise olulise lemma.

Lemma 9.1. *Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu R selline ristkülik, et $D \subset R$. Võrdus $\mu(D) = 0$ kehtib parajasti siis, kui on täidetud järgmine tingimus:*
(*) *iga $\varepsilon > 0$ korral leidub ristküliku R selline alajaotus $T = T[R_{kl}]$, et nende osaristkülikute, millel on ühiseid punkte hulgaga D, pindalade summa $S^*(T)$ on väiksem kui ε.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\mu(D) = 0$, olgu $\varepsilon > 0$. Rakendades integreeruvuse kriteeriumit (vt. teoreem 8.7), valime alajaotuse T omadusega $S(T) - s(T) < \varepsilon$, seega omaduse 3^0 kohaselt $S^*(T) < \varepsilon$.

Piisavus. Eeldame, et tingimus (*) kehtib, ja näitame, et $\mu(D) = 0$. Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu T ristküliku R selline alajaotus, et $S^*(T) < \varepsilon$. Sel juhul

$$0 \leqslant s(T) \leqslant S(T) = S^*(T) < \varepsilon,$$

millest tuleneb $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Seega on funktsioon χ_D integreeruv ristkülikus R (vrd. teoreem 8.7) ning

$$0 \leqslant s(T) \leqslant \iint_R \chi_D(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mu(D) \leqslant S(T) < \varepsilon.$$

Kuna $\varepsilon > 0$ on suvaline, siis saadud võrratustest $0 \leqslant \mu(D) < \varepsilon$ tuleneb $\mu(D) = 0$. ■

Järeldus 9.2. *Kui D on selline mõõtuv hulk, et $\mu(D) = 0$, ning $D_1 \subset D$, siis $\mu(D_1) = 0$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Järeldus 9.3. *Lõpliku arvu nullmõõduga hulkade ühend on nullmõõduga hulk.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Lemma 9.1 abil tõestame lisaks kahele eelnevale järeldusele veel kaks lauset, mille kohaselt sile joon ning pideva ühe muutuja funktsiooni graafik on nullmõõduga hulgad.

Lause 9.4. *Olgu sile joon L antud parameetriliste võrranditega*

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t) \qquad (t \in [\alpha, \beta]). \tag{9.3}$$

Siis L on nullmõõduga hulk.

Tõestus. (I) Me *näitame kõigepealt, et leidub $M > 0$ omadusega*

$$\|\mathbf{X}(t_1) - \mathbf{X}(t_2)\| \leqslant M|t_1 - t_2| \quad (t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]), \tag{9.4}$$

kus $\mathbf{X}(t) := (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \ \ (t \in [\alpha, \beta])$.

Kuna funktsioonid φ_1 ja φ_2 on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevalt diferentseeruvad, siis eksisteerivad

$$M_1 := \max\{|\varphi_1'(t)| \mid t \in [\alpha, \beta]\} \text{ ning } M_2 := \max\{|\varphi_2'(t)| \mid t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Olgu $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$. Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leiduvad arvude t_1 ja t_2 vahel arvud τ_1 ja τ_2 nii, et

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)| &= |\varphi_1'(\tau_1)|\,|t_1 - t_2| \leqslant M_1|t_1 - t_2|, \\ |\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)| &= |\varphi_2'(\tau_2)|\,|t_1 - t_2| \leqslant M_2|t_1 - t_2| \end{aligned} \tag{9.5}$$

(selgitage!)✠. Tänu seostele (9.5) saame hinnangu

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{X}(t_1) - \mathbf{X}(t_2)\|}{|t_1 - t_2|} &= \sqrt{\left(\frac{\varphi_1(t_1) - \varphi_1(t_2)}{t_1 - t_2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)}{t_1 - t_2}\right)^2} \\ &\leqslant \sqrt{M_1^2 + M_2^2} =: M \quad (t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]), \end{aligned}$$

niisiis kehtib võrratus (9.4).

(II) Jaotame lõigu $[\alpha, \beta]$ n võrdse pikkusega osalõiguks punktidega $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Võrratuse (9.4) kohaselt kehtib iga $k = 1, \ldots, n$ ja suvaliste $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ korral

$$\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(t')\| \leqslant M|t - t'| \leqslant \frac{M(\beta - \alpha)}{n} =: u_n. \tag{9.6}$$

Fikseerime joonel punktid $\mathbf{X}(t_k) =: \mathbf{X}_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ ja moodustame nende ümber ringid raadiusega u_n s.t. ringid $\overline{U}_{u_n}(\mathbf{X}_k)$. Tingimuse (9.6) tõttu sisaldab iga ring $\overline{U}_{u_n}(\mathbf{X}_k)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ koos oma keskpunktiga $\mathbf{X}_k$ ka naaberpunktid $\mathbf{X}_{k-1}$ ja $\mathbf{X}_{k+1}$, aga samuti ka kaared $X_{k-1}X_k$ ja X_kX_{k+1}. Niisiis katavad need ringid kogu joone L (selgitage!)✠. Võtame iga ringi ümber ruudu $R_k := \overline{K}_{u_n}(\mathbf{X}_k)$ keskpunktiga $\mathbf{X}_k$ ja külje pikkusega $2u_n$. Pikendades kõigi ruutude R_k külgi, saame ristküliku R koos teatava alajaotusega $T = T[R_{kl}]$. Selles alajaotuses need osaristkülikud, millel on ühiseid punkte joonega L, on ruutude R_k alamhulgad, mistõttu nende pindalade summa ei ületa ruutude R_k pindalade summat:

$$S^*(T) \leqslant (n-1)\, 4u_n^2 = (n-1)\,\frac{4M^2(\beta-\alpha)^2}{n^2}.$$

Kuna $\lim_n (n+1)\,\frac{M^2(\beta-\alpha)^2}{n^2} = 0$ (selgitage!)✠, siis iga etteantud $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune alajaotus $T = T[R_{kl}]$, et $S^*(T) < \varepsilon$. Lemma 9.1 kohaselt on L nullmõõduga hulk. ■

Järeldus 9.5. *Tükiti sile joon on nullmõõduga hulk.*

Tõestus. Väide järeldub vahetult järeldusest 9.2 ja lausest 9.4 (kontrollige!)✠. ■

Lause 9.6. *Lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ graafik ruumis $\mathbb{R}^2$ on nullmõõduga hulk.*

Tõestus. Teatavasti paikneb funktsiooni g graafik ristkülikus $R = [a,b] \times [m,M]$, kus

$$m := \min\{g(x) \mid x \in [a,b]\} \quad \text{ja} \quad M := \max\{g(x) \mid x \in [a,b]\}$$

(selgitage!)✠. Olgu $\varepsilon > 0$. Võtame sellise $r \in \mathbb{N}$, et

$$\alpha := \frac{M-m}{r} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Kuna g on lõigus $[a,b]$ ühtlaselt pidev, siis leidub $\delta > 0$ omadusega

$$[x, x' \in [a,b],\ \ |x - x'| < \delta] \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \alpha.$$

Olgu T ristküliku R selline alajaotus, et $\Delta x_k < \delta$ $(k = 1, \ldots, n)$ ja $\Delta y_l := \frac{M-m}{r} = \alpha$ $(l = 1, \ldots, r)$. Sel juhul on nende osaristkülikute pindalade summa $S^*(T)$, millel on ühiseid punkte funktsiooni g graafikuga, väiksem kui

$$\sum_{k=1}^{n} 2\alpha\Delta x_k = 2(b-a)\,\alpha < \varepsilon.$$

Lemma 9.1 põhjal on graafiku pindala võrdne nulliga. ■

Järgnevalt tõestame käesoleva paragrahvi ühe kahest **põhitulemusest**. Eelnevalt vajame abitulemust.

Lemma 9.7. *Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{X} \in D$ ja $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Siis leidub selline punkt $\mathbf{Z} \in [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, et $\mathbf{Z} \in \partial D$.*

Tõestus. Nagu teame, kehtib $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \{\mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X})\colon t \in [0,1]\}$. Kui $\mathbf{X}$ või $\mathbf{Y}$ iga ümbrus sisaldab nii hulga D kui ka $\mathbb{R}^2 \setminus D$ punkte, oleme rajapunkti leidnud. Oletame niisiis, et $\mathbf{X} \in D^\circ$ ja $\mathbf{Y} \in (\mathbb{R}^2 \setminus D)^\circ$.

Tähistame $t_* = \sup\{t \in [0,1] \colon \mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \in D\}$ (selgitage, miks supreemum eksisteerib ja on positiivne!✠). Tähistame $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + t_*(\mathbf{Y} - \mathbf{X})$ ja näitame, et $\mathbf{Z} \in \partial D$.

Olgu $\delta > 0$ suvaline. Vaatleme kõigepealt juhtu $\mathbf{Z} \in D$. Peame leidma punkti $\mathbf{Y}'$ hulgast $U_\delta(\mathbf{Z}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Tähistame $t_1 = t_* + \frac{\delta}{2\|\mathbf{Y}-\mathbf{X}\|}$. Siis $t_1 > t$, mistõttu $\mathbf{Y}' := \mathbf{X} + t_1(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ (selgitage!✠) ning $\mathbf{Y}' \in U_\delta(\mathbf{Z})$ (põhjendage!✠).

Vaatleme nüüd juhtu $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Peame leidma punkti $\mathbf{X}'$ hulgast $U_\delta(\mathbf{Z}) \cap D$. Nõuame ka, et $\delta < 2\|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\| t_*$ (miks see ei ole kitsendus?✠). Tähistame $t_1 = t_* - \frac{\delta}{2\|\mathbf{Y}-\mathbf{X}\|}$, siis $0 < t_1 < t_*$ ning supreemumi definitsiooni kohaselt leidub $t_2 \in (t_1, t_*)$ nii, et $\mathbf{X}' := \mathbf{X} + t_2(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \in D$. Kontroll näitab, et $\mathbf{X}' \in U_\delta(\mathbf{Z})$ (kontrollige!✠).

Seega leidsime, et $U_\delta(\mathbf{Z}) \cap D \neq \emptyset$ ja $U_\delta(\mathbf{Z}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset$.

Järelikult $\mathbf{Z} \in \partial D$. ■

Teoreem 9.8. *Tõkestatud alamhulk $D \subset \mathbb{R}^2$ on mõõtuv parajasti siis, kui tema rajajoon ∂D on nullmõõduga hulk.*

Tõestus. „$\Rightarrow$“. Olgu $\varepsilon > 0$. Teeme ristkülikus sellise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$, et hulga D karakteristliku funktsiooni χ_D Darboux' summad rahuldaksid tingimust

$$S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{9}. \tag{9.7}$$

(vrd. teoreem 8.6). Lisaks nõuame, et alajaotuse T kõik ristkülikud oleks võrdse pindalaga μ; kui ei ole, läheme üle peenemale alajaotusele T' nii, et x sihis alalõigud oleks võrdse pikkusega ja y sihis alalõigud oleks võrdse pikkusega; sel juhul $S(T') - s(T') \leqslant S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{9}$ (selgitage!✠).

Peame silmas, et

$$\#\mathcal{R} \cdot \mu = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} (M_{kl} - m_{kl}) \Delta x_k \Delta y_l = S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{9},$$

kus $\mathcal{R} = \{R_{kl} \colon R_{kl} \cap D \neq \emptyset,\ R_{kl} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset,\ k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, r\}$. Tähise $\#\mathcal{R}$ all mõtleme hulka $\mathcal{R}$ kuuluvate ristkülikute arvu. (Hulka $\mathcal{R}$ mittekuuluvate ristkülikute korral $M_{kl} - m_{kl} = 0$.)

Tähistame $\mathcal{D} = \{R_{kl} \colon R_{kl} \cap \partial D \neq \emptyset,\ k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, r\}$. Näitame, et $\#\mathcal{D} \leqslant 9\#\mathcal{R}$. Tähise $\#\mathcal{D}$ all mõtleme hulka $\mathcal{D}$ kuuluvate ristkülikute arvu. Paneme tähele, et hulga $\mathcal{D}$ igal ristkülikul on ühine punkt hulga $\mathcal{R}$ mõne ristkülikuga. Tõepoolest, vaatleme suvalist ristkülikut $R_{kl} \in \mathcal{D}$. Siis R_{kl} sisaldab rajapunkti $\mathbf{Z}$. Kui $\mathbf{Z}$ asub R_{kl} sisepiirkonnas, kehtib $R_{kl} \in \mathcal{R}$ (miks?✠). Kui $\mathbf{Z}$ asub R_{kl} küljel või tipus, siis peab üks R_{kl}-ga ühist külge või ühist tippu omav ristkülik kuuluma hulka $\mathcal{R}$ (põhjendage, vaadeldes eraldi variante $\mathbf{Z} \in D$ või $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$!✠). Seega on ristkülikul R_{kl} igal juhul ühine punkt hulga $\mathcal{R}$ mõne ristkülikuga.

Hulga $\mathcal{R}$ iga ristküliku R_{ij} jaoks leidub ülimalt 9 ristkülikut, millega ristkülikul R_{ij} on ühiseid punkte. Seega hulga $\mathcal{R}$ ristkülikutega ühiseid punkte omavaid ristkülikuid on ülimalt $9|\mathcal{R}|$. Kuna hulga $\mathcal{D}$ iga ristkülik omab ühist punkti hulga $\mathcal{R}$ mõne ristkülikuga, siis $\#\mathcal{D} \leqslant 9\#\mathcal{R}$.

Tähistanud tähisega $S^*(T)$ kõigi $\mathcal{D}$ ristkülikute pindalade summa (ehk rajaga ∂D ühiseid punkte omavate ristkülikute pindalade summa), saame, et

$$S^*(T) = \#\mathcal{D} \cdot \mu \leqslant 9\#\mathcal{R} \cdot \mu < \varepsilon.$$

Lemma 9.1 põhjal on $\mu(\partial D) = 0$.

„$\Leftarrow$“. Olgu D selline tõkestatud hulk, et $\mu(\partial D) = 0$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt lemmale 9.1 teeme ristküliku $R \supset D$ niisuguse alajaotuse, et nende osaristkülikute pindalade summa $S^*(T)$, millel on ühiseid punkte rajajoonega ∂D, oleks väiksem kui ε. Tähistame, nagu ennegi, $\mathcal{R} = \{R_{kl}\colon R_{kl} \cap D \neq \emptyset,\ R_{kl} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset,\ k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, r\}$ ning $\mathcal{D} = \{R_{kl}\colon R_{kl} \cap \partial D \neq \emptyset,\ k = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, r\}$. Lemma 9.7 põhjal saame, et kui $R_{kl} \in \mathcal{R}$, siis R_{kl} sisaldab vähemalt ühte hulga ∂D punkti (selgitage!✠). Seetõttu $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, millest järeldub, et

$$S(T) - s(T) = \sum_{\substack{k,l \\ R_{kl} \in \mathcal{R}}} \Delta x_k \Delta y_l \leqslant \sum_{\substack{k,l \\ R_{kl} \in \mathcal{D}}} \Delta x_k \Delta y_l = S^*(T) < \varepsilon.$$

Teoreemi 8.7 põhjal on funktsioon χ_D ristkülikus R integreeruv, s.t. D on mõõtuv hulk. ■

Järeldusest 9.5 ning teoreemist 9.8 tuleneb järgmine edaspidiseks vajalik tähelepanek.

Järeldus 9.9. *Tõkestatud hulk $D \subset \mathbb{R}^2$, mille rajajoon on tükiti sile, on mõõtuv.*

Esitame veel mõned mõõtuvate hulkade omadused, mis järelduvad teoreemist 9.8.

Järeldus 9.10. *Kui hulgad D_1 ja D_2 on mõõtuvad, siis on ka hulgad $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ ja $D_1 \setminus D_2$ mõõtuvad.*

Tõestus. Olgu hulgad D_1 ja D_2 mõõtuvad. Siis teoreemi 9.8 põhjal $\mu(\partial D_1) = 0$ ja $\mu(\partial D_2) = 0$. Järelduse 9.3 tõttu kehtib $\mu(\partial D_1 \cup \partial D_2) = 0$.

Näitame, et $\partial(D_1 \cup D_2)$, $\partial(D_1 \cap D_2)$ ja $\partial(D_1 \setminus D_2)$ on kõik hulga $\partial D_1 \cup \partial D_2$ alamhulgad. (Kui nii oleks, siis järelduse 9.2 põhjal oleks need hulgad kõik nullmõõduga, mis teoreemi 9.8 põhjal annakski hulkade $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ ja $D_1 \setminus D_2$ mõõtuvuse.)

Kontrollime sisalduvust $\partial(D_1 \cup D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$. Olgu $\mathbf{X} \in \partial(D_1 \cup D_2)$. Oletame, et $\mathbf{X} \notin \partial D_1$ ning näitame, et $\mathbf{X} \in \partial D_2$. Kuna $\mathbf{X} \notin \partial D_1$, siis kas $\mathbf{X} \in D_1^\circ$ või $\mathbf{X} \in (\mathbb{R}^2 \setminus D_1)^\circ$.

Juhtum $\mathbf{X} \in D_1^\circ$ on võimatu. Tõepoolest, sel juhul leidub $\delta_0 > 0$, mille korral $U_{\delta_0}(\mathbf{X}) \subset D_1$. Samas teame, et $U_{\delta_0}(\mathbf{X}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)) \neq \emptyset$, millest järeldub, et $U_{\delta_0}(\mathbf{X}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D_1) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D_2) \neq \emptyset$, vastuolu (selgitage!✠).

Seega $\mathbf{X} \in (\mathbb{R}^2 \setminus D_1)^\circ$, mis annab arvu $\delta_0 > 0$ omadusega $U_{\delta_0}(\mathbf{X}) \cap D_1 = \emptyset$. Näitame, et $\mathbf{X} \in \partial D_2$. Fikseerime $\delta > 0$, kusjuures nõuame, et $\delta < \delta_0$ (miks see pole kitsendus?✠). Teame, et $U_\delta(\mathbf{X}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D_2) \neq \emptyset$ (miks?✠). Samuti teame, et $(U_\delta(\mathbf{X}) \cap D_1) \cup (U_\delta(\mathbf{X}) \cap D_2) \neq \emptyset$. Kuna $U_\delta(\mathbf{X}) \cap D_1 = \emptyset$, siis $U_\delta(\mathbf{X}) \cap D_2 \neq \emptyset$, nagu soovitud.

Analoogiliselt näidatakse sisalduvus $\partial(D_1 \cap D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2$ (tehke läbi!✠).

Lõpuks saame, et

$$\partial(D_1 \setminus D_2) = \partial\big(D_1 \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D_2)\big) \subset \partial D_1 \cup \partial\big(\mathbb{R}^2 \setminus D_2\big) = \partial D_1 \cup \partial D_2$$

(selgitage!✠). ■

Järeldus 9.11. *Kui D_1 ja D_2 on sellised mõõtuvad hulgad, et $\mu\left(D_1 \cap D_2\right) = 0$, siis*

$$\mu\left(D_1 \cup D_2\right) = \mu\left(D_1\right) + \mu\left(D_2\right).$$

Tõestus. Järelduse 9.10 põhjal on $D_1 \cup D_2$ mõõtuv hulk. Olgu R selline ristkülik, et $D_1 \cup D_2 \subset R$. Kuna $\chi_{D_1 \cup D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2} - \chi_{D_1 \cap D_2}$ (selgitage!)✠, siis

$$\begin{aligned}\mu(D_1 \cup D_2) &= \iint_R \chi_{D_1 \cup D_2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R (\chi_{D_1} + \chi_{D_2} - \chi_{D_1 \cap D_2})(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_R \chi_{D_1}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_R \chi_{D_2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_R \chi_{D_1 \cap D_2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \mu(D_1) + \mu(D_2) - \mu(D_1 \cap D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2).\end{aligned}$$

Väide on tõestatud. ■

9.2 Katkevate funktsioonide integreerimine

Tõestame teoreemi, mis annab meile parema ettekujutuse integreeruvatest kahe muutuja funktsioonidest.

Teoreem 9.12. ***(Lebesgue'i integreeruvuskriteerium).*** *Mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ tõkestatud funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on integreeruv parajasti siis, kui katkevuspunktide hulga pindala võrdub nulliga.*

Tõestus. Me **tõestame siinkohal vaid teoreemi *piisavuse* osa**. Niisiis eeldame, et $\mu(\partial D) = 0$ ja funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ katkevuspunktid moodustavad nullmõõduga hulga. Meie eesmärk on näidata funktsiooni f integreeruvust. Olgu R selline ristkülik, mis sisaldab hulka D ja olgu funktsioon $F : R \to \mathbb{R}$ antud seosega (9.1). Paneme tähele, et funktsiooni F katkevuspunktideks saavad olla vaid 1) funktsiooni f katkevuspunktid (olgu nende hulk E) ja 2) rajajoone ∂D punktid (selgitage!)✠. Seega on nende punktide hulk $E_1 \subset E \cup \partial D$, kus funktsioon F ei ole pidev, nullmõõduga hulk.

Tähistame $M := \sup_{\mathbf{X} \in R} |F(\mathbf{X})| = \sup_{\mathbf{X} \in D} |f(\mathbf{X})|$ (põhjendage selle olemasolu!)✠ ja rakendame lemmat 9.1. Olgu $\varepsilon > 0$, võtame ristküliku R sellise alajaotuse $T = T[R_{kl}]$, mille puhul nende osaristkülikute pindalade summa $S^*(T)$, *millel on ühiseid punkte hulgaga* E_1, oleks väiksem kui $\frac{\varepsilon}{2M+\mu(R)}$. Olgu B nende osaristkülikute ühend, seega $\mu(B) = S^*(T)$, ja olgu C nende osaristkülikute ühend, *millel hulgaga* E_1 *ühiseid punkte ei ole*. Sel juhul

$$\begin{aligned}S(T) - s(T) &= \sum\nolimits^B (M_{kl} - m_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l + \sum\nolimits^C (M_{kl} - m_{kl})\,\Delta x_k \Delta y_l \\ &=: \sum\nolimits^B + \sum\nolimits^C,\end{aligned}$$

kus $M_{kl} := \sup\limits_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X})$ ning $m_{kl} := \inf\limits_{\mathbf{X} \in R_{kl}} F(\mathbf{X})$ ja summad $\sum^B$ ning $\sum^C$ on võetud vastavalt üle ristkülikute ühendite B ja C. Siis

$$\sum\nolimits^B \leqslant \sum\nolimits^B (|M_{kl}| + |m_{kl}|)\,\Delta x_k \Delta y_l \leqslant 2MS^*(T) < \frac{2M\varepsilon}{2M + \mu(R)}.$$

Summale $\sum^C$ hinnangu saamiseks kasutame asjaolu, et funktsioon F on hulgas $R \setminus E_1$ pidev. Kuna C kui kinniste osaristkülikute lõplik ühend on kinnine tõkestatud hulk, siis Cantori teoreemi kohaselt on $F : C \to \mathbb{R}$ ühtlaselt pidev. Seepärast saame valida sellise $\delta > 0$, et

$$\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in C,\ \|\mathbf{X} - \mathbf{X}'\| < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{X}) - F(\mathbf{X}')| < \frac{\varepsilon}{2M + \mu(R)}.$$

Peenendades nüüd vajaduse korral alajaotust $T = T[R_{kl}]$ nii, et $\lambda(T) < \delta$, saame igas ühendisse C kuuluvas osaristkülikus R_{kl} leida punktid $\mathbf{X}_{kl}$ ja $\mathbf{X}'_{kl}$ omadusega $M_{kl} - m_{kl} = F(\mathbf{X}_{kl}) - F(\mathbf{X}'_{kl}) < \frac{\varepsilon}{2M+\mu(R)}$ (põhjendage!)✠. Niisiis,

$$\sum\nolimits^{C} < \frac{\varepsilon}{2M+\mu(R)}\mu(C) < \frac{\varepsilon\mu(R)}{2M+\mu(R)}.$$

Kokkuvõttes saame eeldusel $\lambda(T) < \delta$ hinnangu

$$S(T) - s(T) < \frac{(2M+\mu(R))\,\varepsilon}{2M+\mu(R)} = \varepsilon,$$

mis integreeruvuse kriteeriumi (vt. teoreem 8.7) kohaselt tähendabki funktsiooni $F : R \to \mathbb{R}$ ja seega ka funktsiooni $f\colon D \to \mathbb{R}$ integreeruvust. ■

Lebesgue'i integreeruvuskriteeriumist tulenevad vahetult järgmised kaks olulist väidet.

Lause 9.13. *Mõõtuvas hulgas tõkestatud funktsiooni integreeruvus ja integraali väärtus selles hulgas ei sõltu funktsiooni väärtustest hulga rajajoonel.*

Tõestus. Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$ mõõtuv hulk ning olgu $f_1, f_2\colon D \to \mathbb{R}$ sellised tõkestatud funktsioonid, et

$$f_1(\mathbf{X}) = f_2(\mathbf{X}) \;\text{ iga } \mathbf{X} \in D\diagdown\partial D \text{ korral.}$$

Meie eesmärgiks on veenduda, et 1) f_1 on hulgas D integreeruv parajasti siis, kui f_2 on hulgas D integreeruv, ja 2) kui nad on integreeruvad, siis $\iint_D f_1(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f_2(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vaatleme funktsiooni $g\colon D \to \mathbb{R}$, mis on antud seosega $g(\mathbf{X}) := f_1(\mathbf{X}) - f_2(\mathbf{X})$, seega $g(\mathbf{X}) = 0$ iga $\mathbf{X} \in D\diagdown\partial D$ korral. Kuna g on alamhulgas $D\diagdown\partial D$ pidev, siis tema katkevuspunktide hulk E hulgas D on nullmõõduga, eelneva teoreemi kohaselt integraal $\iint_D g(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ eksisteerib. Seejuures

$$\left|\iint_D g(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D |g(\mathbf{X})|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \sup_{\mathbf{X}\in D}|g(\mathbf{X})| \iint_{\partial D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

(põhjendage!)✠, niisiis, $\iint_D g(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. Järelikult, kui integraal $\iint_D f_1(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ eksisteerib, siis eksisteerib ka

$$\iint_D f_2(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (f_1(\mathbf{X}) - g(\mathbf{X}))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D f_1(\mathbf{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lause on tõestatud. ■

Lause 9.14. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on mõõtuvas alamhulgas $D \subset \mathbb{R}^2$ integreeruv ja D_1 on hulga D mõõtuv alamhulk, siis funktsioon f on ka hulgas D_1 integreeruv.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

Me lõpetame käesoleva peatüki lausega, mis üldistab tuntud väidet ülemise raja integraalist. Meenutame, et kui ühe muutuja funktsioon $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ on integreeruv, siis seosega

$$G(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \;\; (x \in [a,b])$$

määratud funktsioon $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev, kusjuures võrdus $G'(x) = g(x)$ kehtib eeldusel, et g on punktis x pidev (veenduge! võrrelge MA III vastava lausega!✠). Viimasest võrdusest on lihtne saada tuntud Newton-Leibnizi valemit.

Kahekordse integraali puhul on olukord sootuks keerulisem. Olgu funktsioon $f : D \to \mathbb{R}$ integreeruv mõõtuvas hulgas $D \subset \mathbb{R}^2$. Iga mõõtuva osahulga $E \subset D$ puhul eksisteerib lause 9.14 kohaselt integraal $H(E) := \iint_E f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Tähistame

$$\mathcal{E} = \{E \subset D \colon E \text{ on mõõtuv ja sidus}, \mu(E) > 0\}.$$

Oleme saanud funktsiooni $H : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$.

Definitsioon. Olgu $\mathbf{X} \in D$. Arvu A, mis rahuldab tingimust

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \,:\, \forall E \in \mathcal{E}, \mathbf{X} \in E \quad \sup_{\mathbf{Q} \in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{H(E)}{\mu(E)} - A \right| < \varepsilon,$$

nimetatakse *funktsiooni H tuletiseks piirkonna järgi kohal* $\mathbf{X}$ (*derivative with respect to area*) ning tähistatakse tähistega $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mu}$ ja $\lim_{E \to \mathbf{X}} \frac{H(E)}{\mu(E)}$.

Märgime, et protsessi

$$\sup_{\mathbf{Q} \in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| \to 0$$

kohta öeldakse, et hulk E **tõmbub kokku punktiks** (*shrinks to point*) $\mathbf{X}$, ning tähistatakse $E \to \mathbf{X}$).

Osutub, et sellel abstraktsel ja esimesel pilgul kunstlikult defineeritud mõistel „tuletis piirkonna järgi“ on üpris loomulik füüsikaline ja matemaatiline sisu. **Füüsikaliselt** saab tuletist $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mu}$ interpreteerida **massi tihedusena punktis** $\mathbf{X} \in D$, kui $H(D)$ on kujundi E mass. **Matemaatiliselt** vastab järgmine väide tavalise Riemanni integraali sellele omadusele, mis kirjeldab teda ülemise raja funktsioonina.

Lause 9.15 *Kui funktsioon f on pidev punkti $\mathbf{X}$ mingis ümbruses, siis* $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\mu} = f(\mathbf{X})$.

Tõestus. Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$. Vaja on leida $\delta > 0$ omadusega, et iga mõõtuva sidusa E jaoks, kus $\mathbf{X} \in E$, kehtiks

$$\sup_{\mathbf{Q} \in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{H(E)}{\mu(E)} - f(\mathbf{X}) \right| < \varepsilon.$$

Kuna f on punktis $\mathbf{X}$ pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et iga $E \subset D$ jaoks

$$\sup_{\mathbf{Q} \in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{Q}) - f(\mathbf{X})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(selgitage!✠). Nõuame, et f oleks pidev ümbruses $U_\delta(\mathbf{X})$ (miks see pole kitsendus?✠). Implikatsiooni parema poole kirjutame kujul $f(\mathbf{X}) - \frac{\varepsilon}{2} < f(\mathbf{Q}) < f(\mathbf{X}) + \frac{\varepsilon}{2}$ ning märkame, et sellest järelduvad võrratused

$$M_E := \sup_{\mathbf{Q} \in E} f(\mathbf{Q}) < f(\mathbf{X}) + \varepsilon, \qquad m_E := \inf_{\mathbf{Q} \in E} f(\mathbf{Q}) > f(\mathbf{X}) - \varepsilon$$

(põhjendage!✠).

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi (vt. järeldus 8.18) kohaselt iga $E \in \mathcal{E}$ korral, kus f on pidev hulgas E, kehtib $H(E) = c \cdot \mu(E)$ mingi arvu $c \in [m_E, M_E]$ jaoks (veenduge!✠).

Oleme saanud, et kui $E \in \mathcal{E}$, $E \in \mathbf{X}$, on selline, et $\sup_{\mathbf{Q} \in E} \|\mathbf{Q} - \mathbf{X}\| < \delta$, siis

$$f(\mathbf{X}) - \varepsilon < m_E \leqslant c = \frac{H(E)}{\mu(E)} \leqslant M_E < f(\mathbf{X}) + \varepsilon,$$

nagu vaja (selgitage!✠). ■

10 Greeni valem. Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Selles peatükis seame endale kaks eesmärki. Esiteks, me üritame siduda omavahel joonintegraali ja kahekordse integraali, selleks tõestame esimeses punktis Greeni valemi. Teiseks, me uurime olulist ja üsna komplitseeritud probleemi muutuja vahetusest kahekordses integraalis ning tõestame sellekohase olulise valemi.

10.1 Greeni valem

Definitsioon. Öeldakse, et sidus hulk $D \subset \mathbb{R}^m$ on *ühelisidus* (*simply connected*), kui iga lihtsa pideva kinnise joone $\gamma \subset D$ korral ka γ poolt piiratud hulk E sisaldub hulgas D.

Lause 10.1. *Olgu $\mathcal{G}$ lahtine ühelisidus piirkond xy-tasandil ja olgu $D \subset \mathcal{G}$ kinnine tükiti sileda rajajoonega hulk. Kui $F\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ning $G\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ on sellised pidevad funktsioonid, millel on hulgas $\mathcal{G}$ pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$ ja $\frac{\partial G}{\partial x}$, siis kehtib valem*

$$\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y. \tag{10.1}$$

Me tõestame valemi (10.1), mida nimetatakse *Greeni valemiks*, sellise hulga D puhul, mida saab kirjeldada kõvertrapetsite abil.

Niisiis, olgu D **kinnine kõvertrapets lahtises hulgas** $\mathcal{G}$ piiratud külgedelt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning ülalt ja alt **siledate** joontega $L := \mathbf{AB}$ ja $N := \mathbf{CE}$, seejuures olgu need jooned määratud vastavalt võrranditega

$$y = \psi(x) \text{ ja } y = \chi(x), \text{ kus } \chi(x) \leqslant \psi(x) \quad (x \in [a, b]).$$

Edasi, olgu $F\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ **pidev** funktsioon, millel on hulgas $\mathcal{G}$ **pidev osatuletis** $\frac{\partial F}{\partial y}$. Arvutame

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\chi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \left(F(x, \psi(x)) - F(x, \chi(x))\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b F(x, \psi(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b F(x, \chi(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbf{AB}} F\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbf{CE}} F\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Põhjenduseks viimase võrduse juurde märgime, et see tuleneb lausest 7.9, kus joone võrrandid on vastavalt

$$x = x, \ y = \psi(x) \text{ ja } x = x, \ y = \chi(x) \qquad (x \in [a, b])$$

(kontrollige!)✠. Pidades silmas, et $\int_{\mathbf{AC}} F\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{EB}} F\,\mathrm{d}x = 0$ (selgitage!)✠, saame

$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\left(\int_{\mathbf{CE}} F\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{EB}} F\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{BA}} F\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbf{AC}} F\,\mathrm{d}x\right),$$

ehk
$$\iint_D \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} F\,\mathrm{d}x. \tag{10.2}$$
Siin on hulga D rajajoonel $\partial D = \partial\mathbf{CEBA}$ integreerimissuunaks võetud *positiivne suund* (vt. pt. 7, märkus 4).

Vaatleme nüüd üldisemat olukorda. Olgu $D \subset \mathcal{G}$ **selline hulk, mida saab jaotada lõplikuks arvuks eespool vaadeldud tüüpi kõvertrapetsiteks.** Järgnev lihtne arutelu näitab, et võrdus (10.2) jääb ka sel juhul kehtima.

Eeldame, et hulga D saab pideva joonega MN jagada kaheks selliseks kõvertrapetsiks D_1 ja D_2, mille puhul võrdus (10.2) kehtib, näitame, et siis kehtib ta ka hulga D korral. Punktid $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{N}$ jaotavad joone ∂D kaheks kaareks Γ_1 ja Γ_2, seejuures on $\Gamma_1 \cup MN$ ja $\Gamma_2 \cup NM$ vastavalt hulga D_1 ja D_2 rajajoon. Eelneva arutelu kohaselt
$$\iint_{D_1} \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\Gamma_1} F\,\mathrm{d}x - \int_{MN} F\,\mathrm{d}x,$$
$$\iint_{D_2} \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\Gamma_2} F\,\mathrm{d}x - \int_{NM} F\,\mathrm{d}x = -\int_{\Gamma_2} F\,\mathrm{d}x + \int_{MN} F\,\mathrm{d}x.$$
Need valemid liites saame joonintegraali aditiivsuse põhjal valemi (10.2).

Analoogiline valem kehtib **teist tüüpi kõvertrapetsite** korral. Kui hulk $D \subset \mathcal{G}$ koosneb lõplikust arvust niisugustest kõvertrapetsitest, mis on pealt ja alt piiratud vastavalt sirgetega $y = d$ ja $y = c$ ning külgetelt siledate joontega $x = \delta\,(y)$ ja $x = \rho\,(y)$, siis analoogilise arutlusega jõuame valemini
$$\iint_D \frac{\partial G}{\partial x}\,(x,y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial D} G\,\mathrm{d}y, \tag{10.3}$$
kui $G\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, millel on hulgas $\mathcal{G}$ pidev osatuletis $\frac{\partial G}{\partial x}$. (NB! Selgitage, miks valemid (10.2) ja (10.3) erinevad märgi poolest!✠)

Valemite (10.2) ja (10.3) liitmisel saame Greeni valemi. Seega oleme lause 10.1 tõestanud **iga hulga D jaoks, mida saab pidevate joontega jagada kumbagi tüüpi lõplikuks arvuks kõvertrapetsiteks.**

Paneme tähele, et Greeni valem on tuntud Newton-Leibnizi valemi
$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$
kahemõõtmeline üldistus.

Intuitiivselt võttes väidab Greeni valem, et kui summeerida hulga D igast punktist väljuv voog, siis saadud tulemus on võrdne vooga läbi D rajajoone. (Vt. ka ptk. 12.6).

Üheks kõige lihtsamaks Greeni valemi rakenduseks on vaadeldava **piirkonna pindala arvutamine.** Kui funktsioonid F ja G valemis (10.1) valida selliselt, et $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 1$ kogu hulgas D, siis valemi (10.1) vasak pool kirjeldab selle hulga pindala $\mu\,(D)$. Võttes näiteks $F\,(x,y) = 0$ ja $G\,(x,y) = x$ iga $(x,y) \in D$ korral, saame valemi
$$\mu\,(D) = \int_{\partial D} x\,\mathrm{d}y. \tag{10.4}$$

10.2 Integreerimisteest sõltumatud joonintegraalid

Olgu **lahtises sidusas hulgas** $\mathcal{G}$ fikseeritud punktid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$. Selgitame välja, millistel eeldustel hulga $\mathcal{G}$ ja pidevate funktsioonide $F\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ning $G\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ suhtes joonintegraal

$$\int_{AB} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y \tag{10.5}$$

sõltub ainult punktidest $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ning ei sõltu neid ühendavast joonest. Joone all mõistame me selles punktis **tükiti siledat** joont.

Kõigepealt tõestame järgmise lemma.

Lemma 10.2. *Joonintegraal* (10.5) *on sõltumatu punkte* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *ühendavast integreerimisteest piirkonnas* D *parajasti siis, kui iga lihtsa kinnise joone* $\Gamma \subset \mathcal{G}$ *korral kehtib võrdus*

$$\int_{\Gamma} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y = 0. \tag{10.6}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et integraal (4) ei sõltu integreerimisteest, vaid ainult punktidest $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$. Olgu $\Gamma \subset \mathcal{G}$ lihtne kinnine joon. Valime sellel joonel kaks punkti $\mathbf{A}'$ ja $\mathbf{B}'$, need jaotavad joone Γ kaheks kaareks Γ_1 ja Γ_2, võtame neil mõlemal suuna punktist $\mathbf{A}'$ punkti $\mathbf{B}'$ poole. Meie eelduse kohaselt kehtib võrdus $\int_{\mathbf{AA'}\cup\Gamma_1\cup\mathbf{B'B}} = \int_{\mathbf{AA'}\cup\Gamma_2\cup\mathbf{B'B}}$, millest järeldub, et $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$. Joonintegraali aditiivsuse omadusest saame seose $\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2} = 0$ (siin nool tähe Γ_2 all tähendab, et kaar Γ_2 on suunatud punktist $\mathbf{B}'$ punkti $\mathbf{A}'$ poole), s.t. kehtib võrdus (10.6).

Piisavus. Eeldame, et tingimus (10.6) on täidetud iga lihtsa kinnise joone $\Gamma \subset \mathcal{G}$ puhul. Olgu punktid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ võetud hulgas $\mathcal{G}$ suvaliselt ja olgu Γ_1 ning Γ_2 neid punkte ühendavad lihtsad jooned, nad moodustavad kinnise joone Γ.

Esiteks vaatleme juhtu, kus joontel Γ_1 ja Γ_2 ei ole ühiseid punkte peale $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$. Siis Γ on lihtne joon ja meie eelduse põhjal kehtib seos (10.6). Samal ajal $\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_2}$ (vt. tarvilikkuse tõestus), niisiis $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$.

Teiseks vaatleme juhtu, kus joontel Γ_1 ja Γ_2 on peale $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ veel ühised punktid $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_{n-1}$, olgu need nummerdatud nii, et mööda joont Γ_1 (või Γ_2) liikudes on $\mathbf{C}_{k+1}$ punktist $\mathbf{A}$ kaugemal kui $\mathbf{C}_k$. Siis jagunevad mõlemad jooned Γ_1 ja Γ_2 n kaareks $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots, \Gamma_{1n}$ ja $\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \ldots, \Gamma_{2n}$, mis paarikaupa moodustavad n lihtsat kinnist joont. Arvestades vaadeldud juhtu, võime väita, et $\int_{\Gamma_{11}} = \int_{\Gamma_{21}}, \int_{\Gamma_{12}} = \int_{\Gamma_{22}}, \ldots, \int_{\Gamma_{1n}} = \int_{\Gamma_{2n}}$. Aditiivsuse omaduse kohaselt saame nende võrduste liitmisel võrduse $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2}$.

Põhimõtteliselt on veel kolmas võimalus, kus joontel Γ_1 ja Γ_2 on lõpmata palju ühised punkte. Ka sel juhul jääb väide kehtima, selle juhu tõestuse jätame vahele. ■

Seome vaadeldava probleemi eelmises punktis tõestatud Greeni valemiga. Eeldame, et hulgas $\mathcal{G}$ pidevatel funktsioonidel F ja G on selles hulgas pidevad osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$. Kui Γ on lihtne kinnine joon hulgas $\mathcal{G}$ ja D on selle joonega piiratud hulk, siis funktsioonid F, G, $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ rahuldavad hulgas D Greeni valemi kehtimiseks vajalikke tingimusi eeldusel, et $D \subset \mathcal{G}$. Niisiis, me vajame lisaeeldust, et *hulk* $\mathcal{G}$ *sisaldab koos iga lihtsa kinnise joonega ka selle joonega ümbritsetud piirkonna.* Sellise omadusega hulka $\mathcal{G}$ nimetatakse *ühelisidusaks.* Piltlikult väljendudes võib öelda, et ühelisidusad on sellised hulgad, milles ei ole "auke".

Kui eeldada, et $\mathcal{G}$ on ühelisidus, siis Greeni valemi abil saame tingimuse (10.6) esitada kujul

$$\iint_D \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0.$$

Pole kahtlust, et see kehtib, kui

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{kogu} \quad \text{hulgas} \quad \mathcal{G}.$$

Osutub, et see tingimus on ka tarvilik võrduse (10.6) kehtivuseks. Tähistame

$$H(E) := \iint_E \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

ja leiame funktsiooni H tuletise piirkonna $\mathcal{G}$ suvalises punktis $\mathbf{X}$. Lausest 9.2 saame $\frac{dH}{dE} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$. Kuna iga $D \subset \mathcal{G}$ puhul $H(D) = 0$, siis $\frac{dH}{dD} = 0$, niisiis, $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $\mathcal{G}$.

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise lause.

Lause 10.3. *Olgu funktsioonid F ja G ning nende osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad lahtises ühelisidusas piirkonnas $\mathcal{G}$. Joonintegraal* (10.5) *on sõltumatu punkte* $\mathbf{A}$ *ja* $\mathbf{B}$ *ühendavast integreerimisteest piirkonnas $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $\mathcal{G}$.*

Lause 10.4. *Olgu funktsioonid F ja G ning nende osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad lahtises ühelisidusas piirkonnas $\mathcal{G}$. Avaldis $Fdx + Gdy$ on mingi piirkonnas $\mathcal{G}$ diferentseeruva kahe muutuja funktsiooni $w = f(x, y)$ täisdiferentsiaal parajasti siis, kui $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas $\mathcal{G}$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}f$, kus f on piirkonnas $\mathcal{G}$ diferentseeruv funktsioon. Siis $F = \frac{\partial f}{\partial x}$ ning $G = \frac{\partial f}{\partial y}$ (põhjendage!)✠, millest saame $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ning $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Eelduse kohaselt on $\frac{\partial G}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$ pidevad, Schwarzi teoreemi 4.1 põhjal $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Niisiis kehtib võrdus $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ piirkonnas $\mathcal{G}$.

Piisavus. Eeldame, et seos $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kehtib kogu piirkonnas $\mathcal{G}$, meie eesmärgiks on leida funktsioon $f\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ omadusega $\mathrm{d}f = F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$.

Olgu $\mathbf{A}$ fikseeritud ja $\mathbf{X}$ muutuv punkt piirkonnas $\mathcal{G}$. Vaatleme joonintegraali $\int_{AX} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$. Lause 10.3 põhjal ei sõltu selle integraali väärtus integreerimisteest, vaid ainult punktist $\mathbf{X}$. Tähistame

$$f(\mathbf{X}) := \int_{AX} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y,$$

seega on f piirkonnas D määratud kahe muutuja funktsioon. Näitame, et df langeb kokku avaldisega $Fdx{+}Gdy$. Kui h on argumendi x muut punktis $\mathbf{X}$, siis, tähistades $\mathbf{Q} := (x + h, y)$, saame

$$f(x + h, y) - f(x, y) = \int_{AQ} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y - \int_{AX} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{XQ} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y$$

(selgitage!)✠. Joon XQ on x-teljega paralleelne sirglõik, seega $\int_{XQ} G\,\mathrm{d}y = 0$ ning keskväärtusteoreemi kohaselt

$$\int_{XQ} F\,\mathrm{d}x = \int_{x}^{x+h} F\left(t, y\right)\,\mathrm{d}t = F\left(\xi, y\right) h,$$

kus ξ on mingi punkt vahemikus $(x, x+h)$ (selgitage!)✠. Niisiis,

$$\frac{f\left(x+h, y\right) - f\left(x, y\right)}{h} = F\left(\xi, y\right)$$

ja kuna protsessis $h \to 0$ saame $\xi \to x$, siis tänu funktsiooni F pidevusele

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x+h, y\right) - f\left(x, y\right)}{h} = \lim_{h\to 0} F\left(\xi, y\right) = F\left(x, y\right).$$

Analoogiliselt saadakse seos

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) = G\left(x, y\right).$$

Lause on tõestatud. ■

10.3 Muutujate vahetus kahekordses integraalis

Nagu peatüki algul öeldud, püüame me Greeni valemi abil leida eeskirja, mille järgi toimub muutujate vahetus kahekordses integraalis. Kõigepealt meenutame muutuja vahetust ühekordsete integraalide arvutamisel. Olgu $x = \varphi\left(t\right)$ lõigus $[\alpha, \beta]$ diferentseeruv funktsioon, mille väärtused kuuluvad lõiku $[a, b]$, kus $a := \varphi\left(\alpha\right)$ ja $b := \varphi\left(\beta\right)$. Kui funktsioonil f on selles lõigus olemas algfunktsioon, siis kehtib valem

$$\int_{a}^{b} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

eeldusel, et selles valemis esinevad integraalid eksisteerivad. Meie **eesmärk** on leida analoogiline valem kahekordsete integraalide jaoks.

Olgu uv-tasandi mingis **lahtises ühelisidusas piirkonnas** $\mathcal{G}'$ defineeritud funktsioonid

$$x = \xi\left(u, v\right), \quad y = \eta\left(u, v\right) \quad \left(\mathbf{U} = \left(u, v\right) \in \mathcal{G}'\right). \tag{10.7}$$

Nad seavad igale punktile $\mathbf{U} = (u, v) \in \mathcal{G}'$ vastavusse punkti $\mathbf{X} = (x, y)$ xy-tasandil:

$$T(u, v) = \left(\xi(u, v), \eta(u, v)\right), \qquad \mathbf{U} = (u, v) \in \mathcal{G}'.$$

Olgu $\mathcal{G} := T\left(\mathcal{G}'\right) = \{T(u, v)\colon (u, v) \in \mathcal{G}'\} = \{(x, y) :\ (u, v) \in \mathcal{G}'\}$.

Definitsioon. Kujutust $T\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$, mis on määratud seostega (10.7), nimetatakse *regulaarseks teisenduseks,* kui on täidetud järgmised tingimused:
1) T on bijektiivne (ehk üksühene vastavus), s.t. iga punkti $\mathbf{X} = (x, y) \in \mathcal{G}$ puhul leidub

täpselt üks punkt $\mathbf{U} := (u,v) \in \mathcal{G}'$ omadusega $T(\mathbf{U}) = \mathbf{X}$,
2) eksisteerivad osatuletised $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial v}$, $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \eta}{\partial v}$, mis on pidevad hulgas $\mathcal{G}'$,
3) jakobiaan

$$J(\mathbf{U}) := \frac{D(x,y)}{D(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial v}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial v}(\mathbf{U}) \end{vmatrix}$$

on **nullist erinev** iga $\mathbf{U} \in \mathcal{G}'$ korral.

Märgime, et tänu kujutuse T bijektiivsusele avalduvad u ja v muutujate x ja y funktsioonina:

$$u = u(x,y), \quad v = v(x,y) \quad (\mathbf{X} = (x,y) \in \mathcal{G}). \tag{10.8}$$

Me näitame järgnevalt, kuidas regulaarsete teisenduste abil kirjeldatakse ja põhjendatakse muutujate vahetust kahekordses integraalis, s.o. üleminekut muutujatelt x ja y muutujatele u ja v. Seejuures mõnede üleskerkivate tehniliste probleemide lahendamisel toetume me järgmistele lausetele.

Lause 10.5. *Regulaarse teisenduse $T\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$, mis on antud seostega (10.7), poolt määratud funktsioonidel $u\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ ja $v\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ leiduvad pidevad osatuletised mõlema muutuja x ja y järgi hulgas $\mathcal{G}$.*

Tõestus. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - \xi(u,v) = 0 \\ y - \eta(u,v) = 0 \end{cases}, \tag{10.9}$$

see on teoreemis 5.4 vaadeldud süsteem

$$\begin{cases} F_1(x,y;u,v) = 0 \\ F_2(x,y;u,v) = 0 \end{cases},$$

kus $F_1(x,y;u,v) := x - \xi(u,v)$ ja $F_2(x,y;u,v) = y - \eta(u,v)$ ning $(x,y;u,v) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}'$. Näitame, et teoreemi 5.4 eeldused $1^0 - 4^0$ on rahuldatud, siis tõestatav väide järeldub teoreemist 5.4. Eelduse 2^0 kohta märgime, et kui $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{G}'$ on suvaline ja $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0) = T(\mathbf{U}_0)$, siis punkt $\mathbf{A} := (x_0, y_0; u_0, v_0) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}'$ rahuldab võrrandisüsteemi (10.9). Ülejäänud eeldused $1^0, 3^0$ ja 4^0 on rahuldatud kogu piirkonnas $\mathcal{G} \times \mathcal{G}'$: kuna

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F_1}{\partial u} = -\frac{\partial \xi}{\partial u},\ \frac{\partial F_1}{\partial v} = -\frac{\partial \xi}{\partial v},\ \frac{\partial F_2}{\partial u} = -\frac{\partial \eta}{\partial u},\ \frac{\partial F_2}{\partial v} = -\frac{\partial \eta}{\partial v},$$

siis eeldused 1^0 ja 4^0 on ilmselt täidetud, tingimus 3^0 tuleneb lihtsalt kontrollitavast seosest

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = J.$$

■

Lause 10.6. *Olgu antud funktsioonid $y_1 = y_1(v_1,v_2)$ ja $y_2 = y_2(v_1,v_2)$, kusjuures $v_1 = v_1(t_1,t_2)$ ning $v_2 = v_2(t_1,t_2)$. Olgu kõigil siintoodud funktsioonidel mõlema argumendi suhtes pidevad osatuletised. Defineerime liitfunktsioonid $Y_1(t_1,t_2) := y_1(v_1(t_1,t_2), v_2(t_1,t_2))$ ning $Y_2(t_1,t_2) := y_2(v_1(t_1,t_2), v_2(t_1,t_2))$. Siis liitfunktsiooni jakobiaan võrdub välimise ja sisemise funktsiooni jakobiaanide korrutisega.*

Märkus. Lause 10.6 näitab, et jakobiaan allub samale ahelareeglile nagu liitfunktsiooni tuletis.

Tõestus. Arvutame vastavate jakobiaanide korrutise:

$$\frac{D(y_1,y_2)}{D(v_1,v_2)}\frac{D(v_1,v_2)}{D(t_1,t_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial v_1} & \frac{\partial y_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial v_1} & \frac{\partial y_2}{\partial v_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial t_1} & \frac{\partial v_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial t_1} & \frac{\partial v_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y_1}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_2}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial t_2} + \frac{\partial y_2}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \frac{D(Y_1,Y_2)}{D(t_1,t_2)}.$$

■

Lause 10.7. *Olgu $T\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ regulaarne teisendus, $F' \subset \mathcal{G}'$ kinnine hulk ning $F := T(F')$. Siis $F^\circ = T((F')^\circ)$ ning $\partial F = T(\partial F')$.*

Tõestus. Tarvis on näidata, et regulaarne teisendus kujutab hulga F' sisepunktid (rajapunktid) hulga F sisepunktideks (rajapunktideks) ja vastupidi. Olgu $\mathbf{U}_0 = (u_0, v_0)$ hulga F suvaline sisepunkt, siis leidub ümbrus $U_\delta(\mathbf{U}_0)$, mis sisaldub hulgas F'. Näitame, et punkt $\mathbf{X}_0 := (x_0, y_0) := T(\mathbf{U}_0)$ on hulga F sisepunkt. Selleks kasutame võrrandisüsteemi (10.9) jaoks jälle teoreemi 5.4, kus võtame $\mathbf{A} := (x_0, y_0, u_0, v_0)$. Selle teoreemi kohaselt leidub punktil $\mathbf{X}_0$ niisugune ümbrus $U_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$, milles seosed (10.8) määravad muutujad u ja v argumentide x ja y pidevate funktsioonidena. Seega on kõik punktid ümbrusest $U_\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ hulga F' punktide kujutised kujutuse T suhtes, niisiis $U_\varepsilon(\mathbf{X}_0) \subset F$. Tähendab, $\mathbf{X}_0$ on hulga F sisepunkt. Analoogiliselt säilitab ka pöördkujutus T^{-1} sisepunktid.

Kui $\mathbf{U}_0$ on hulga F' rajapunkt, siis peab $\mathbf{X}_0$ olema rajapunkt hulgas F, sest vastasel korral (s.t. juhul, kui $\mathbf{X}_0$ oleks sisepunkt) kujutaks regulaarne teisendus T^{-1} sisepunkti $\mathbf{X}_0$ rajapunktiks $\mathbf{U}_0$, mis on eelpool tõestatuga vastuolus. ■

Lausest 10.7 järeldub muuhulgas, et regulaarne teisendus viib kinnise hulga kinniseks hulgaks, st. kui F' on kinnine, siis ka $F = T(F') \subset \mathcal{G}$ on kinnine.

Lause 10.8. *Olgu $T\colon \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ regulaarne teisendus ja olgu Λ lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}'$, mis on antud võrranditega*

$$u = u(t), \quad v = v(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]).$$

Olgu $\Delta \subset \mathcal{G}'$ joonega Λ piiratud piirkond, tähistame $L := T(\Lambda)$ ja $D := T(\Delta)$, need on piirkonna $\mathcal{G}$ alamhulgad. Siis joon L, mis on määratud võrranditega

$$x = x(t) = \xi(u(t), v(t)), \quad y = y(t) = \eta(u(t), v(t)) \quad (t \in [\alpha, \beta]),$$

on lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}$.

Tõestus. Seostest

$$x'(t) = \frac{\partial \xi}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial \xi}{\partial v}v'(t), \quad y'(t) = \frac{\partial \eta}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial \eta}{\partial v}v'(t),$$

järeldub funktsioonide x' ja y' pidevus, tingimus $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ garanteerib, et ühegi $t \in [\alpha, \beta]$ korral ei ole $x'(t)$ ning $y'(t)$ korraga võrdsed nulliga (selgitage!)✠. Teisenduse $T\colon \Delta \to D$ bijektiivsuse tõttu on L kinnine lihtne joon. ■

Lause 10.8 näitab, et **regulaarne teisendus** $T\colon \Delta \to D$ **kujutab lihtsa kinnise (tükiti) sileda joone** Λ **lihtsaks kinniseks (tükiti) siledaks jooneks** L.

Lause 10.9. *Olgu $\mathcal{G}'$ lahtine ühelisidus hulk. Olgu $T\colon \mathcal{G}' \to T(\mathcal{G}) \subset \mathbb{R}^2$. võrranditega (10.7) määratud regulaarne teisendus. Olgu Λ lihtne kinnine tükiti sile joon hulgas $\mathcal{G}'$, $\partial\Delta = \Lambda$ ning tähistame $D = T(\Delta)$ ja $L = T(\Lambda)$. Olgu vähemalt üks paar segaosatuletisi $\frac{\partial^2\eta}{\partial u \partial v}$ ja $\frac{\partial^2\eta}{\partial v \partial u}$ või $\frac{\partial^2\xi}{\partial u \partial v}$ ja $\frac{\partial^2\xi}{\partial v \partial u}$ pidevad hulgas $\mathcal{G}'$. Siis*

$$\mu(D) = \iint_\Delta |J| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \tag{10.10}$$

Märkus. Paneme tähele, et Schwarzi teoreemi (vt. lauset 4.1) tõttu garanteerib segaosatuletiste pidevus nende võrdumise.

Tõestus. Lause 10.5 põhjal leiduvad pidevad osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}$, need moodustavad jakobiaani $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{1}{J}$ (vt. lauset 10.6). Seega korraldab kujutus T bijektiivse vastavuse piirkondade Δ ja D, aga ka nende rajajoonte Λ ja L vahel (vt. lauseid 10.7 ja 10.8). Märgime, et kui punkt $\mathbf{X}(t) := (x(t), y(t))$ läbib joone L positiivses suunas, võib talle vastav punkt $(u(t), v(t)) = T^{-1}(\mathbf{X}(t))$ läbida joone Λ kas positiivses või negatiivses suunas.

Ilmselt on mõlemad hulgad D ja Δ mõõtuvad. **Hulga** D **pindala** $\mu(D) = \iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ saame valemi (10.4) abil arvutada joonintegraaliga $\int_L x \, \mathrm{d}y$, kus joon L läbitakse positiivses suunas. Niisiis,

$$\mu(D) = \int_\alpha^\beta \xi(u(t), v(t)) \, y'(t) \, \mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \xi(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \eta}{\partial v} v'(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Selle Riemanni integraali saame esitada omakorda joonintegraalina

$$\mu(D) = \pm \int_\Lambda x \frac{\partial \eta}{\partial u} \, \mathrm{d}u + x \frac{\partial \eta}{\partial v} \, \mathrm{d}v,$$

kus märk '+' kirjutatakse sel juhul, kui joon Λ läbitakse positiivses suunas, märk '-' vastupidisel juhul. Greeni valemist saame kahekordse integraali

$$\mu(D) = \pm \iint_\Delta \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial \eta}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial \eta}{\partial u} \right) \right] \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

millest **eeldusel, et funktsioon** η **rahuldab tingimust** $\frac{\partial^2\eta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2\eta}{\partial v \partial u}$, tuleneb seos

$$\mu(D) = \pm \iint_\Delta J \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Lihtne on näha (kuna $\mu(D) > 0$), et selle integraali märk langeb kokku jakobiaani J märgiga (selgitage!)✠, seega

$$\mu(D) = \iint_\Delta |J| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

■

Järgnevalt sõnastame ja tõestame kahekordses integraalis muutujate vahetuse teoreemi.

Teoreem 10.10. *Kehtigu lause 10.9 eeldused ning olgu f integreeruv hulgas D. Siis kehtib muutujavahetuse valem*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\xi(u,v),\eta(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{10.11}$$

Tõestus. Defineerime

$$\varphi(x,y) := \int_a^x f(t,y)\,\mathrm{d}t,$$

kus $a = a(y)$ on sobivalt valitud arv, siis $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f(x,y)$ ning me saame rakendada Greeni valemit:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \varphi y'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta \varphi\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial\eta}{\partial v}v'(t)\right)\mathrm{d}t = \pm\int_\Lambda \varphi\frac{\partial\eta}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \varphi\frac{\partial\eta}{\partial u}\,\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

nagu lause 10.9 tõestuses, sõltub märk integraali ees ka siin jakobiaani märgist. Kasutame veel kord Greeni valemit: kuna

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi\frac{\partial\eta}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi\frac{\partial\eta}{\partial u}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right) = f(x,y)\,J,$$

siis jõuamegi muutujate vahetuse valemini (10.11) ■

Märkus (väga oluline!). Enamasti on muutujate vahetused, mida praktikas kasutatakse, sellised, kus seostega (10.7) määratud kujutuse T korral kõik regulaarsuse tingimused ei ole täidetud. Me näitame järgnevas, et valem (10.11) jääb kehtima, kui need n.ö. iseärased punktid, mille puhul meie poolt tehtud regulaarsuse eeldused on rikutud, saab nii piirkonnas D kui ka piirkonnas Δ lokaliseerida selliselt, et **iga etteantud $\varepsilon > 0$ korral leidub alamhulk $D_\varepsilon \subset D$, mis sisaldab kõik hulga D iseärased punktid, ning $\mu(D_\varepsilon) < \varepsilon$ ja** $\mu(T^{-1}(D_\varepsilon)) < \varepsilon$.

Niisiis, eeldame, et

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists D_\varepsilon \subset D : \mu(D_\varepsilon) < \varepsilon,\ \mu\left(T^{-1}(D_\varepsilon)\right) < \varepsilon$$

ja D_ε sisaldab kõik iseärased punktid. Lisaks eeldame, et **osatuletised** $\frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial\eta}{\partial u}$ **ja** $\frac{\partial\eta}{\partial v}$ **on pidevad piirkonnas** Δ, siis **jakobiaan** $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ **on hulgas Δ tõkestatud**, s.t.

$$\exists\ M > 0 : |J(\mathbf{U})| \leqslant M \text{ iga } \mathbf{U} \in \Delta \text{ puhul.}$$

Nendel eeldustel

$$\iint_{D\setminus D_\varepsilon} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{\Delta\setminus T^{-1}(D_\varepsilon)} f(\xi(u,v),\eta(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{10.12}$$

Seejuures

$$\left|\iint_D f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D\setminus D_\varepsilon} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_{D_\varepsilon} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant N\mu(D_\varepsilon) < N\varepsilon, \tag{10.13}$$

kus $N := \max_{\mathbf{X}\in D} |f(\mathbf{X})|$. Samamoodi

$$\left|\iint_{\Delta} f\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \iint_{\Delta\setminus T^{-1}(D_\varepsilon)} f\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \iint_{T^{-1}(D_\varepsilon)} |f(\xi(u,v),\eta(u,v))|\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$\leqslant NM\mu\left(T^{-1}(D_\varepsilon)\right) < NM\varepsilon, \tag{10.14}$$

seega saame seostest (10.12), (10.13) ja (10.14) protsessis $\varepsilon\to 0$ valemi (10.11).

Näide 10.1 (väga oluline!). Vaatleme kõige sagedamini kasutatavat muutujate vahetust - **üleminekut tavalistelt ristkoordinaatidelt** x **ja** y **polaarkoordinaatidele** r **ja** θ. Olgu kujutus T hulkade

$$\{(r,\theta)\mid r\geqslant 0,\ \theta\in[0,2\pi]\}\quad\text{ja}\quad\{(x,y)\mid x,y\in(-\infty,\infty)\}$$

vahel määratud võrranditega

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta. \tag{10.15}$$

Selge, et funktsioonidel (10.15) on pidevad osatuletised, vahetu kontroll näitab, et $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = r$ (veenduge!)✠.Paneme tähele, et **kujutus** T **ei ole bijektiivne**. Vaatleme $r\theta$-tasandil kinnist ristkülikut $\Delta := [0,R]\times[0,2\pi]$, kus $R>0$. Olgu selle tipud (alustades punktist $(0,0)$ positiivses suunas) $\mathbf{O},\mathbf{M},\mathbf{N}$ ja $\mathbf{Z}$. Talle vastab xy-tasandil kinnine ring $D := S_R$ keskpunktiga $\mathbf{0}$ ja raadiusega R. Selle ringi rajajoon (s.o. ringjoon keskpunktiga $\mathbf{0}$ ja raadiusega R) vastab lõigule MN, mõlemale lõigule OM ja NZ vastab lõik $0A$, kus $\mathbf{A} := (R,0)$. Lõigule MO vastab ainult punkt $\mathbf{0}$. Näeme, et seostega (10.15) määratud vastavus hulkade Δ ja D vahel ei ole bijektiivne.

Olukord muutub, kui nihutada ristküliku **OMNZ** külge ZO (väikese) suuruse $\rho>0$ võrra paremale ning külge NZ (väikese) suuruse $\delta>0$ võrra allapoole, saame uue ristküliku $\Delta' := \mathbf{O'MN'Z'}$. Lihtne on veenduda, et sellele vastab ring S_R, millest on välja jäetud ring keskpunktiga $\mathbf{0}$ ja raadiusega ρ ning sektor $\mathbf{A0B}$, mis vastab nurgale δ. Tähistame selle piirkonna tähega D'. Teisendus $T\colon \Delta'\to D'$ on regulaarne. Seejuures saab sellised punktid $\mathbf{X}\in D$ ning $\mathbf{U}\in\Delta$, kus kujutuse T bijektiivsuse nõue on rikutud, lokaliseerida teatavasse osapiirkonda, mille pindala saab arvude δ ja ρ valikuga teha väiksemaks, kui etteantud arv $\varepsilon>0$. Seega saame rakendada valemit (10.11) ning veenduda, et

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

11 Kolmekordne integraal

11.1 Kolmekordse integraali mõiste

Integraal üle risttahuka. Olgu $R := [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ risttahukas ruumis $\mathbb{R}^3$, s.t.

$$R = \{\mathbf{X} = (x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ u \leqslant z \leqslant v\}.$$

Olgu $T[x_0, \ldots, x_n]$, $T[y_0, \ldots, y_r]$ ja $T[z_0, \ldots, z_s]$ vastavalt lõikude $[a, b]$, $[c, d]$ ja $[u, v]$ alajaotused

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \ldots < y_r = d,\ u = z_0 < z_1 < \ldots < z_s = v.$$

Siis risttahukas R jaotub *osaristtahukateks*

$$R_{klp} := [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \times [z_{p-1}, z_p] \quad (k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r;\ p = 1, \ldots, s).$$

Niimoodi saadud **alajaotuse** tähistame $T = T[R_{klp}]$, arvu

$$\lambda(T) := \max_{1 \leqslant k \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant r,\ 1 \leqslant p \leqslant s} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2 + (\Delta z_p)^2},$$

kus $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l := y_l - y_{l-1}$ ja $\Delta z_p := z_p - z_{p-1}$, nimetame alajaotuse $T[R_{klp}]$ *diameetriks.*

Olgu $f\colon R \to \mathbb{R}$ funktsioon. Moodustame (fikseeritud alajaotuse T puhul) *integraalsumma*

$$\sigma(T) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{p=1}^{s} f(\xi_k, \eta_l, \zeta_p)\, \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p,$$

kus punkt $\mathbf{X}_{klp} = (\xi_k, \eta_l, \zeta_p)$ on suvaline punkt osaristtahukast R_{klp}.

Definitsioon. Arvu I nimetatakse funktsiooni f *kolmekordseks Riemanni integraaliks* üle risttahuka R, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub niisugune $\delta > 0$, et mistahes alajaotuse $T[R_{klp}]$, korral, mille diameeter $\lambda(T)$ on väiksem kui δ, kehtib punktide $\mathbf{X}_{klp} = (\xi_k, \eta_l, \zeta_p) \in R_{klp}$ suvalise valiku korral võrratus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{p=1}^{s} f(\xi_k, \eta_l, \zeta_p)\, \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p - I \right| < \varepsilon.$$

Sel juhul kirjutatakse

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(T) = I,$$

kolmekordset integraali tähistatakse

$$\iiint_R f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \text{ ehk, lühemalt, } \iiint_R f\, \mathrm{d}\mu.$$

Kui see integraal eksisteerib, siis ütleme, et funktsioon f on (Riemanni mõttes) risttahukas R *integreeruv.*

Nii nagu kahekordse integraali korral on kolme muutuja funktsiooni integreeruvuseks tarvilik tingimus tema tõkestatus, nimelt kehtib järgmine väide.

Lause 11.1. *Iga risttahukas R integreeruv funktsioon f on selles hulgas tõkestatud.*

Olgu $f\colon R \to \mathbb{R}$ tõkestatud funktsioon, siis antud alajaotuse $T = T\left[R_{klp}\right]$ puhul eksisteerivad

$$M_{klp} := \sup_{\mathbf{X}\in R_{klp}} f\left(\mathbf{X}\right) \quad \text{ja} \quad m_{klp} := \inf_{\mathbf{X}\in R_{klp}} f\left(\mathbf{X}\right)$$

suvaliste $k = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, r$ ja $p = 1, \ldots, s$ korral. Moodustame *Darboux' ülem- ja alamsumma*

$$S\left(T\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{p=1}^{s} M_{klp}\Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p \quad \text{ning} \quad s\left(T\right) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\sum_{p=1}^{s} m_{klp}\Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p,$$

seejuures

$$s\left(T\right) \leqslant \sigma\left(T\right) \leqslant S\left(T\right).$$

Tegelikult *ülemsumma $S\left(T\right)$ on integraalsumma $\sigma\left(T\right)$ ülemine raja*, sest punkti $\mathbf{X}_{klp} \in R_{klp}$ valikuga võib funktsiooni väärtuse $f\left(\mathbf{X}_{klp}\right)$ saada kuitahes lähedale arvule M_{klp}. Analoogiliselt on alamsumma $s\left(T\right)$ integraalsumma $\sigma\left(T\right)$ alumine raja. Niisiis, fikseeritud alajaotuse T puhul

$$S\left(T\right) = \sup \sigma\left(T\right) \quad \text{ja} \quad s\left(T\right) = \inf \sigma\left(T\right),$$

kus rajad on võetud üle kõikvõimalike valikute $\mathbf{X}_{klp} \in R_{klp}$ $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, r;\ p = 1, \ldots, s)$.
Darboux' summade põhilised omadused on:
1) alajaotuse peenendamisel ei saa ülemsumma kasvada ega alamsumma kahaneda,
2) ükski alamsumma ei ole suurem ühestki ülemsummast.
Seejuures kehtib järgmine **integreeruvuse kriteerium**.

Teoreem 11.2. *Tõkestatud funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on risttahukas R integreeruv parajasti siis, kui $\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(S\left(T\right) - s\left(T\right)\right) = 0$, s.t.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \lambda\left(T\right) < \delta \Rightarrow S\left(T\right) - s\left(T\right) < \varepsilon.$$

Muuhulgas tuleneb teoreemist 11.2 järgmine oluline fakt.

Teoreem 11.3. *Kui funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on risttahukas R pidev, siis on ta integreeruv.*

Integraal üle suvalise tõkestatud hulga ruumis $\mathbb{R}^3$. Olgu $\Xi \subset \mathbb{R}^3$ tõkestatud hulk, milles on määratud funktsioon f. Valime niisuguse risttahuka $R = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$, et $\Xi \subset R$. Defineerime uue funktsiooni $F\colon R \to \mathbb{R}$ seosega

$$F\left(\mathbf{X}\right) := \begin{cases} f\left(\mathbf{X}\right), & \text{kui } X \in \Xi, \\ 0, & \text{kui } X \in R\diagdown\Xi. \end{cases}$$

Funktsiooni $f\colon \Xi \to \mathbb{R}$ nimetame integreeruvaks hulgas D, kui funktsioon F on risttahukas R integreeruv. Sel juhul

$$\iiint_{\Xi} f\left(x, y, z\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z := \iiint_{R} F\left(x, y, z\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Hulga ruumala ruumis $\mathbb{R}^3$. Definitsioon. Tõkestatud alamhulka $\Xi \subset \mathbb{R}^3$ nimetatakse (Jordani mõttes) *mõõtuvaks*, kui eksisteerib integraal

$$\iiint_{\Xi} \chi_{\Xi}(\mathbf{X})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z =: \mu(\Xi),$$

kus

$$\chi_{\Xi}(\mathbf{X}) := \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathbf{X} \in \Xi, \\ 0, & \text{kui } \mathbf{X} \notin \Xi, \end{cases}$$

on hulga Ξ karakteristlik funktsioon. Arvu $\mu(\Xi)$ nimetatakse sel juhul hulga Ξ *ruumalaks* ehk *Jordani mõõduks.*

Kui Ξ on risttahukas $R := [a,b] \times [c,d] \times [u,v]$, siis suvalise alajaotuse $T = T[R_{klp}]$ korral

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{r} \sum_{p=1}^{s} \Delta x_k \Delta y_l \Delta z_p = (b-a)(d-c)(v-u),$$

seega on $\mu(R) = (b-a)(d-c)(v-u)$.

Muutujate vahetus kolmekordses integraalis põhineb *ruumiliste hulkade regulaarsele teisendusle.* Olgu Π kinnine hulk ruumis $\mathbb{R}^3$, milles on defineeritud funktsioonid

$$x = \xi(u,v,w), \quad y = \eta(u,v,w), \quad z = \zeta(u,v,w). \tag{11.1}$$

Olgu $\Xi := \{(x,y,z) \mid (u,v,w) \in \Pi\}$. Seosed (11.1) määravad teatava teisenduse $T : \Pi \to \Xi$, mida nimetatakse regulaarseks, kui on täidetud järgmised tingimused:
1) T on bijektsioon,
2) funktsioonidel (11.1) on hulgas Π pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi,
3) jakobiaan $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ on nullist erinev, s.t.

$$J(\mathbf{U}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial v}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \xi}{\partial w}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \eta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial v}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \eta}{\partial w}(\mathbf{U}) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \zeta}{\partial v}(\mathbf{U}) & \frac{\partial \zeta}{\partial w}(\mathbf{U}) \end{vmatrix} \neq 0$$

iga $\mathbf{U} \in \Pi$ korral. Ilma tõestuseta esitame siinkohal järgmise väite.

Teoreem 11.4. *Olgu Ξ kinnine mõõtuv hulk ning $\Pi := T^{-1}(\Xi)$, kus T on seostega* (11.1) *määratud regulaarne teisendus. Kui funktsioon $w = f(x,y,z)$ on pidev hulgas Ξ, siis*

$$\iiint_{\Xi} f(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_{\Pi} \Phi(u,v,w) \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w, \tag{11.2}$$

kus $\Phi(u,v,w) := f(\xi(u,v,w), \eta(u,v,w), \zeta(u,v,w))$

Märkus 1. Olgu $L \subset \Xi$ nende punktide hulk, kus teisendus T ei ole regulaarne, eeldame, et $\mu(L) = 0$. Siis leiduvad mõõtuvad hulgad W_n, et $L \subset W_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ja $\lim_n \mu(W_n) = 0$. Kui eeldada, et
1) $\lim\limits_{n} \mu(\Gamma_n) = 0$, kus $\Gamma_n := T^{-1}(W_n)$, ja

2) jakobiaan $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ on tõkestatud hulgas Π,
siis kehtib seos (11.2).

Üleminek silindrilistele koordinaatidele teostatakse teisendusega T, mis on määratud seostega

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty).$$

Kuna

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

siis on T regulaarne igas hulgas Ξ, mis ei sisalda punkti 0, seega

$$\iiint_{\Xi} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z, \tag{11.3}$$

kui $f\colon \Xi \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon. Tegelikult kehtib see valem ka nende hulkade Ξ puhul, mis sisaldavad nullpunkti. Nimelt, kui võtame hulgaks W_n (vt. märkus 1) silindri

$$\left\{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{n},\ \ -\frac{1}{n} \leqslant z \leqslant \frac{1}{n}\right\},$$

siis $\Gamma_n := \left\{(r,\theta,z) \mid 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{n},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ \ -\frac{1}{n} \leqslant z \leqslant \frac{1}{n}\right\}$ on risttahukas ja $\mu(\Gamma_n) = \frac{4\pi}{n^2} \to 0\ (n \to \infty)$. Seega on märkuse tingimus 1) täidetud. Tingimus 2) on täidetud igas tõkestatud hulgas Π. Märkuse 1 kohaselt kehtib valem (11.3) iga mõõtuva hulga Ξ korral.

Üleminek sfäärilistele koordinaatidele toimub teisendusega T, mis on defineeritud seostega

$$x = r\sin\gamma\cos\theta,\ y = r\sin\gamma\sin\theta,\ z = r\cos\gamma\ \ (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi),$$

sel juhul

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\gamma)} = \begin{vmatrix} \sin\gamma\cos\theta & \sin\gamma\sin\theta & \cos\gamma \\ r\cos\gamma\cos\theta & r\cos\gamma\sin\theta & -r\sin\gamma \\ -r\sin\gamma\sin\theta & r\sin\gamma\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\gamma \geqslant 0.$$

Teisendus T ei ole regulaarne z-teljel, kuid saab näidata, et valem

$$\iiint_{\Xi} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Pi} f(r\sin\gamma\cos\theta, r\sin\gamma\sin\theta, r\cos\gamma)\, r^2\sin\gamma\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\gamma$$

kehtib suvalise mõõtuva hulga Ξ korral.

11.2 Kolmekordse integraali arvutamine

Kolmekordse integraali arvutamine taandatakse tavaliselt kahekordse ja ühekordse integraali arvutamisele. Me esitame vastavad väited siinkohal ilma tõestusteta, põhimõtteliselt tõestatakse nad samamoodi, kui vastavad väited kahekordse integraali korral (vrd. pt. 8).

1. Olgu R risttahukas kujul

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$$

tähistame $D_1 := [c, d] \times [u, v]$ ja $D_3 := [a, b] \times [c, d]$, need on risttahuka R projektsioonid vastavalt yz- ning xy-tasandil. Kui funktsioon $w = f(x, y, z)$ on risttahukas R integreeruv, siis kehtivad valemid

$$\iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int\int_{D_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$\iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{D_3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_u^v f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

eeldusel, et kahekordne integraal $\iint_{D_1} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ eksisteerib iga $x \in [a, b]$ korral ja ühekordne integraal $\int_u^v f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$ iga $(x, y) \in D_3$ korral.

2. Vaatleme nüüd üldisemat situatsiooni. Olgu Ξ kahe x-teljega ristuva tasandi $x = a$ ja $x = b$ vahel. Eeldame, et hulga Ξ lõikamisel suvalise tasandiga $x = c$, mis on nende kahe tasandiga paralleelne ja asub nende vahel, tekib kujund, mille projektsioon D_c yz-tasandil on mõõtuv. Sel juhul

$$\iiint_\Xi f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \iint_{D_x} f(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

3. Olgu hulgaks Ξ veelgi üldisem kõversilinder, mis ülalt ja alt on piiratud pindadega $z = \varphi(x, y)$ ja $z = \psi(x, y)$, kus $\psi(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$ iga (x, y) korral hulgast D, milleks projekteerub xy-tasandile kõversilinder Ξ. Seejuures eeldatakse, et iga $(x, y) \in D$ korral eksisteerib ühekordne integraal $\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$. Siis

$$\iiint_\Xi f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

Erijuhul, kui D on kõvertrapets, mis on piiratud joontega $x = a$, $x = b$, $y = \alpha(x)$ ja $y = \beta(x)$, kus $\beta(x) \leqslant \alpha(x)$ iga $x \in [a, b]$ korral, saame kolmekordse integraali arvutamiseks valemi

$$\iiint_\Xi f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} \mathrm{d}y \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z.$$

12 Pindintegraalid

Esmapilgul paistab, nagu peatükis **??** toodud meetodit joone kaare pikkuse (ja seeläbi ka joonintegraali) defineerimisel võiks kergesti üldistada ka pinnatüki pindala ning vastavate integraalide defineerimiseks. Siiski juba aastal 1883 näitas saksa matemaatik H. Schwarz, et selline meetod – fikseerida pinnal mõned punktid, koostada nende põhjal nt. kolmnurkadest hulktahukas ning pinna pindalaks defineerida taoliste hulktahukate pindalade piirväärtus protsessis, kus tahkude diameeter hääbub – ei tööta.

Schwarz jaotas silindri (raadiusega R ja kõrgusega H) kõrguse m võrdseks osaks ning tekkivad $m+1$ ringjoont omakorda m võrdseks kaareks selliselt, et eelmise kihi kaartega võrreldes on järgneva kihi kaared nihutatud poole kaare võrra. Tekkiva tahuka („lõõtspilli“) kogupindala piirväärtus eeldusel $\lim\limits_{m,n\to\infty}\dfrac{m}{n^2}=q$ on $S=2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}q^2+H^2}$. Niisiis võib S saada kuitahes suuri väärtusi, sõltuvalt m ja n^2 suhtest.

Järelikult tuleb pinnatüki pindala defineerida kuidagi teisiti.

12.1 Pinna puutujatasand

Sile pind. Pinda Ω ruumis $\mathbb{R}^3$ esitame järgnevas parameetriliste võrranditega

$$x=\varphi(u,v)\,,\ y=\psi(u,v)\,,\ z=\chi(u,v)\quad(\mathbf{U}=(u,v)\in\Delta)\,, \tag{12.1}$$

kus Δ on mingi ühelisidus piirkond uv-tasandil. Seejuures eeldame, et 1) hulkade Δ ja Ω punktide vahel on bijektiivne vastavus (s.t. pinnal ei ole kordseid punkte) ja 2) nii piirkond Δ kui ka pinnatükk Ω on tõkestatud vastavalt ruumis $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$.

Edasi eeldame, et funktsioonidel φ,ψ ning χ **on hulgas Δ pidevad osatuletised mõlema argumendi järgi.** Kui pinna Ω punkti $\mathbf{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ puhul, mis vastab piirkonna Δ punktile $\mathbf{U}_0=(u_0,v_0)$ (s.t. $\mathbf{X}_0=(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0),\chi(u_0,v_0))$), kõik teist järku determinandid

$$A(\mathbf{U}_0):=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial u}\\ \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v}\end{vmatrix},\quad B(\mathbf{U}_0):=\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial u}\\ \frac{\partial\chi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v}\end{vmatrix},\quad C(\mathbf{U}_0):=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial u} & \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{U}_0)}{\partial v} & \frac{\partial\psi(\mathbf{U}_0)}{\partial v}\end{vmatrix}$$

ei ole korraga nullid, siis ütleme, et $\mathbf{X}_0$ on pinna *harilik punkt.* Kui $A(\mathbf{U}_0)=B(\mathbf{U}_0)=C(\mathbf{U}_0)=0$, siis kõneldakse *iseärasest punktist.*

Definitsioon. Parameetriliste võrranditega (12.1) määratud pinda Ω nimetatakse *siledaks*, kui funktsioonidel φ,ψ ning χ on hulgas Δ pidevad osatuletised mõlema argumendi järgi ja pinnal ei ole iseäraseid punkte.

Edaspidi eeldame tavaliselt, et vaadeldav pind on sile.

Puutujatasand. Olgu $\mathbf{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ pinna Ω harilik punkt, *eeldame, et näiteks* $C=C(\mathbf{U}_0)\neq 0$, kus $\mathbf{U}_0$ on pinna punktile $\mathbf{X}_0$ vastav punkt hulgas Δ. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}\varphi(u,v)-x=0\\ \psi(u,v)-y=0\end{cases} \tag{12.2}$$

ja rakendame sellele teoreemi ilmutamata funktsioonidest (vt. teoreem 5.4). Selle kohaselt saab muutujad u ja v esitada muutujate x ja y funktsioonidena punkti $\mathbf{X}_0$ mingis ümbruses (kontrollige rakendatava teoreemi eelduste täidetust!)✠, seega

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Asendame need u ja v avaldised võrrandisse $z = \chi(u, v)$, saame võrrandi

$$z = \Phi(x, y), \tag{12.3}$$

kus

$$\Phi(x, y) := \chi(u(x, y), v(x, y)). \tag{12.4}$$

Seejuures on funktsioonil Φ pidevad osatuletised mõlema muutuja järgi (põhjendage!)✠, seega on Φ punktis (x_0, y_0) diferentseeruv kahe muutuja funktsioon (lause 3.3). **Kokkuvõttes,** *kui* $C = C(\mathbf{U}_0) \neq 0$, *siis saab pinda* (12.1) *esitada punkti* $\mathbf{X}_0$ *ümbruses võrrandiga* (12.3), tegemist on funktsiooni Φ graafikuga. Kuna Φ on diferentseeruv punktis (x_0, y_0), siis on pinnal Ω punktis $\mathbf{X}_0$ olemas puutujatasand võrrandiga

$$Z - z_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)(X - x_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)(Y - y_0),$$

kus X, Y ja Z on puutujatasandi punkti koordinaadid (vt. pt. 3, punkt 3.2).

Anname sellele võrrandile lihtsama kuju. Seosest (12.4) saame

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{12.5}$$

Diferentseerime võrrandeid (12.2) muutujate x ja y järgi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} - 1 = 0, &\quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, &\quad \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Crameri valemite abil leiame (peame silmas, et $C(\mathbf{U}_0) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{C}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{C}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{C}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \end{aligned}$$

seega (vrd. (12.5))

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{B}{C},$$

mistõttu **puutujatasandi võrrand** punktis $\mathbf{X}_0$ saab kuju

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0) = 0. \tag{12.6}$$

Kui hariliku punkti $\mathbf{X}_0$ puhul $C(\mathbf{U}_0) = 0$, kuid $A(\mathbf{U}_0) \neq 0$ (või $B(\mathbf{U}_0) \neq 0$), saame avaldada u ja v muutujate y ja z (vastavalt x ja z) funktsioonidena. Igal juhul saame puutujatasandi kujul (12.6).

Niisiis, **siledal pinnal on igas tema punktis X olemas pidevalt muutuv puutujatasand, seega ka pidevalt muutuv normaal** (s.o. puutujatasandiga risti olev sirge läbi punkti $\mathbf{X}$), mille sihi määrab ära vektor (A, B, C) (peame silmas, et siin ja edaspidi A, B ja C on muutujate u ja v aga seega ka muutujate x, y ja z funktsioonid).

Pindade klassifikatsioon. Pinnad jagunevad kahte klassi, kahe ja ühe poolega pindadeks. Vaatleme (üldisemalt) pindu Ω, mille igas punktis on olemas pidevalt muutuv puutujatasand, seega ka pidevalt muutuv normaal. Olgu sellisel pinnal fikseeritud mingi **kinnine pidev** joon Γ. Olgu $\mathbf{A}$ mingi punkt joonel Γ, fikseerime selles punktis (kahest võimalikust ühe) konkreetse normaali suuna. Olgu $\mathbf{X}$ punkt, mis lähtub punktist $\mathbf{A}$ ja liigub mööda joont Γ. Anname igas joone punktis $\mathbf{X}$ talle selle normaali suuna, milleks läheb üle punktis $\mathbf{A}$ valitud suund normaali pideval muutumisel punkti liikumisel piki kaart AX. Kui $\mathbf{X}$, läbinud joone Γ, jõuab tagasi punkti $\mathbf{A}$, siis kontrollime tema normaali suunda punktis $\mathbf{A}$. On võimalik, et see on sama, mis startimisel punktist $\mathbf{A}$, seda võimalust on lihtne ette kujutada. On ka teine võimalus, et normaali suund on joone Γ läbimisel muutunud vastupidiseks, selle võimaluse näiteks on tuntud **Möbiuse leht.**

Definitsioon. Pinda, kus mistahes (pinna rajajoont mittelõikava) kinnise joone läbimisel normaali suund ei muutu, nimetame *kahe poolega pinnaks,* teisi pindu aga *ühe poolega pindadeks.*

Märkused. 1. Oluline on märkida, et *kahe poolega pinnal on normaali suund üheselt määratud* järgmises mõttes. Kui pinna Ω mingis punktis $\mathbf{A}$ fikseerida normaali suund ja suvalises punktis $\mathbf{X} \in \Omega$ anda normaalile see suund, millega punktist $\mathbf{A}$ startinud normaal jõuab punkti $\mathbf{X}$ mööda mingit pidevat joont AX liikudes, siis see suund ei sõltu neid punkte ühendavast joonest (põhjendage!)✠.

2. iga sile kordsete punktideta pind Ω on kahe poolega. Olgu Ω sile pind ja olgu α, β ja γ nurgad, mille moodustab pinna normaal punktis $\mathbf{X}$ vastavalt x-, y- ja z-teljega, siis

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ ja}$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(peame silmas, et (A, B, C) ja $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ mõlemad on normaalisihilised vektorid). Sõltuvalt sellest, kumma märgi me ruutjuure ees valime, fikseerime me ühe kindla normaali suuna, seega ühe kindla pinna poole. *Lepime kokku lugeda positiivseks pooleks seda, mis on määratud pluss-märgiga ruutjuure ees.*

3. Kui pind Ω on antud võrrandiga $z = \Phi(x, y)$, siis $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (selgitage!)✠. Pinna positiivsel poolel $\cos\gamma > 0$, seega moodustab normaal z-telje positiivse suunaga teravnurga. Tavaliselt nimetatakse sel juhul pinna positiivset poolt **ülemiseks** pooleks.

4. Kui pind Ω on mingi tõkestatud ühelisidusa ruumilise piirkonna Ξ rajapind, siis ütleme, et pind Ω on **kinnine**. Sel juhul on pinnal kaks poolt, **välimine** ja **sisemine** *pool.*

5. Olgu Ω kahe poolega pind rajajoonega Γ. Kui pinnal on valitud kindel pool, s.t. kindel normaali suund, siis määratakse ***rajajoonel liikumise positiivne suund***. Selleks loetakse suunda, milles mööda rajajoont liikuva sellise vaatleja suhtes, keda pinna normaal läbib jalgade poolt pea suunas, piirkond Ω jääb vasakule.

6. Olgu pind Ω jaotatud lõplikuks arvuks osadeks $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Igal pinnatükil on määratud kindel pool ja seega rajajoone läbimise positiivne suund. Kui kahel pinnatükil on ühine rajajoone osa, siis sellel on **kummagi tüki järgi määratud erinev positiivne suund** (kontrollige!)✠.

12.2 Pinnatüki pindala

Olgu võrranditega (12.1), kus Δ on kinnine mõõtuv ühelisidus piirkond, määratud **sile pind** Ω, eeldame, et **tal ei ole kordseid punkte.** Lisaks eeldame, et Ω on tõkestatud hulk ruumis $\mathbb{R}^3$, s.t. ta sisaldub selle ruumi mingis keras. Jaotame piirkonna Δ tükiti siledate joontega n kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, ..., \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte. Seega oleme piirkonnas Δ teinud alajaotuse, mille tähistame $\widetilde{T} = \widetilde{T}\left[\Delta_1, ..., \Delta_n\right]$. Olgu $\lambda\left(\widetilde{T}\right)$ osapiirkondade $\Delta_1, ..., \Delta_n$ suurim diameeter (meenutame, et hulga Λ diameetriks nimetame arvu $\sup_{\mathbf{Q},\mathbf{Q}'\in\Lambda} \|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\|$).

Igale piirkonnale $\Delta_1, ..., \Delta_n$ vastab punktihulk pinnal, märgime need $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Valime igas pinnaosas Ω_i punkti $\mathbf{X}_i$, **moodustame pinnale Ω punktis X_i puutujatasandi,** projekteerime pinnatüki Ω_i sellele tasandile ning tähistame projektsiooni tähega Ω_i'. Saab näidata, et kuna osapiirkonnad on $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ on mõõtuvad ning Ω on sile pind, siis on ka projektsioonid $\Omega_1', \ldots, \Omega_n'$ mõõtuvad.

Definitsioon. Pinnatüki Ω *pindalaks* nimetatakse piirväärtust

$$\mu\left(\Omega\right) := \lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Omega_i'\right). \tag{12.7}$$

Lõpliku pindalaga pinnatükki nimetatakse *mõõtuvaks.*

Lause 12.1. ***(pinnatüki pindala arvutamine).*** *Tehtud eeldustel kehtib valem*

$$\mu\left(\Omega\right) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v. \tag{12.8}$$

Tõestus. Kõigepealt märgime, et kuna valemis (12.8) integraali märgi all olev funktsioon on pidev, siis see integraal tõepoolest eksisteerib. Valime iga fikseeritud punkti $\mathbf{X}_i \in \Omega_i$ korral uue koordinaatteljestiku alguspunktiga $\mathbf{X}_i$, seejuures paiknegu ξ- ja η-telg punktis $\mathbf{X}_i$ võetud puutujatasandil ning ζ-telg pinna normaali sihis. Olgu pinda Ω kirjeldavad võrrandid uues koordinaadistikus

$$\xi = \xi\left(u, v\right), \ \eta = \eta\left(u, v\right), \ \zeta = \zeta\left(u, v\right). \tag{12.9}$$

Kui $\mathbf{X} = (x, y, z)$ on pinna Ω suvaline punkt ja $\mathbf{X}'$ tema projektsioon punktis $\mathbf{X}_i$ võetud puutujatasandil, siis punkti $\mathbf{X}'$ koordinaadid uues teljestikus on $(\xi, \eta, 0)$. Teeme kahekordses integraalis

$$\mu\left(\Omega_i'\right) = \iint_{\Omega_i'} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

muutujate vahetuse

$$\xi = \xi\left(u, v\right), \ \eta = \eta\left(u, v\right).$$

Saab näidata, et nende seostega määratud teisendus $T\colon \Delta_i \to \Omega_i'$ on regulaarne, kui valida $\lambda\left(\widetilde{T}\right)$ piisavalt väike (selle väite tõestuse jätame vahele!), seega

$$\mu\left(\Omega_i'\right) = \iint_{\Delta_i} |J(u,v)|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v, \tag{12.10}$$

kus $J := \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{vmatrix}$ (vt. valem (10.11)).

Edasiste arutluste hõlbustamiseks toome sisse järgmised vektorid. Pinna Ω suvalise punkti $\mathbf{X} = (x,y,z)$ puhul tähistame $\mathbf{r} := \overrightarrow{\mathbf{0X}}$, kus $\mathbf{0}$ on "vana"teljestiku nullpunkt. Seega $\mathbf{r} = (x,y,z) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) = \mathbf{r}(u,v)$. Defineerime vektorid

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \chi}{\partial u}\right) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \chi}{\partial v}\right)$$

ning paneme tähele, et nende vektorkorrutis avaldub kujul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (A,B,C) \tag{12.11}$$

(kontrollige!)✠. Edasi, olgu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ uute koordinaattelgede sihilised ühikvektorid, tähistame $\mathbf{r}_i := \overrightarrow{\mathbf{0X}_i}$, siis $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + \zeta \mathbf{e}_3$. Kuna vektori $\mathbf{r}_i$ koordinaadid on konstandid, siis uues koordinaadistikus saame $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \eta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial u}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial u}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\mathbf{e}_3$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}, \frac{\partial \eta}{\partial v}, \frac{\partial \zeta}{\partial v}\right) = \frac{\partial \xi}{\partial v}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \zeta}{\partial v}\mathbf{e}_3$. Näitame, et *punktis* $\mathbf{X}_i$ *on* $\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0$. Selleks fikseerime muutuja v, olgu $v := v_i$, kus $\mathbf{X}_i = (\xi(u_i,v_i), \eta(u_i,v_i), \zeta(u_i,v_i))$. Sel juhul kirjeldavad võrrandid (12.9) pinnal Ω asuvat siledat joont, mis läbib punkti $\mathbf{X}_i$. Sellel joonel on punktis $\mathbf{X}_i$ puutuja, mis asub puutujatasandil, ning see puutuja on määratud vektoriga $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$. Järelikult $\frac{\partial \zeta}{\partial u}(u_i,v_i) = 0$, analoogiliselt saadakse $\frac{\partial \zeta}{\partial v}(u_i,v_i) = 0$. See asjaolu teeb oluliselt lihtsamaks vektorite $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ja $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ vektorkorrutise arvutamise punktis $\mathbf{X}_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial u}\mathbf{e}_2\right) \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \eta}{\partial v}\mathbf{e}_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\mathbf{e}_3 = J\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Niisiis, punktis $\mathbf{X} = \mathbf{X}_i$ saame võrduse

$$|J| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|.$$

Suvalise $\mathbf{X} \in \Omega_i$ puhul tähistame $\gamma_i := |J| - \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$ ning paneme tähele, et γ_i on kinnises tõkestatud piirkonnas Δ_i pidev, seega *ühtlaselt pidev* funktsioon (põhjendage!)✠. Suvalise $\varepsilon > 0$ puhul saame seetõttu leida $\delta > 0$, et kui $\lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta$, siis

$$|\gamma_i(\mathbf{X})| = |\gamma_i(\mathbf{X}) - \gamma_i(\mathbf{X}_i)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)} \quad (i = 1, ..., n)$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} |\gamma_i|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\mu(\Delta)}\mu(\Delta_i) = \varepsilon$$

ning seega

$$\lim_{\lambda(\widetilde{T})\to 0} \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} |\gamma_i| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 0. \tag{12.12}$$

Seoste $|J| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| + \gamma_i$, (12.10) ning kahekordse integraali aditiivsuse omaduse tõttu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\Omega_i'\right) &= \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} |J| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} \gamma_i \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \iint_{\Delta} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} \gamma_i \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v, \end{aligned}$$

kust protsessis $\lambda\left(\widetilde{T}\right) \to 0$ saame tänu valemitele (12.7) ja (12.12)

$$\mu\left(\Omega\right) = \iint_{\Delta} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Tänu valemile (12.11) kehtib tõestatav valem (12.8). ■

Valemile (12.8) saab anda pisut teistsuguse kuju, kui tähistada

$$\begin{aligned} E &:= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2, \\ F &:= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v}, \\ G &:= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Nimelt kehtib võrdus

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$$

(kontrollige!)✠, mistõttu valemist (12.8) saame

$$\mu\left(\Omega\right) = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \tag{12.13}$$

Kui pind Ω on antud ilmutatud kujul võrrandiga $z = \Phi\left(x, y\right)$, siis, võttes võrrandid (12.1) kujul

$$x = x, \quad y = y, \quad z = \Phi\left(x, y\right) \qquad \left(\left(x, y\right) \in D\right),$$

saame $A = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $B = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ja $C = 1$ (kontrollige!)✠ ning

$$\mu\left(\Omega\right) = \iint_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

12.3 Pindintegraalid

Me lähtume pinna Ω osas samadest eeldustest, mis olid tehtud eelmises punktis. Niisiis, olgu pind Ω antud võrranditega (12.1), kus Δ on **kinnine** mõõtuv piirkond uv-tasandil, eeldame, et vastavus pinna Ω ja piirkonna Δ punktide vahel on bijektiivne. Teeme piirkonnas Δ alajaotuse $\widetilde{T} = \widetilde{T}[\Delta_1, ..., \Delta_n]$, selleks jaotame piirkonna Δ tükiti siledate joontega n kinniseks mõõtuvaks osapiirkonnaks $\Delta_1, ..., \Delta_n$, millel paarikaupa ei ole ühiseid sisepunkte. Olgu $\lambda\left(\widetilde{T}\right)$ osapiirkondade $\Delta_1, ..., \Delta_n$ suurim diameeter. Igale piirkonnale $\Delta_1, ..., \Delta_n$ vastab punktihulk pinnal, märgime need $\Omega_1, ..., \Omega_n$. Vastavalt tehtud eeldustele on pinnatükid $\Omega_1, ..., \Omega_n$ mõõtuvad (selgitage!)✠.

Olgu $w = f(x, y, z)$ pinnal Ω määratud kolme muutuja funktsioon. Valime igas pinnatükis Ω_i suvaliselt punkti $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, ..., n)$ ja moodustame integraalsumma

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{X}_i)\,\mu(\Omega_i),$$

kus $\mu(\Omega_i)$ on pinnatüki Ω_i pindala.

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right) =: \iint_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =: \iint_{\Omega} f\,\mathrm{d}\mu,$$

siis seda nimetatakse funktsiooni f *esimest liiki pindintegraaliks* (ehk pindintegraaliks pindala järgi) üle pinna Ω.

Lause 12.2. *Olgu funktsioon $w = f(x, y, z)$ pidev siledal kordsete punktideta pinnal Ω, mis on määratud võrranditega* (12.1). *Sel juhul esimest liiki pindintegraal $\iint_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ eksisteerib ning*

$$\iint_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Tõestus. Olgu u_i ja v_i punktile $\mathbf{X}_i$ vastavad parameetrite väärtused ja $\mathbf{Q}_i := (u_i, v_i)$, s.t.

$$\mathbf{X}_i = (\varphi(\mathbf{Q}_i), \psi(\mathbf{Q}_i), \chi(\mathbf{Q}_i)) \quad (i = 1, ..., n).$$

Tähistame $\Phi(u, v) := f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$, siis $\Phi(\mathbf{Q}_i) = f(\mathbf{X}_i)$. Pidades silmas eelmises punktis toodud valemit (12.10), saame

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(\mathbf{Q}_i) \iint_{\Delta_i} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} \Phi(\mathbf{Q}_i)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Vaatleme kahekordset integraali $\iint_{\Delta} \Phi(u, v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =: I$. Kuna funktsioon $\Phi(u, v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ on piirkonnas Δ pidev (selgitage!)✠, siis integraal I tõepoolest on olemas. Kahekordse integraali aditiivsuse omaduse kohaselt

$$I = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} \Phi(u, v)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

niisiis

$$\sigma\left(\widetilde{T}\right) - I = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} \left(\Phi\left(\mathbf{Q}_i\right) - \Phi\left(u,v\right)\right) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{12.14}$$

Funktsioon $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ on piirkonnas Δ tõkestatud (selgitage!)✠, seetõttu eksisteerib $M := \sup_{\mathbf{Q}\in\Delta} \sqrt{A^2+B^2+C^2}$. Olgu ε suvaline positiivne arv. Funktsiooni Φ ühtlase pidevuse tõttu piirkonnas Δ (selgitage!)✠ leidub niisugune $\delta > 0$, et kui $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \Delta$ ja $\|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\| < \delta$, siis $|\Phi(\mathbf{Q}) - \Phi(\mathbf{Q}')| < \frac{\varepsilon}{M\mu(\Delta)}$. Tehes piirkonnas Δ alajaotuse osapiirkondadeks $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ selliselt, et $\lambda\left(\widetilde{T}\right) < \delta$, saame iga $\mathbf{Q} \in \mathbf{\Delta}_i$ korral võrratuse $|\Phi(\mathbf{Q}_i) - \Phi(\mathbf{Q})| < \frac{\varepsilon}{M\mu(\Delta)}$ (miks $\mu(\Delta) > 0$?✠), mistõttu seosest (12.14) tuleneb $\left|\sigma\left(\widetilde{T}\right) - I\right| < \varepsilon$. Teisi sõnu,

$$\lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sigma\left(\widetilde{T}\right) = \iint_{\Delta} \Phi\left(u,v\right) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

■

Enne teist liiki pindintegraali definitsiooni esitamist lepime kokku **pinnatüki projektsioonide pindalade** arvutamise osas koordinaattasanditel. Valime siledal (seega kahe poolega) kahe poolega pinnal Ω selle positiivse poole. Olgu $\Omega_i \subset \Omega$ selline, et tema normaal kogu pinnatüki Ω_i ulatuses *moodustab z-teljega kas tervanurga või nürinurga* (s.t. $\cos\gamma$ ei muuda märki). Projekteerime Ω_i xy-tasandile ja tähistame projektsiooni Ω_i', see on mõõtuv hulk xy-tasandil. Edaspidi varustame tema pindala $\mu\left(\Omega_i'\right)$ kas pluss- või miinusmärgiga. Me *loeme projektsiooni Ω_i' pindala S_i' positiivseks, kui pinnatüki Ω_i normaal moodustab tema igas punktis z-teljega teravnurga (s.t. $\gamma < \pi/2$). Kui see nurk on nürinurk (s.t. $\pi/2 < \gamma < \pi$),* siis *loeme S_i' negatiivseks.* Niisiis,

$$S_i' = \begin{cases} \mu\left(\Omega_i'\right), & \text{kui } \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ -\mu\left(\Omega_i'\right), & \text{kui } \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi. \end{cases}$$

Esimesel juhul $C > 0$, teisel juhul $C < 0$ (vrd. märkus 2).

Vastavalt kahekordse integraali omadustele

$$|S_i'| = \iint_{\Omega_i'} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta_i} |C|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{12.15}$$

(siin $\Delta_i \subset \Delta$ on osapiirkond, mis vastab pinnatükile Ω_i, nende vahel on üksühene vastavus). Põhjendame teist võrdust seostes (12.15). Projektsiooni Ω_i' ja pinnatüki Ω_i punktide vahel on üksühene vastavus (selgitage!)✠, seega on üksühene vastavus ka Ω_i' ja Δ_i punktide vahel. Kuna $C \neq 0$, siis on teisendus

$$x = \varphi\left(u,v\right), \quad y = \psi\left(u,v\right) \quad \left(\left(u,v\right) \in \Delta_i\right)$$

regulaarne (vrd. punkt 10.3), seega selle teisendusega tehtud muutujate vahetus annabki valemi (10.11) kohaselt teise võrduse seostes (12.15). Kahekordne integraal $\iint_{\Delta_i} C\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ on positiivne parajasti siis, kui $C > 0$, seetõttu saame seostest (12.15)

$$S_i' = \iint_{\Delta_i} C\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Selle valemiga defineerime projektsiooni Ω_i' pindala ka üldjuhul, kui pinnatüki Ω_i normaal moodustab oma ühes osas z-teljega teravnurga ja mingis teises osas nürinurga.

Analoogiliselt tähistame pinnatüki Ω_i projektsiooni Ω_i'' ja Ω_i'''vastavalt yz- ja zx-tasandil, ning defineerime nende pindalad vastavalt valemitega

$$S_i'' = \iint_{\Delta_i} A\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad \text{ning} \quad S_i''' = \iint_{\Delta_i} B\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Nüüd jõuame **teist liiki pindintegraalid**e definitsioonini. Tähistame

$$\sigma_1\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f\left(\mathbf{X}_i\right) S_i', \quad \sigma_2\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f\left(\mathbf{X}_i\right) S_i'', \quad \sigma_3\left(\widetilde{T}\right) := \sum_{i=1}^{n} f\left(\mathbf{X}_i\right) S_i'''.$$

Definitsioon. Piirväärtusi

$$\lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sigma_1\left(\widetilde{T}\right) =: \iint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sigma_2\left(\widetilde{T}\right) =: \iint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$\lim_{\lambda\left(\widetilde{T}\right)\to 0} \sigma_3\left(\widetilde{T}\right) =: \iint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \tag{12.16}$$

nimetatakse funktsiooni f *teist liiki pindintegraalideks* (ehk pindintegraalideks projektsioonide järgi) üle pinna Ω.

Definitsioonist ja sellele eelnevast arutelust järeldub, et *pinna poole muutmisel muutub märk teist liiki pindintegraali ees*, samal ajal esimest liiki pindintegraal ei sõltu pinna poole muutmisest.

Lause 12.3. *Olgu Ω sile pind ja olgu kolme muutuja funktsioon $w = f\left(x,y,z\right)$ pidev pinnal Ω. Siis eksisteerivad pindintegraalid* (12.16) *ning kehtivad valemid*

$$\iint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \Phi\left(u,v\right) C\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad \iint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Delta} \Phi\left(u,v\right) A\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$
$$\iint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_{\Delta} \Phi\left(u,v\right) B\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

kus $\Phi\left(u,v\right) := f\left(\varphi\left(u,v\right), \psi\left(u,v\right), \chi\left(u,v\right)\right)$.

Tõestus. Kui asendada lause 12.2 tõestuses avaldis $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ vastavalt funktsioonidega C, A ja B, siis kordab nimetatud tõestus sõna-sõnalt käesoleva lause tõestust. ■

Märkused. 7. Nii esimest kui ka teist liiki pindintegraalidel on kõik "tavalised" integraalide omadused (nagu vastavatel joonintegraalidelgi), muuhulgas aditiivsuse omadus: kui pind Ω koosneb osadest Ω_1 ja Ω_2, siis pindintegraalide $\int\int_{\Omega_1}$ ja $\iint_{\Omega_2}$ olemasolust järeldub integraali $\iint_{\Omega}$ olemasolu, kusjuures $\iint_{\Omega} = \iint_{\Omega_1} + \iint_{\Omega_2}$.

NB! Esimest liiki pindintegraal on monotoonne ning tema jaoks kehtib sändvitšiteoreem. Teist liiki pindintegraalil pole kumbagi omadust, kuna ta muudab märki pinna poole muutmisel.

8. Eeldame, et Ω on selline silinderpind, mille moodustajad on risti xy-tasandiga. Siis $\iint_\Omega f(x,y,z)\,dxdy = 0$ (selgitage!)✠.

Tavaliselt vaadeldakse teist liiki pindintegraali kolme integraali summa kujul:

$$\begin{aligned}&\iint_\Omega F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + H\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\ &:= \iint_\Omega F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_\Omega G\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_\Omega H\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

seejuures eeldame, et F, G ja H on pinnal Ω pidevad funktsioonid.

12.4 Ostrogradski valem

Järgnevalt sõnastame ja tõestame Greeni valemi kolmemõõtmelise analoogi. Ka tõestus on analoogiline, ainult joonintegraalid tuleb asendada pindintegraalidega.

Teoreem 12.4 (Ostrogradski valem)**.** *Olgu $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ lahtine ühelisidus piirkond ja olgu $\Xi \subset \mathcal{G}$ kinnine hulk, mille rajapind on tükiti sile. Kui $F, G, H\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ on sellised pidevad funktsioonid, millel on hulgas $\mathcal{G}$ pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ ja $\frac{\partial H}{\partial z}$, siis kehtib valem*

$$\iiint_\Xi \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_\Omega F\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + G\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{12.17}$$

Tõestus. Tõestame Ostrogradski valemi juhul, kui keha Ξ saab jagada kõigis kolmes mõõtmes lõplikuks arvuks kõversilindriteks, mille moodustajad on risti xy, xz ja yz tasandiga.

Vaatleme kõigepealt ühe kõversilindri juhtumit. Olgu D kinnine mõõtuv piirkond xy-tasandil ja olgu $\rho, \chi\colon D \to \mathbb{R}$ sellised pidevalt diferentseeruvad kahe muutuja funktsioonid, et

$$\chi(x,y) \leqslant \rho(x,y) \text{ kõikide } (x,y) \in D \text{ puhul.}$$

Olgu D rajajoon tükiti sile. Olgu Ω_1 ja Ω_2 vastavalt funktsiooni ρ ja χ graafik kolmemõõtmelises ruumis, nad määravad selles ruumis kõversilindri Ξ. Tähistame veel tähega Ω_3 kõversilindri külgpinna.

Olgu piirkonnas Ξ määratud pidev funktsioon $w = H(x,y,z)$, millel on pidev osatuletis $\frac{\partial H}{\partial z}$. Kolmekordse integraali arvutamise valemite kohaselt

$$\begin{aligned}\iiint_\Xi \frac{\partial H}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\chi(x,y)}^{\rho(x,y)} \frac{\partial H}{\partial z}\,\mathrm{d}z\\ &= \iint_D H(x,y,\rho(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &- \iint_D H(x,y,\chi(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \iint_{\Omega_1} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{\Omega_2} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kus pindintegraalid on võetud üle pindade Ω_1 ja Ω_2 **ülemise** (s.o. positiivse) **poole**. Seega saame võrduse

$$\iiint_{\Xi} \frac{\partial H}{\partial z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega_1} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\underline{\Omega_2}} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kus $\iint_{\underline{\Omega_2}}$ tähendab, et see integraal on võetud üle pinna Ω_2 **alumise poole**. Kuna kõversilindri külgpind Ω_3 on risti xy-tasandiga, siis

$$\iint_{\Omega_3} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

seepärast võime kirjutada

$$\begin{aligned}\iiint_{\Xi} \frac{\partial H}{\partial z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_{\Omega_1} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\underline{\Omega_2}} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Omega_3} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Omega} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

kus Ω on ruumilise piirkonna Ξ rajapind ning viimane pindintegraal on võetud üle pinna Ω **välimise** poole. Nii nagu Greeni valemi tõestamisel, saab ka siin veenduda, et saadud valem

$$\iiint_{\Xi} \frac{\partial H}{\partial z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} H \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kus **pindintegraal on võetud üle pinna Ω välimise poole**, kehtib kõigi niisuguste piirkondade Ξ korral, mida saab esitada lõpliku arvu selliste kõversilindrite ühendina, mille moodustajad on risti xy-tasandiga.

Analoogiliselt, kui $w = F(x, y, z)$ ja $w = G(x, y, z)$ on pidevad funktsioonid piirkonnas Ξ ja neil on selles piirkonnas pidevad osatuletised $\frac{\partial F}{\partial x}$ ning $\frac{\partial G}{\partial y}$, kusjuures Ξ saab esitada lõpliku arvu selliste kõversilindrite ühendina, mille moodustajad on risti vastavalt yz- ja zx-tasandiga, siis kehtivad valemid

$$\iiint_{\Xi} \frac{\partial F}{\partial x} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} F \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$\iiint_{\Xi} \frac{\partial G}{\partial y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Omega} G \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

ka siin võetakse pindintegraalid üle rajapinna Ω välimise poole. Liites saadud kolm valemit, saamegi valemi (12.17). ■

Ostrogradski valem on Greeni valemi (ja ka Newton-Leibnizi valemi) kolmemõõtmeline variant.

Intuitiivselt öeldes väljendab Ostrogradski valem tõdemust, et kui summeerida keha Ξ kõigist punktidest väljuv voog, siis saadud tulemus võrdub vooga läbi Ξ rajapinna.

Me demonstreerime võimalust, kuidas Ostrogradski valemi abil saab arvutada keha ruumala. Valime funktsioonid F, G ja H nii, et

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 1, \tag{12.18}$$

siis võrduse (12.17) vasak pool kirjeldab keha Ξ ruumala $\mu(\Xi)$, tähendab

$$\mu(\Xi) = \iint_\Omega F\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + G\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + H\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kus **pindintegraal võetakse üle rajapinna välimise poole.** Paneme tähele, et tingimus (12.18) on täidetud järgmistel juhtudel:
(*a*) $F(x,y,z) := x,\ \ G := H := 0;$
(*b*) $G(x,y,z) := y,\ \ F := H := 0;$
(*c*) $H(x,y,z) := z,\ \ F := G := 0;$
(*d*) $F(x,y,z) := \frac{1}{3}x,\ G(x,y,z) := \frac{1}{3}y,\ H(x,y,z) := \frac{1}{3}z.$
Vastavalt neile juhtudele saame ruumala arvutamiseks valemid

$$\begin{aligned} &\mu(\Xi) = \iint_\Omega x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \ \mu(\Xi) = \iint_\Omega y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \\ &\mu(\Xi) = \iint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ \ \text{ja} \ \ \mu(\Xi) = \frac{1}{3}\iint_\Omega x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

12.5 Stokesi valem

Teoreem 12.5 (Stokesi valem)**.** *Olgu sidus pind $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ selline, mida saab siledate joontega jaotada lõplikuks arvuks siledateks tükkideks nii, et neid tükke saab esitada võrranditega $z = \Phi(x,y)$, $y = \Psi(z,x)$ ja $x = \Upsilon(y,z)$. Olgu $F, G, H\colon \Omega \to \mathbb{R}$ pidevad ning olgu osatuletised $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$, $\frac{\partial H}{\partial x}$ ja $\frac{\partial H}{\partial y}$ samuti pidevad. Siis kehtib **Stokesi valem***

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y + H\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Tõestus. Vaatleme kõigepealt olukorda, kus Ω on antud võrrandiga

$$z = \Phi(x,y) \quad ((x,y) \in D),$$

kus D on kinnine mõõtuv piirkond xy-tasandil. Eeldame, et pind Ω on sile, siis eksisteerivad pidevad osatuletised $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ ja $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ kogu piirkonnas D. Olgu $\partial\Omega$ pinna Ω rajajoon ja ∂D piirkonna D rajajoon. Paneme tähele, et kui ∂D on määratud võrranditega

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t) \qquad (t \in [\alpha,\beta]),$$

siis ruumiline joon $\partial\Omega$ määratakse võrranditega

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ z = \Phi(\varphi(t), \psi(t)) \qquad (t \in [\alpha,\beta]).$$

Eeldame, et ∂D on sile joon, siis ka $\partial\Omega$ on sile joon (põhjendage!)✠.

Valime pinnal Ω ülemise (ehk positiivse) poole. Olgu $\mathbf{X}' = (x,y)$ joone ∂D punkt, mis läbib selle joone positiivses suunas. Siis talle vastav punkt $\mathbf{X} := (x, y, \Phi(x,y))$ joonel $\partial\Omega$ läbib selle joone samuti positiivses suunas (selgitage!)✠. Moodustame funktsiooni F teist liiki joonintegraalid üle joonte $\partial\Omega$ ja ∂D, paneme tähele, et mõlemad joonintegraalid (üks ruumiline ja teine tasandiline) võrduvad ühe ja sama Riemanni integraaliga:

$$\int_{\partial\Omega} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t),\psi(t),\Phi(\varphi(t),\psi(t)))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial D} F(x,y,\Phi(x,y))\,\mathrm{d}x$$

(kontrollige!)✠. Kui rakendame *tasandilisele* joonintegraalile Greeni valemit, siis saame

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x &= \int_{\partial D} F(x,y,\Phi(x,y))\,\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}F(x,y,\Phi(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial F(x,y,\Phi(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial F(x,y,\Phi(x,y))}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \frac{\partial F(x,y,\Phi(x,y))}{\partial z}B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D \frac{\partial F(x,y,\Phi(x,y))}{\partial y}C\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Viimase võrduse põhjenduseks märgime, et

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial y}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} & 0\end{vmatrix} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1.$$

Arvestades lauset 12.3, jõuame siit valemini

$$\int_{\partial\Omega} F\,\mathrm{d}x = \iint_\Omega \frac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \frac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{12.20}$$

Valem jääb kehtima ka siis, kui pinda Ω saab siledate joontega jagada lõplikuks arvuks sellisteks siledateks tükkideks, mis on esitatavad võrrandiga $z = \Phi(x,y)$.

Olgu $w = G(x,y,z)$ ja $w = H(x,y,z)$ pinnal Ω pidevad funktsioonid, millel on pidevad osatuletised $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial z}$, $\frac{\partial H}{\partial x}$ ja $\frac{\partial H}{\partial y}$. Kui pind Ω koosneb lõplikust arvust siledatest tükkidest, mida saab kirjeldada võrranditega vastavalt $y = \Psi(x,z)$ ja $x = \Upsilon(y,z)$, siis analoogiliselt valemiga (12.20) kehtivad

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} G\,\mathrm{d}y &= \iint_\Omega \frac{\partial G}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{\partial G}{\partial z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \\ \int_{\partial\Omega} H\,\mathrm{d}z &= \iint_\Omega \frac{\partial H}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{\partial H}{\partial x}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

kus ruumilised joonintegraalid vasakul pool võrdusmärki on võetud mööda pinna rajajoont $\partial\Omega$ positiivses suunas. Nende kolme valemi liitmisel saamegi valemi 12.19. ■

Diferentsiaalgeomeetrias formuleeritakse Stokesi valem väga üldisel kujul (muutkondade ja välistuletiste keeles), mille lihtsateks konkreetseteks rakendusteks on nii Newton-Leibnizi, Greeni, Ostrogradski kui ka just tõestatud Stokesi valem 12.19.

12.6 Väljateooria elemente

Olgu Ω tükiti sile mõõtuva ruumilise keha E rajapind. Vektorvälja $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ (NB! ei ole osatuletised!) *voog* (*flux*) W_Ω läbi pinna Ω (kehast E välja) avaldub (Ostrogradski valemi järgi) seosega

$$W_\Omega := \iint_\Omega F_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + F_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_E \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Vaatleme nüüd kõikvõimalikke mõõtuvaid tükiti sileda rajapinnaga Ω ruumilisi kehi E nii, et $\mathbf{M} \in E$. Vaatleme iga keha E korral voogu W_Ω läbi tema rajapinna Ω. Voo erinemine nullist viitab sellele, et kehas E on allikaid või neelukohti, s.t. punkte, kus osakesed/vedelik/kiirgus/...(konkreetsuse mõttes edaspidi: vedelik) siseneb ruumi (allikad) või väljub sellest (neelukohad). Voo suurus määrab ära allikate ja neelukohtade summaarse algebralise võimsuse, see tähendab, vedeliku ruumala, mille ta eraldab (neelab) ajaühikus, niisiis „midagi“ sekundi kohta. (Neelukohta võib vaadelda kui negatiivse võimsusega allikat.)

Voo suhet ruumalasse $\frac{W_\Omega}{V_E}$, kus $V_E = \iiint_E \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ on keha E ruumala, nimetatakse kehas E sisalduvate allikate *keskmiseks erivõimsuseks*. Mida väiksem on V_E, seda lähemal on erivõimsuse keskmine väärtus erivõimsuse tõelisele väärtusele selles punktis.

Piirväärtust
$$\lim_{E\to\mathbf{M}} \frac{W_\Omega}{V_E},$$
kus protsess $E \to \mathbf{M}$ tähistab koondumist $\sup\{\|\mathbf{Q}-\mathbf{M}\| : \mathbf{Q}, \mathbf{M} \in E,\ E \text{ on mõõtuv}\} \to 0$, nimetatakse vektorvälja $\vec{F}$ *divergentsiks* (*divergence*) punktis $\mathbf{M}$ ning tähistatakse $\left(\operatorname{div} \vec{F}\right)(\mathbf{M})$.

Divergents antud punktis iseloomustab, kuidas käitub aine punkti lõpmata väikeses ümbruses. Näiteks kui aine paisub, on divergents positiivne (punkti ümbritsevast igast pisikesest kehast voolab ainet välja, punkt on allikas), kokkutõmbumisel on aga negatiivne (punkt on neel).

Divergentsi arvutusvalemi annab järgmine lause.

Lause 12.6. *Kui* $\frac{\partial F_x}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ *ja* $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ *on pidevad punkti* $\mathbf{M}$ *mingis ümbruses, siis*
$$\left(\operatorname{div} \vec{F}\right)(\mathbf{M}) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(\mathbf{M}) + \frac{\partial F_y}{\partial y}(\mathbf{M}) + \frac{\partial F_z}{\partial z}(\mathbf{M}).$$

Tõestus. Iseseisvalt!✠, kasutades lauset 9.2. ■

Kujutleme nüüd, et vedelik asub peenikeses (konstantse ristlõikega) torus, milles asub **lihtne kinnine joon** Γ. Vedelikku mõjutab kiirusvektorväli $\vec{F}$ ning seetõttu on vedelik kanalis kas paigal või liigub selles (tsirkuleerib) ühes suunas kahest võimalikust. Olgu F_ℓ vektori $\vec{F}$ tangentsiaalkomponent (puutujale tõmmatud projektsiooni pikkus).

Vedeliku liikumise mõõduks valime järgmise suuruse. Vektorvälja $\vec{F}$ *tsirkulatsiooniks* (*circulation*) piki kontuuri Γ nimetatakse esimest liiki joonintegraali
$$\int_\Gamma F_\ell \,\mathrm{d}s = \overline{F_\ell} \cdot \ell,$$
kus $\overline{F_\ell}$ on tangentsiaalkomponendi keskmine väärtus kogu kontuuri ulatuses ning ℓ on kontuuri Γ pikkus. Tsirkulatsiooni dimensioon on meetri ruut sekundi kohta.

Tsirkulatsioon iseloomustab välja omadusi, keskmistatult kontuuri Γ läbimõõduga ligikaudu võrdsete mõõtmetega piirkonna kohta. Et iseloomustada välja omadusi antud punktis $\mathbf{M}$, tuleb kontuuri mõõtmeid vähendada, tõmmates ta kokku punktiks $\mathbf{M}$. Selliselt tegutsedes muutub aga tsirkulatsioon nulliks, sest $\ell \to 0$. Analoogiliselt divergentsi leidmisega, jagame läbi kontuuri poolt ümbritsetud pinna pindalaga.

Vaatleme kõikvõimalikke mõõtuvaid tükiti sileda rajajoonega Γ tasandilisi pindu D nii, et $\mathbf{M} \in D$. Vaatleme iga pinna D korral tsirkulatsiooni C_Γ piki D rajajoont Γ.

Vektorvälja $\vec{F}$ *rootoriks* (*curl*) punktis $\mathbf{M}$ nimetatakse vektorit $\operatorname{rot} \vec{F}$, mille projektsioon kontuuri Γ poolt piiratud pinna positiivsele normaalile on

$$\lim_{D \to \mathbf{M}} \frac{C_\Gamma}{\mu(D)}. \tag{12.21}$$

Valides pinnad D järjest kõigi koordinaattasandite rihis, saame rootori koordinaadid. Näiteks pindade valik yz-tasandi rihis annab protsessis (12.21) $\operatorname{rot} \vec{F}$ x-koordinaadi jne.

Saab näidata, et

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)(\mathbf{M}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}(\mathbf{M}) - \frac{\partial F_y}{\partial z}(\mathbf{M}), \frac{\partial F_x}{\partial z}(\mathbf{M}) - \frac{\partial F_z}{\partial x}(\mathbf{M}), \frac{\partial F_y}{\partial x}(\mathbf{M}) - \frac{\partial F_x}{\partial y}(\mathbf{M})\right).$$

Kujutleme punkti $\mathbf{M}$ väikese kõva kerakesena. Vektorvälja rootor $\operatorname{rot} \vec{F}$ punktis $\mathbf{M}$ iseloomustab, kuidas hakkab see kerake pöörlema, kui talle mõjub jõuväli $\vec{F}$. Niisiis mõõdab rootor vektorvälja pööriselisust.

12.7 Ruumilise joonintegraali sõltumatus integreerimisteest

Lepime kõigepealt kokku nimetada sidusat ruumilist piirkonda Ξ **pinnaliselt ühelisidusaks,** kui iga selles piirkonnas oleva kinnise joone korral leidub selline pind, mis asub täielikult selles piirkonnas ning mille rajajooneks on vaadeldav kinnine joon. Näiteks kontsentriliste kerade vaheline piirkond on pinnaliselt ühelisidus, seevastu piirkond, mis jääb kahe ühise teljega silindri vahele, ei rahulda seda tingimust.

Vaatleme ruumilist joonintegraali

$$\int_{AB} F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y + H\,\mathrm{d}z, \tag{12.22}$$

kus $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on punktid lahtises pinnaliselt ühelisidusas piirkonnas Ξ ja AB on mingi neid punkte ühendav joon. Meie eesmärk on veenduda, et tingimused

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{12.23}$$

on tarvilikud ja piisavad selleks, et integraali (12.22) väärtus ei sõltu punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendavast integreerimisteest. Tõestuse viime läbi kahes etapis.

$\mathbf{1}^0$. Näitame, et integraal (12.22) on integreerimisteest sõltumatu parajasti siis, kui

$$\int_L F\,\mathrm{d}x + G\,\mathrm{d}y + H\,\mathrm{d}z = 0 \text{ iga lihtsa kinnise joone } L \subset \Xi \text{ puhul.} \tag{12.24}$$

Tingimuse (12.24) *tarvilikkus* tõestatakse täpselt samuti, kui lemma 10.2 tarvilikkus. Eeldame, et integraal (12.22) ei sõltu integreerimisteest, vaid ainult punktidest $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$. Olgu $L \subset \Xi$ lihtne kinnine joon, valime sellel kaks punkti $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$, need jaotavad joone L kaheks kaareks L_1 ja L_2. Kui võtame neil mõlemal suuna punktist $\mathbf{A}$ punkti $\mathbf{B}$ poole, siis eelduse kohaselt $\int_{L_1} = \int_{L_2}$. Ruumilise joonintegraali aditiivsuse omaduse kohaselt saame seose $\int_L = \int_{L_1} + \int_{\overleftarrow{L_2}} = \int_{L_1} - \int_{L_2} = 0$ (siin nool märgib integreerimise suunda punktist $\mathbf{B}$ punkti $\mathbf{A}$ poole), s.t. kehtib (12.24).

Piisavuse kontrollimiseks eeldame, et punktid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ on ühendatud piirkonnas Ξ kahe lihtsa joonega L_1 ja L_2. Ruumilise juhu eeliseks tasandilise juhuga võrreldes on see, et me võime võtta piirkonnas Ξ sellise kolmanda joone L_3, mis mõlema joonega L_1 ja L_2 lõikub vaid punktides $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$: kui võtta mingi jooni L_1 ja L_2 läbiv pind (mis pinnalise ühelisidususe eelduse kohaselt eksisteerib), siis valime suvalise punkte $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ ühendava lihtsa joone väljaspool seda pinda. Eelduse (12.24) kohaselt kehtivad võrdused

$$\int_{L_1} + \int_{\overleftarrow{L_3}} = 0, \quad \int_{L_2} + \int_{\overleftarrow{L_3}} = 0,$$

millest saamegi soovitava võrduse $\int_{L_1} = \int_{L_2}$.

2^0. Näitame, et tingimused (12.23) kehtivad parajasti siis, kui

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0, \tag{12.25}$$

Stokesi valemist saame siis ka tingimuste (12.23) ja (12.24) samaväärsuse.

Selge, et tingimustest (12.23) järeldub (12.25). Vastupidise implikatsiooni tõestamiseks eeldame, et kehtib võrdus (12.25) ja fikseerime suvalise punkti $\mathbf{A} = (a, b, c) \in \Xi$ ning sellise kinnise kera

$$\overline{U}_r(\mathbf{A}) := \left\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{A}\| \leqslant r\right\}$$

(keskpunktiga $\mathbf{A}$ ja raadiusega r), mis asub piirkonnas Ξ. Võtame seoses (12.25) pinnaks Ω selle ringi D_r, mis tekib kera $\overline{U}_r(\mathbf{A})$ ja tasandi $z = c$ lõikumisel. Siis kaks esimest pindintegraali seoses (12.25) on võrdsed nulliga (põhjendage!)✠, mistõttu saame

$$\iint_{D_r} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0,$$

kus $H(D_r) := \iint_{D_r} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ on kahekordne integraal. Leiame funktsiooni H tuletise punktis $\mathbf{A}$, see on $\frac{dH}{dD_r} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$ (vrd. lause 9.2). Kuna $H(D_r) = 0$ iga $r > 0$ korral, siis $\frac{dH}{dD_r} = 0$ punktis $\mathbf{A}$, järelikult $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$ kogu piirkonnas Ξ. Teised võrdused tingimuses (12.23) saadakse analoogiliselt.

13 Parameetrist sõltuvad integraalid

Selles paragrahvis vaatleme me funktsioone F, mis on esitatud kujul

$$F(x) := \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t, \tag{13.1}$$

kus **integraal võib olla kas tavaline Riemanni integraal või päratu integraal.**

13.1 Parameetrist sõltuva Riemanni integraali omadused

Olgu funktsioon f määratud kinnises ristkülikus

$$R := [a,b] \times [c,d] := \{(x,t) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant t \leqslant d\}.$$

Eeldame, et funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on pidev, siis osafunktsioon

$$f_x : [c,d] \to \mathbb{R},\ \ t \mapsto f(x,t) \tag{13.2}$$

on iga $x \in [a,b]$ korral samuti pidev, järelikult ka integreeruv. Seega on seosega (13.1) määratud funktsioon $F\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$. Järgnevalt **uurime selle funktsiooni pidevust, integreeruvust ja diferentseeruvust.**

Lause 13.1. *Kui kahe muutuja funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on pidev, siis ka funktsioon $F\colon\ [a,b] \to R$ on pidev.*

Tõestus. Fikseerime suvalise punkti $x_0 \in [a,b]$ ning näitame, et F on selles punktis pidev. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Kuna Cantori teoreemi (vt. lause 2.6) kohaselt on f ristkülikus R ühtlaselt pidev, siis saab valida sellise $\delta > 0$, et kui $\mathbf{X} = (x,t)$ ja $\mathbf{X}_0 = (x_0,t_0)$ on ristküliku R punktid omadusega $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (t-t_0)^2} < \delta$, siis kehtib võrratus

$$|f(x,t) - f(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Seega, kui $|x - x_0| < \delta$, siis iga $t \in [c,d]$ korral $|f(x,t) - f(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ (kontrollida!)✠ ning

$$\begin{aligned}|F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_c^d f(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_c^d |f(x,t) - f(x_0,t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{d-c}(d-c) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Niisiis on F pidev punktis x_0. ■

Lause 13.2. *Kui kahe muutuja funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ on pidev, siis*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Tõestus. Rakendame järeldust 8.22. ■

Lause 13.3. *Olgu funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ pidev ja olgu tal ristkülikus R pidev osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$. Siis funktsioon F on lõigus $[a,b]$ pidevalt diferentseeruv ja*

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t. \tag{13.3}$$

Tõestus. Kõigepealt märgime, et $G(x) := \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$ eksisteerib iga $x \in [a,b]$ korral (põhjendada!)✠. Lauset 13.2 silmas pidades arvutame

$$\begin{aligned}\int_a^x G(u)\ \mathrm{d}u &= \int_a^x \left(\int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}u = \int_c^d \left(\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\ \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_c^d (f(x,t) - f(a,t))\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a),\end{aligned}$$

seega

$$F(x) = \int_a^x G(u)\ \mathrm{d}u + F(a) \quad (x \in [a,b]).$$

Siit saame

$$F'(x) = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x G(u)\ \mathrm{d}u\right) = G(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t,$$

kusjuures lause 13.1 põhjal on F' pidev lõigus $[a,b]$ (selgitada!)✠. ■

Valemit (13.3) nimetatakse tihti **Leibnizi valemiks.** Järgnevalt tõestame ka selle valemi üldisema variandi, kus rajad on muutuvad.

Lause 13.4. *Olgu funktsioon $f\colon R \to \mathbb{R}$ pidev ja olgu tal ristkülikus R pidev osatuletis $\frac{\partial f}{\partial x}$. Olgu diferentseeruvad funktsioonid $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sellised, et $c \leqslant \alpha(x) \leqslant \beta(x) \leqslant d$ iga $x \in [a,b]$ korral. Siis funktsioon F, kus $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$, on lõigus $[a,b]$ pidevalt diferentseeruv ja*

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t + f(x,\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x,\alpha(x)) \cdot \alpha'(x). \tag{13.4}$$

Tõestus. Anname argumendile x muudu Δx. Tähistame $\Delta\alpha = \alpha(x+\Delta x) - \alpha(x)$ ja $\Delta\beta = \beta(x+\Delta x) - \beta(x)$. Saame võrduse (veenduge!✠)

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f(x+\Delta x,t) - f(x,t))\,\mathrm{d}t + \int_{\beta(x)}^{\beta(x)+\Delta\beta} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t - \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x)+\Delta\alpha} f(x+\Delta x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Kahele viimasele integraalile rakendame integraalarvutuse I keskväärtusteoreemi, leiame arvud ξ_1 ja ξ_2 arvude $\alpha(x)$ ja $\alpha(x)+\Delta\alpha$ ning $\beta(x)$ ja $\beta(x)+\Delta\beta$ vahelt nii, et

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f(x+\Delta x,t) - f(x,t))\,\mathrm{d}t + \Delta\beta f(x+\Delta x,\xi_2) - \Delta\alpha f(x+\Delta x,\xi_1)$$

(selgitage!✠).

Jagades Δx-ga ja minnes piirile $\Delta x \to 0$ (paneme ka tähele, et $\xi_1 \to a$ ja $\xi_2 \to b$), saamegi otsitava võrduse (selgitage!✠). ■

13.2 Parameetrist sõltuvad päratud integraalid

Selles punktis vaatleme seosega (13.1) määratud funktsioone F, kus vastav **integraal on päratu.** Teatavasti on kahte tüüpi päratuid integraale: *lõpmatute rajadega integraal* ja *integraal tõkestamata funktsioonist* ehk vastavalt esimest ja teist liiki päratu integraal. Märgime, et **teist liiki päratu integraali $\int_c^d g(t)\ \mathrm{d}t$ saab sobiva muutujavahetuse abil teisendada esimest liiki päratuks integraaliks.** Kui g on punkti d ümbruses tõkestamata ja pidev poollõigus $[c,d)$, siis defineerime $z := \frac{1}{d-t}$, kust $t = d - \frac{1}{z}$. Sel juhul $\mathrm{d}t = \frac{dz}{z^2}$ ning me saame esialgse integraali kujul $\int_{\frac{1}{d-c}}^{\infty} g\left(d - \frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} dz$. Lihtne on kontrollida (iseseisvalt!✠), et kui koondub üks vaadeldavast kahest päratust integraalist, siis koondub ka teine.

Eelnevat märkust silmas pidades käsitleme me siin parameetrist $x \in [a,b]$ sõltuvat päratut integraali vaid kujul

$$F(x) := \int_c^{\infty} f(x,t)\ \mathrm{d}t \tag{13.5}$$

ja **rõhutame tema väga olulist sarnasust funktsionaalridadega** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, seda nii probleemiasetuste kui ka lahendusmeetodite osas.

Olgu kahe muutuja funktsioon f määratud hulgas

$$D := [a,b] \times [c,\infty) = \{(x,t) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant t < \infty\}.$$

Kui iga $x \in [a,b]$ korral päratu integraal $\int_c^{\infty} f(x,t)\ \mathrm{d}t$ on koonduv, siis öeldakse, et päratu parameetrist sõltuv integraal (13.5) *koondub punktiviisi* lõigus $[a,b]$. Sel juhul $\lim\limits_{l\to\infty} \displaystyle\int_l^{\infty} f(x,t)\ \mathrm{d}t = 0$ iga $x \in [a,b]$ korral, s.t.

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists l_0 = l_0(x,\varepsilon) > c : l > l_0 \Rightarrow \left| \int_l^{\infty} f(x,t)\ \mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Sarnaselt funktsionaalridadega defineerime integraalide (13.5) jaoks **ühtlase koonduvuse parameetri x suhtes.**

Definitsioon. Öeldakse, et parameetrist x sõltuv punktiviisi koonduv päratu integraal (13.5) *koondub lõigus* $[a,b]$ *ühtlaselt*, kui

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists l_0 = l_0(\varepsilon) > c : l \geqslant l_0 \Rightarrow \left| \int_l^{\infty} f(x,t)\ \mathrm{d}t \right| < \varepsilon \text{ iga } x \in [a,b] \text{ korral.}$$

Ilmselt on ühtlane koonduvus tugevam tingimus kui punktiviisi koonduvus (selgitage!)✠.

NB! Järgnevalt eeldame, et **iga $l \in [c,\infty)$ ja $x \in [a,b]$ korral leidub Riemanni integraal $\int_c^l f(x,t)\,\mathrm{d}t$.**

Tõestame kõigepealt päratu integraali jaoks Cauchy kriteeriumi. (Seda ei tehtud kursuses „Matemaatiline analüüs III".)

Lause 13.5. *(Cauchy kriteerium päratu integraali koonduvuseks.) Olgu $g\colon [c,\infty) \to \mathbb{R}$ mingi selline funktsioon, et iga $l \geqslant c$ korral eksisteerib $\int_c^l g(t)\,\mathrm{d}t$. Päratu integraal $\int_c^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ koondub parajasti siis, kui kehtib Cauchy tingimus*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists l_0 \geqslant c \quad : \quad \forall l, l' \quad l, l' \geqslant l_0 \Rightarrow \left| \int_l^{l'} g(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

Tõestus. Koondugu $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t =: I$. Siis võrratused

$$\left|\int_l^{l'} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_c^l g(t)\,\mathrm{d}t - I\right| + \left|\int_c^{l'} g(t)\,\mathrm{d}t - I\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

selgitavad, miks kehtib Cauchy tingimus. (Põhjendage!✠).

Kehtigu Cauchy tingimus. Tähistame $G(l) = \int_c^l g(t)\,\mathrm{d}t$. Koostame kasvava jada (l_n) nii, et $(G(l_n))$ oleks Cauchy arvjada. Valime $l_1 \geqslant c$ nii, et $\forall l, l'$ jaoks kehtib

$$l, l' \geqslant l_1 \quad \Rightarrow \quad |G(l) - G(l')| < 1.$$

Kui meil juba on mingi l_n, siis valime $l_{n+1} \geqslant l_n$ nii, et iga l, l' jaoks kehtib

$$l, l' \geqslant l_{n+1} \quad \Rightarrow \quad |G(l) - G(l')| < \frac{1}{n+1}.$$

Nüüd on $(G(l_n))$ Cauchy jada ja seega koonduv (selgitage!✠). Sealjuures (l_n) on kasvav jada.

Olgu $I := \lim_n G(l_n)$. Näitame, et $I = \lim_{l\to\infty} G(l)$.

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Teadaolevalt leidub $N_1 \in \mathbb{N}$ nii, et iga naturaalarvu n jaoks

$$n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad |G(l_n) - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Valime $N_2 \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Siis iga l, l' jaoks kehtib Cauchy tingimuse tõttu

$$l, l' \geqslant l_{N_2} \quad \Rightarrow \quad |G(l) - G(l')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu $N := \max\{N_1, N_2\}$. Kehtigu $l \geqslant l_N$. Siis

$$|G(l) - I| \leqslant |G(l) - G(l_N)| + |G(l_N) - I| < \varepsilon,$$

nagu soovitud. ■

Märgime, et lause 13.5 on tegelikult järeldus üldisemast väitest, mida saab tõestada samal viisil: *täielikus meetrilises ruumis pere on koonduv parajasti siis, kui ta on Cauchy pere*. Siin Cauchy pereks nimetatakse peret (x_α), mille korral kehtib tingimus

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\alpha_0 \quad : \quad \alpha, \alpha' \succcurlyeq \alpha_0 \Rightarrow |x_\alpha - x_{\alpha'}| < \varepsilon.$$

Järgnev lause näitab, et päratu integraali absoluutsest koonduvusest järeldub tema koonduvus. Täpselt sama omadus on juba tõestatud arvridade jaoks. Esitame sellele lausele kaks tõestust. (Mõlemad kopeerivad vastava arvridade lause tõestust.)

Lause 13.6. *Koondugu päratu integraal $\int_c^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t$. Siis päratu integraal $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ koondub.*

Tõestus. Koondugu päratu integraal $\int_c^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t$. Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$, siis Cauchy kriteeriumi (lause x) tõttu leidub l_0 nii, et

$$l, l' \geqslant l_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_l^{l'} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_l^{l'} |g(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Cauchy kriteeriumi (lause 13.5) kohaselt päratu integraal $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ koondub. ■

Tõestus. Koondugu päratu integraal $\int_c^\infty |g(t)|\,\mathrm{d}t$, siis päratute integraalide võrdluslause tõttu koondub ka päratu integraal $\int_c^\infty (g(t) + |g(t)|)\,\mathrm{d}t$, kuna

$$0 \leqslant g(t) + |g(t)| \leqslant 2|g(t)|, \qquad t \in [c, \infty).$$

Kuna $\int_c^l g(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^l (g(t) + |g(t)|)\,\mathrm{d}t - \int_c^l |g(t)|\,\mathrm{d}t$ ning mõlemast liidetavast eksisteerib lõplik piirväärtus protsessis $l \to \infty$, siis koondub ka päratu integraal $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Lause 13.7. *(Cauchy kriteerium parameetrist sõltuva päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks.) Parameetrist sõltuv päratu integraal $F(x) := \int_c^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ koondub lõigus $[a, b]$ ühtlaselt parajasti siis, kui*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists l_0 \quad \forall x \in [a, b] \quad l, l' \geqslant l_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_l^{l'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

Tõestus. Koondugu antud päratu integraal ühtlaselt funktsiooniks $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Cauchy tingimuse kehtivuse tõestus toimub samamoodi nagu lauses 13.5.

Kehtigu Cauchy tingimus. Iga fikseeritud $x \in [a, b]$ korral on tegu päratu integraaliga, mis Cauchy kriteeriumi tõttu koondub. Tähistame saadava piirfunktsiooni tähega F. Niisiis on meil olemas päratu integraali $\int_c^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ punktiviisi koonduvus funktsiooniks F. Näitame, et koonduvus on ühtlane. Fikseerime $\varepsilon > 0$ ning olgu l_0 selline, et iga $x \in [a, b]$ korral

$$l, l' \geqslant l_0, \quad \Rightarrow \quad \left|\int_l^{l'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Minnes siin iga fikseeritud $x \in X$ korral piirile protsessis $l \to \infty$, saame integraali monotoonsust ja aditiivsust piirkonna järgi kasutades, et

$$l \geqslant l_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_c^l f(x,t)\,\mathrm{d}t - F(x)\right| = \left|\int_l^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Saime ühtlase koonduvuse (l_0 sõltub ainult arvust ε). ■

Lause. (Weierstrassi koonduvustunnus). Olgu $g\colon [c, \infty) \to \mathbb{R}$ selline ühe muutuja funktsioon, et päratu integraal $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ koondub. Kui

$$|f(x,t)| \leqslant g(t) \quad \text{iga } x \in [a, b] \text{ ja } t \in [c, \infty) \text{ korral,} \tag{13.6}$$

siis päratu integraal $\int_c^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ koondub ühtlaselt lõigus $[a, b]$.

Tõestus. Päratute integraalide võrdluslause põhjal tuleneb tingimusest (13.6), et integraal $\int_c^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$ koondub iga $x \in D$ korral (selgitage!✠). Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Integraali $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ koonduvusest järeldub, et leidub $l_0 \geqslant c$ omadusega

$$l, l' \geqslant l_0 \quad \Rightarrow \quad \int_l^{l'} g(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon,$$

mistõttu

$$\left|\int_l^{l'} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_l^{l'} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_l^{l'} g(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon \quad \text{iga } x \in [a,b] \text{ korral,}$$

kui $l, l' \geqslant l_0$. Lause xx põhjal on päratu integraal $\int_c^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ lõigus $[a,b]$ ühtlaselt koonduv. ■

Märkus. Weierstrassi tunnuse tõestust saab tõestada ka, kasutades Cauchy kriteeriumi asemel lauset a. See toimub nii, et integraali $\int_c^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ koonduvusest järeldatakse sellise $l_0 \geqslant c$ olemasolu, et

$$l \geqslant l_0 \quad \Rightarrow \int_l^\infty g(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Päratute integraalide võrdluslause põhjal iga $x \in [a,b]$ korral koondub ka $\int_c^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$. Lause a põhjal koondub niisiis iga $x \in [a,b]$ korral (st. punktiviisi) ka $\int_c^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ (piirfunktsiooniks F). Lisaks sellele kehtib hinnang

$$l \geqslant l_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\int_l^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_l^\infty |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_l^\infty g(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Saadud tulemus näitab, et parameetrist sõltuv päratu integraal $\int_c^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ koondub piirfunktsiooniks F ühtlaselt lõigus $[a,b]$.

Järgnevalt **tõestame selle paragrahvi põhitulemused,** mis kirjeldavad parameetrist sõltuva päratu integraali (13.5) pidevust, integreeruvust ja diferentseeruvust. Ilmneb täielik analoogia funktsionaalridade vastavate teoreemidega.

Teoreem 13.8. ***(päratu parameetrist sõltuva integraali pidevus).*** *Olgu $f\colon D \to \mathbb{R}$ pidev kahe muutuja funktsioon ning koondugu integraal* (13.5) *ühtlaselt lõigus* $[a,b]$. *Siis funktsioon $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev.*

Tõestus. Näitame, et F on pidev suvalises punktis $x_0 \in [a,b]$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Hindame vahet $F(x) - F(x_0)$, kui $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_c^\infty (f(x,t) - f(x_0,t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_c^d (f(x,t) - f(x_0,t))\,\mathrm{d}t + \int_d^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_d^\infty f(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_c^d |f(x,t) - f(x_0,t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_d^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_d^\infty f(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right|. \quad (13.7) \end{aligned}$$

Kasutades eeldust ühtlase koonduvuse kohta, saame leida niisuguse $l_0 > c$, et kui $l \geqslant l_0$, siis

$$\left|\int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ iga } x \in [a,b] \ \text{korral.}$$

Fikseerime $d \geqslant l_0$ ning moodustame ristküliku $R := [a,b] \times [c,d]$. Cantori teoreemi kohaselt on funktsioon f hulgas R ühtlaselt pidev (põhjendada!)✠. Seetõttu on võimalik valida niisugune $\delta > 0$, et

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| < \frac{\varepsilon}{3(d-c)}, \text{ kui } |x - x_0| < \delta \text{ ja } t \in [c,d]$$

(põhjendada!)✠. Võrratusest (13.7) saame nüüd

$$|F(x) - F(x_0)| \leqslant \int_c^d \frac{\varepsilon}{3(d-c)}\ \mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ kui } |x - x_0| < \delta.$$

(kontrollida!)✠. Seega on F pidev punktis x_0. ∎

Teoreem 13.9. ***(päratu parameetrist sõltuva integraali integreeruvus).*** *Olgu* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *pidev kahe muutuja funktsioon ning koondugu integraal* (13.5) *ühtlaselt lõigus* $[a,b]$. *Siis funktsioon* $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on integreeruv ja*

$$\int_a^b \left(\int_c^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t. \tag{13.8}$$

Tõestus. Teoreemi 13.8 kohaselt on funktsioon F lõigus $[a,b]$ pidev, seega ka integreeruv, mistõttu vasakpoolne integraal seoses (13.8) eksisteerib. Kasutades lauset 13.2, saame suvalise $l > c$ korral seose

$$\begin{aligned}
\int_c^l \left(\int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t &= \int_a^b \left(\int_c^l f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_c^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t - \int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\int_c^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x - \int_a^b \left(\int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{13.9}$$

Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Integraali ühtlase koonduvuse kohaselt saame valida $l_0 > c$ nii, et

$$\left|\int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ kui } l \geqslant l_0 \text{ ja } x \in [a,b]$$

(kontrollida!)✠. Siis

$$\left|\int_a^b \left(\int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|\int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\ \mathrm{d}t = \varepsilon,$$

tähendab, $\lim_{l\to\infty} \int_a^b \left(\int_l^\infty f(x,t)\ \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = 0$. Seega saame protsessis $l \to \infty$ võrdustest (13.9) seose (13.8). Teoreem on tõestatud. ∎

Teoreem 13.10. ***(päratu parameetrist sõltuva integraali diferentseeruvus).*** *Olgu* f *ja tema osatuletis* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *pidevad kahe muutuja funktsioonid hulgas* D *ning koondugu integraal* (13.5) *punktiviisi lõigus* $[a,b]$. *Kui integraal* $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$ *koondub ühtlaselt lõigus* $[a,b]$, *siis funktsioon* $F\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$ *on pidevalt diferentseeruv ja kehtib Leibnizi valem*

$$F'(x)=\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Tõestus. Tähistame $G(x):=\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$ ($x\in[a,b]$) ja paneme tähele, et $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ on pidev funktsioon (selgitada!)✠. Seetõttu teoreemist 13.9 tuleneb

$$\begin{aligned}\int_a^x G(u)\ \mathrm{d}u &= \int_a^x\left(\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\ \mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u=\int_c^\infty\left(\int_a^x \frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\ \mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_c^\infty (f(x,t)-f(a,t))\ \mathrm{d}t=F(x)-F(a)\end{aligned}$$

ehk $F(x)=\int_a^x G(u)\ \mathrm{d}u+F(a)\quad (x\in[a,b])$. Diferentseerides saame

$$F'(x)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_a^x G(u)\ \mathrm{d}u=G(x)=\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t,$$

seejuures on $F':[a,b]\to\mathbb{R}$ teoreemi 13.8 põhjal pidev funktsioon. ■

Märkus. Lisame siia märkuse *teist liiki* parameetrist sõltuvate päratute integraalide kohta. Olgu $D':=[a,b]\times[c,d)$ ja $f\colon D'\to\mathbb{R}$ selline kahe muutuja funktsioon, et päratu integraal $\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}t$ koondub iga $x\in[a,b]$ korral. Siis saame funktsiooni $F\colon\ [a,b]\to\mathbb{R}$, mis on määratud seosega $F(x):=\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}t$. Me ütleme, et parameetrist x sõltuv päratu integraal $\int_c^d f(x,t)\ \mathrm{d}t$ on ühtlaselt koonduv lõigus $[a,b]$, kui

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0: d-\delta\leqslant l<d\Rightarrow\left|\int_l^d f(x,t)\ \mathrm{d}t\right|<\varepsilon \text{ iga } x\in[a,b] \text{ korral.}$$

Sellest definitsioonist lähtudes võime tõestada teoreemidega 13.8 - 13.10 analoogilised väited teist liiki integraalide kohta. Alternatiivne võimalus nende tulemuste saamiseks on punkti alguses märgitud muutujavahetus, millega teisendatakse teist liiki päratud integraalid esimest liiki integraalideks.

13.3 Näited

1. Vaatleme integraali

$$F(\alpha):=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t, \tag{13.10}$$

seejuures *lepime kokku, et punktis* $t=0$ *on integraalialuse funktsiooni väärtus 1* (s.t. tegemist on kõrvaldatud katkevusega; peame silmas, et $\lim_{t\to 0} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}=1$). **Näitame, et see integraal koondub ühtlaselt parameetri** α **suhtes poolteljel** $[0,\infty)$.

Kõigepealt jõuame kaks korda ositi integreerides seoseni

$$\int e^{-\alpha t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-\alpha t}(\alpha\sin t+\cos t)}{1+\alpha^2}+C =: L(\alpha,t)+C$$

(kontrollida!)✠, seejuures

$$|L(\alpha,t)| \leqslant \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} \leqslant 2 \quad (\alpha \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$$

(veenduda!)✠. Hindame integraali $\int_l^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (l>0)$. Fikseeritud $\alpha \geqslant 0$ korral saame (jällegi ositi integreerides)

$$\left|\int_l^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{L(\alpha,t)}{t}\Big|_l^\infty + \int_l^\infty \frac{L(\alpha,t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|L(\alpha,l)|}{l} + \int_l^\infty \frac{|L(\alpha,t)|}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \frac{2}{l} + 2\int_l^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{4}{l}.$$

Siit tuleneb integraali $F(\alpha)$ ühtlane koonduvus poolteljel $[0,\infty)$. Nimelt, suvalise $\varepsilon > 0$ puhul valime $l_0 > \frac{4}{\varepsilon}$, siis kehtib võrratus

$$\left|\int_l^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon \ \text{ suvalise } l \geqslant l_0 \text{ ja } \alpha \in [0,\infty) \text{ korral.}$$

2. Integraali (13.10) kasutame integraali

$$F := \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

arvutamiseks, selleks rakendame teoreemi 13.8. Integraalialune funktsioon $e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}$ on pidev hulgas $\{(\alpha,t) \mid \alpha \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ (kontrollida!✠; meenutame kokkulepet väärtuse kohta juhul $t=0$). Kuna integraal (13.10) koondub ühtlaselt poolteljel $[0,\infty)$, siis võib minna piirile integraali märgi all:

$$F = F(0) = \lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha).$$

Et leida seda piirväärtust, peame kõigepealt leidma $F(\alpha)$, selleks arvutame esialgu $F'(\alpha)$. Teoreemi 13.10 abil (veenduda, et selle eeldused on täidetud!)✠ saame

$$F'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

(kontrollida!)✠, niisiis

$$F(\alpha) = -\int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\arctan\alpha + C. \tag{13.11}$$

Leiame konstandi C väärtuse. Paneme tähele, et

$$|F(\alpha)| \leqslant \int_0^\infty \left|e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

iga $\alpha > 0$ korral, seega $\lim_{\alpha\to\infty} |F(\alpha)| = 0$ ehk $\lim_{\alpha\to\infty} F(\alpha) = 0$. Seosest (13.11) saame $C = \lim_{\alpha\to\infty} \arctan\alpha = \frac{\pi}{2}$. Niisiis,

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha,$$

millest tuleneb

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\alpha\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Vaatleme veel integraali

$$K(\beta) := \int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\,\mathrm{d}t \quad (\beta\in\mathbb{R}).$$

Kui $\beta > 0$, saame muutujavahetusega $\beta t =: u$ võrduse $K(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$, analoogiliselt saame juhul $\beta < 0$ võrduse $K(\beta) = -\frac{\pi}{2}$. Niisiis,

$$K(\beta) = \int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{kui } \beta > 0, \\ 0, & \text{kui } \beta = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{kui } \beta < 0. \end{cases}$$

Selle valemi abil saame signum-funktsioonile sgn β integraalse esituse

$$\operatorname{sgn}\beta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

13.4 Euleri integraalid

Me vaatleme integraale

$$\mathbf{B}(a,b) := \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$$

ning

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t, \tag{13.12}$$

mida nimetatakse vastavalt *beetafunktsiooniks* ja *gammafunktsiooniks* ehk *Euleri esimest ja teist liiki integraaliks*. Allpool näeme, et beetafunktsiooni saab esitada gammafunktsiooni abil.

A. Beetafunktsiooni omadused

1^0. Kõigepealt leiame *funktsiooni* $\mathbf{B}(a,b)$ *määramispiirkonna*, s.t. need parameetrite väärtused, mil vastav päratu integraal koondub. Paneme tähele, et kui $a \geqslant 1$ ja $b \geqslant 1$, siis on tegemist tavalise Riemanni integraaliga. Juhul $a < 1$ on integreeritav funktsioon tõkestamata punkti 0 ümbruses, juhul $b < 1$ aga punkti 1 ümbruses. Seetõttu vaatleme integraalide summat $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$. Pidades silmas võrratusi

$$\frac{1}{t^{1-a}} < \frac{(1-t)^{b-1}}{t^{1-a}} \leqslant \frac{\frac{1}{2^{b-1}}}{t^{1-a}} \quad \left(t\in\left(0,\frac{1}{2}\right],\quad a,b<1\right)$$

ja

$$\frac{\frac{1}{2^{b-1}}}{t^{1-a}} \leqslant \frac{(1-t)^{b-1}}{t^{1-a}} < \frac{1}{t^{1-a}} \quad \left(t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad a < 1, \ b \geqslant 1\right),$$

näeme, et esimene integraal koondub (suvalise b puhul) parajasti siis, kui koondub integraal $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}\,\mathrm{d}t$ (selgitada!)✠, s.t. juhul $a > 0$ (põhjendada!)✠. Analoogiline arutelu annab teise integraali koonduvuseks tarviliku ja piisava tingimuse $b > 0$. Niisiis, *beetafunktsioon* $\mathbf{B}(a,b)$ *koondub parajasti siis, kui* $a > 0$ *ja* $b > 0$. **Järgnevalt eeldamegi, et need tingimused on täidetud.**

2^0. Lihtne on veenduda, et $\mathbf{B}(a,b) = \mathbf{B}(b,a)$ (kontrollida!)✠.

3^0. Olgu $b > 1$. Ositi integreerides saame

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(a,b) &= \int_0^1 (1-t)^{b-1}\, d\frac{t^a}{a} = \left.\frac{t^a(1-t)^{b-1}}{a}\right|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 t^a (1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b-1}{a}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-2}\,\mathrm{d}t - \frac{b-1}{a}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b-1}{a}\mathbf{B}(a,b-1) - \frac{b-1}{a}\mathbf{B}(a,b)\end{aligned}$$

ehk

$$\mathbf{B}(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\mathbf{B}(a,b-1) \quad (a > 0, \ b > 1).$$

Nii võib parameetri b väärtust vähendades jõuda valemini

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(a,n) &= \frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a+1}\mathbf{B}(a,1) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)\,a}\end{aligned} \tag{13.13}$$

(peame silmas, et $\mathbf{B}(a,1) = \int_0^1 t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$). Seega

$$\mathbf{B}(m,n) = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!} \quad (m,n = 2,3,\ldots).$$

See valem kehtib ka juhul $m = 1$ või $n = 1$, kui defineerida $0! := 1$.

4^0. Leiame **beetafunktsiooni teise kuju.** Teeme muutujavahetuse $t := \frac{u}{1+u}$, siis $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}$ ja

$$\mathbf{B}(a,b) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+b}}\,\mathrm{d}u. \tag{13.14}$$

Juhul $0 < a < 1$ saame valemi

$$\mathbf{B}(a,1-a) = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

5^0. **Seos kaht tüüpi Euleri integraalide vahel.** Lähtume seosest (13.12) ja teeme selles muutujavahetuse $t := su$, kus $s > 0$. Saame valemi

$$\frac{\mathbf{\Gamma}(\alpha)}{s^\alpha} = \int_0^\infty e^{-su}u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u. \tag{13.15}$$

Kirjutame selles s asemel $1+s$ ning α asemel $a+b$:

$$\frac{\mathbf{\Gamma}(a+b)}{(1+s)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-(1+s)u}u^{a+b-1}\,\mathrm{d}u.$$

Korrutame viimase võrduse mõlemat poolt arvuga s^{a-1} ning integreerime muutuja s järgi rajades 0-st ∞-ni:

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{s^{a-1}}{(1+s)^{a+b}}ds = \int_0^\infty ds\int_0^\infty e^{-(1+s)u}u^{a+b-1}s^{a-1}\,\mathrm{d}u.$$

Kui $a, b > 1$, siis parempoolses avaldises tohib muuta integreerimise järjekorda (selle fakti põhjendust me siin ei esita), sel juhul saame seost (13.15) kasutades

$$\Gamma(a+b)\,\mathbf{B}(a,b) = \int_0^\infty e^{-u}u^{a+b-1}\left(\int_0^\infty e^{-us}s^{a-1}ds\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty e^{-u}u^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)}{u^a}\,\mathrm{d}u$$
$$= \Gamma(a)\int_0^\infty e^{-u}u^{b-1}\,\mathrm{d}u = \Gamma(a)\,\Gamma(b).$$

Kokkuvõttes oleme saanud valemi

$$\mathbf{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (a > 1,\ b > 1).$$

B. Gammafunktsiooni omadused

1^0. Gammafunktsiooni **määramispiirkonna leidmiseks** kirjutame ta kahe päratu integraali summana $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$. Esimeses liidetavas on integreeritav funktsioon juhul $\alpha < 1$ punkti 0 ümbruses tõkestamata. Võrdluslause ning võrratuste

$$\frac{e^{-1}}{t^{1-\alpha}} \leqslant \frac{e^{-t}}{t^{1-\alpha}} < \frac{1}{t^{1-\alpha}} \quad (t \in (0,1],\ \alpha > 0)$$

abil veendume, et integraal $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ koondub parajasti siis, kui $\alpha > 0$ (selgitada!)✠. Teine integraal koondub suvalise α korral. Tõepoolest, kuna $\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{\alpha+1} = 0$ (kontrollida!)✠, siis leidub niisugune (parameetrist α sõltuv) konstant M, et $e^{-t}t^{\alpha+1} \leqslant M$ ehk $e^{-t}t^{\alpha-1} \leqslant \frac{M}{t^2}$ $(t \geqslant 1)$, mistõttu integraal $\int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ koondub kõikide $\alpha \in \mathbb{R}$ puhul. Kokkuvõttes *gammafunktsioon* $\Gamma(\alpha)$ *koondub, kui* $\alpha > 0$. **Järgnevas eeldame, et see tingimus on täidetud.**

2^0. **Gammafunktsioonil on olemas suvalist järku pidev tuletis** $\Gamma^{(n)}(\alpha)$ määramispiirkonnaga $(0,\infty)$. Selle tõestamiseks rakendame teoreemi 13.10. Integraalialust funktsiooni parameetri α järgi diferentseerides saame intervallis $(0,\infty)$ pideva funktsiooni $e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t$.

Kontrollime, et integraal $\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ koondub ühtlaselt igas lõigus $[\alpha_0,\alpha_1]$, kus $0<\alpha_0<\alpha_1$. Selleks vaatleme eraldi integraale $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ ja $\int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t$. Nende ühtlase koonduvuse tõestamiseks rakendame Weierstrassi koonduvustunnust 13.2.

Esimese integraali ühtlaseks koonduvuseks lõigus $[\alpha_0,\alpha_1]$ vaatleme algul juhtu $\alpha_0\geqslant 1$. Siis iga $\alpha\geqslant\alpha_0$ korral

$$\left|e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\right|\leqslant t^{\alpha_0-1}\left|\ln t\right|\leqslant\left|\ln t\right|\quad(t\in(0,1])\,,$$

kusjuures

$$\int_0^1\left|\ln t\right|\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}t=1.$$

Weierstrassi koonduvustunnusese põhjal saame soovitud ühtlase koonduvuse lõigus $[\alpha_0,\alpha_1]$. Vaatleme nüüd juhtu $0<\alpha_0<1$. Valime $\beta\in(1-\alpha_0,1)$ ja $\mu:=\alpha_0-1+\beta$, siis $\mu>0$ ja

$$\frac{t^{\alpha-1}\ln t}{\frac{1}{t^\beta}}=t^\mu\ln t\to 0,\ \text{kui } t\to 0+$$

(kontrollida!)✠. Seega leidub selline $\delta>0$, et

$$\left|\frac{t^{\alpha_0-1}\ln t}{t^{-\beta}}\right|\leqslant 1\ \text{iga } t\in(0,\delta)\ \text{korral}$$

ehk

$$t^{\alpha_0-1}\left|\ln t\right|\leqslant\frac{1}{t^\beta}\quad(t\in(0,\delta))\,.$$

Kuna $\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\beta}$ koondub ja

$$\left|e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\right|\leqslant\frac{1}{t^\beta}\quad(0<t\leqslant\delta,\ \alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1)\,,$$

siis integraal $\int_0^\delta e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t$, aga seega ka integraal $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ koondub ühtlaselt lõigus $[\alpha_0,\alpha_1]$.

Teise integraali puhul saame fikseerida niisuguse konstandi $M>0$, et

$$\left|e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\right|\leqslant e^{-t}t^{\alpha_1}\leqslant\frac{M}{t^2}\quad(\alpha\leqslant\alpha_1,\ 1\leqslant t<\infty)\,.$$

Kuna integraal $\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ koondub, siis $\int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t$ koondub ühtlaselt lõigus $[\alpha_0,\alpha_1]$. Teoreemi 13.10 kohaselt on funktsioon Γ igas punktis $\alpha\in(0,\infty)$ pidevalt diferentseeruv ja

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

Analoogiliselt saame tuletised $\Gamma''(\alpha)\,,\Gamma'''(\alpha)$ jne., kusjuures

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln^n t\,\mathrm{d}t.$$

3^0. Taandamisvalem. Ositi integreerides saame

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha\,\mathrm{d}t=-e^{-t}t^\alpha\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t=\alpha\Gamma(\alpha)$$

(põhjendada!)✠, s.t.

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \text{ iga } \alpha > 0 \text{ korral.}$$

Seda valemit korduvalt rakendades jõuame gammafunktsiooni taandamisvalemini

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,\Gamma(\alpha-n+1), \text{ kus } \alpha > n-1.$$

Pidades silmas, et $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$ (veenduda!)✠, saame juhul $\alpha = n$ valemi

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Näeme, et gammafunktsiooni võib vaadelda faktoriaali üldistusena.

4^0. Euler-Gaussi valem. Teeme integraalis (13.12) muutujavahetuse $t = \ln\frac{1}{u}$, siis

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}u \tag{13.16}$$

(kontrollida!)✠. Kasutame seost

$$\ln\frac{1}{u} = \lim_n n\left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right)$$

(põhjendada!)✠, millest (tänu integraali (13.16) ühtlasele koonduvusele) saame

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n n^{\alpha-1} \int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha-1} \mathrm{d}u.$$

Kui minna üle muutujale w seosega $u = w^n$, jõuame seoseni

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n n^\alpha \int_0^1 w^{n-1}(1-w)^{\alpha-1}\,dw = \lim_n n^\alpha \mathbf{B}(n,\alpha)$$

ehk (vrd. (13.13))

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n n^\alpha \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}.$$

Seda valemit nimetatakse Euler-Gaussi valemiks.

5^0. Gammafunktsiooni käigu uurimine. Me teame juba, et funktsiooni Γ määramispiirkond on $(0,\infty)$. Selles hulgas on Γ pidev funktsioon ja tal on suvalist järku pidevad tuletised. Paneme tähele, et $\Gamma''(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\ln^2 t\,\mathrm{d}t > 0$ iga $\alpha \in (0,\infty)$ puhul (veenduda!)✠, seega on Γ' kasvav funktsioon ning tal saab olla vaid üks nullkoht. Et see nullkoht α_0 tõepoolest (arvude 1 ja 2 vahel) eksisteerib, selgub võrdusest $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ja Rolle'i teoreemist (selgitada!)✠. Et $\Gamma''(\alpha_0) > 0$, siis on funktsioonil Γ punktis α_0 globaalne miinimum (põhjendada!)✠. Teise tuletise positiivsus tähendab funktsiooni graafiku nõgusust. Kuna

$$\lim_{\alpha\to 0+}\Gamma(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} = \infty$$

(selgitada!)✠, siis vertikaaltelg on gammafunktsiooni graafiku püstasümptoot. Saab näidata, et teisi asümptoote graafikul ei ole.

Näited. 4. Integraali $\int_0^\infty \frac{\sqrt[5]{t}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ saab esitada valemi (13.14) järgi kujul $\int_0^\infty \frac{t^{\frac{6}{5}-1}}{(1+t)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}}\,\mathrm{d}t = \mathbf{B}\left(\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma\left(\frac{4}{5}\right)$ (kontrollida!)✠.

5. Integraali

$$F := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi d\varphi$$

arvutamiseks teeme muutujavahetuse $t := \sin^2\varphi$, saame (kontrollida!)✠

$$F = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a}{2}-1}(1-t)^{\frac{b}{2}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathbf{B}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}.$$

6. Siinkohal võtame tõestuseta teadmiseks nn. *Euleri peegeldusvalemi*:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad 0 < a < 1.$$

Sellele valemile „elementaarset“ tõestust ei ole leitud. (Kõige lühemad tõestused kasutavad kompleksmuutuja funktsioonide aparatuuri või lõpmatuid korrutisi.)

14 Fourier' read

Selles ja järgmises peatükis vaatleme **kompleksväärtustega** (reaalmuutuja) funktsioone. Funktsiooni piirväärtuse ja pidevuse ε-δ-keelsed nõuded jäävad kõik samaks, ainult absoluutväärtus asendub vajalikes kohtades mooduliga. Ka diferentseeruvus tähendab harilikul viisil lõpliku tuletise olemasolu; tuletis on defineeritud piirväärtuse kaudu. (**NB!** Kompleks**muutuja** funktsioonide juures on diferentseeruvuse mõiste keerukam ning taolisel juhul nii lihtsalt üldistada ei saa.)

Funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ korral kirjutame $f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$, kus $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, niisiis $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Öeldakse, et funktsioon f on **integreeruv** lõigus $[a, b]$, kui u ja v on integreeruvad lõigus $[a, b]$, kusjuures sel juhul $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$. (Sama definitsiooni kasutame ka päratute integraalide jaoks: näiteks päratu integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvus tähendab mõlema päratu integraali $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,\mathrm{d}x$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$ koonduvust.) Sel moel kanduvad kompleksväärtustega funktsioonidele üle kõik reaalväärtustega funktsioonide Riemanni integraali (ja päratu integraali) omadused.

14.1 Trigonomeetriline süsteem

Funktsioonide esitamine mingi **koonduva funktsionaalrea summana** on levinud meetod funktsioonide omaduste uurimisel. Tavaliselt püütakse funktsiooni f esitada kujul

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

kus $\Phi := \{\varphi_k \mid k = 0, 1, \ldots\}$ on mingi lihtsate või heade omadustega funktsioonide loenduv süsteem ning (c_k) on teatav funktsiooniga f määratud arvjada. Selline probleemiasetus on meile tuttav Taylori ridade puhul, sel juhul koosnes süsteem Φ funktsioonidest $1, x, x^2, x^3, \ldots$ ja esituses

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (x \in D)$$

olid astmerea kordajad c_k antud valemiga $c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Astmerea oluline eelis on, et tema koonduvuspiirkond D on lihtsa struktuuriga hulk, puuduseks aga see, et niisuguse esitusega funktsioonide klass on suhteliselt kitsas. Seetõttu on kasutusel hulgaliselt teisi koonduvussüsteeme Φ. Neist tuntuim ja kõige enam uuritud on *trigonomeetriline süsteem*

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots\}.$$

Rida

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{14.1}$$

kus $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ on mingid konstandid (summas $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ jäetakse sulud tavaliselt kirjutamata), nimetatakse *trigonomeetriliseks reaks*, tema osasummasid $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ $(n \in \mathbb{N})$ aga *trigonomeetrilisteks polünoomideks.*

Olgu f lõigus $[-\pi,\pi]$ määratud funktsioon. Seame endale eesmärgiks **leida tingimused, mil ta on esitatav summana**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx. \tag{14.2}$$

Eeldame, et f on lõigus $[-\pi,\pi]$ integreeruv funktsioon, ja korrutame võrduse (14.2) mõlemat poolt trigonomeetrilise süsteemi elementidega ning integreerime üle lõigu $[-\pi,\pi]$ (eeldame, et see on võimalik). Kasutades tuntud seoseid

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos kx\,\mathrm{d}x=0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,\mathrm{d}x=\pi,\quad\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,\mathrm{d}x=0\ \ (k\neq l)\,,$$

saame kordajate a_k ja b_k jaoks valemid

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\quad(k=0,1,2,\ldots)\,,$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\ldots)\,. \tag{14.3}$$

Need (puhtformaalselt saadud) seosed võtame aluseks funktsiooni Fourier' rea defineerimisel.

Definitsioon. Rida (14.1), kus kordajad a_0,a_k,b_k $(k\in\mathbb{N})$ on määratud seostega (14.3), nimetatakse funktsiooni f *(trigonomeetriliseks) Fourier reaks* lõigus $[-\pi,\pi]$. Sel juhul kirjutame

$$f(x)\backsim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx. \tag{14.4}$$

Fourier' ridade teoorias huvitab meid eeskätt küsimus, **milliste funktsioonide puhul tohime me seoses** (14.4) **kirjutada funktsiooni ja tema Fourier' rea summa vahele võrdusmärgi.** Kõigepealt aga **peame garanteerima, et selles seoses olev rida üldse eksisteerib,** s.t., et integraalid $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$ ja $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$ oleksid olemas (kas tavaliste Riemanni integraalidena või päratute integraalidena). Selleks on mitmeid piisavaid tingimusi, oma järgnevas arutluses lähtume me eeldusest, et f **on lõigus** $[-\pi,\pi]$ **tükiti pidev.** Meenutame, et funktsiooni ψ me nimetame *lõigus* $[a,b]$ *tükiti pidevaks*, kui 1) tal on lõigus $[a,b]$ ülimalt lõplik arv katkevuspunkte ning 2) neis katkevuspunktides on olemas lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Riemanni integraali teooriast teame, et sel juhul on funktsioon ψ lõigus $[a,b]$ Riemanni mõttes integreeruv.

Kuid ka tükiti pidevate funktsioonide puhul jääb lahtiseks küsimus, **kas rida seoses** (14.4) **koondub.** Kui vastus sellele küsimusele on positiivne, saame uurida probleemi, mille me püstitasime, nimelt, **kas rea summa on** $f(x)$.

Perioodilised funktsioonid. Kui funktsioon f on määratud kogu arvsirgel $(-\infty, \infty)$ ja leidub selline arv T, et

$$f(x+T) = f(x) \text{ iga } x \in (-\infty, \infty) \text{ korral,}$$

siis öeldakse, et f on *perioodiline funktsioon perioodiga* T ehk T*-perioodiline funktsioon.* Lihtne on näha, et kui f on T-perioodiline funktsioon ja funktsioon ψ on defineeritud seosega $\psi(x) := f(cx)$, kus c on mingi nullist erinev konstant, siis ψ on samuti perioodiline funktsioon, seejuures perioodiga $\frac{T}{c}$ (kontrollige!)✠. Teiseks, kui f ja g on T-perioodilised funktsioonid, siis on seda ka funktsioonid $f+g$ ning λf, kus λ on mingi arv (kontrollige!)✠. Ilmselt on trigonomeetrilise süsteemi kõik elemendid 2π-perioodilised funktsioonid (kontrollige!)✠. Sellest tulenevalt on ka kõik *trigonomeetrilised polünoomid*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

2π-perioodilised (põhjendage!)✠. Seetõttu kehtib järgmine väide.

Lause 14.1. *Kui trigonomeetriline rida* (14.1) *koondub lõigus* $[-\pi, \pi]$, *siis koondub ta igas punktis* $x \in (-\infty, \infty)$ *ning tema summa on* 2π*-perioodiline funktsioon.*

Tõestus. Tähistame

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kus $x \in (-\infty, \infty)$ ja kordajad $a_0, a_1, b_1, a_2, \ldots$ on antud trigonomeetrilise rea kordajad. Eelduse kohaselt

$$\lim_n s_n(x_0) =: s(x_0) \text{ eksisteerib iga } x_0 \in [-\pi, \pi] \text{ korral.}$$

Olgu $x \in (-\infty, \infty)$ suvaline, siis leiduvad $x_0 \in [-\pi, \pi]$ ja täisarv k, et $x = x_0 + 2k\pi$ (selgitage!)✠. Seejuures

$$s_n(x) = s_n(x_0 + 2k\pi) = s_n(x_0),$$

sest s_n on 2π-perioodiline funktsioon. Järelikult

$$s(x) = \lim_n s_n(x_0) = s(x_0).$$

Niisiis, rida (14.1) koondub hulgas $(-\infty, \infty)$ ja kuna

$$s(x+2\pi) = \lim_n s_n(x+2\pi) = \lim_n s_n(x) = s(x),$$

siis rea summa on 2π-perioodiline funktsioon. ∎

Märgime siinkohal perioodiliste funktsioonide ühte olulist omadust.

Lause 14.2. *Kui* ψ *on* 2π*-perioodiline lõigus* $[-\pi, \pi]$ *integreeruv funtsioon, siis suvalise arvu* a *korral kehtib võrdus*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{a}^{a+2\pi} \psi(x)\, \mathrm{d}x.$$

Tõestus. Kui c ja d on suvalised arvud, siis, tähistades $\xi := x + 2\pi$, võime tänu seosele $\psi(\xi - 2\pi) = \psi(\xi)$ kirjutada

$$\int_c^d \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi - 2\pi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(\xi)\,d\xi = \int_{c+2\pi}^{d+2\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x,$$

kust erijuhul $c := -\pi$ ja $d := a$ saame $\int_{-\pi}^{a} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{a+2\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x$. Seetõttu

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{-\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{a+2\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{-\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{a} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Lause on tõestatud. ∎

14.2 Riemanni lemma. Dirichlet' integraal

Enne kui asume otsima vastust eespool esitatud küsimustele, toome **kaks olulist fakti.** Kõigepealt tõestame lause, mis iseloomustab funktsiooni Fourier' kordajate a_0, a_k, b_k $(k \in \mathbb{N})$ käitumist.

Lause 14.3. *Kui funktsioon f on lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev, siis tema Fourier' kordajad, mis on määratud seostega* (14.3), *rahuldavad tingimusi*

$$\lim_k a_k = \lim b_k = 0.$$

Selle lause asemel tõestame järgmise pisut üldisema lemma.

Lemma 14.4. ***(Riemanni lemma).*** *Kui funktsioon f on lõigus $[a, b]$ tükiti pidev, siis kehtivad võrdused*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0. \tag{14.5}$$

Tõestus. Olgu $t_1, t_2, \ldots, t_m$ funktsiooni f katkevuspunktid, kusjuures $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$. Olgu $[\alpha, \beta]$ suvaline lõikudest $[a, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_m, b]$. Kuna integraali väärtus ei sõltu integreeritava funktsiooni väärtusest otspunktides α ja β, siis loeme funktsiooni f lõigus $[\alpha, \beta]$ pidevaks (selgitage!)✠. Seega eksisteerivad integraalid $\int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$ ja $\int_\alpha^\beta f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$, järelikult ka integraalid $\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$ ja $\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x$. Näitame, et

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0,$$

siis kehtivad võrdused (14.5) (põhjendage!)✠.

Piirdume siinkohal tingimuse $\lim_{\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = 0$ tõestusega, teine võrdus tõestatakse analoogiliselt. Olgu $\varepsilon > 0$, peame leidma sellise $N \in \mathbb{R}$, et $\left|\int_\alpha^\beta f(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$

iga $\lambda \geqslant N$ korral. Kuna funktsioon f on lõigus $[\alpha, \beta]$ pidev, siis on ta tõkestatud, s.t. leidub $M > 0$, et

$$|f(x)| \leqslant M \text{ iga } x \in [\alpha, \beta] \text{ korral.}$$

Cantori teoreemi kohaselt on f lõigus $[\alpha, \beta]$ ühtlaselt pidev, niisiis saab valida niisuguse $\delta > 0$, et kui $|x - x'| < \delta$ ja $x, x' \in [\alpha, \beta]$, siis

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}. \tag{14.6}$$

Olgu $T[x_0, \ldots, x_n]$ lõigu $[\alpha, \beta]$ niisugune alajaotus $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \beta$, et $x_i - x_{i-1} < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$. Siis

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^\beta f(x) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)| \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right|. \end{aligned}$$

Kasutame hinnangut

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right| = \frac{1}{\lambda} |\sin \lambda x_i - \sin \lambda x_{i-1}| \leqslant \frac{2}{\lambda},$$

selle ja seose (14.6) abil saame

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \frac{2M}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2nM}{\lambda}$$

(veenduge!)✠. Niisiis, kui $\lambda \geqslant \frac{4nM}{\varepsilon} =: N$, siis $\left| \int_\alpha^\beta f(x) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon$. Seega

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x) \cos \lambda x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Lemma (ja seega ka lause 14.3) on tõestatud. ■

Teine fakt, mida me vajame trigonomeetriliste ridade koonduvuse uurimisel, on seotud **Fourier' rea osasumma integraalkujuga.** Vaatleme lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pideva 2π-perioodilise funktsiooni f Fourier' rea (14.1) osasummat

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kus Fourier' rea definitsiooni kohaselt kordajad a_0, a_k, b_k $(k \in \mathbb{N})$ on määratud seostega (14.3). Asendame need avaldised osasumma valemisse:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx \, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx \, \mathrm{d}t \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right) \mathrm{d}t$$

(kontrollige!)✠. Tähistame $D_n(u) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku$ ja näitame, et

$$D_n(u) = \frac{\sin(2n+1)\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}. \tag{14.7}$$

Tõepoolest, kuna

$$\begin{aligned} 2D_n(u)\cos u &= \cos u + 2\cos u \cos u + 2\cos u \cos 2u + \ldots + 2\cos u \cos nu \\ &= \cos u + (1+\cos 2u) + (\cos u + \cos 3u) + (\cos 2u + \cos 4u) + \ldots \\ &+ (\cos(n-1)u + \cos(n+1)u) \\ &= 1 + 2\cos u + 2\cos 2u + \ldots + 2\cos(n-1)u + \cos nu + \cos(n+1)u \\ &= 2D_n(u) - \cos nu + \cos(n+1)u, \end{aligned}$$

siis

$$D_n(u) = \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{2(1-\cos u)},$$

millest tänu seostele $\cos nu - \cos(n+1)u = 2\sin(2n+1)\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2}$ ja $1-\cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$ saamegi võrduse (14.7).

Avaldist $D_n(u)$ nimetatakse *Dirichlet' tuumaks*. Ilmselt on D_n 2π-perioodiline funktsioon (veenduge!)✠, seetõttu saame lause 14.2 kohaselt muutuja vahetusega $u := x-t$ osasummale $s_n(x)$ kuju

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-u) D_n(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u) D_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u) D_n(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u) D_n(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Saime valemi, mida nimetatakse *Dirichlet' integraaliks*:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u) + f(x-u)) D_n(u)\,\mathrm{d}u. \tag{14.8}$$

Märgime, et kui võtta funktsiooniks f konstantne funktsioon $f(x) = 1$, siis tema Fourier' rida on

$$1 + 0 + 0 + \ldots$$

(põhjendage!)✠ ning $s_n(x) = 1$ iga n korral, mistõttu valemi (14.8) kohaselt

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)\,\mathrm{d}u = 1. \tag{14.9}$$

14.3 Trigonomeetrilise Fourier' rea koonduvus

Järgnevalt tõestame selle peatüki ühe põhitulemustest, mis on teoreetiliseks lähtepunktiks funktsioonide esitamisel Fourier' reana.

Teoreem 14.5. *Olgu f lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev 2π-perioodiline funktsioon. Kui punktis $x \in (-\infty, \infty)$ on olemas lõplikud ühepoolsed tuletised*

$$f'_{+}(x) := \lim_{u \to 0+} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \quad \textit{ja} \quad f'_{-}(x) := \lim_{u \to 0\check{}} \frac{f(x+u) - f(x-)}{u},$$

siis funktsiooni f Fourier' rida koondub punktis x summaks $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Tõestus. Eeldame, et fikseeritud punktis x rahuldab funktsioon f eelpool toodud tingimusi. Lähtume valemist (14.9), korrutame selle mõlemat poolt arvuga $s(x) := \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ ja lahutame tulemuse võrdusest (14.8), sel juhul saame

$$\begin{aligned} s_n(x) - s(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(x+u) + f(x-u) - 2s(x)\right) D_n(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\left(f(x+u) - f(x+)\right) + \left(f(x-u) - f(x-)\right)\right) D_n(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi_x(u) D_n(u)\, \mathrm{d}u, \end{aligned} \tag{14.10}$$

kus $\Phi_x(u) := (f(x+u) - f(x+)) + (f(x-u) - f(x-))$. Seosest

$$\sin(2n+1)\frac{u}{2} = \sin nu \cos\frac{u}{2} + \cos nu \sin\frac{u}{2}$$

(kontrollige selle kehtivust!)✠ tuleneb

$$\Phi_x(u) D_n(u) = \frac{\Phi_x(u)}{2} \cos nu + h(u) \sin nu,$$

seosega $h(u) := \frac{\Phi_x(u)}{2\tan\frac{u}{2}}$ määratud funktsioon h on poollõigus $(0, \pi]$ tükiti pidev (põhjendage!)✠. Peale selle eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0+} h(u) &= \lim_{u \to 0+} \left(\frac{f(x+u) - f(x+)}{u} - \frac{f(x-u) - f(x-)}{-u}\right) \lim_{u \to 0+} \frac{u}{2\tan\frac{u}{2}} \\ &= f'_{+}(x) - f'_{-}(x) \end{aligned}$$

(kontrollige!)✠. Niisiis on funktsioon h lõigus $[0, \pi]$ tükiti pidev. Seosest (14.10) saame lause 14.3 põhjal

$$\lim_n (s_n(x) - s(x)) = \frac{1}{2\pi} \lim_n \int_0^{\pi} \Phi_x(u) \cos nu\, \mathrm{d}u + \frac{1}{\pi} \lim_n \int_0^{\pi} h(u) \sin nu\, \mathrm{d}u = 0$$

ehk $\lim_n s_n(x) = s(x)$. Teoreem on tõestatud. ■

Järeldus 14.6. *Olgu 2π-perioodiline funktsioon f lõigus $[-\pi, \pi]$ tükiti pidev. Kui ta on punktis x pidev ja tal on selles punktis lõplikud ühepoolsed tuletised, siis tema Fourier' rida koondub selles punktis summaks $f(x)$.*

Tõestus. Iseseisvalt!✠ ■

14.4 Funktsioonide arendamine Fourier' reaks

Kui f on selline 2π-perioodiline funktsioon, mis lõigus $[-\pi,\pi]$ on tükiti pidev, siis teoreemi 14.5 kohaselt koondub tema Fourier' rida igas punktis x, kus eksisteerivad $f'(x+)$ ja $f'(x-)$. Fourier' kordajad arvutatakse valemite (14.3) järgi, s.t.

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k=0,1,2,\dots) \quad \text{ja} \quad b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\dots).$$

1^0. Kui f on 2π-perioodiline paarisfunktsioon, s.t. $f(-x)=f(x)$, siis $b_k=0$ iga $k=1,2,\dots$ korral (kontrollige!)✠ ning Fourier' rida koosneb ainult koosinusliikmetest:

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx.$$

Seevastu **paaritu funktsiooni** f puhul $a_n=0$ $(k=0,1,\dots)$ ja

$$f(x) \backsim \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx.$$

2^0. Vaatleme nüüd funktsiooni f, mis on küll lõigus $[-\pi,\pi]$ tükiti pidev, **kuid ei ole perioodiline.** Et uurida tema Fourier' rea koonduvust, moodustame uue funktsiooni g, mis langeb poollõigus $(-\pi,\pi]$ kokku funktsiooniga f, s.t. $g(x):=f(x)$ iga $x\in(-\pi,\pi]$ korral, ning on 2π-perioodiline, s.t. $g(x+2\pi)=g(x)$ iga $x\in(-\infty,\infty)$ korral. Lõigus $[-\pi,\pi]$ erinevad funktsioonid g ja f maksimaalselt ühes punktis, seega on neil ühed ja samad Fourier' kordajad (selgitage!)✠, järelikult *on funktsioonidel f ja g sama Fourier' rida.* Rakendame teoreemi 14.5, selle kohaselt on funktsiooni g Fourier' rea summa võrdne arvuga $s(x)=\frac{g(x+)+g(x-)}{2}$ iga punkti x korral, kus leiduvad lõplikud ühepoolsed tuletised $g'_+(x)$ ja $g'_-(x)$. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus x on lõigu $[-\pi,\pi]$ sisepunkt. Sel juhul $g(x+)=f(x+)$, $g(x-)=f(x-)$, $g'_+(x)=f'_+(x)$ ning $g'_-(x)=f'_-(x)$, mistõttu $s(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Kui $x=\pi$, siis $g(\pi+)=g(-\pi+)=f(-\pi+)$, $g(\pi-)=f(\pi-)$, $g'_+(\pi)=f'_+(-\pi)$, $g'_-(\pi)=f'_-(\pi)$ (kontrollige!)✠, seega $s(\pi)=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$. Juhul $x=-\pi$ on $g(-\pi+)=f(-\pi+)$, $g(-\pi-)=g(\pi-)=f(\pi-)$, $g'_+(-\pi+)=f'_+(-\pi)$, $g'_-(-\pi-)=f'_-(\pi)$ (kontrollige!)✠, tähendab $s(-\pi)=\frac{f(-\pi+)+f(\pi-)}{2}$.

Erijuhul saame järgmised väited (kontrollige!)✠.

(*a*) *Kui f on pidev punktis $x\in(-\pi,\pi)$ ja tal on selles punktis lõplikud ühepoolsed tuletised $f'_+(x)$ ja $f'_-(x)$, siis tema Fourier' rea summa on $f(x)$.*

(*b*) *Kui x on lõigu $[-\pi,\pi]$ otspunkt ja funktsioon f on selles punktis (ühepoolselt) pidev ning tal on mõlemas otspunktis vastav ühepoolne tuletis, siis Fourier rida koondub väärtuseks $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$.*

3^0. Olgu funktsioon f määratud lõigus $[0,\pi]$. Sel juhul saab teda arendada Fourier' ritta selles lõigus lõpmata mitmel viisil vastavalt sellele, kuidas me jätkame ta lõigule $[-\pi,\pi]$. Defineerime kõigepealt $f(x):=f(-x)$, kui $x\in[-\pi,0)$, siis saame lõigus $[-\pi,\pi]$ paarisfunktsiooni. Seega koosneb tema Fourier' rida vaid koosinusliikmetest, kusjuures kordajad $a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$ $(k=0,1,\dots)$ sõltuvad vaid funktsiooni väärtustest lõigus $[0,\pi]$.

Kui defineerime $f(x) := -f(-x)$ $(x \in [-\pi, 0))$ ning "parandame" funktsiooni punktis $x = 0$, võttes $f(0) := 0$ (rõhutame, et funktsiooni väärtuse muutmine ühes punktis ei muuda selle funktsiooni Fourier' kordajaid), siis saame lõigus $[-\pi, \pi]$ paaritu funktsiooni. Tema Fourier' rida sisaldab vaid siinusliikmeid. Nende kordajad $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ on määratud funktsiooni väärtustega lõigus $[0, \pi]$.

4^0. Olgu funktsioon f määratud mingis lõigus $[-l, l]$, kus $l > 0$. Tähistame $t := \frac{\pi x}{l}$ ja $F(t) := f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, siis funktsioon F on määratud lõigus $[-\pi, \pi]$. Seejuures, kui f on $2l$-perioodiline, siis F on 2π-perioodiline funktsioon (kontrollige!)✠. Saame seose

$$F(t) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt,$$

kus $a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos kt\,\mathrm{d}t$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ja $b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin kt\,\mathrm{d}t$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Kui läheme tagasi esialgsele muutujale x, saame

$$f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x,$$

kus $a_k := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ ja $b_k := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (kontrollige!)✠. Kui funktsioon f on $2l$-perioodiline ja lõigus $[-l, l]$ tükiti pidev, siis teoreemi 14.5 põhjal koondub tema Fourier' rida summaks $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ igas punktis x, kus eksisteerivad lõplikud ühepoolsed tuletised $f'(x+)$ ja $f'(x-)$.

Näide. Leiame funktsiooni $f(x) = x$ Fourier' rea lõigus $[-\pi, \pi]$. Kõigepealt jätkame selle funktsiooni kogu arvteljele nii, et saaksime 2π-perioodilise funktsiooni, tähistame selle tähega g. Kuivõrd tegemist on paaritu funktsiooniga, siis $a_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$ ja

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi x d\cos kx \\ &= -\frac{2x}{\pi k}\cos kx\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{k}\cos k\pi + \frac{2}{\pi k^2}\sin kx\Big|_0^\pi \\ &= (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Niisiis, funktsiooni f Fourier' rida on $2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin kx$. Teoreemi 14.5 põhjal kehtib võrdus

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\sin kx \text{ iga } x \in (-\pi, \pi) \text{ korral.}$$

Punktis $x = \pi$ on rea summa $s(\pi) = \frac{g(\pi+)+g(\pi-)}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{u\to\pi-} g(u) + \lim_{u\to\pi+} g(u)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{u\to\pi-} u + \lim_{u\to\pi+}(-u)\right) = 0$, samuti veendutakse, et $s(-\pi) = 0$.

14.5 Fejéri teoreem

Osutub, et 2π-perioodilise funktsiooni f pidevus ei ole piisav tingimus selleks, et ta oleks esitatav oma Fourier' rea summana. Veelgi enam, saab näidata, et iga punkti $t \in [-\pi, \pi]$

puhul saab leida sellise pideva 2π-perioodilise funktsiooni f, mille Fourier' rida selles punktis hajub (vt. näiteks G. Kangro, Matemaatiline analüüs. II, "Valgus", Tallinn, 1968, lk. 464 - 468). Seda üllatavam on järgmine Fejeri teoreem.

Teoreem 14.7. ***(Fejéri teoreem).*** *Iga pideva 2π-perioodilise funktsiooni f Fourier' rea osasummade*

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

aritmeetiliste keskmiste

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n}\left(s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)\right) \quad (x \in (-\infty, \infty),\ n \in \mathbb{N}) \tag{14.11}$$

jada (σ_n) koondub piirväärtuseks f ühtlaselt kogu arvteljel $(-\infty, \infty)$.

Enne, kui asume seda teoreemi tõestama, leiame Dirichlet' tuuma (14.7) ja integraali (14.8) eeskujul (ja abil) vastavad avaldised aritmeetiliste keskmiste (14.11) jaoks. Seosest (14.8) saame

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+u) + f(x-u)\right)\sum_{k=0}^{n-1} D_k(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(2k+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2}\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{14.12}$$

Viimase võrduse põhjenduseks summeerime k järgi võrdust $2\sin(2k+1)\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2} = \cos ku - \cos(k+1)u$, saame

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\frac{u}{2} = \frac{\sin^2 n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

(kontrollige!)✠. Seejuures saame seosest (14.12) juhul $f(x) = 1$ $(x \in [0, \pi])$ valemi

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u = 1 \tag{14.13}$$

(kontrollige!)✠.

Funktsioonide jada liikmetega $F_n(u) = \frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2$ nimetatakse *Fejéri tuumaks.* Kui Dirichlet' tuum D_n taastab Fourier' rea osasummad, siis Fejéri tuum F_n taastab osasummade aritmeetilised keskmised. Tuntakse ka muid summeeruvustuumi, mida kasutatakse Fourier' rea summa mitmesuguste lÃďhendite saamisel.

Tõestus. Lähtume valemist (14.13), korrutame selle mõlemat poolt arvuga $f(x)$ ja lahutame tulemuse võrdusest (14.12):

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - f(x)\right)\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du$$
$$+\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du \qquad (14.14)$$

(sobiva arvu $\delta\in(0,\pi)$ fikseerime hiljem!).

Olgu $\varepsilon>0$ suvaline. Meie eesmärk on leida niisugune $N\in\mathbb{N}$, et

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ iga } n\geqslant N \text{ ja } x\in(-\infty,\infty) \text{ korral.}$$

Kuna $f\colon(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ on pidev ja perioodiline, siis on ta tõkestatud, s.t. leidub $M>0$ omadusega

$$|f(x)|\leqslant M \text{ iga } x\in(-\infty,\infty) \text{ korral}$$

(selgitage!)✠. Teiseks on ta ühtlaselt pidev kogu arvteljel (põhjendage!)✠, mistõttu leidub niisugune $\delta>0$, et $\delta\leqslant\pi$ ja

$$|x-x'|\leqslant\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega, kui $0\leqslant u\leqslant\delta$, siis

$$\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\leqslant\frac{|f(x+u)-f(x)|}{2}+\frac{|f(x)-f(x-u)|}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Arvestades seost (14.13), saame avaldise (14.14) esimese integraali jaoks hinnangu

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du\leqslant\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Teise integraali hindamiseks kasutame võrratust $\sin\frac{u}{2}\geqslant\frac{u}{\pi}$ $(0\leqslant u\leqslant\pi)$ (kontrollige!)✠, mille abil saame hinnangu

$$\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)\right|\left(\frac{\sin n\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du$$
$$\leqslant\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{2M}{\frac{\delta^2}{\pi^2}}du\leqslant\frac{2M\pi}{n\delta^2}(\pi-\delta)\leqslant\frac{2M\pi^2}{n\delta^2}.$$

Kui võtame $N:=\left\lfloor\frac{4M\pi^2}{\varepsilon\delta^2}\right\rfloor+1$, siis iga $n\geqslant N$ puhul

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M\pi^2}{n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ suvalise } x\in(-\infty,\infty) \text{ korral.}$$

Teoreem on tõestatud. ∎

Teoreemist 14.7 järeldub vahetult klassikaline Weierstrassi teine lähendusteoreem.

Teoreem 14.8. ***(Weierstrassi teine lähendusteoreem).*** *Kui lõigus $[-\pi,\pi]$ pidev funktsioon f on omadusega $f(-\pi)=f(\pi)$, siis iga positiivse arvu ε korral saab leida niisuguse trigonomeetrilise polünoomi T, et*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon \quad \textit{iga } x\in[-\pi,\pi] \quad \textit{puhul.}$$

Tõestus. Isesisvalt!✠ ∎

15 Fourier' teisendus

15.1 Konvolutsioon

Tähistame

$$L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ on pidev, tõkestatud ja } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Lihtne kontroll näitab, et $L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ on vektorruum ning kujutus $f \mapsto \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ rahuldab normi aksioome, see tähendab,
1) $\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
2) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral,
3) $\|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$
(veenduda!)✠.

Märkus. Praktikas kasutatakse ka funktsioone, millel pidevuse tingimus on asendatud lõpliku arvu või koguni nullmõõduga hulga katkevuspunktide olemasoluga. Sel juhul tuleb funktsioonid asendada klassidega, lugedes samasse klassi kuuluvaks funktsioonid, mille integraalid on võrdsed.

Definitsioon. Olgu $f, g \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$. Kujutust $f * g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mis on defineeritud seosega

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y \tag{15.1}$$

nimetatakse funktsioonide f ja g **konvolutsiooniks** (*convolution*).

Lause 15.1. *Funktsioonide $f, g \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ puhul integraal (15.1) eksisteerib iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks, kusjuures $f * g \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$. Mistahes $f, g, h \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ korral kehtivad seosed*

$$f * g = g * f, \qquad f * (g * h) = (f * g) * h, \qquad f * (g + h) = f * g + f * g.$$

Tõestus. Kujutuse $f * g$ olemasolu ja tõkestatuse kontroll on vahetu (kontrollida!)✠.

Näitame, et $f * g$ on pidev. Fikseerime $x_0 \in \mathbb{R}$. Kuna f ja g on tõkestatud, siis leidub $C > 0$ selline arv, et $|f(x)|, |g(x)| \leqslant C$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Lisaks eeldame, et $f \neq 0$ (vastasel korral on $f * g$ pidevus ilmne). Fikseerime $\varepsilon > 0$. Siis leidub arv $T > |x_0|$ selliselt, et

$$\left(\int_{-\infty}^{-T} + \int_{T}^{\infty} \right) |f(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{4C}$$

(põhjendada!)✠. Funktsioon g on lõigus $[-2T, 2T]$ ühtlaselt pidev (miks?)✠, seega leidub arv $\delta > 0$ selliselt, et

$$x, x' \in [-2T, 2T], \quad |x - x'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}.$$

Kehtigu nüüd $|x - x_0| < \delta$. Siis

$$\left| \int_{-T}^{T} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y - \int_{-T}^{T} f(y)g(x_0-y)\,\mathrm{d}y \right| \leqslant \int_{-T}^{T} |f(y)||g(x-y) - g(x_0-y)|\,\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}\int_{-T}^{T}|f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ning

$$\left(\int_{-\infty}^{-T}+\int_{T}^{\infty}\right)|f(y)||g(x-y)-g(x_0-y)|\,\mathrm{d}y \leqslant 2C\left(\int_{-\infty}^{-T}+\int_{T}^{\infty}\right)|f(y)|\,\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kokkuvõttes

$$|f*g(x)-f*g(x_0)|<\varepsilon.$$

Näitame nüüd, et $\|f*g\|_1<\infty$. Integreerimisjärjekorra vahetamine toimub absoluutse koonduvuse tõttu:

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

Seega $f*g\in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$.

Konvolutsiooni kommutatiivsust saab näidata, tehes asenduse $y\mapsto x-y$ (iseseisvalt!)✠. Assotsiatiivsuse näitamisel integreerimisjärjekorra vahetamine toimub absoluutse koonduvuse tõttu (iseseisvalt!)✠. Distributiivsuse kontroll on vahetu✠. ■

15.2 Fourier' teisendus

Definitsioon. Funktsiooni $f\in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ *Fourier' teisendiks* (*Fourier transform, frequency spectrum*) nimetatakse funktsiooni $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, kus

$$\widehat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x.$$

Fourier' teisendi definitsioon on korrektne, sest iga y korral $\widehat{f}(y)$ eksisteerib, kuna $f\in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ (selgitada!)✠. Lisaks sellele

$$\left|\widehat{f}(y)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\right|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x =: \|f\|_1<\infty, \tag{15.2}$$

mis näitab, et $\widehat{f}$ on tõkestatud funktsioon.

Kujutust $\mathcal{F}:L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, mille korral $\mathcal{F}(f)=\widehat{f}$, nimetatakse *Fourier' teisenduseks* (*Fourier transform*).

Järgnevas uurime Fourier' teisenduse omadusi.

Lause 15.2. *Olgu $f,g\in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$.*
a) Iga $\lambda\in\mathbb{R}$ korral $\widehat{f+\lambda g}=\widehat{f}+\lambda\widehat{g}$.
b) Olgu $a\in\mathbb{R}$, defineerime $g(x)=f(x)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}ax}$, $x\in\mathbb{R}$, siis $\widehat{g}(y)=\widehat{f}(y-a)$.
c) Defineerime $g(x)=f(x-a)$, siis $\widehat{g}(y)=\widehat{f}(y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}ay}$.
d) Kui $g\in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ ja $h=f*g$, siis $\widehat{h}(y)=\widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$.
e) Olgu $\lambda>0$, defineerime $g(x)=f(\frac{x}{\lambda})$, siis $\widehat{g}(y)=\lambda\widehat{f}(\lambda y)$.

Tõestus. Iseseisvalt✠! ■

Lause 15.2 annab reeglid, kuidas käitub Fourier' teisendus argumentfunktsiooni lineaarse nihke korral. Muuhulgas selgub, et korraga funktsiooni f ja teisendit $\widehat{f}$ kuitahes hästi „kokku suruda" ei saa: nimelt ütleb punkt e), et kui f „suruda kokku" ($\lambda < 1$), siis tulemusena saadav $\widehat{g}$ on võrreldes $\widehat{f}$-ga „laiali määritud".

Lause 15.3. *Kui $f, f_n \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$, kusjuures*

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0, \tag{15.3}$$

siis $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ ühtlaselt kogu arvsirgel $\mathbb{R}$.

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, peame näitama, et leidub niisugune $N \in \mathbb{N}$, et

$$n \geqslant N \Rightarrow \left|\widehat{f_n}(y) - \widehat{f}(y)\right| < \varepsilon \text{ iga } y \in \mathbb{R} \text{ korral.}$$

Eelduse (15.3) põhjal saab fikseerida $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n \geqslant N \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Seosest (15.2) tuleneb kõigi $n \geqslant N$ puhul

$$\left|\widehat{f_n}(y) - \widehat{f}(y)\right| = \left|\left(\widehat{f_n} - \widehat{f}\right)(y)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|\ \mathrm{d}t < \varepsilon \ \ (y \in \mathbb{R}).$$

■

Teoreem 15.4. *Kui $f \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$, siis $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on pidev.*

Tõestus. Tõestuseks kasutame (ilma seda tõestamata) järgmist väidet: *iga absoluutselt integreeruva funktsiooni f puhul saab leida lihtsate treppfunktsioonide jada (φ_n) omadusega*

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t) - f(t)|\, dt = 0. \tag{15.4}$$

Lihtsaks treppfunktsiooniks nimetame funktsiooni $\varphi\colon\ (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, mille puhul
1) leiduvad intervallid $I_1, \ldots, I_n$ nii, et $I_1 \cup \ldots \cup I_n = \mathbb{R}$,
2) kui $i \neq j$, siis $I_j \cap I_k = \emptyset$,
3) $\varphi(x) = y_k$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral. 4) kandja *supp* $\varphi := \{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$ on tõkestatud. (Seega kõige vasak- ja parempoolsem y_k peavad olema nullid.)

Ilmselt on lihtsad treppfunktsioonid absoluutselt integreeruvad (selgitada!)✠.

Olgu $f \in L^1$ ja olgu (φ_n) selline lihtsate treppfunktsioonide jada, mis rahuldab tingimust (15.4). Lause 15.3 kohaselt $\widehat{\varphi_n} \to \widehat{f}$ ühtlaselt hulgas $\mathbb{R}$. Näitame järgnevalt, et funktsioonid $\widehat{\varphi_n}$ on pidevad, sellest järeldub siis ka funktsiooni $\widehat{f}$ pidevus (selgitada!)✠. Teisi sõnu, me taandame funktsiooni $\widehat{f}$ pidevuse probleemi suvalise $f \in L^1$ korral funktsioonide $\widehat{\varphi}$ pidevusele, kus φ on suvaline lihtne treppfunktsioon.

Niisiis, meie väite tõestamiseks piisab näidata, et $\widehat{\chi}$ on pidev, kui χ on mingi poollõigu $[a, b)$ karakteristlik funktsioon.

Olgu $y \neq 0$, siis

$$\widehat{\chi}(y) = \int_a^b \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} yt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i} y}\int_a^b \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} yt}\,\mathrm{d}\left(-2\pi \mathrm{i} yt\right) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi y}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} yt}\Big|_a^b = \frac{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} by} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ay}\right)}{2\pi y},$$

juhul $y = 0$ kehtib

$$\widehat{\chi}(0) = \int_a^b \mathrm{d}t = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}.$$

Kokkuvõttes,

$$\widehat{\chi}(y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} by} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ay}\right)}{2\pi y}, & \text{kui } y \neq 0, \\ b-a, & \text{kui } y = 0. \end{cases}$$

Ilmselt on funktsioon $\widehat{\chi}$ igas punktis $y \neq 0$ pidev, jääb kontrollida pidevust punktis $y = 0$. Kasutades eksponentfunktsiooni e^z puhul Taylori valemit (juhul $n = 1$), saame valemist $\mathrm{e}^z = 1 + z + o(z)$ arvutada

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} by} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ay}\right)}{2\pi y} &= \frac{i}{2\pi}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left[\left(1 - 2\pi i by + o(y)\right) - \left(1 - 2\pi \mathrm{i} ay + o(y)\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{y\to 0}\left[\left(2\pi b - 2\pi a\right) + \frac{o(y)}{y}\right] = b - a. \end{aligned}$$

Niisiis on $\widehat{\chi}$ ka punktis $y = 0$ pidev. ■

Järgmises lauses tõestame mõned omadused, mis näitavad, milline on Fourier' teisendi omaduste ja funktsiooni diferentseeruvuse vahekord. Muuhulgas selgub selles lauses, et kui f, f' ja f'' on kõik tõkestatud pidevad absoluutselt integreeruvad funktsioonid, siis on seda ka $\widehat{f}$. Üldiselt ei tarvitse $\widehat{f}$ olla integreeruv (küll aga on ta tõkestatud ja vastavalt teoreemile 15.4 pidev).

Lause 15.5. *Olgu $f \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$.*
a) Kui $g(x) = -2\pi \mathrm{i} x f(x)$, kusjuures $g \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$, siis $\widehat{f}$ on pidevalt diferentseeruv ning $\widehat{f}'(y) = \widehat{g}(y)$.
b) Olgu f pidevalt diferentseeruv ning kehtigu $f, f' \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$. Siis $\widehat{f'}(y) = 2\pi \mathrm{i} y \widehat{f}(y)$. Muuseas on funktsioon $\mathbb{R} \ni y \mapsto y\widehat{f}(y) \in \mathbb{C}$ tõkestatud.
c) Olgu f kaks korda pidevalt diferentseeruv ning kehtigu $f, f', f'' \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$. Siis $\widehat{f} \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$.

Tõestus. a) Avaldis $\widehat{f}(y)$ on parameetrist sõltuv integraal. Kuna

$$\left|xf(x)\,e^{-2\pi \mathrm{i} yx}\right| = \left|xf(x)\right| \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ ja } \int_{-\infty}^{\infty} \left|xf(x)\right|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

siis Weierstrassi koonduvustunnuse (vt. lause 13.2) põhjal integraal $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,e^{-2\pi \mathrm{i} yx}\,\mathrm{d}x$ koondub ühtlaselt $y \in \mathbb{R}$ suhtes. Kasutame teoreemi 13.10, see lubab meil kirjutada

$$\widehat{f}'(y) = -2\pi \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,e^{-2\pi \mathrm{i} yx}\,\mathrm{d}x = \widehat{-2\pi \mathrm{i} x f}(y) \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Funktsiooni $\widehat{f}'$ pidevus järeldub teoreemist 15.4(selgitada!)✠.

b) Lähtume tuntud seosest

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{15.5}$$

(selgitada!)✠. Kuna integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt$ koondub, siis koondub ka $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, dt$, järelikult eksisteerivad piirväärtused $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \int_0^x f'(t)\, dt$ ning seose (15.5) tõttu ka piirväärtused $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, kusjuures integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ koonduvusest saame $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (selgitada!)✠. Ositi integreerides saamegi

$$
\begin{aligned}
\widehat{f'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} yt}\, \mathrm{d}t = f(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} yt}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 2\pi \mathrm{i} y \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} yt}\, \mathrm{d}t = \\
&= 2\pi \mathrm{i} y \widehat{f}(y) \quad (y \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

c) Rakendame osa b) kaks korda, millest saame, et $y \mapsto y^2 \widehat{f}(y)$ on tõkestatud funktsioon (veenduda!)✠. Kuna $\widehat{f}$ on ka pidev, siis päratute integraalide I võrdluslause kohaselt integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(y)\right|\, \mathrm{d}y$ koondub (selgitada!)✠. ■

Lause 15.6 (Riemann-Lebesgue'i lemma). *Olgu* $f \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$. *Siis* $\lim\limits_{y\to\pm\infty} \widehat{f}(y) = 0$.

Tõestus. Arvutame järgmisel viisil (põhjendada!)✠:

$$
\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}\, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y \left(x + \frac{1}{2y}\right)}\, \mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{2y}\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}\, \mathrm{d}x,
$$

millest saame, et (selgitada!)✠

$$
\widehat{f}(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2y}\right)\right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} xy}\, \mathrm{d}x.
$$

Saadud võrduses on tegemist päratu parameetrist sõltuva integraaliga. Kuna Weierstrassi tunnuse põhjal koondub see integraal $\frac{1}{y}$ suhtes ühtlaselt (näiteks lõigus $\frac{1}{y} \in [-1, 1]$ selgitada!✠), siis piirilemineku $\frac{1}{y} \to 0$ saame läbi viia integraali märgi all. Siit järeldub nõutav koondumine (selgitada!)✠. ■

Peatüki lõpetame Fourier' teisenduse ühe kõige olulisema omadusega (selle tulemuse võtame tõestuseta), mis võimaldab teisendi järgi (mõnedel juhtudel) taastada funktsiooni enda.

Teoreem 15.7. *Olgu* $f \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ *ning eeldame ka, et* $\widehat{f} \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$. *Siis kehtib valem*

$$
\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \qquad (x \in \mathbb{R})
$$

ehk

$$
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xy}\, \mathrm{d}y \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{15.6}
$$

Märkused. 1. Signaalitöötluses vaadeldakse muutujat x ajana ning muutujat y (võnke)sagedusena. Sellise interpretatsiooni korral lahutab Fourier' teisendus funktsiooni (signaali) f tema sagedusteks $\widehat{f}(y)$, $y \in \mathbb{R}$. Kui aega mõõta sekundites, siis võnkesagedus saadakse hertsides (võnget/sekundis), näiteks arv $\widehat{f}(y)$ kirjeldab, kui suure võimsusega esineb sagedus 1 hertsi antud funktsioonis f.

2. Mõnikord töötatakse võnkesageduse asemel nurk- ehk ringsagedusega, kus ühikuks on radiaani/sekundis. Et 2π radiaani vastab ühele täispöördele (täisvõnkele), tuleb nurksagedusele ω üle minnes teha muutuja vahetus $\omega = 2\pi y$. Nii siis

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}x,$$

mistõttu kirjanduses kohtab Fourier' teisendi valemit ka kujul $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}\omega$.

Teoreem 15.7 väidab, et kui $f \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$ ja $\widehat{f} \in L^1_{\mathsf{bc}}(\mathbb{R})$, siis saab Fourier' teisendist taastada funktsiooni enda vastavalt *inversioonvalemile* (15.6). Kui nüüd kasutada Fourier' teisendit nurksageduse kaudu kujul $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}\omega$, omandab inversioonvalem kuju

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}\omega \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Ühtlustamaks Fourier' teisendi avaldise ja inversioonvalemi väliskujusid, jaotatakse kordaja $\frac{1}{2\pi}$ mõnikord „võrdselt“ nii $\widehat{f}$ kui f avaldisse, defineerides teisendi ja tuletades sellest inversioonvalemi järgmiselt:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}\omega, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Põhimõttelisi erinevusi neil kolmel kujul ei ole – kõik tulemused saab kordaja täpsuseni tõestada millisel tahes neist kujudest. Näiteks, et saada valemit $\widehat{f * g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$, on nurksagedusega või $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$-kordajaga töötades otstarbekas defineerida ka konvolutsioon vastavalt valemiga $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$ või $(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$.

4. Eelmises peatükis tutvusime 2π-perioodilise tükiti pideva funktsiooni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier' reaga

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{15.7}$$

kus $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$ $(k \in \mathbb{N}\cup\{0\})$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$ $(k \in \mathbb{N})$.

Tähistades $c_k = \frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_{-k}+\mathrm{i}b_{-k}}{2}$, kus $k \in \mathbb{N}$, saame rea (15.7) üles kirjutada kujul

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

kus $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ (kontrollida!)✠.

Funktsiooni f Fourier' teisend $\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}xy}\,\mathrm{d}x$ kujutab endast (konstandi täpsuseni) Fourier' kordaja $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x$ pidevat analoogi. Tihti märgitaksegi funktsiooni f Fourier' kordajat c_k sümboliga $\widehat{f}(k)$.

Teame näiteks, et kui f on punktis $a \in (-\pi,\pi)$ diferentseeruv, siis (kasutades tähist $\widehat{f}(k) = c_k$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}. \tag{15.8}$$

Nagu näeme, on inversioonvalem (15.6) valemi (15.8) pidev analoog. (Käesoleval juhul on kordaja $\frac{1}{2\pi}$ „peidetud“ Fourier' kordajate c_k avaldistesse.)